Eine einfach unendliche Flächenschar ist bestimmt durch eine Gleichung zwischen den Koordinaten x, y, z und einem variablen Parameter τ. Wir betrachten zwei zu beliebigen Werten τ und $\tau + \triangle\tau$ gehörende benachbarte Flächen der Schar und ziehen in den Punkten der ersteren die Flächennormalen. Werden die Schnittpunkte und Schnittkurven der Flächen von der Betrachtung ausgeschlossen, so wird auf jeder Normale von den beiden Flächen eine Strecke $P P^1$ ausgeschnitten, und diese Strecken können Maximal- und Minimalwerte annehmen.

Sind nun bei verschwindendem $\triangle\tau$ die Flächen $\tau = \text{const.}$ und $\tau + \triangle\tau = \text{const.}$ unendlich nahe benachbart, so nähern sich auch die Punkte der Fläche $\tau = \text{const.}$, für welche $P P^1$ ein Maximum oder Minimum ist, einer bestimmten Grenzlage. Die Gesamtheit dieser Grenzlagen auf allen Einzelflächen der Schar wollen wir das Striktionssystem der Flächenschar nennen.

Das Striktionssystem kann Striktionsflächen oder Striktionskurven oder beide zugleich enthalten.

Der Ort der Punkte, für welche die Strecke $P P^1$ ein Maximum wird, heißt Stauungslinie bezw. Stauungsfläche der Schar, während der Ort der Punkte, für welche die Strecke $P P^1$ zu einem Minimum wird, Einschnürungslinie bezw. Einschnürungsfläche genannt wird. [1])

Die Bedingungen für das Auftreten solcher Striktionslinien und -flächen sollen untersucht werden. Es ergeben sich verschiedene Methoden, je nachdem die Flächenschar durch eine endliche Gleichung von der Form

$$F(x, y, z, \tau) = 0$$

oder durch drei endliche Parametergleichungen

$$x = f_1(u, v, \tau);\ y = f_2(u, v, \tau);\ z = f_3(u, v, \tau)$$

oder durch eine Differentialgleichung gegeben ist.

I. Kapitel.

Bestimmung des Striktionssystems einer durch eine Gleichung von der Form $F(x, y, z, \tau) = 0$ gegebenen Flächenschar.

Betrachten wir eine beliebige Fläche der Schar

$$F(x, y, z, \tau) = 0 \tag{1}$$

indem wir τ einen bestimmten Wert beilegen, und errichten wir alsdann in einem Punkte P (x, y, z) der Fläche die Normale, welche mit den Koor-

[1]) Vergl. auch v. Lilienthal, Differentialgeometrie § 18, S. 96.

dinatenachsen die Winkel α, β, γ bildet, so schneidet dieselbe die benachbarte Fläche

(2) $$F\,(x, y, z, \tau + \triangle\tau) = 0$$

der Schar in einem Punkte, dessen Koordinaten, wenn wir den Abstand des Schnittpunktes vom Fußpunkt der Normale mit h bezeichnen, die Werte haben:

$$\xi = x + h \cdot \cos\alpha;$$
$$\eta = y + h \cdot \cos\beta;$$
$$\zeta = z + h \cdot \cos\gamma.$$

Setzen wir $\left(\frac{\partial F}{\partial x}\right)^2 + \left(\frac{\partial F}{\partial y}\right)^2 + \left(\frac{\partial F}{\partial z}\right)^2 = w^2$,
so erhalten wir

(3) $$\xi = x + \frac{h}{w} \cdot \frac{\partial F}{\partial x};$$
$$\eta = y + \frac{h}{w} \cdot \frac{\partial F}{\partial y};$$
$$\zeta = z + \frac{h}{w} \cdot \frac{\partial F}{\partial z}.$$

Die aus den Gleichungen (3) sich für ξ, η, ζ ergebenden Werte müssen der Gleichung (2) genügen. Es ergibt sich

(4) $$F\left(x + \frac{h}{w} \cdot \frac{\partial F}{\partial x},\ y + \frac{h}{w} \cdot \frac{\partial F}{\partial y},\ z + \frac{h}{w} \cdot \frac{\partial F}{\partial z},\ \tau + \triangle\tau\right) = 0$$

oder, wenn wir nach der Taylor'schen Reihe entwickeln:

(5) $$F\,(x, y, z, \tau) + \left(\frac{\partial F}{\partial x}\right)^2 \cdot \frac{h}{w} + \left(\frac{\partial F}{\partial y}\right)^2 \cdot \frac{h}{w} + \left(\frac{\partial F}{\partial z}\right)^2 \cdot \frac{h}{w} + \cdots + \frac{\partial F}{\partial \tau} \cdot \triangle\tau + \cdots = 0$$

oder

(6) $$+ h \cdot w + \frac{\partial F}{\partial \tau} \cdot \triangle\tau + \cdots = 0.$$

Für eine unendlich kleine Änderung des Parameters τ erhalten wir

(7) $$h = -\frac{\frac{\partial F}{\partial \tau} \cdot d\tau}{w} = t \cdot d\tau,$$

wobei wir unbeschadet der Allgemeinheit $d\tau$ als positiv voraussetzen können. Um Striktionslinien oder -flächen zu erhalten, haben wir etwaige Maxima oder Minima von t zu untersuchen.

t ist eine Funktion der Variablen x, y, z, von denen aber infolge der Gl. (1) nur zwei unabhängig sind, während die dritte Variable mit Hilfe der Gl. (1) eliminiert werden kann.

Betrachten wir etwa x und y als unabhängige Variablen, so sind die Bedindungen für das Eintreten eines Maximums oder Minimums:

(8) $$\frac{\partial t}{\partial x} = \frac{\partial t}{\partial x} + \frac{\partial t}{\partial z} \cdot \frac{\partial z}{\partial x} = \frac{\partial t}{\partial x} - \frac{\partial t}{\partial z} \cdot \frac{F_x}{F_z} = 0$$
$$\frac{\partial t}{\partial y} = \frac{\partial t}{\partial y} + \frac{\partial t}{\partial z} \cdot \frac{\partial z}{\partial y} = \frac{\partial t}{\partial y} - \frac{\partial t}{\partial z} \cdot \frac{F_y}{F_z} = 0$$

wobei F_x, F_y, F_z die partiellen Ableitungen von $F\,(x, y, z, \tau)$ nach x, y, z bedeuten.

Wir erhalten die Gleichungen

$$(9)\qquad \begin{aligned} F_z \cdot \frac{\partial t}{\partial x} - F_x \cdot \frac{\partial t}{\partial z} &= 0 \\ F_z \cdot \frac{\partial t}{\partial y} - F_y \cdot \frac{\partial t}{\partial z} &= 0. \end{aligned}$$

Eliminieren wir aus diesen Gleichungen τ mit Hilfe von (1), so stellen sie das Striktionssystem dar. Dies ist jedoch nur der Fall, wenn

$$(10)\qquad \frac{\partial^2 t}{\partial x^2} \cdot \frac{\partial^2 t}{\partial y^2} - \left(\frac{\partial^2 t}{\partial x \, \partial y}\right)^2 > 0$$

ist, und zwar wird t ein Maximum, wenn $\frac{\partial^2 t}{\partial x^2} < 0$, ein Minimum, wenn $\frac{\partial^2 t}{\partial x^2} > 0$ ist.

Einfacher gestaltet sich die Rechnung, wenn sich aus der Gleichung (1) die Veränderlichen x, y, z explizit ausdrücken lassen, oder wenn (1) bereits in dieser Form gegeben wird.

Haben wir zum Beispiel

$$(11)\qquad F(x, y, z, \tau) = z - f(x, y, \tau) = 0,$$

so wird $F_x = -f_x$; $F_y = -f_y$; $F_z = 1$; $F_\tau = -f_\tau$;

$$w^2 = 1 + f_x{}^2 + f_y{}^2,$$

$$(12)\qquad h = + \frac{f_\tau}{w} \cdot d\tau = t \cdot d\tau.$$

Hier ist t nur noch eine Funktion von x und y, und die Maxima und Minima können darum leichter berechnet werden.

Um dabei sicher zu sein, alle Teile des Striktionssystems zu erhalten, ist es notwendig, jede der Veränderlichen durch die beiden anderen und den Parameter τ explizit auszudrücken und dann die Rechnung durchzuführen. Denn bei den Differentiationen nach x und y in den Gleichungen (8) ist vorauszusetzen, daß weder $\frac{\partial z}{\partial x}$ noch $\frac{\partial z}{\partial y}$ unendlich werde, oder daß $\frac{\partial F}{\partial z}$ nicht gleich Null wird. Es könnte aber gerade der Ort der Punkte, für die $\frac{\partial F}{\partial z}$ verschwindet, d. h. eine in der xy-Ebene gelegene Kurve oder diese Ebene selbst ein Teil des Striktionssystems sein.

Bilden wir also die Gleichungen

$$(13)\qquad x = f_1(y, z, \tau);\ y = f_2(x, z, \tau);\ z = f_3(x, y, \tau),$$

so haben wir die Maxima und Minima der drei Größen

$$(14)\qquad t_1 = + \frac{\frac{\partial f_1}{\partial \tau}}{w_1};\quad t_2 = + \frac{\frac{\partial f_2}{\partial \tau}}{w_2};\quad t_3 = + \frac{\frac{\partial f_3}{\partial \tau}}{w_3}$$

zu untersuchen. Dabei ist

$$(15)\qquad \begin{aligned} w_1^2 &= 1 + \left(\frac{\partial f_1}{\partial y}\right)^2 + \left(\frac{\partial f_1}{\partial z}\right)^2 \\ w_2^2 &= 1 + \left(\frac{\partial f_2}{\partial x}\right)^2 + \left(\frac{\partial f_2}{\partial z}\right)^2 \\ w_3^2 &= 1 + \left(\frac{\partial f_3}{\partial x}\right)^2 + \left(\frac{\partial f_3}{\partial y}\right)^2 \end{aligned}$$

Besteht eine der Gleichungen (8) identisch, ist also etwa

$$\frac{\partial t}{\partial x} \equiv 0,$$

so ist t unabhängig von x und die Gleichung

$$(16)\qquad t = \varphi(y)$$

stellt in diesem Falle, wenn wir t, x, y als neue Koordinaten betrachten, eine gerade Cylinderfläche dar, deren Erzeugende der x-Achse parallel sind. Eigentliche isolierte Maxima und Minima sind hier nicht vorhanden. Die Maximal- und Minimalwerte von $t = \varphi(y)$ stellen Ebenen parallel der x-Achse dar, welche die Cylinderfäche $t = \varphi(y)$ in Geraden berühren. Jedes der vorhandenen Maxima und Minima wird daher an unendlich vielen Stellen jeder Fläche der gegebenen Schar eintreten. Wir erhalten alsdann eine einfach unendliche Schar von Raumkurven als Striktionslinien. Sie erfüllen eine doppelt gekrümmte Fläche, die Striktionsfläche der gegebenen Schar.

In besonderen Fällen kann die Schar der Striktionslinien aus geraden Linien bestehen. Liegen dieselben alle in derselben Ebene, so erhalten wir eine Striktionsebene.

Die Striktionsfläche ergibt sich für den Fall, daß

$$\frac{\partial t}{\partial x} \equiv 0$$

ist, durch Elimination von τ aus den Gleichungen:

$$(17)\qquad F(x, y, z, \tau) = 0 \text{ und } \frac{\partial t}{\partial y} = 0.$$

Enthält jedoch die zweite Gleichung τ nicht mehr, so stellt sie selbst schon die Striktionsfläche dar.

Analoge Resultate werden wir erhalten für

$$\frac{\partial t}{\partial y} \equiv 0.$$

Ist aber gleichzeitig:

$$\frac{\partial t}{\partial x} \equiv 0 \text{ und } \frac{\partial t}{\partial y} \equiv 0,$$

so sind auch sämtliche höheren Ableitungen gleich Null und wir erhalten kein Maximum oder Minimum. Die gegebene Schar besteht alsdann aus Parallelflächen.

Es ist noch ein besonderer Fall zu erwähnen, für den man im Allgemeinen auch eine Striktionsfläche erhält.

Ist nämlich

$$\frac{\partial^2 t}{\partial x^2} \cdot \frac{\partial^2 t}{\partial y^2} - \left(\frac{\partial^2 t}{\partial x\, \partial y}\right)^2 = 0 \tag{18}$$

ohne daß $\frac{\partial^2 t}{\partial x^2}$, $\frac{\partial^2 t}{\partial y^2}$, $\frac{\partial^2 t}{\partial x\, \partial y}$ sämtlich gleich Null sind, so besitzt die durch die Gleichung (19) $t = \varphi\,(x, y)$ dargestellte Fläche im Allgemeinen kein eigentliches Maximum oder Minimum. Besteht nämlich für einen Punkt der Fläche (19), für den die Bedingungen (8) erfüllt sind, die Beziehung (18), so zerfällt die Indikatrix des Punktes in zwei parallele Geraden und es gibt noch unendlich viele andere Punkte, welche eine ebene Kurve erfüllen, für welche dasselbe Maximum oder Minimum von t eintritt.

Diese allgemeinen Darlegungen mögen an einigen Beispielen erläutert werden.

Beispiel 1. Eine Schar von Kugeln sei gegeben durch die Gleichung

$$(x - \tau)^2 + y^2 + z^2 - 2\,\tau p + p^2 = 0. \tag{20}$$

Hieraus erhalten wir

$$z = \sqrt{2\,\tau p - p^2 - (x - \tau)^2 - y^2} = f\,(x, y, \tau).$$

$$t = \frac{\partial f}{\partial \tau} : w = + \frac{p + x - \tau}{\sqrt{2\;\tau p - p^2}}.$$

Da $\frac{\partial t}{\partial x}$ von x unabhängig ist, so kann es nicht Null werden. Wir finden also auf diesem Wege kein Maximum oder Minimum und bilden daher

$$x = \tau \pm \sqrt{2\,\tau p - p^2 - y^2 - z^2} = \tau \pm \sqrt{R} \tag{21}$$

Wählen wir das positive Vorzeichen, so erhalten wir die Halbkugeln auf der positiven Seite der jedesmaligen Ebene $x = \tau$. Dann ist

$$t = + \frac{p + \sqrt{R}}{\varepsilon \sqrt{2\;\tau p - p^2}} \tag{22}$$

wo ε das Vorzeichen der Wurzel $\sqrt{2\,\tau p - p^2}$ bezeichnet.

$\frac{\partial t}{\partial y}$ und $\frac{\partial t}{\partial z}$ werden gleichzeitig Null für

$$y = 0;\; z = 0. \tag{23}$$

Diese Gleichungen stellen eine Striktionslinie dar, weil, wie die Rechnung zeigt

$$\frac{\partial^2 t}{\partial y^2} \cdot \frac{\partial^2 t}{\partial z^2} - \left(\frac{\partial^2 t}{\partial y\, \partial z}\right)^2 > 0 \quad \text{ist.}$$

Es sind zwei Fälle zu unterscheiden:

1) Ist $\tau > p$, so wird für $\varepsilon = +1$ und $y = z = 0$:

$$\frac{\partial^2 t}{\partial y^2} < 0;\; t > 0;$$

für $\varepsilon = -1$ und $y = z = 0$:

$$\frac{\partial^2 t}{\partial y^2} > 0;\; t < 0.$$

Die x-Achse ist eine Stauungslinie der Schar, da t ein Maximum wird. Die Schar hat in diesem Falle als Umhüllungsfläche das Rotationsparaboloid

$$y^2 + z^2 - 2\,p\,x = 0.$$

2) Ist $p > \tau > \frac{p}{2}$, so wird

$$\text{für } \varepsilon = +1: \quad \frac{\partial^2 t}{\partial y^2} < 0; \; t > 0;$$

$$\text{für } \varepsilon = -1: \quad \frac{\partial^2 t}{\partial y^2} > 0; \; t < 0.$$

Wählen wir in Gl. (21) das negative Vorzeichen, so wird ebenfalls die x-Achse Striktionslinie und zwar eine Stauungslinie.

Das Striktionssystem besteht also aus der x-Achse als doppelter Stauungslinie. Die Unterscheidung des Vorzeichens ε ist ohne wesentliche Bedeutung, da, wenn t negativ ist, die Maximalwerte von t als Minima von $/t/$ und die Minima von t als Maxima von $/t/$ betrachtet werden müssen.

Beispiel 2. Lassen wir eine Parabelschar mit der Gleichung

$$2\,p\,(z - \tau) = (x - a)^2$$

um die z-Achse rotieren, so entsteht eine Schar von Rotationsflächen mit der Gleichung

$$(24) \qquad 2\,p\,(z - \tau) = \left(\sqrt{x^2 + y^2} - a\right)^2,$$

oder

$$(25) \qquad z = \frac{\left(\sqrt{x^2 + y^2} - a\right)^2}{2\,p} + \tau.$$

Es wird

$$t = \frac{p}{\sqrt{p^2 + (r - a)^2}} = \frac{p}{\sqrt{R}},$$

$$\frac{\partial t}{\partial x} = -\frac{p\,x\,(r-a)}{r\sqrt{R^3}}; \quad \frac{\partial t}{\partial y} = -\frac{p\,y\,(r-a)}{r\sqrt{R^3}}.$$

$\frac{\partial t}{\partial x}$ und $\frac{\partial t}{\partial y}$ werden gleichzeitig Null für

$$(26) \qquad r = a \text{ oder } x^2 + y^2 = a^2.$$

Wie die Rechnung zeigt, wird

$$\frac{\partial^2 t}{\partial x^2} \cdot \frac{\partial^2 t}{\partial y^2} - \left(\frac{\partial^2 t}{\partial x\,\partial y}\right)^2 = 0$$

für $r = a$.

Da für $r \lesseqgtr a$ jedenfalls

$$p^2 + (r - a)^2 > p^2$$

ist, mithin der Nenner von t für $r = a$ seinen kleinsten Wert hat, so ist t für diesen Wert ein Maximum. Der Rotationscylinder

$$x^2 + y^2 = a^2$$

ist eine Stauungsfläche der Schar (24).

Beispiel 3. Eine Schar von Dupin'schen Cycliden sei gegeben durch die Gleichung

(27) $$\left(\sqrt{x^2 + y^2} - \tau\right)^2 + (z - \tau)^2 - \tau^2 = 0$$

oder

(28) $$z = \tau \pm \sqrt{\tau^2 - \left(\sqrt{x^2 + y^2} - \tau\right)^2} = \tau \pm \sqrt{R}.$$

Wählen wir das positive Vorzeichen, so ist

(29) $$t = \frac{\partial z}{\partial \tau} : w = \frac{\sqrt{R} + r}{\tau}$$

$\frac{\partial t}{\partial x}$ und $\frac{\partial t}{\partial y}$ werden gleichzeitig Null für

(30) $$(r - \tau)^2 = \tau^2 - (r - \tau)^2.$$

Hieraus erhalten wir unter Berücksichtigung von (28) als Striktionsfläche einen geraden Kreiskegel mit der Gleichung

(31) $$z^2 = x^2 + y^2.$$

Berechnen wir $\frac{\partial^2 t}{\partial x^2}$ unter Berücksichtigung von (31), so haben t und $\frac{\partial^2 t}{\partial x^2}$ stets entgegengesetztes Vorzeichen. Die erste Bedingung für das Eintreten eines Maximums ist also erfüllt.

Da nun $$\frac{\partial^2 t}{\partial x^2} \cdot \frac{\partial^2 t}{\partial y^2} - \left(\frac{\partial^2 t}{\partial x \, \partial y}\right)^2 = 0$$

wird, so müssen wir die durch die Gleichung (29) dargestellte Fläche untersuchen. Durch Rationalisierung erhalten wir

(32) $$(\tau^2 t^2 + 2 x^2 + 2 y^2)^2 = 4 \tau^2 (x^2 + y^2) (1 + t)^2.$$

Der Schnitt mit der tx-Ebene ist eine Kurve mit der Gleichung:

(33) $$(\tau^2 t^2 + 2 x^2)^2 = 4 \tau^2 x^2 (1 + t)^2.$$

Dieselbe zerfällt in die beiden Ellipsen:

(34) $$\begin{aligned} \tau^2 t^2 + 2 x^2 + 2 \tau t x + 2 \tau x = 0 \\ \tau^2 t^2 + 2 x^2 - 2 \tau t x - 2 \tau x = 0 \end{aligned}$$

Beide Ellipsen haben die t-Achse zur Tangente im Anfangspunkte.

Die Fläche (32) entsteht durch Rotation einer der Kurven (34) um die t-Achse. Wir brauchen nur die Maxima und Minima einer der Kurven (34) zu untersuchen.

Setzen wir in (29) $y = 0$, so sind die Maxima und Minima von $t_{(y=0)}$ zu bestimmen.

Wie die Rechnung ergibt, kann $t_{(y=0)}$ nur ein Maximum besitzen und zwar für $x = \tau \pm \tau \sqrt{2}$.

Alsdann hat auch t ein Maximum, wenn die Gleichung (31) besteht, d. h. der durch die Gleichung (31) dargestellte Kegel ist eine Stauungsfläche der gegebenen Flächenschar.

II. Kapitel.

Bestimmung des Striktionssystems, wenn die Flächenschar durch drei Parametergleichungen

$$x = f_1 (u, v, \tau); \; y = f_2 (u, v, \tau); \; z = f_3 (u, v, \tau)$$

dargestellt wird.

Es sei τ der veränderliche Parameter, der die einzelnen Flächen der Schar bestimmt und u, v die krummlinigen Flächenkoordinaten. Jeder Punkt auf irgend einer Fläche der Schar ist bestimmt als Schnittpunkt zweier Kurven der beiden auf der Fläche gelegenen Kurvenscharen $u =$ const. und $v =$ const.

Setzen wir nun

$$\text{(1)} \qquad \begin{aligned} A &= \frac{\partial y}{\partial u} \cdot \frac{\partial z}{\partial v} - \frac{\partial y}{\partial v} \cdot \frac{\partial z}{\partial u}, \\ B &= \frac{\partial z}{\partial u} \cdot \frac{\partial x}{\partial v} - \frac{\partial z}{\partial v} \cdot \frac{\partial x}{\partial u}, \\ C &= \frac{\partial x}{\partial u} \cdot \frac{\partial y}{\partial v} - \frac{\partial x}{\partial v} \cdot \frac{\partial y}{\partial u}, \end{aligned}$$

so sind die Kosinus der Normale in einem Punkte (u, v, τ) einer Fläche der Schar:

$$\text{(2)} \qquad \begin{aligned} \cos \alpha &= \frac{-A}{\sqrt{A^2 + B^2 + C^2}} = \frac{-A}{R}; \\ \cos \beta &= \frac{-B}{R}; \qquad \cos \gamma = \frac{-C}{R}. \end{aligned}$$

Alsdann sind die Koordinaten ξ, η, ζ des Punktes, in dem die Normale die benachbarte Fläche der Schar schneidet:

$$\text{(3)} \qquad \begin{aligned} \xi &= x + h \cdot \cos \alpha = x - h \cdot \frac{A}{R}, \\ \eta &= y + h \cdot \cos \beta = y - h \cdot \frac{B}{R}, \\ \zeta &= z + h \cdot \cos \gamma = z - h \cdot \frac{C}{R}, \end{aligned}$$

wobei h wieder den Abstand bezeichnet wie in Kap. 1.

Es ist nun

$$\begin{aligned} x - h \cdot \frac{A}{R} &= f_1 (u + \triangle u, \; v + \triangle v, \; \tau + \triangle \tau); \\ y - h \cdot \frac{B}{R} &= f_2 (u + \triangle u, \; v + \triangle v, \; \tau + \triangle \tau); \\ z - h \cdot \frac{C}{R} &= f_3 (u + \triangle u, \; v + \triangle v, \; \tau + \triangle \tau). \end{aligned}$$

Entwickeln wir nach der Taylor'schen Reihe, so erhalten wir:

$$
(4)\quad
\begin{aligned}
x - h\cdot\frac{A}{R} &= f_1(u,v,\tau) + \frac{\partial f_1}{\partial u}\cdot\triangle u + \frac{\partial f_1}{\partial v}\cdot\triangle v + \frac{\partial f_1}{\partial \tau}\cdot\triangle\tau \\
&\quad + \frac{1}{2!}\left(\frac{\partial f_1}{\partial u}\cdot\triangle u + \frac{\partial f_1}{\partial v}\cdot\triangle v + \frac{\partial f_1}{\partial \tau}\cdot\triangle\tau\right)^{(2)} + \cdots \\
y - h\cdot\frac{B}{R} &= f_2(u,v,\tau) + \frac{\partial f_2}{\partial u}\cdot\triangle u + \frac{\partial f_2}{\partial v}\cdot\triangle v + \frac{\partial f_2}{\partial \tau}\cdot\triangle\tau \\
&\quad + \frac{1}{2!}\left(\frac{\partial f_2}{\partial u}\cdot\triangle u + \frac{\partial f_2}{\partial v}\cdot\triangle v + \frac{\partial f_2}{\partial \tau}\cdot\triangle\tau\right)^{(2)} + \cdots \\
z - h\cdot\frac{C}{R} &= f_3(u,v,\tau) + \frac{\partial f_3}{\partial u}\cdot\triangle u + \frac{\partial f_3}{\partial v}\cdot\triangle v + \frac{\partial f_3}{\partial \tau}\cdot\triangle\tau \\
&\quad + \frac{1}{2!}\left(\frac{\partial f_3}{\partial u}\cdot\triangle u + \frac{\partial f_3}{\partial v}\cdot\triangle v + \frac{\partial f_3}{\partial \tau}\cdot\triangle\tau\right)^{(2)} + \cdots
\end{aligned}
$$

oder:

$$
(5)\quad
\begin{aligned}
-h\cdot\frac{A}{R} &= \frac{\partial x}{\partial u}\cdot\triangle u + \frac{\partial x}{\partial v}\cdot\triangle v + \frac{\partial x}{\partial \tau}\cdot\triangle\tau + \cdots\cdot \\
-h\cdot\frac{B}{R} &= \frac{\partial y}{\partial u}\cdot\triangle u + \frac{\partial y}{\partial v}\cdot\triangle v + \frac{\partial y}{\partial \tau}\cdot\triangle\tau + \cdots\cdot \\
-h\cdot\frac{C}{R} &= \frac{\partial z}{\partial u}\cdot\triangle u + \frac{\partial z}{\partial v}\cdot\triangle v + \frac{\partial z}{\partial \tau}\cdot\triangle\tau + \cdots\cdot
\end{aligned}
$$

Multiplizieren wir die erste der Gleichungen (5) mit A, die zweite mit B, die dritte mit C, so erhalten wir durch Addition aller drei Gleichungen:

$$
(6)\quad
\begin{aligned}
-h\cdot R &= \left(A\cdot\frac{\partial x}{\partial u} + B\cdot\frac{\partial y}{\partial u} + C\cdot\frac{\partial z}{\partial u}\right)\triangle u \\
&+ \left(A\cdot\frac{\partial x}{\partial v} + B\cdot\frac{\partial y}{\partial v} + C\cdot\frac{\partial z}{\partial v}\right)\triangle v + \left(A\cdot\frac{\partial x}{\partial \tau} + B\cdot\frac{\partial y}{\partial \tau} + C\cdot\frac{\partial z}{\partial \tau}\right)\triangle\tau + \cdots
\end{aligned}
$$

Da nun aber

$$
(7)\quad
\begin{aligned}
A\cdot\frac{\partial x}{\partial u} + B\cdot\frac{\partial y}{\partial u} + C\cdot\frac{\partial z}{\partial u} &= 0 \\
A\cdot\frac{\partial x}{\partial v} + B\cdot\frac{\partial y}{\partial v} + C\cdot\frac{\partial z}{\partial v} &= 0
\end{aligned}
$$

ist, so bleibt übrig:

$$
(8)\quad -h\cdot R = \left(A\cdot\frac{\partial x}{\partial \tau} + B\cdot\frac{\partial y}{\partial \tau} + C\cdot\frac{\partial z}{\partial \tau}\right)\triangle\tau + \cdots
$$

Es wird daher für verschwindendes $\triangle\tau$

$$
(9)\quad h = -\frac{A\cdot\frac{\partial x}{\partial \tau} + B\cdot\frac{\partial y}{\partial \tau} + C\cdot\frac{\partial z}{\partial \tau}}{\sqrt{A^2+B^2+C^2}}\,d\tau.
$$

Der Ausdruck

$$
(10)\quad A\cdot\frac{\partial x}{\partial \tau} + B\cdot\frac{\partial y}{\partial \tau} + C\cdot\frac{\partial z}{\partial \tau} = \begin{vmatrix} \frac{\partial x}{\partial u}, & \frac{\partial y}{\partial u}, & \frac{\partial z}{\partial u} \\ \frac{\partial x}{\partial v}, & \frac{\partial y}{\partial v}, & \frac{\partial z}{\partial v} \\ \frac{\partial x}{\partial \tau}, & \frac{\partial y}{\partial \tau}, & \frac{\partial z}{\partial \tau} \end{vmatrix} = D
$$

ist die Funktionaldeterminante des gegebenen Gleichungssystems.

Um das Striktionssystem zu finden, müssen wir die Maxima und Minima des Ausdrucks

$$(11) \qquad t = -\frac{D}{\sqrt{A^2+B^2+C^2}} = -\frac{D}{R}$$

bestimmen. Hier ist t eine Funktion der unabhängigen Veränderlichen u und v, die Gleichung $t = F(u, v)$ stellt also eine Fläche dar. Die Bestimmung der Maxima und Minima erfolgt wie in Kap. 1.

Beispiel: Eine Schar von konfokalen abgeplatteten Rotationsellipsoiden sei gegeben durch die Gleichungen:

$$(12) \qquad \begin{aligned} x &= \sqrt{a^2-\tau}\cdot\cos u\cdot\sin v = f_1(u, v, \tau),\\ y &= \sqrt{a^2-\tau}\cdot\sin u\cdot\sin v = f_2(u, v, \tau),\\ z &= \sqrt{c^2-\tau}\cdot\cos v \qquad\qquad = f_3(v, \tau), \end{aligned}$$

wobei $a^2 > c^2 > \tau$ sei.

Es wird

$$R = \sin v\cdot\sqrt{a^2-\tau}\cdot\sqrt{(c^2-\tau)\sin^2 v + (a^2-\tau)\cos^2 v};$$

$$D = \frac{\sin v}{2\sqrt{c^2-\tau}}(c^2-\tau)\sin^2 v + (a^2-\tau)\cos^2 v.$$

$$(13) \qquad t = -\frac{D}{R} = -\frac{\sqrt{(c^2-\tau)\sin^2 v + (a^2-\tau)\cos^2 v}}{2\sqrt{(a^2-\tau)(c^2-\tau)}}.$$

t ist eine Funktion von v allein, also wird $\frac{\partial t}{\partial u} \equiv 0$.

$$(14) \qquad \frac{\partial t}{\partial v} = \frac{(c^2-a^2)\sin v\cdot\cos v}{2\sqrt{(a^2-\tau)(c^2-\tau)}\cdot\sqrt{(c^2-\tau)\sin^2 v + (a^2-\tau)\cos^2 v}}.$$

$\frac{\partial t}{\partial v}$ wird Null für: $\sin v = 0$ und für $\cos v = 0$.

Für $\sin v = 0$ wird $x = y = 0$.
Für $\cos v = 0$ wird $z = 0$.
Die z-Achse ist eine Striktionslinie, die xy-Ebene eine Striktionsebene.

Nun wird für $\sin v = 0$

$$\frac{\partial^2 t}{\partial v^2} = -\frac{(c^2-a^2)\cos^2 v}{2\sqrt{R_1}\sqrt{R_2}} = -\frac{(c^2-a^2)\cos v}{2(a^2-\tau)\sqrt{c^2-\tau}} \gtrless 0$$

$$t = -\frac{\cos v\sqrt{a^2-\tau}}{2\sqrt{(a^2-\tau)(c^2-\tau)}} = \frac{-\cos v}{2\sqrt{c^2-\tau}} \lesseqgtr 0$$

jenachdem $v = 0$ oder $v = 180^0$ ist.

Da t und $\frac{\partial^2 t}{\partial v^2}$ jedenfalls verschiedene Vorzeichen haben, so ist die z-Achse eine Stauungslinie.

Für $\cos \nu = 0$ wird

$$\frac{\partial^2 t}{\partial \nu^2} = -\frac{(a^2 - c^2) \sin^2 \nu}{2 \sin \nu \, (c^2 - \tau) \sqrt{a^2 - \tau}} = -\frac{(a^2 - c^2) \sin \nu}{2 (c^2 - \tau) \sqrt{a^2 - \tau}} \lessgtr 0,$$

$$t = -\frac{\sin \nu}{2 \sqrt{a^2 - \tau}} \lessgtr 0$$

jenachdem $\nu = 90^0$ oder $\nu = 270^0$ ist.

Die xy-Ebene ist eine Einschnürungsebene.

Anmerkung. Die in Kap. 2 angewandte Methode kann auch benutzt werden, wenn die Flächenschar durch eine Gleichung von der Form

$$F(x, y, z, \tau) = 0$$

gegeben ist. Betrachten wir nämlich x, y, z als Funktionen zweier unabhängiger Veränderlichen u, v und des Parameters τ, so wird

$$\text{(15)} \quad \begin{aligned} \frac{\partial F}{\partial u} &= \frac{\partial F}{\partial x} \cdot \frac{\partial x}{\partial u} + \frac{\partial F}{\partial y} \cdot \frac{\partial y}{\partial u} + \frac{\partial F}{\partial z} \cdot \frac{\partial z}{\partial u} = 0; \\ \frac{\partial F}{\partial v} &= \frac{\partial F}{\partial x} \cdot \frac{\partial x}{\partial v} + \frac{\partial F}{\partial y} \cdot \frac{\partial y}{\partial v} + \frac{\partial F}{\partial z} \cdot \frac{\partial z}{\partial v} = 0; \\ \frac{\partial F}{\partial \tau} &= \frac{\partial F}{\partial x} \cdot \frac{\partial x}{\partial \tau} + \frac{\partial F}{\partial y} \cdot \frac{\partial y}{\partial \tau} + \frac{\partial F}{\partial z} \cdot \frac{\partial z}{\partial \tau} + \frac{\partial F}{\partial \tau} = 0. \end{aligned}$$

Hieraus ergibt sich:

$$\text{(16)} \quad \begin{aligned} \frac{\partial F}{\partial x} &= -\frac{1}{D} \cdot \frac{\partial F}{\partial \tau} \left(\frac{\partial y}{\partial u} \cdot \frac{\partial z}{\partial v} - \frac{\partial y}{\partial v} \cdot \frac{\partial z}{\partial u} \right); \\ \frac{\partial F}{\partial y} &= -\frac{1}{D} \cdot \frac{\partial F}{\partial \tau} \left(\frac{\partial z}{\partial u} \cdot \frac{\partial x}{\partial v} - \frac{\partial z}{\partial v} \cdot \frac{\partial x}{\partial u} \right); \\ \frac{\partial F}{\partial z} &= -\frac{1}{D} \cdot \frac{\partial F}{\partial \tau} \left(\frac{\partial x}{\partial u} \cdot \frac{\partial y}{\partial v} - \frac{\partial x}{\partial v} \cdot \frac{\partial y}{\partial u} \right). \end{aligned}$$

Dann wird

$$\text{(17)} \quad \left(\frac{\partial F}{\partial x}\right)^2 + \left(\frac{\partial F}{\partial y}\right)^2 + \left(\frac{\partial F}{\partial z}\right)^2 = \frac{\left(\frac{\partial F}{\partial \tau}\right)^2 [A^2 + B^2 + C^2]}{D^2} = \frac{\left(\frac{\partial F}{\partial \tau}\right)^2 R^2}{D^2}.$$

Da nun nach Gleichung (11) $t = -\frac{D}{R}$ ist, so wird

$$\sqrt{\left(\frac{\partial F}{\partial x}\right)^2 + \left(\frac{\partial F}{\partial y}\right)^2 + \left(\frac{\partial F}{\partial z}\right)^2} = -\frac{\frac{\partial F}{\partial \tau}}{t}$$

$$\text{(18)} \quad \text{oder } t = -\frac{\frac{\partial F}{\partial \tau}}{\sqrt{\left(\frac{\partial F}{\partial x}\right)^2 + \left(\frac{\partial F}{\partial y}\right)^2 + \left(\frac{\partial F}{\partial z}\right)^2}}.$$

Die weitere Rechnung ist dieselbe wie in Kap. 1.

III. Kapitel.

Bestimmung des Striktionssystems, wenn die Flächenschar durch eine Differentialgleichung von der Form

(1) $$g_1\,(x, y, z)\,d\,x + g_2\,(x, y, z)\,d\,y + g_3\,(x, y, z)\,d\,z = 0$$

gegeben ist.

Damit eine Flächenschar

$$F\,(x, y, z, \tau) = f\,(x, y, z) + \tau = 0$$

ein Integralsystem einer Differentialgleichung von der Form (1) sei, müssen die Gleichungen bestehen:

(2) $$\lambda\,g_1 = \frac{\partial F}{\partial x};\quad \lambda\,g_2 = \frac{\partial F}{\partial y};\quad \lambda\,g_3 = \frac{\partial F}{\partial z}.$$

Für den integrierenden Faktor λ bestehen die drei partiellen Differentialgleichungen

(3) $$\begin{aligned} \frac{\partial \lambda}{\partial x}\,g_2 - \frac{\partial \lambda}{\partial y}\,g_1 &= \lambda\left(\frac{\partial g_1}{\partial y} - \frac{\partial g_2}{\partial x}\right), \\ \frac{\partial \lambda}{\partial y}\,g_3 - \frac{\partial \lambda}{\partial z}\,g_2 &= \lambda\left(\frac{\partial g_2}{\partial z} - \frac{\partial g_3}{\partial y}\right), \\ \frac{\partial \lambda}{\partial z}\,g_1 - \frac{\partial \lambda}{\partial x}\,g_3 &= \lambda\left(\frac{\partial g_3}{\partial x} - \frac{\partial g_1}{\partial z}\right). \end{aligned}$$

Wir fanden nun in Gleichung (18) des vorigen Kapitels

$$t = -\frac{\dfrac{\partial F}{\partial \tau}}{\sqrt{\left(\dfrac{\partial F}{\partial x}\right)^2 + \left(\dfrac{\partial F}{\partial y}\right)^2 + \left(\dfrac{\partial F}{\partial z}\right)^2}}.$$

Da nun hier $\dfrac{\partial F}{\partial \tau} = 1$ wird, so erhalten wir unter Berücksichtigung von (2)

(4) $$t = -\frac{1}{\lambda\sqrt{g_1{}^2 + g_2{}^2 + g_3{}^2}}.$$

Betrachten wir z als abhängige Veränderliche, so müssen, wenn wir

$$\sqrt{g_1{}^2 + g_2{}^2 + g_3{}^2} = w$$

setzen, für etwa eintretende Maxima oder Minima von t die Gleichungen bestehen:

(5) $$\begin{aligned} \frac{\partial(\lambda w)}{\partial x} + \frac{\partial(\lambda w)}{\partial z}\cdot\frac{\partial z}{\partial x} &= 0; \\ \frac{\partial(\lambda w)}{\partial y} + \frac{\partial(\lambda w)}{\partial z}\cdot\frac{\partial z}{\partial y} &= 0; \end{aligned}$$

oder

(5a) $$\begin{aligned} \frac{\partial(\lambda w)}{\partial x} - \frac{\partial(\lambda w)}{\partial z}\cdot\frac{g_1}{g_3} &= A = 0; \\ \frac{\partial(\lambda w)}{\partial y} - \frac{\partial(\lambda w)}{\partial z}\cdot\frac{g_2}{g_3} &= B = 0; \end{aligned}$$

$$A = \frac{\partial \lambda}{\partial x} \cdot w - \frac{\partial \lambda}{\partial z} \cdot \frac{g_1}{g_3} w + \frac{\lambda}{w} \left(g_1 \frac{\partial g_1}{\partial x} + g_2 \frac{\partial g_2}{\partial x} + g_3 \frac{\partial g_3}{\partial x} \right)$$

$$- \frac{g_1}{g_3} \cdot \frac{\lambda}{w} \left(g_1 \frac{\partial g_1}{\partial z} + g_2 \frac{\partial g_2}{\partial z} + g_3 \frac{\partial g_3}{\partial z} \right);$$

$$A = \frac{\lambda}{w \cdot g_3} \left[\frac{w^2}{\lambda} \left(\frac{\partial \lambda}{\partial x} g_3 - \frac{\partial \lambda}{\partial z} g_1 \right) + g_1 g_3 \frac{\partial g_1}{\partial x} + g_2 g_3 \frac{\partial g_2}{\partial x} \right.$$

$$\left. + g_3{}^2 \frac{\partial g_3}{\partial x} - g_1{}^2 \cdot \frac{\partial g_1}{\partial z} - g_1 g_2 \frac{\partial g_2}{\partial z} - g_1 g_3 \frac{\partial g_3}{\partial z} \right].$$

Berücksichtigen wir die dritte der Gleichungen (3), so wird

$$A = \frac{\lambda}{w \cdot g_3} \left[g_1{}^2 \frac{\partial g_1}{\partial z} + g_2{}^2 \frac{\partial g_1}{\partial z} + g_3{}^2 \frac{\partial g_1}{\partial z} - g_1{}^2 \frac{\partial g_3}{\partial x} - g_2{}^2 \frac{\partial g_3}{\partial x} - g_3{}^2 \frac{\partial g_3}{\partial x} \right.$$

$$\left. + g_1 g_3 \frac{\partial g_1}{\partial x} + g_2 g_3 \frac{\partial g_2}{\partial x} + g_3{}^2 \frac{\partial g_3}{\partial x} - g_1{}^2 \frac{\partial g_1}{\partial x} - g_1 g_2 \frac{\partial g_2}{\partial z} - g_1 g_3 \frac{\partial g_3}{\partial z} \right];$$

$$A = \frac{\lambda}{w \cdot g_3} \left[(g_2{}^2 + g_3{}^2) \frac{\partial g_1}{\partial z} - (g_1{}^2 + g_2{}^2) \frac{\partial g_3}{\partial x} - g_1 g_2 \frac{\partial g_2}{\partial z} \right.$$

$$\left. + g_1 g_3 \left(\frac{\partial g_1}{\partial x} - \frac{\partial g_3}{\partial z} \right) + g_2 g_3 \frac{\partial g_2}{\partial x} \right].$$

Da nun $\frac{\partial (\lambda w)}{\partial x} = 0$ sein soll, so muß die Gleichung bestehen:

$$(6) \quad (g_2{}^2 + g_3{}^2) \frac{\partial g_1}{\partial z} - (g_1{}^2 + g_2{}^2) \frac{\partial g_3}{\partial x} - g_1 g_2 \frac{\partial g_2}{\partial z} + g_1 g_3 \left(\frac{\partial g_1}{\partial x} - \frac{\partial g_3}{\partial z} \right)$$

$$+ g_2 g_3 \frac{\partial g_2}{\partial x} = 0.$$

Ebenso bilden wir nun

$$B = \frac{\partial \lambda}{\partial y} \cdot w - \frac{\partial \lambda}{\partial z} \cdot \frac{g_2}{g_3} \cdot w + \frac{\lambda}{w} \left(g_1 \frac{\partial g_1}{\partial y} + g_2 \frac{\partial g_2}{\partial y} + g_3 \frac{\partial g_3}{\partial y} \right)$$

$$- \frac{\lambda}{w} \frac{g_2}{g_3} \left(g_1 \frac{\partial g_1}{\partial z} + g_2 \frac{\partial g_2}{\partial z} + g_3 \frac{\partial g_3}{\partial z} \right).$$

$$B = \frac{\lambda}{w \cdot g_3} \left[\frac{w^2}{\lambda} \left(g_3 \frac{\partial \lambda}{\partial y} - g_2 \frac{\partial \lambda}{\partial z} \right) + g_1 g_3 \frac{\partial g_1}{\partial y} + g_2 g_3 \frac{\partial g_2}{\partial y} + g_3{}^2 \frac{\partial g_3}{\partial y} \right.$$

$$\left. - g_1 g_2 \frac{\partial g_1}{\partial z} - g_2{}^2 \frac{\partial g_2}{\partial z} - g_2 g_3 \frac{\partial g_3}{\partial z} \right].$$

Unter Berücksichtigung der zweiten Gleichung (3) wird

$$B = \frac{\lambda}{w \cdot g_3} \left[g_1{}^2 \frac{\partial g_2}{\partial z} + g_2{}^2 \frac{\partial g_2}{\partial z} + g_3{}^2 \frac{\partial g_2}{\partial z} - g_1{}^2 \frac{\partial g_3}{\partial y} - g_2{}^2 \frac{\partial g_3}{\partial y} - g_3{}^2 \frac{\partial g_3}{\partial y} \right.$$

$$\left. + g_1 g_3 \frac{\partial g_1}{\partial y} + g_2 g_3 \frac{\partial g_2}{\partial y} + g_3{}^2 \frac{\partial g_3}{\partial y} - g_1 g_2 \frac{\partial g_1}{\partial z} - g_2{}^2 \frac{\partial g_2}{\partial z} - g_2 g_3 \frac{\partial g_3}{\partial z} \right].$$

$$B = \frac{\lambda}{w \cdot g_3} \left[(g_1{}^2 + g_3{}^2) \frac{\partial g_2}{\partial z} - (g_1{}^2 + g_2{}^2) \frac{\partial g_3}{\partial y} - g_1 g_2 \frac{\partial g_1}{\partial z} + g_1 g_3 \frac{\partial g_1}{\partial y} \right.$$

$$\left. + g_2 g_3 \left(\frac{\partial g_2}{\partial y} - \frac{\partial g_3}{\partial z} \right) \right].$$

Damit $\frac{\partial(\lambda w)}{\partial y}$ gleich Null wird, muß die Klammergröße gleich Null sein, also

$$(7) \qquad (g_1^2+g_3^2)\frac{\partial g_2}{\partial z}-(g_1^2+g_2^2)\frac{\partial g_3}{\partial y}-g_1 g_2\frac{\partial g_1}{\partial z}$$
$$+g_1 g_3\frac{\partial g_1}{\partial y}+g_2 g_3\left(\frac{\partial g_2}{\partial y}-\frac{\partial g_3}{\partial z}\right)=0.$$

Die Gleichungen (6) und (7) stellen das Striktionssystem dar.

Sie sind von der Form

$$\varphi_1(x, y, z)=0 \text{ und } \varphi_2(x, y, z)=0$$

und stellen zwei doppeltgekrümmte Flächen dar.

Etwas einfacher gestalten sich die Gleichungen (6) und (7), wenn λ eine konstante Größe ist, also die linke Seite der Gleichung (1) das totale Differential einer Gleichung $F(x, y, z)=\tau$ ist. Dann erhalten wir

$$(6a) \qquad g_3^2\frac{\partial g_3}{\partial x}-g_1^2\frac{\partial g_1}{\partial z}-g_1 g_2\frac{\partial g_2}{\partial z}+g_1 g_3\left(\frac{\partial g_1}{\partial x}-\frac{\partial g_3}{\partial z}\right)+g_2 g_3\frac{\partial g_2}{\partial x}=0.$$

$$(7a) \qquad g_3^2\frac{\partial g_3}{\partial y}-g_2^2\frac{\partial g_2}{\partial z}-g_1 g_2\frac{\partial g_1}{\partial z}+g_1 g_3\frac{\partial g_1}{\partial y}+g_2 g_3\left(\frac{\partial g_2}{\partial y}-\frac{\partial g_3}{\partial z}\right)=0.$$

Um Maxima und Minima von t zu unterscheiden, haben wir unter Berücksichtigung von (6) und (7) $\frac{\partial^2 t}{\partial x^2}$, $\frac{\partial^2 t}{\partial y^2}$, $\frac{\partial^2 t}{\partial x\, \partial y}$ zu bilden.

Haben die Gleichungen (6) und (7) gemeinsame Faktoren, sind sie etwa von der Form

$$f(x, y, z)\cdot f_1(x, y, z)=0 \text{ und } f(x, y, z)\cdot f_2(x, y, z)=0,$$

so stellt die Gleichung $f(x, y, z)=0$ eine Striktionsfläche, der Schnitt der Flächen $f_1(x, y, z)=0$ und $f_2(x, y, z)=0$ die Striktionslinien dar.

Wir wollen die Gleichungen (6) und (7) noch etwas umformen, wodurch sie auch vereinfacht werden.

Multiplizieren wir die erste der Gleichungen (3) mit $-g_2 g_3$, die zweite mit $-g_1 g_2$, so erhalten wir durch Addition:

$$\lambda g_2 g_3\cdot\frac{\partial g_2}{\partial x}-\lambda g_2 g_3\cdot\frac{\partial g_1}{\partial y}+\lambda g_1 g_2\frac{\partial g_3}{\partial y}-\lambda g_1 g_2\frac{\partial g_2}{\partial z}$$
$$=-\frac{\partial\lambda}{\partial x}g_2^2 g_3+\frac{\partial\lambda}{\partial y}g_1 g_2 g_3-\frac{\partial\lambda}{\partial y}g_1 g_2 g_3+\frac{\partial\lambda}{\partial z}\cdot g_1 g_2^2$$

oder $$\lambda\left(g_2 g_3\frac{\partial g_2}{\partial x}-g_1 g_2\frac{\partial g_2}{\partial z}\right)=g_2^2\left(g_1\frac{\partial\lambda}{\partial z}-g_3\frac{\partial\lambda}{\partial x}\right)$$
$$+\lambda\left(g_2 g_3\frac{\partial g_1}{\partial y}-g_1 g_2\frac{\partial g_3}{\partial y}\right).$$

Berücksichtigen wir nun die dritte der Gleichungen (3), so wird:

$$g_2 g_3\frac{\partial g_2}{\partial x}-g_1 g_2\frac{\partial g_2}{\partial z}=g_2^2\left(\frac{\partial g_3}{\partial x}-\frac{\partial g_1}{\partial z}\right)+g_2 g_3\frac{\partial g_1}{\partial y}-g_1 g_2\frac{\partial g_3}{\partial y}.$$

Die beiden Glieder auf der linken Seite kommen auch in Gleichung (6) vor. Setzen wir die rechte Seite dafür in (6) ein, so erhalten wir die Gleichung:

$$(8)\quad g_3^2 \frac{\partial g_1}{\partial z} - g_1^2 \frac{\partial g_3}{\partial x} + g_1 g_3 \left(\frac{\partial g_1}{\partial x} - \frac{\partial g_3}{\partial z}\right) + g_2 g_3 \frac{\partial g_1}{\partial y} - g_1 g_2 \frac{\partial g_3}{\partial y} = 0.$$

Multiplizieren wir die erste Gleichung (3) mit $g_1 g_3$, die dritte mit $g_1 g_2$, so erhalten wir durch Addition:

$$\lambda g_1 g_3 \frac{\partial g_1}{\partial y} - \lambda g_1 g_3 \frac{\partial g_2}{\partial x} + \lambda g_1 g_2 \frac{\partial g_3}{\partial x} - \lambda g_1 g_2 \frac{\partial g_1}{\partial z}$$

$$= \frac{\partial \lambda}{\partial x} g_1 g_2 g_3 - \frac{\partial \lambda}{\partial y} g_1^2 g_3 + \frac{\partial \lambda}{\partial z} g_1^2 g_2 - \frac{\partial \lambda}{\partial x} g_1 g_2 g_3,$$

oder $\lambda \left(g_1 g_3 \frac{\partial g_1}{\partial y} - g_1 g_2 \frac{\partial g_1}{\partial z}\right) = g_1^2 \left(g_2 \frac{\partial \lambda}{\partial z} - g_3 \frac{\partial \lambda}{\partial y}\right)$

$$+ \lambda \left(g_1 g_3 \frac{\partial g_2}{\partial x} - g_1 g_2 \frac{\partial g_3}{\partial x}\right),$$

oder, wenn wir die zweite Gleichung (3) berücksichtigen:

$$g_1 g_3 \frac{\partial g_1}{\partial y} - g_1 g_2 \frac{\partial g_1}{\partial z} = g_1^2 \left(\frac{\partial g_3}{\partial y} - \frac{\partial g_2}{\partial z}\right) + g_1 g_3 \frac{\partial g_2}{\partial x} - g_1 g_2 \frac{\partial g_3}{\partial x}.$$

Setzen wir aus dieser Gleichung für $g_1 g_3 \cdot \frac{\partial g_1}{\partial y} - g_1 g_2 \cdot \frac{\partial g_1}{\partial z}$ in Gleichung (7) die rechte Seite ein, so erhalten wir:

$$(9)\quad g_3^2 \frac{\partial g_2}{\partial z} - g_2^2 \frac{\partial g_3}{\partial y} + g_2 g_3 \left(\frac{\partial g_2}{\partial y} - \frac{\partial g_3}{\partial z}\right) + g_1 g_3 \frac{\partial g_2}{\partial x} - g_1 g_2 \frac{\partial g_3}{\partial x} = 0.$$

Die Gleichungen (8) und (9) stellen nun das Striktionssystem dar.

Wir können auch ganz allgemein einen Zusammenhang des Striktionssystems mit den Orthogonaltrajektorien der Flächenschar nachweisen.

Benutzen wir zur Unterscheidung für die Orthogonaltrajektorien das Zeichen δ statt ∂, so sind die Gleichungen derselben:

$$(10)\qquad \frac{\delta z}{\delta x} = \frac{g_3}{g_1}; \quad \frac{\delta z}{\delta y} = \frac{g_3}{g_2}.$$

Wir formen nun die Gleichungen (8) und (9) noch in folgender Weise um:

$$(8\,a)\quad g_1 g_3 \left(\frac{\partial g_1}{\partial x} + \frac{g_2}{g_1} \cdot \frac{\partial g_1}{\partial y} + \frac{g_3}{g_1} \cdot \frac{\partial g_1}{\partial z}\right) - g_1^2 \left(\frac{\partial g_3}{\partial x} + \frac{g_2}{g_1} \cdot \frac{\partial g_3}{\partial y} + \frac{g_3}{g_1} \cdot \frac{\partial g_3}{\partial z}\right) = 0,$$

$$(9\,a)\quad g_2 g_3 \left(\frac{\partial g_2}{\partial y} + \frac{g_1}{g_2} \cdot \frac{\partial g_2}{\partial x} + \frac{g_3}{g_2} \cdot \frac{\partial g_2}{\partial z}\right) - g_2^2 \left(\frac{\partial g_3}{\partial y} + \frac{g_1}{g_2} \cdot \frac{\partial g_3}{\partial x} + \frac{g_3}{g_2} \cdot \frac{\partial g_3}{\partial z}\right) = 0.$$

Nun ist aber

$$\frac{\delta g_1}{\delta x} = \frac{\partial g_1}{\partial x} + \frac{\partial g_1}{\partial y} \cdot \frac{\delta y}{\delta x} + \frac{\partial g_1}{\partial z} \cdot \frac{\delta z}{\delta x}$$

$$= \frac{\partial g_1}{\partial x} + \frac{\partial g_1}{\partial y} \cdot \frac{g_2}{g_1} + \frac{\partial g_1}{\partial z} \cdot \frac{g_3}{g_1}.$$

Ebenso wird

$$\frac{\delta g_3}{\delta x} = \frac{\partial g_3}{\partial x} + \frac{g_2}{g_1} \cdot \frac{\partial g_3}{\partial y} + \frac{g_3}{g_1} \cdot \frac{\partial g_3}{\partial z};$$

$$(11) \qquad \frac{\delta g_2}{\delta y} = \frac{\partial g_2}{\partial y} + \frac{g_1}{g_2} \cdot \frac{\partial g_2}{\partial x} + \frac{g_3}{g_2} \cdot \frac{\partial g_2}{\partial z};$$

$$\frac{\delta g_3}{\delta y} = \frac{\partial g_3}{\partial y} + \frac{g_1}{g_2} \cdot \frac{\partial g_3}{\partial x} + \frac{g_3}{g_2} \cdot \frac{\partial g_3}{\partial z}.$$

Aus (8a), (9a) und (11) erhalten wir:

$$(12) \qquad g_1\, g_3 \cdot \frac{\delta g_1}{\delta x} - g_1{}^2 \cdot \frac{\delta g_3}{\delta x} = 0.$$

$$(13) \qquad g_2\, g_3 \cdot \frac{\delta g_2}{\delta y} - g_2{}^2 \cdot \frac{\delta g_3}{\delta y} = 0.$$

oder

$$(12\text{a}) \qquad \frac{\delta\left(\dfrac{g_3}{g_1}\right)}{\delta x} = \frac{\delta^2 z}{\delta x^2} = 0,$$

$$(13\text{a}) \qquad \frac{\delta\left(\dfrac{g_3}{g_2}\right)}{\delta y} = \frac{\delta^2 z}{\delta y^2} = 0.$$

Die Gleichungen (12a) und (13a) stellen den Ort der stationären Punkte der doppeltunendlichen Schar von Orthogonaltrajektorien der gegebenen Flächenschar dar. Mithin besteht der Satz:

Das Striktionssystem einer Flächenschar ist der Ort der stationären Punkte der Orthogonaltrajektorien dieser Flächenschar.

IV. Kapitel.

Anwendung der Theorie auf das Hauptachsenproblem der Flächen zweiter Ordnung.

Eine Fläche zweiter Ordnung wird allgemein dargestellt durch eine Gleichung von der Form

$$a_{11}\, x^2 + 2\, a_{12}\, x\, y + a_{22}\, y^2 + 2\, a_{13}\, x\, z + 2\, a_{23}\, y\, z + a_{33}\, z^2 + 2\, a_{14}\, x + 2\, a_{24}\, y + 2\, a_{34}\, z + a_{44} = 0.$$

Ersetzen wir nun das absolute Glied a_{44} durch einen variablen Parameter τ, so stellt die Gleichung

$$(1) \qquad F(x, y, z, \tau) = a_{11}\, x^2 + 2\, a_{12}\, x\, y + a_{22}\, y^2 + 2\, a_{13}\, x\, z + 2\, a_{23}\, y\, z + a_{33}\, z^2 + 2\, a_{14}\, x + 2\, a_{24}\, y + 2\, a_{34}\, z + \tau = 0$$

eine Schar von Flächen zweiter Ordnung dar, welche dasselbe Centrum und dieselben Hauptdiametralebenen haben. Denn die zur Bestimmung des Centrums notwendigen Gleichungen, ebenso wie die zur Bestimmung der Hauptdiametralebenen dienende kubische Gleichung sind von $a_{44} = \tau$ vollständig unabhängig.

Um das Striktionssystem dieser Flächenschar zu untersuchen, bilden wir

$$(2)\qquad t = - \frac{\dfrac{\partial F}{\partial \tau}}{\sqrt{\left(\dfrac{\partial F}{\partial x}\right)^2 + \left(\dfrac{\partial F}{\partial y}\right)^2 + \left(\dfrac{\partial F}{\partial z}\right)^2}} = - \frac{1}{\sqrt{R}}.$$

Das Striktionssystem wird dann nach Kap. 1, Gleichung (9) dargestellt durch die beiden Gleichungen:

$$(3a)\qquad \frac{\partial t}{\partial x} \cdot \frac{\partial F}{\partial z} - \frac{\partial t}{\partial z} \cdot \frac{\partial F}{\partial x} = 0 \text{ und } \frac{\partial t}{\partial y} \cdot \frac{\partial F}{\partial z} - \frac{\partial t}{\partial z} \cdot \frac{\partial F}{\partial y} = 0.$$

Durch cyklische Vertauschung erhalten wir noch die beiden Gleichungspaare:

$$(3b)\qquad \frac{\partial t}{\partial y} \cdot \frac{\partial F}{\partial x} - \frac{\partial t}{\partial x} \cdot \frac{\partial F}{\partial y} = 0 \text{ und } \frac{\partial t}{\partial z} \cdot \frac{\partial F}{\partial x} - \frac{\partial t}{\partial x} \cdot \frac{\partial F}{\partial z} = 0.$$

$$(3c)\qquad \frac{\partial t}{\partial z} \cdot \frac{\partial F}{\partial y} - \frac{\partial t}{\partial y} \cdot \frac{\partial F}{\partial z} = 0 \text{ und } \frac{\partial t}{\partial x} \cdot \frac{\partial F}{\partial y} - \frac{\partial t}{\partial y} \cdot \frac{\partial F}{\partial x} = 0.$$

Je nachdem wir z, x oder y als von den beiden anderen abhängige Variable betrachten, wird das Striktionssystem durch die Gleichungspaare (3a), (3b) oder (3c) dargestellt.

Nun ist

$$(4)\qquad \begin{aligned} \frac{\partial F}{\partial x} &= 2a_{11}x + 2a_{12}y + 2a_{13}z + 2a_{14} = 2u, \\ \frac{\partial F}{\partial y} &= 2a_{12}x + 2a_{22}y + 2a_{23}z + 2a_{24} = 2v, \\ \frac{\partial F}{\partial z} &= 2a_{13}x + 2a_{23}y + 2a_{33}z + 2a_{34} = 2w. \end{aligned}$$

Aus (3a) und (4) erhalten wir:

$$(5)\qquad \begin{aligned} (a_{11}u + a_{12}v + a_{13}w)\, w - (a_{13}u + a_{23}v + a_{33}w)\, u &= 0, \\ (a_{12}u + a_{22}v + a_{23}w)\, w - (a_{13}u + a_{23}v + a_{33}w)\, v &= 0, \end{aligned}$$

als Gleichungen des Striktionssystems.

Bezeichnet λ einen Proportionalitätsfaktor, so muß nach Gleichung (5) sein

$$(6)\qquad \begin{aligned} a_{11}u + a_{12}v + a_{13}w &= \lambda u; \\ a_{12}u + a_{22}v + a_{23}w &= \lambda v; \\ a_{13}u + a_{23}v + a_{33}w &= \lambda w. \end{aligned}$$

Für λ ergibt sich dann die kubische Gleichung:

$$(7)\qquad \begin{vmatrix} a_{11} - \lambda & a_{12} & a_{13} \\ a_{12} & a_{22} - \lambda & a_{23} \\ a_{13} & a_{23} & a_{33} - \lambda \end{vmatrix} = 0.$$

Dieses ist aber die bekannte Gleichung dritten Grades, von der das Hauptachsenproblem der Flächen zweiter Ordnung abhängt.

Werden die drei sich daraus ergebenden sämtlich reellen Werte von λ in die Gleichungen (6) eingesetzt, so stellen diese die Hauptdiametralebenen jeder Fläche der Schar (1) dar. Die Schnitte von je zwei Diametralebenen liefern die Hauptachsen jeder Fläche.

Das Striktionssystem der Schar (1) wird also durch die gemeinsamen Hauptachsen der Flächenschar dargestellt. Es bleibt jedoch einer näheren Untersuchung vorbehalten, ob alle drei Hauptachsen dem Striktionssystem angehören.

Für die Bestimmung der Hauptdiametralebenen und Hauptachsen einer Fläche zweiter Ordnung ergibt sich nun folgende allgemeine Regel:

Man ersetze das absolute Glied der Flächengleichung durch einen variablen Parameter und bestimme das Striktionssystem der so definierten Flächenschar. Dieses Striktionssystem liefert die Hauptdiametralebenen und Hauptachsen der gegebenen Fläche; oder: Man bilde den Ausdruck $t = -\dfrac{1}{\sqrt{\left(\dfrac{\partial F}{\partial x}\right)^2 + \left(\dfrac{\partial F}{\partial y}\right)^2 + \left(\dfrac{\partial F}{\partial z}\right)^2}}$.

Die vollständigen Ableitungen desselben nach zwei von den Variablen x, y, z, von denen eine als abhängig betrachtet werden muß, liefern die Hauptdiametralebenen und Hauptachsen der gegebenen Fläche.

Wir wollen nunmehr untersuchen, welche Achsen einer Fläche zweiter Ordnung dem Striktionssystem angehören und welche der beiden Arten von Striktionslinien dieselben darstellen.

Zunächst betrachten wir die Centralflächen, welche ein bestimmtes endliches Centrum besitzen, um dann zu den Paraboloiden überzugehen, welche kein bestimmtes endliches Centrum haben.

A. Die Centralflächen zweiter Ordnung.

Eine Centralfläche zweiter Ordnung wird in der einfachsten Form dargestellt durch die Gleichung

$$b_{11} x^2 + b_{22} y^2 + b_{33} z^2 + b_{44} = 0.$$

Ersetzen wir b_{44} durch den variablen Parameter τ, so erhalten wir eine Schar von Centralflächen, dargestellt durch die Gleichung

$$F(x, y, z, \tau) = b_{11} x^2 + b_{22} y^2 + b_{33} z^2 + \tau = 0. \tag{8}$$

Hieraus ergibt sich

$$F_x = \frac{\partial F}{\partial x} = 2 b_{11} x;\; F_y = \frac{\partial F}{\partial y} = 2 b_{22} y;\; F_z = \frac{\partial F}{\partial z} = 2 b_{33} z;\; \frac{\partial F}{\partial \tau} = 1;$$

also

$$t = -\frac{1}{\sqrt{\left(\dfrac{\partial F}{\partial x}\right)^2 + \left(\dfrac{\partial F}{\partial y}\right)^2 + \left(\dfrac{\partial F}{\partial z}\right)^2}} \tag{9}$$

$$= -\frac{1}{2\sqrt{b_{11}^2 x^2 + b_{22}^2 y^2 + b_{33}^2 z^2}} = -\frac{1}{2\sqrt{R}}.$$

Wird z als Funktion der unabhängigen Variablen x und y betrachtet, so ergeben sich als Bedingungen für das Auftreten von Striktionslinien die Gleichungen:

$$\text{(a)}\quad \begin{aligned} \frac{\partial t}{\partial x} &= \frac{\partial t}{\partial x} - \frac{\partial t}{\partial z} \cdot \frac{F_x}{F_z} = \frac{b_{11}{}^2 x}{2\sqrt{R^3}} - \frac{b_{33}{}^2 z}{2\sqrt{R^3}} \cdot \frac{b_{11} x}{b_{33} z} = \frac{x}{2\sqrt{R^3}} (b_{11}{}^2 - b_{11} b_{33}) = 0; \\ \frac{\partial t}{\partial y} &= \frac{\partial t}{\partial y} - \frac{\partial t}{\partial z} \cdot \frac{F_y}{F_z} = \frac{b_{22}{}^2 y}{2\sqrt{R^3}} - \frac{b_{33}{}^2 z}{2\sqrt{R^3}} \cdot \frac{b_{22} y}{b_{33} z} = \frac{y}{2\sqrt{R^3}} (b_{22}{}^2 - b_{22} b_{33}) = 0. \end{aligned}$$

Werden x und z als unabhängig, y als abhängig betrachtet, so sind die entsprechenden Bedingungsgleichungen:

$$\text{(b)}\quad \begin{aligned} \frac{\partial t}{\partial z} &= \frac{\partial t}{\partial z} - \frac{\partial t}{\partial y} \cdot \frac{F_z}{F_y} = \frac{b_{33}{}^2 z}{2\sqrt{R^3}} - \frac{b_{22}{}^2 y}{2\sqrt{R^3}} \cdot \frac{b_{33} z}{b_{22} y} = \frac{z}{2\sqrt{R^3}} (b_{33}{}^2 - b_{22} b_{33}) = 0; \\ \frac{\partial t}{\partial x} &= \frac{\partial t}{\partial x} - \frac{\partial t}{\partial y} \cdot \frac{F_x}{F_y} = \frac{b_{11}{}^2 x}{2\sqrt{R^3}} - \frac{b_{22}{}^2 y}{2\sqrt{R^3}} \cdot \frac{b_{11} x}{b_{22} y} = \frac{x}{2\sqrt{R^3}} (b_{11}{}^2 - b_{11} b_{22}) = 0. \end{aligned}$$

Sind endlich y und z unabhängig, x abhängig, so sind die Bedingungsgleichungen:

$$\text{(c)}\quad \begin{aligned} \frac{\partial t}{\partial y} &= \frac{\partial t}{\partial y} - \frac{\partial t}{\partial x} \cdot \frac{F_y}{F_x} = \frac{b_{22}{}^2 y}{2\sqrt{R^3}} - \frac{b_{11}{}^2 x}{2\sqrt{R^3}} \cdot \frac{b_{22} y}{b_{11} x} = \frac{y}{2\sqrt{R^3}} (b_{22}{}^2 - b_{11} b_{22}) = 0; \\ \frac{\partial t}{\partial z} &= \frac{\partial t}{\partial z} - \frac{\partial t}{\partial x} \cdot \frac{F_z}{F_x} = \frac{b_{33}{}^2 z}{2\sqrt{R^3}} - \frac{b_{11}{}^2 x}{2\sqrt{R^3}} \cdot \frac{b_{33} z}{b_{11} x} = \frac{z}{2\sqrt{R^3}} (b_{33}{}^2 - b_{11} b_{33}) = 0. \end{aligned}$$

Die Gleichungen (a) sind erfüllt für $x = y = 0$; die z-Achse kann eine Striktionslinie werden.

Alsdann wird für $x = y = 0$

$$\text{(10)}\quad \begin{aligned} \frac{\partial^2 t}{\partial x^2} &= \frac{1}{2\sqrt{R^3}} (b_{11}{}^2 - b_{11} b_{33}) = \frac{b_{11}}{2 b_{33}{}^3 z^3} (b_{11} - b_{33}); \\ \frac{\partial^2 t}{\partial y^2} &= \frac{1}{2\sqrt{R^3}} (b_{22}{}^2 - b_{22} b_{33}) = \frac{b_{22}}{2 b_{33}{}^3 z^3} (b_{22} - b_{33}); \\ \frac{\partial^2 t}{\partial x\, \partial y} &= 0; \quad \frac{\partial^2 t}{\partial x^2} \cdot \frac{\partial^2 t}{\partial y^2} - \left(\frac{\partial^2 t}{\partial x\, \partial y}\right)^2 = \frac{b_{11}\, b_{22}}{4 b_{33}{}^6 z^6} (b_{11} - b_{33})(b_{22} - b_{33}). \end{aligned}$$

Die Gleichungen (b) sind erfüllt für $x = z = 0$, d. h. die y-Achse kann ebenfalls eine Striktionslinie sein.

Nun wird für $x = z = 0$

$$\text{(11)}\quad \begin{aligned} \frac{\partial^2 t}{\partial z^2} &= \frac{1}{2\sqrt{R^3}} (b_{33}{}^2 - b_{22} b_{33}) = \frac{b_{33}}{2 b_{22}{}^3 y^3} (b_{33} - b_{22}); \\ \frac{\partial^2 t}{\partial x^2} &= \frac{1}{2\sqrt{R^3}} (b_{11}{}^2 - b_{11}\, b_{22}) = \frac{b_{11}}{2 b_{22}{}^3 y^3} (b_{11} - b_{22}); \\ \frac{\partial^2 t}{\partial z\, \partial x} &= 0; \quad \frac{\partial^2 t}{\partial z^2} \cdot \frac{\partial^2 t}{\partial x^2} - \left(\frac{\partial^2 t}{\partial z\, \partial x}\right)^2 = \frac{b_{11}\, b_{33}}{4 b_{22}{}^6 y^6} (b_{33} - b_{22})(b_{11} - b_{22}). \end{aligned}$$

Die Gleichungen (c) endlich sind erfüllt für $y=z=0$; die x-Achse kann eine Striktionslinie sein.

Für $y=z=0$ wird

$$\frac{\partial^2 t}{\partial y^2}=\frac{1}{2\sqrt{R^3}}(b_{22}{}^2-b_{11}\,b_{22})=\frac{b_{22}}{2\,b_{11}{}^3\,x^3}(b_{22}-b_{11});$$

$$(12)\quad \frac{\partial^2 t}{\partial z^2}=\frac{1}{2\sqrt{R^3}}(b_{33}{}^2-b_{11}\,b_{33})=\frac{b_{33}}{2\,b_{11}{}^3\,x^3}(b_{33}-b_{11});$$

$$\frac{\partial^2 t}{\partial y\,\partial z}=0;\ \frac{\partial^2 t}{\partial y^2}\cdot\frac{\partial^2 t}{\partial z^2}-\left(\frac{\partial^2 t}{\partial y\ \partial z}\right)^2=\frac{b_{22}\ b_{33}}{4\,b_{11}{}^6\,x^6}\,(b_{22}-b_{11})\ (b_{33}-b_{11}).$$

Wir können nun zur Untersuchung der einzelnen Arten der Centralflächen übergehen.

I. Das dreiachsige Ellipsoid. Sind die Koeffizienten der Gleichung (8) sämtlich positiv, so stellt dieselbe eine Schar von dreiachsigen Ellipsoiden dar, und zwar sind die Flächen reell für negative Werte von τ. Für positive Werte von τ erhalten wir imaginäre Ellipsoide.

Setzen wir fest, daß $b_{33} > b_{22} > b_{11}$ ist, so fällt die große Achse sämtlicher Flächen der Schar mit der x-Achse, die mittlere Achse mit der y-Achse und die kleine Achse mit der z-Achse des Koordinatensystems zusammen.

Striktionslinien der Schar können sein:

1. die z-Achse ($x=y=0$); 2. die y-Achse ($x=z=0$); 3. die x-Achse ($y=z=0$).

Für $x=y=0$ wird nach den Gleichungen (9) und (10) für positives z:

$$t=-\frac{1}{2\,b_{33}\,z}<0;\ \frac{\partial^2 t}{\partial x^2}<0;\ \frac{\partial^2 t}{\partial y^2}<0;\ \frac{\partial^2 t}{\partial x^2}\cdot\frac{\partial^2 t}{\partial y^2}-\left(\frac{\partial^2 t}{\partial x\ \partial y}\right)^2>0.$$

Die z-Achse ist also eine Striktionslinie der Schar von Ellipsoiden, und zwar, da t, $\frac{\partial^2 t}{\partial x^2}$, $\frac{\partial^2 t}{\partial y^2}$ gleiches Vorzeichen haben, eine Einschnürungslinie.

Für $x=z=0$ wird nach den Gleichungen (9) und (11) für positives y:

$$t=-\frac{1}{2\,b_{22}\,y}<0;\ \frac{\partial^2 t}{\partial z^2}>0;\ \frac{\partial^2 t}{\partial x^2}<0;\ \frac{\partial^2 t}{\partial z^2}\cdot\frac{\partial^2 t}{\partial x^2}-\left(\frac{\partial^2 t}{\partial z\ \partial x}\right)^2<0.$$

Die y-Achse ist keine Striktionslinie.

Für $y=z=0$ wird nach den Gleichungen (9) und (12) für positives x:

$$t=-\frac{1}{2\,b_{11}\,x}<0;\ \frac{\partial^2 t}{\partial y^2}>0;\ \frac{\partial^2 t}{\partial z^2}>0;\ \frac{\partial^2 t}{\partial y^2}\cdot\frac{\partial^2 t}{\partial z^2}-\left(\frac{\partial^2 t}{\partial y\ \partial z}\right)^2>0.$$

Die x-Achse ist also eine Striktionslinie und zwar, da t das entgegengesetzte Vorzeichen hat wie $\frac{\partial^2 t}{\partial y^2}$ und $\frac{\partial^2 t}{\partial z^2}$, eine Stauungslinie.

Unsere Theorie gestattet uns also, die drei Achsen eines Ellipsoids von einander zu unterscheiden.

Liegt eine Gleichung zweiten Grades vor, welche ein dreiachsiges Ellipsoid darstellt, so ersetzt man das absolute Glied durch einen variablen Parameter und bestimmt die Striktionslinien der so definierten Flächenschar. Das Striktionssystem besteht aus einer Stauungslinie, welche die große Achse liefert und aus einer Einschnürungslinie, welche die kleine Achse liefert. Die dritte Achse, welche dem Striktionssystem nicht angehört, ist die mittlere Achse.

II. Das verlängerte Rotationsellipsoid. Bestehen unter den Koeffizienten der Gleichung (8) die Bedingungen $b_{33} = b_{22} > b_{11}$, so stellt sie für negative Werte von τ eine Schar von verlängerten Rotationsellipsoiden dar.

Die Gleichungen (a) sind erfüllt für $x = 0$, da $\frac{\partial t}{\partial y} \equiv 0$ wird.

Dann ist nach (9) und (10) für positives y und z:

$$t = -\frac{1}{2b_{22}y + 2b_{33}z} = -\frac{1}{2b_{22}(y+z)} < 0; \quad \frac{\partial^2 t}{\partial x^2} < 0; \quad \frac{\partial^2 t}{\partial y^2} = 0;$$

$$\frac{\partial^2 t}{\partial x^2} \cdot \frac{\partial^2 t}{\partial y^2} - \left(\frac{\partial^2 t}{\partial x \, \partial y}\right)^2 = 0.$$

Die Gleichungen (b) sind ebenfalls erfüllt für $x = 0$, da $\frac{\partial t}{\partial z} \equiv 0$ wird.

Dann ist nach (9) und (11) für positives y und z:

$$t = -\frac{1}{2b_{22}(y+z)} < 0; \quad \frac{\partial^2 t}{\partial z^2} = 0; \quad \frac{\partial^2 t}{\partial x^2} < 0; \quad \frac{\partial^2 t}{\partial x^2} \cdot \frac{\partial^2 t}{\partial z^2} - \left(\frac{\partial^2 t}{\partial x \, \partial z}\right)^2 = 0.$$

Es tritt hier der auf Seite 6 erwähnte besondere Fall ein, in welchem also die yz-Ebene als Striktionsebene zu betrachten ist. Da nun t und $\frac{\partial^2 t}{\partial x^2}$ jedesmal gleiches Vorzeichen haben, so ist die yz-Ebene eine Einschnürungsebene.

Die Gleichungen (c) sind erfüllt für $y = z = 0$.

Dann ist nach (9) und (12) für positive Werte von x:

$$t = -\frac{1}{2b_{11}x} < 0; \quad \frac{\partial^2 t}{\partial y^2} > 0; \quad \frac{\partial^2 t}{\partial z^2} > 0; \quad \frac{\partial^2 t}{\partial y^2} \cdot \frac{\partial^2 t}{\partial z^2} - \left(\frac{\partial^2 t}{\partial y \, \partial z}\right)^2 > 0.$$

Die x-Achse ist eine Stauungslinie, da t ein anderes Vorzeichen hat wie $\frac{\partial^2 t}{\partial y^2}$ und $\frac{\partial^2 t}{\partial z^2}$.

Stellt also die Gleichung (1) eine Schar von verlängerten Rotationsellipsoiden dar, so besteht das Striktionssystem aus einer Stauungslinie und einer Einschnürungsfläche. Die Stauungslinie liefert die gemeinsame Rotationsachse, die Einschnürungsebene die dazu senkrechte Hauptdiametralebene.

III. Das abgeplattete Rotationsellipsoid. Genügen die Koeffizienten der Gleichung (8) der Bedingung:

$$b_{33} > b_{22} = b_{11},$$

so stellt dieselbe für negative Werte von τ eine Schar von abgeplatteten Rotationsellipsoiden dar.

Die Gleichungen (a) sind erfüllt für $x = y = 0$.

In diesem Falle ist nach (9) und (10) für positive Werte von z:

$$t = -\frac{1}{2\,b_{33}\,z} < 0;\quad \frac{\partial^2 t}{\partial x^2} < 0;\quad \frac{\partial^2 t}{\partial y^2} < 0;\quad \frac{\partial^2 t}{\partial x^2}\cdot\frac{\partial^2 t}{\partial y^2} - \left(\frac{\partial^2 t}{\partial x\,\partial y}\right)^2 > 0.$$

Die z-Achse ist eine Einschnürungslinie.

Die Gleichungen (b) sind erfüllt für $z = 0$, da $\frac{\partial t}{\partial x} \equiv 0$ wird.

Dann ist nach (9) und (10) für positive Werte von x und y:

$$t = -\frac{1}{2\,b_{11}\,(x+y)} < 0;\quad \frac{\partial^2 t}{\partial z^2} > 0;\quad \frac{\partial^2 t}{\partial x^2} = 0;\quad \frac{\partial^2 t}{\partial z^2}\cdot\frac{\partial^2 t}{\partial x^2} - \left(\frac{\partial^2 t}{\partial z\,\partial x}\right)^2 = 0.$$

Die Gleichungen (c) sind ebenfalls für $z = 0$ erfüllt, da $\frac{\partial t}{\partial y} \equiv 0$ wird.

Dann ist nach (9) und (12) für positive Werte von x und y:

$$t = -\frac{1}{2\,b_{11}\,(x+y)} < 0;\quad \frac{\partial^2 t}{\partial y^2} = 0;\quad \frac{\partial^2 t}{\partial z^2} > 0;\quad \frac{\partial^2 t}{\partial y^2}\cdot\frac{\partial^2 t}{\partial z^2} - \left(\frac{\partial^2 t}{\partial y\,\partial z}\right)^2 = 0.$$

Die xy-Ebene ist eine Stauungsebene.

Stellt also die Gleichung (1) eine Schar von abgeplatteten Rotationsellipsoiden dar, so besteht das Striktionssystem aus einer Einschnürungslinie und einer Stauungsebene. Die Einschnürungslinie liefert die gemeinsame Rotationsachse, die Stauungsebene die dazu senkreche Hauptdiametralebene.

IV. Das einschalige und zweischalige Hyperboloid. Betrachten wir τ als positiv, so stellt die Gleichung

$$b_{11}\,x^2 + b_{22}\,y^2 + b_{33}\,z^2 \pm \tau = 0 \tag{13}$$

bei negativem b_{33} eine Schar von zweischaligen oder einschaligen Hyperboloiden dar, je nachdem wir für τ das positive oder negative Vorzeichen wählen. Nehmen wir im ersten Falle noch an, daß $b_{22} > b_{11}$ sei, so sind die Gleichungen (a) erfüllt für $x = y = 0$.

Dann ergibt sich aus (9) und (10) bei positivem z:

$$t = -\frac{1}{2\,b_{33}\,z} > 0;\quad \frac{\partial^2 t}{\partial x^2} < 0;\quad \frac{\partial^2 t}{\partial y^2} < 0;\quad \frac{\partial^2 t}{\partial x^2}\cdot\frac{\partial^2 t}{\partial y^2} - \left(\frac{\partial^2 t}{\partial x\,\partial y}\right)^2 > 0.$$

Die z-Achse ist eine Stauungslinie. Sie ist aber auch die gemeinsame reelle Achse der Schar von zweischaligen Hyperboloiden.

Die Gleichungen (b) sind erfüllt für $x = z = 0$.

Dann ergibt sich aus (9) und (11) bei positivem y:

$$t = -\frac{1}{2\,b_{22}\,y} < 0;\quad \frac{\partial^2 t}{\partial z^2} > 0;\quad \frac{\partial^2 t}{\partial x^2} < 0;\quad \frac{\partial^2 t}{\partial z^2}\cdot\frac{\partial^2 t}{\partial x^2} - \left(\frac{\partial^2 t}{\partial z\,\partial x}\right)^2 < 0.$$

Die Bedingungen für das Vorhandensein einer Striktionslinie sind nicht erfüllt. Die y-Achse ist darum keine Striktionslinie.

Die Gleichungen (c) sind erfüllt für $y = z = 0$.

Dann ist nach (9) und (12) bei positivem x:

$$t = -\frac{1}{2\,b_{11}\,x} < 0;\quad \frac{\partial^2 t}{\partial y^2} > 0;\quad \frac{\partial^2 t}{\partial z^2} > 0;\quad \frac{\partial^2 t}{\partial y^2}\cdot\frac{\partial^2 t}{\partial z^2} - \left(\frac{\partial^2 t}{\partial y\,\partial z}\right)^2 > 0.$$

Die x-Achse ist eine Stauungslinie.

Stellt die Gleichung (1) eine Schar von zweischaligen Hyperboloiden dar, so besteht das Striktionssystem aus zwei Stauungslinien, welche zu der reellen und der großen imaginären Achse jeder Fläche der Schar führen. Die kleine imaginäre Achse gehört dem Striktionssystem nicht an.

Wählen wir nun in Gleichung (13) für τ das negative Vorzeichen unter der Voraussetzung:

$$b_{22} > b_{11}; \; b_{33} < 0,$$

so wird

$$(14) \qquad t = + \frac{1}{2\sqrt{b_{11}{}^2 x^2 + b_{22}{}^2 y^2 + b_{33}{}^2 z^2}},$$

und in entsprechender Weise ändern sich dann auch in den Gleichungen (10), (11), (12) die Vorzeichen der zweiten Ableitungen.

Nun sind die Gleichungen (a) erfüllt für $x = y = 0$.

Dann wird nach (14) und (10), unter Beachtung der veränderten Vorzeichen, bei positivem z:

$$t = \frac{1}{2\,b_{33}\,z} < 0; \; \frac{\partial^2 t}{\partial x^2} > 0; \; \frac{\partial^2 t}{\partial y^2} > 0; \; \frac{\partial^2 t}{\partial x^2} \cdot \frac{\partial^2 t}{\partial y^2} - \left(\frac{\partial^2 t}{\partial x\,\partial y}\right)^2 > 0.$$

Die z-Achse ist eine Stauungslinie.

Die Gleichungen (b) sind erfüllt für $x = z = 0$.

Dann wird nach (14) und (11), unter Beachtung der veränderten Vorzeichen, für positives y:

$$t = \frac{1}{2\,b_{22}\,y} > 0; \; \frac{\partial^2 t}{\partial z^2} < 0; \; \frac{\partial^2 t}{\partial x^2} > 0; \; \frac{\partial^2 t}{\partial z^2} \cdot \frac{\partial^2 t}{\partial x^2} - \left(\frac{\partial^2 t}{\partial z\,\partial x}\right)^2 < 0.$$

Die y-Achse gehört nicht dem Striktionssystem an.

Die Gleichungen (c) sind erfüllt für $y = z = 0$.

Dann wird nach (14) und (12) für positives x:

$$t = \frac{1}{2\,b_{11}\,x} > 0; \; \frac{\partial^2 t}{\partial y^2} < 0; \; \frac{\partial^2 t}{\partial z^2} < 0; \; \frac{\partial^2 t}{\partial y^2} \cdot \frac{\partial^2 t}{\partial z^2} - \left(\frac{\partial^2 t}{\partial y\,\partial z}\right)^2 > 0.$$

Die x-Achse ist eine Stauungslinie.

Stellt also die Gleichung (1) eine Schar von einschaligen Hyperboloiden dar, so besteht das Striktionssystem aus zwei Stauungslinien, welche die große reelle Achse und die imaginäre Achse jeder Fläche der Schar liefern. Die kleine reelle Achse gehört nicht dem Striktionssystem an.

Die Betrachtung der dem einschaligen und zweischaligen Hyperboloid entsprechenden Rotationsflächen führt leicht zu dem folgenden Ergebnis:

Die Rotationsachse ist eine Stauungslinie der zugehörigen Flächenschar, während die zur Rotationsachse senkrechte Hauptdiametralebene eine Stauungsebene derselben Flächenschar darstellt.

B. Die Paraboloide.

Eine Schar von Paraboloiden kann dargestellt werden durch die Gleichung

$$F(x, y, z, \tau) = b_{11}\, x^2 + 2\, b_{22}\, y^2 + b_{34}\, z + \tau = 0. \tag{15}$$

Dann wird

$$\frac{\partial F}{\partial x} = 2\, b_{11}\, x; \quad \frac{\partial F}{\partial y} = 2\, b_{22}\, y; \quad \frac{\partial F}{\partial z} = 2\, b_{34}; \quad \frac{\partial F}{\partial \tau} = 1.$$

$$t = -\frac{1}{2\sqrt{b_{11}^2 x^2 + b_{22}^2 y^2 + b_{34}^2}}. \tag{16}$$

t ist eine Funktion von x und y allein und wir bilden daher:

$$\frac{\partial t}{\partial x} = \frac{b_{11}^2 x}{2\sqrt{R^3}}; \quad \frac{\partial t}{\partial y} = \frac{b_{22}^2 y}{2\sqrt{R^3}}; \tag{17}$$

$\frac{\partial t}{\partial x}$ und $\frac{\partial t}{\partial y}$ werden gleich Null für $x = y = 0$. Alsdann wird

$$\begin{aligned} &\frac{\partial^2 t}{\partial x^2} = \frac{b_{11}^2}{2\, b_{34}^3}; \quad \frac{\partial^2 t}{\partial y^2} = \frac{b_{22}^2}{2\, b_{34}^3}; \\ &\frac{\partial^2 t}{\partial x^2} \cdot \frac{\partial^2 t}{\partial y^2} - \left(\frac{\partial^2 t}{\partial x\, \partial y}\right)^2 = \frac{b_{11}^2 \cdot b_{22}^2}{4\, b_{34}^6}. \end{aligned} \tag{18}$$

Soll nun die Gleichung (15) eine Schar von elliptischen Paraboloiden darstellen, so müssen b_{11} und b_{22} gleiches Vorzeichen haben; nehmen wir an, es sei $b_{11} > 0$; $b_{22} > 0$; $b_{34} > 0$, so wird für $x = y = 0$:

$$t = -\frac{1}{2\, b_{34}} < 0; \quad \frac{\partial^2 t}{\partial x^2} > 0; \quad \frac{\partial^2 t}{\partial y^2} > 0; \quad \frac{\partial^2 t}{\partial x^2} \cdot \frac{\partial^2 t}{\partial y^2} - \left(\frac{\partial^2 t}{\partial x\, \partial y}\right)^2 > 0.$$

Ist aber $b_{34} < 0$, so wird für $x = y = 0$:

$$t > 0; \quad \frac{\partial^2 t}{\partial x^2} < 0; \quad \frac{\partial^2 t}{\partial y^2} < 0; \quad \frac{\partial^2 t}{\partial x^2} \cdot \frac{\partial^2 t}{\partial y^2} - \left(\frac{\partial^2 t}{\partial x\, \partial y}\right)^2 > 0.$$

Die z-Achse ist eine Stauungslinie der Schar (15). Sie ist aber auch die reelle Achse jeder Fläche der Schar.

Haben b_{11} und b_{22} verschiedenes Vorzeichen, so stellt Gleichung (15) eine Schar von hyperbolischen Paraboloiden dar.

Es sei etwa $b_{11} > 0$; $b_{22} < 0$; $b_{34} > 0$. Dann wird für $x = y = 0$:

$$t < 0; \quad \frac{\partial^2 t}{\partial x^2} > 0; \quad \frac{\partial^2 t}{\partial y^2} > 0; \quad \frac{\partial^2 t}{\partial x^2} \cdot \frac{\partial^2 t}{\partial y^2} - \left(\frac{\partial^2 t}{\partial x\, \partial y}\right)^2 > 0.$$

Ist aber $b_{34} < 0$, so wird für $x = y = 0$:

$$t > 0; \quad \frac{\partial^2 t}{\partial x^2} < 0; \quad \frac{\partial^2 t}{\partial y^2} < 0; \quad \frac{\partial^2 t}{\partial x^2} \cdot \frac{\partial^2 t}{\partial y^2} - \left(\frac{\partial^2 t}{\partial x\, \partial y}\right)^2 > 0.$$

Die z-Achse ist auch hier eine Stauungslinie.

Stellt also eine Gleichung von der Form (1) eine Schar von elliptischen oder hyperbolischen Paraboloiden dar, so besteht das Striktionssystem aus einer Stauungslinie, welche die reelle Achse jeder Fläche der Schar liefert.

V. Kapitel.

Die Bestimmung der Achsen einer ebenen Kurve zweiter Ordnung mit Hilfe des Striktionssystems.

Die Untersuchung der Striktionslinien wird sehr vereinfacht, wenn wir uns auf die Betrachtung einer in einer Ebene liegenden Kurvenschar beschränken. In diesem Falle führt uns die Theorie zu einer interessanten und einfachen Bestimmung der Achsen einer Kurve zweiter Ordnung.

Die allgemeine Gleichung einer Kurve zweiter Ordnung ist

$$F(x,y) = a_{11}x^2 + 2a_{12}xy + a_{22}y^2 + 2a_{13}x + 2a_{23}y + a_{33} = 0,$$

wobei die aus den Koeffizienten gebildete Determinante von Null verschieden sein muß.

Ersetzen wir das absolute Glied a_{33} durch einen variablen Parameter τ, so erhalten wir die Gleichung einer Flächenschar

$$(1)\quad F(x,y,\tau) = a_{11}x^2 + 2a_{12}xy + a_{22}y^2 + 2a_{13}x + 2a_{23}y + \tau = 0.$$

Da die Koordinaten des Mittelpunktes irgend einer Kurve der Schar

$$x_0 = \frac{a_{22}a_{13} - a_{12}a_{23}}{a_{12}^2 - a_{11}a_{22}}; \quad y_0 = \frac{a_{11}a_{23} - a_{12}a_{13}}{a_{12}^2 - a_{11}a_{22}}$$

von τ unabhängig sind, so sind alle Kurven der Schar konzentrisch.

Sie haben auch alle dieselben Achsenrichtungen, denn der Ausdruck

$$(a)\qquad tg\,\vartheta = \frac{1}{a_{12}}\left(a_{11} - a_{22} \pm \sqrt{(a_{11} - a_{22})^2 + 4a_{12}^2}\right),$$

das ist die Tangente des Winkels, um den das ursprüngliche nach dem Mittelpunkt verschobene Koordinatensystem gedreht werden muß, damit die Gleichung (1) in die einfachste Form

$$a'_{11}x^2 + a'_{22}y^2 + \tau = 0$$

übergeht, ist ebenfalls von τ unabhängig.

Wir finden nun die Striktionslinien der Kurvenschar (1), indem wir bilden

$$t = -\frac{\frac{\partial F}{\partial \tau}}{\sqrt{\left(\frac{\partial F}{\partial x}\right)^2 + \left(\frac{\partial F}{\partial y}\right)^2}}.$$

Es ist

$$\frac{\partial F}{\partial \tau} = 1; \quad \frac{\partial F}{\partial x} = 2a_{11}x + 2a_{12}y + 2a_{13} = 2u;$$
$$\frac{\partial F}{\partial y} = 2a_{12}x + 2a_{22}y + 2a_{23} = 2v.$$

Die Bedingung für das Auftreten von Striktionslinien ist

$$\frac{dt}{dx} = 0.$$

Wir erhalten

$$\frac{dt}{dx} = \frac{a_{11}u + a_{12}v}{2\sqrt{(u^2+v^2)^3}} - \frac{u}{v} \cdot \frac{a_{12}u + a_{22}v}{2\sqrt{(u^2+v^2)^3}} = 0;$$

oder

$$v(a_{11}u + a_{12}v) - u(a_{12}u + a_{22}v) = 0;$$

$$(2) \qquad a_{12}u^2 - (a_{11} - a_{22})uv - a_{12}v^2 = 0.$$

Diese Gleichung stellt die beiden Geraden

$$(3) \qquad u = \frac{v}{2a_{12}}\left(a_{11} - a_{22} \pm \sqrt{(a_{11}-a_{22})^2 + 4a_{12}^2}\right)$$

oder

$$(3a) \quad a_{11}x + a_{12}y + a_{13} = \frac{a_{12}x + a_{22}y + a_{23}}{2a_{12}}\left(a_{11} - a_{22} \pm \sqrt{(a_{11}-a_{22})^2 + 4a_{12}^2}\right)$$

dar.

Besteht die Schar (1) aus Kreisen, so ist

$$a_{11} = a_{22}; \; a_{12} = 0,$$

und wir erhalten in (3a) auf der rechten Seite den unbestimmten Wert $\frac{0}{0}$, d. h. die Striktionslinien sind unbestimmt; die Kreise sind äquidistant.

Für eine Parabelschar gilt die Bedingung

$$a_{11}a_{22} - a_{12}^2 = 0.$$

Dann erhalten wir

$$a_{11}x + a_{12}y + a_{13} = \frac{a_{12}x + a_{22}y + a_{23}}{2a_{12}}\left(a_{11} - a_{22} \pm \sqrt{a_{11}^2 + a_{22}^2 + 2a_{11}a_{22}}\right)$$

oder

$$(\mathrm{I}) \qquad a_{11}x + a_{12}y + a_{13} = (a_{12}x + a_{22}y + a_{23})\frac{a_{11}}{a_{12}}$$

und

$$(\mathrm{II}) \quad a_{11}x + a_{12}y + a_{13} = -(a_{12}x + a_{22}y + a_{23})\frac{a_{22}}{a_{12}}.$$

$$(\mathrm{Ia}) \quad a_{11}a_{12}x + a_{12}^2y + a_{12}a_{13} = a_{11}a_{12}x + a_{11}a_{22}y + a_{11}a_{23};$$

$$(\mathrm{IIa}) \quad a_{11}a_{12}x + a_{12}^2y + a_{12}a_{13} = -a_{12}a_{22}x - a_{22}^2y - a_{22}a_{23}.$$

Die Gleichung (IIa) stellt eine eigentliche Striktionslinie dar, während (Ia) die unendlich ferne Gerade repräsentiert, da die Unbekannten ganz fortfallen.

Die Gleichung (IIa) stellt auch die Achse einer jeden Parabel der Schar dar. Denn die Geraden

$$a_{11}x + a_{12}y + a_{13} = 0$$

und

$$a_{12}x + a_{22}y + a_{23} = 0$$

sind hier parallel, also Durchmesser jeder Kurve der Schar.

Die Richtungstangente ist $-\frac{a_{11}}{a_{12}} = -\frac{a_{12}}{a_{22}}$.

Die Richtungstangente der normalen Sehne ist dann $\frac{a_{22}}{a_{12}}$, daher die Gleichung der Parabelachse:

$$a_{12}(a_{11}x + a_{12}y + a_{13}) + a_{22}(a_{12}x + a_{22}y + a_{23}) = 0.$$

Letztere Gleichung ist aber identisch mit der Gleichung (IIa).

Die Schar (1) möge nun ein bestimmtes Centrum haben. Verschieben wir das Koordinatensystem nach demselben, so erhalten wir aus (2)

$$a_{12}(a_{11}x' + a_{12}y')^2 - (a_{11} - a_{22})\,(a_{11}x' + a_{12}y')\,(a_{12}x' + a_{22}y') \\ - a_{12}(a_{12}x' + a_{22}y')^2 = 0$$

oder

$$a_{12}x'^2(a_{11}a_{22} - a_{12}^2) - (a_{11} - a_{22})\,(a_{11}a_{22} - a_{12}^2)\,x'y' \\ - a_{12}y'^2(a_{11}a_{22} - a_{12}^2) = 0;$$

(4) $$a_{12}x'^2 - (a_{11} - a_{22})\,x'y - a_{12}y'^2 = 0;$$

(5) $$x' = \frac{1}{2a_{12}}\,y'\left(a_{11} - a_{22} \pm \sqrt{(a_{11} - a_{22})^2 + 4a_{12}^2}\right).$$

Die Striktionslinie zerfällt in zwei zu einander senkrechte Geraden, da das Produkt der beiden Richtungstangenten $tg\,\varphi_1 \cdot tg\,\varphi_2 = -1$ ist.

Vergleichen wir die Gleichung (5) mit (a), so sehen wir, daß

$$tg\,\varphi = \frac{1}{2a_{12}}\left(a_{11} - a_{22} \pm \sqrt{(a_{11} - a_{22})^2 + 4a_{12}^2}\right) = tg\,\vartheta$$

ist, d. h. die gefundenen Striktionslinien sind die Achsen einer jeden Kurve der Schar.

Es ergibt sich somit zur Bestimmung der Achsen einer beliebig gegebenen Kurve zweiter Ordnung folgende Regel:

Ist $F(x,y) = 0$ die Gleichung einer Kurve zweiter Ordnung, so ersetze man das absolute Glied der Gleichung durch einen variablen Parameter τ und bestimme die Striktionslinien der so definierten Kurvenschar. Diese sind die Achsen der gegebenen Kurve. Oder auch: Man bilde den Ausdruck $t = -\dfrac{1}{\sqrt{\left(\frac{\partial F}{\partial x}\right)^2 + \left(\frac{\partial F}{\partial y}\right)^2}}$

Die totale Ableitung desselben nach x oder y, gleich Null gesetzt, liefert die Achsen der Kurve.

Stellt die Gleichung $F(x,y) = 0$ eine Ellipse dar, so können wir auch die große und kleine Achse unterscheiden.

Betrachten wir nämlich die einfachste Form der Gleichung der Kurvenschar (1), nämlich

(1 a) $$a_{11}x^2 + a_{22}y^2 + \tau = 0,$$

so wird

$$\frac{\partial F}{\partial x} = 2a_{11}x; \quad \frac{\partial F}{\partial y} = 2a_{22}y;$$

$$t = -\frac{1}{2\sqrt{a_{11}^2x^2 + a_{22}^2y^2}}.$$

$$\frac{dt}{dx} = -\frac{a_{11}x(a_{22} - a_{11})}{2\sqrt{(a_{11}^2x^2 + a_{22}^2y^2)^3}}.$$

$\dfrac{dt}{dx}$ verschwindet für $x = 0$. Die y-Achse ist also eine Striktionslinie.

Bilden wir nun $\frac{d^2 t}{d\mathrm{x}^2}$, indem wir zugleich $\mathrm{x} = 0$ setzen, so erhalten wir

$$\frac{d^2 t}{d\mathrm{x}^2}_{(\mathrm{x}=0)} = -\frac{a_{11}(a_{22} - a_{11})}{2\sqrt{(a_{11}{}^2 \mathrm{x}^2 + a_{22}{}^2 y^2)^3}} = -\frac{a_{11}(a_{22} - a_{11})}{2\,a_{22}{}^3 y^3}.$$

Haben a_{11} und a_{22} gleiches Vorzeichen, stellt also die Gleichung (1 a) eine Ellipsenschar dar, so sind die Vorzeichen von t und $\frac{d^2 t}{d\mathrm{x}^2}$ gleich, wenn $a_{22} > a_{11}$ ist; alsdann ist $/t/$ ein Minimum und $\mathrm{x} = 0$ eine Einschnürungslinie. Die y-Achse enthält aber in diesem Falle auch die kleine Achse jeder Ellipse der Schar (1 a).

Ist jedoch $a_{22} < a_{11}$, so haben t und $\frac{d^2 t}{d\mathrm{x}^2}$ stets verschiedenes Vorzeichen für $\mathrm{x} = 0$; alsdann ist die y-Achse eine Stauungslinie. Sie enthält aber dann auch die große Achse jeder Ellipse der Schar (1 a).

Die Striktionslinie einer Ellipsenschar (1) besteht also aus einer Stauungs- und einer Einschnürungslinie. Die Stauungslinie liefert die Gleichung der großen Achse, die Einschnürungslinie die Gleichung der kleinen Achse jeder Ellipse der Schar.

Stellt die Gleichung (1 a) eine Hyperbelschar dar, haben also a_{11} und a_{22} verschiedenes Vorzeichen, so haben t und $\frac{d^2 t}{d\mathrm{x}^2}$ für $\mathrm{x} = 0$ stets verschiedenes Vorzeichen. Eine Unterscheidung der beiden Achsen ist in diesem Falle nicht möglich.

Soll nun die Gleichung (1 a) eine Ellipsenschar darstellen, so muß

$$a_{11}\,a_{22} - a_{12}{}^2 > 0$$

sein. Alsdann haben wir $\frac{d^2 t}{d\mathrm{x}^2}$ zu bilden unter Berücksichtigung von Gleichung (3). Wir erhalten:

$$\frac{d^2 t}{d\mathrm{x}^2} = \Big[\frac{1}{4\,a_{12}{}^2}(a_{11} - a_{22} \pm \mathrm{R})^2\,(a_{22}{}^2 + 2\,a_{12}{}^2 - a_{11}\,a_{22}) \\ - (a_{11} - a_{22} \pm \mathrm{R})\,(a_{11} + a_{22}) + a_{11}{}^2 + 2\,a_{12}{}^2 - a_{11}\,a_{22}\Big].$$

Es ergeben sich zwei Werte, je nachdem das Vorzeichen von R gewählt wird.

Haben nun etwa $\frac{d^2 t}{d\mathrm{x}^2}$ und t für positives R verschiedenes Vorzeichen, so liefert Gleichung (3a) für positives R die große Achse der Kurven (1). Alsdann werden $\frac{d^2 t}{d\mathrm{x}^2}$ und t für negatives R gleiches Vorzeichen haben, und und Gleichung (3a) liefert dann für negatives R die kleine Achse von (1).

Beispiel 1: Die Achsen der Ellipse

$$x^2 + 2xy + 2y^2 + 2x + 2y - 5 = 0$$

haben nach (3a) die Gleichungen:

$$\frac{x + y + 1}{x + 2y + 1} = \frac{1}{2}(-1 \pm \sqrt{5}).$$

t wird für alle Werte von x und y negativ.

Ferner wird

$$\frac{d^2 t}{dx^2}_{(R = +\sqrt{5})} = 10 - 5\sqrt{5} < 0,$$

$$\frac{d^2 t}{dx^2}_{(R = -\sqrt{5})} = 10 + 5\sqrt{5} > 0.$$

Die Gleichung der großen Achse ist also:

$$\frac{x + y + 1}{x + 2y + 1} = -\frac{1}{2}(1 + \sqrt{5}). \quad (R = -\sqrt{5}).$$

Die Gleichung der kleinen Achse ist:

$$\frac{x + y + 1}{x + 2y + 1} = \frac{1}{2}(-1 + \sqrt{5}). \quad (R = +\sqrt{5}).$$

Beispiel 2: Die Achsen der Hyperbel

$$x^2 + 4xy + 2y^2 + 2x + 2y + 3 = 0$$

sind:

$$\frac{\frac{\partial F}{\partial x}}{\frac{\partial F}{\partial y}} = \frac{1}{2a_{12}}\left(a_{11} - a_{22} \pm \sqrt{(a_{11} - a_{22})^2 + 4a_{12}^2}\right)$$

also

$$\frac{x + 2y + 1}{2x + 2y + 1} = \frac{1}{4}(-1 \pm \sqrt{17}).$$

Aus den vorhergehenden Betrachtungen ergeben sich auch leicht folgende Resultate für die Cylinderflächen zweiter Ordnung:

Stellt eine Gleichung von der Form (1) auf Seite 18 eine Schar von elliptischen Cylindern dar, so besteht das Striktionssystem aus einer Stauungs- und einer Einschnürungsebene. Die Stauungsebene ist die Ebene der großen Achsen, die Einschnürungsebene die Ebene der kleinen Achsen aller Querschnitte jedes Cylinders der Schar.

Stellt die Gleichung (1), Seite 18, eine Schar von hyperbolischen Cylindern dar, so besteht das Striktionssystem aus zwei Stauungsflächen, welche die Hauptdiametralebene jedes Cylinders der Schar liefern.

Stellt endlich die Gleichung (1), Seite 18, eine Schar von parabolischen Cylindern dar, so besteht das Striktionssystem aus einer Stauungsebene, welche zu der einzigen Hauptdiametralebene jedes Cylinders der Schar führt.

Bilden wir nun $\frac{d^2 t}{d x^2}$ erhalten wir

$$\frac{d^2 t}{d x^2}_{(x=0)} = - \qquad - a_{11}). \qquad {}^3 y^3$$

Haben a_{11} und a_2 eichung (1a) eine Ellipsenschar dar, sc gleich, wenn $a_{22} > a_{11}$ ist; alsdann i ischnürungslinie. Die y-Achse enth Achse jeder Ellipse der Schar (1a).

Ist jedoch $a_{22} < a$ s Vorzeichen für $x = 0$; alsdann ist d ält aber dann auch die große Achse je

Die Striktionsli t also aus einer Stauungs- und Stauungslinie liefert die Glei chnürungslinie die Gleichung c r Schar.

Stellt die Gleichun also a_{11} und a_{22} verschiedenes Vorzei tets verschiedenes Vorzeichen. Eine t in diesem Falle nicht möglich.

Soll nun die Glei so muß

sein. Alsdann haben w on Gleichung (3). Wir erhalten:

$$\frac{d^2 t}{d x^2} = \left[\frac{1}{4 a_{12}{}^2} \qquad {}_1 a_{22}) \right.$$
$$\left. - (a_{11} - \qquad {}^2 - a_{11} a_{22}\right].$$

Es ergeben sich n von R gewählt wird.

Haben nun etwa s Vorzeichen, so liefert Gleichung (3a Kurven (1). Alsdann werden $\frac{d^2 t}{d x^2}$ u n haben, und und Gleichung (3a) lie chse von (1).