Wissenschaftliche Beilage

zum

Jahresbericht über das Königliche Friedrich-Wilhelms-Gymnasium

zu Kottbus.

Ostern 1896.

Der geometrische Lern- und Übungsstoff der Obertertia,

die Ableitung der 7 niedern Rechnungsarten

und die Entwicklung des Zahlenbegriffs in der elementaren Arithmetik.

Von

Eduard Weber, Oberlehrer.

1896 Progr. No. 70.

Albert Heine, Kottbus.

Der planimetrische Lern- und Übungsstoff für Untertertia ist in dem Jahresbericht Ostern 1895 behandelt; hieran schliesst sich der planimetrische Stoff für Obertertia, die Ableitung der 7 niedern Rechnungsarten und eine kurze Entwicklung des Zahlenbegriffs in der elementaren Arithmetik.

§ 1.

Grössenbestimmungen von Linien im Dreieck.

Erklärung: Die Summe der 3 Seiten eines Dreiecks, der Umfang, werde mit 2 s bezeichnet, also $a + b + c = 2s$, dann ist durch Subtraktion von $2a = 2a$, $2b = 2b$, $2c = 2c$

$$\begin{aligned} -a + b + c &= 2(s - a) \\ a - b + c &= 2(s - b) \\ a + b - c &= 2(s - c). \end{aligned}$$

Lehrsatz 1. Die Berührungspunkte des Inkreises sind von den Ecken des Dreiecks beziehungsweise um $s - a$, $s - b$, $s - c$ entfernt.

Beweis. (Fig. 1) $AD = AF$ als Berührende des Kreises O von dem Punkte A.

$$\begin{aligned} AD &= c - BD \\ AF &= b - CF \\ \hline \text{folglich } AD + AF &= c + b - (BD + CF); \\ BD + CF &= BE + CE = a, \\ \text{folglich } 2\ AD &= c + b - a, \\ \text{oder } AD &= \frac{-a + b + c}{2} = s - a. \end{aligned}$$

Ebenso wird bewiesen, dass $BE = s - b$
und $CF = s - c$ ist.

Lehrsatz 2. Die Berührungspunkte der Ankreise sind von den gegenüberliegenden Ecken des Dreiecks um s entfernt.

Beweis. (Fig.1) $CH = CJ$ als Berührende des Kreises O_c.

$$\begin{aligned} CH &= a + BH \\ CJ &= b + AJ \\ \hline \text{folglich } CH + CJ &= a + b + (BH + AJ); \\ BH + AJ &= BG + AG = c, \\ \text{folglich } 2\ CH &= a + b + c, \\ \text{oder } CH &= \frac{a + b + c}{2} = s. \end{aligned}$$

Dasselbe wird von den Entfernungen der Berührungspunkte der Ankreise O_a und O_b von den Ecken A und B bewiesen.

Lehrsatz 3. Die Berührungspunkte der Ankreise sind von den auf derselben Seite liegenden Berührungspunkten des Inkreises um die zwischenliegende Dreiecksseite entfernt.

Beweis. (Figur 1). $FJ = CJ - CF$

$$= \frac{a + b + c}{2} - \frac{a + b + c}{2}$$

$$= s - (s - c) = c.$$

§ 2.

Gegenseitige Abhängigkeit von Linien und Winkeln im Dreieck.

Vorausgesetzt wird die Kenntnis und der Gebrauch der geometrischen Örter aus dem Übungsstoff für IIIb.

I. Der Ort aller Punkte, welche von einem gegebenen Punkte eine gegebene Entfernung haben, ist die von diesem Punkte, dem Mittelpunkte, mit der gegebenen Entfernung gezogene Kreislinie.

II. Der Ort aller Punkte, welche von 2 gegebenen Punkten dieselbe Entfernung haben, ist die Mittelsenkrechte auf der Verbindungslinie der beiden gegebenen Punkte.

III. Der Ort aller Punkte, welche von einer gegebenen Graden dieselbe Entfernung haben, ist eine Gleichlaufende zu ihr.

IV. Der Ort aller Punkte, welche von den Schenkeln eines Winkels dieselbe Entfernung haben, ist die Halbierungslinie dieses Winkels.

V. Der Ort der Mitten aller gleichen Sehnen ist der mit dem zur Sehne gehörigen Abstande von demselben Mittelpunkt gezogene gleichlaufende Kreis.

VI. Der Ort für die Spitzen aller rechtwinkligen Dreiecke über derselben Strecke ist der über dieser Strecke als Durchmesser gezogene Halbkreis.

VII. Der Ort für die Spitzen aller gleichen Winkel über einer gegebenen Strecke ist der Kreisbogen, welcher die Strecke als Sehne und den Winkel als Umfangswinkel fasst.

Der Halbmesser des Inkreises heisse ϱ, die der Ankreise mit den Mittelpunkten O_a, O_b, O_c beziehungsweise ϱ_a, ϱ_b, ϱ_c, der des Umkreises r.

Lehrsatz 1. Wenn s und ϱ_a gegeben ist, so ist auch α gegeben.

Beweis. (Figur 2). Im $\triangle ADO_a$ ist $AD = s$, $O_aD = \varrho_a$, $\angle O_aAD = \frac{\alpha}{2}$ und $\angle O_aDA = R$, das Dreieck ist also durch diese 4 Stücke überbestimmt, es genügen demnach zur Darstellung dieses Dreiecks ausser dem R 2 Stücke, z. B. s und ϱ_a, sodass α hierdurch mitgegeben ist.

Zusatz. Durch s und α ist ϱ_a, durch α und ϱ_a ist s gegeben. Dieselbe Beziehung findet zwischen s, ϱ_b und β; s, ϱ_c und γ statt.

Solche 3 Stücke erlauben eine bestimmte Zeichnung des $\triangle ABC$ nicht, da nur 2 dieser Stücke unabhängig von einander sind und das 3te sich aus diesen mit Hülfe eines rechtwinkligen Dreiecks ergiebt.

Lehrsatz 2. Wenn $s - a$ und ϱ gegeben ist, so ist auch α gegeben.

Beweis. (Fig. 2). Im $\triangle AEO$ ist $AE = s - a$, $OE = \varrho$, $\angle OAE = \frac{\alpha}{2}$ und $\angle OEA = R$ gegeben, folglich ist das Dreieck durch diese Stücke überbestimmt, es genügen also zur Darstellung des $\triangle AOE$ ausser R die Stücke $s - a$ und ϱ, folglich ist $\frac{\alpha}{2}$, demnach α mitgegeben.

Zusatz. Durch $s - a$ und α ist ϱ, durch α und ϱ ist $s - a$ gegeben. Dieselbe Beziehung findet zwischen $s - b$, ϱ und β, ferner zwischen $s - c$, ϱ und γ statt.

1. Aufg. Ein Dreieck aus $a + b + c = 2s$, a und ϱ_c zu zeichnen.

Anleitung. (Fig. 1). Durch s und ϱ_c ist γ, durch a ist CB gegeben, dann ist BA die Berührende an O_c.

2. Aufg. Ein Dreieck aus $a + b - c = 2(s - c)$, α und ϱ zu zeichnen.

Anleitung. (Fig. 2). Durch $s - c$ und ϱ ist γ gegeben, AB ist die Berührende an O, welche mit CA den $\angle \alpha$ bildet.

3. Aufg. Von einem gegebenen Punkte durch einen gegebenen Winkel eine Linie so zu ziehen, dass das entstandene Dreieck einen gegebenen Umfang hat.

Anleitung. Man denkt an den Ankreis, welcher dem gegebenen Winkel gegenüberliegt; die Berührungspunkte desselben sind von dem Scheitel um den halben Umfang entfernt.

4. Aufg. Von einem gegebenen Punkte durch einen gegebenen Winkel eine Linie so zu ziehen, dass in dem entstandenen Dreieck a + b — c von gegebener Grösse ist.

Anleitung. Man denkt an den Inkreis.

5. Aufg. In einem Dreieck zu einer Seite eine Gleichlaufende so zu ziehen, dass die Summe beider Linien der Summe der obern Abschnitte gleich ist.

Anleitung. (Fig. 3). In dem △ CDE ist CD + CE — DE bekannt, folglich auch der Inkreis des △ CDE.

§ 3.

Zwei Kreise.

Erklärungen und Folgerungen. 2 Kreise können 2 Punkte, einen oder keinen Punkt gemeinsam haben. Im ersten Fall schneiden die Kreise einander, im zweiten berühren sie einander von aussen oder innen, im dritten liegen sie ausser einander oder der eine liegt im andern.

Die Verbindungslinie der Mittelpunkte von 2 Kreisen heisst Achse oder Centrale.

Schneiden die Kreise einander, so ist die Achse kleiner als die Summe der beiden Halbmesser. Die Verbindungslinie der beiden Durchschnittspunkte ist die gemeinschaftliche Sehne und steht senkrecht zur Achse. Berühren die Kreise einander von aussen oder innen, so ist die Achse gleich der Summe oder dem Unterschied der Halbmesser. Die auf der Achse im Berührungspunkt errichtete Senkrechte ist die gemeinschaftliche Berührende beider Kreise. Liegen die Kreise ausser einander, so ist die Achse grösser als die Summe der Halbmesser. Die Berührenden beider Kreise schneiden einander auf der Achse. Liegt ein Kreis in dem andern, so ist die Achse kleiner als der Unterschied der Halbmesser. Die Berührenden des inneren Kreises sind Sehnen des umschliessenden. Haben die Kreise den Mittelpunkt gemeinsam, sind sie gleichlaufend oder konzentrisch, so ist die Achse = 0. Die Berührenden des innern, zugleich Sehnen des umschliessenden Kreises sind einander gleich.

6. Aufg. An 2 gegebene Kreise die gemeinschaftlichen Berührenden zu ziehen.

Anleitung. (Fig. 4). Man zieht über der Achse OK einen Halbkreis und in dem grössern Kreise von dem Mittelpunkt aus mit der Summe oder dem Unterschied der beiden Halbmesser Kreisbögen, welche den Halbkreis in A und B schneiden, dann zieht man von K, dem Mittelpunkte des kleinern Kreises, gleichlaufende Halbmesser nach entgegengesetzter und gleicher Richtung und erhält durch die Verbindungslinien der Endpunkte eine innere und äussere Berührende. Dasselbe erreicht man durch den Halbkreis nach entgegengesetzter Richtung. Man kann also an 2 Kreise 4 Berührende, 2 äussere und 2 innere, ziehen.

7. Aufg. Durch 2 auseinander liegende Kreise eine Linie so zu ziehen, dass sie die Kreise unter 2 gegebenen Strecken schneidet.

Lösung. Ort V. 6. Aufg.

Da die verlängerten Dreiecksseiten die gemeinsamen Berührenden des Inkreises und der Ankreise sind, so ergiebt sich aus den beiden ersten Abschnitten in Verbindung mit der 6. Aufgabe die Lösung folgender Aufgaben:

Ein Dreieck zu zeichnen aus

8. Aufg. ϱ, ϱ_c, a + b + c.
9. Aufg. ϱ, ϱ_c, a + b — c.
10. Aufg. ϱ, γ, c.
11. Aufg. ϱ_c, α, c.

12. Aufg. Von einem gegebenen Punkte sind an einen Kreis die beiden Berührenden gezogen; man soll eine dritte so ziehen, dass das zwischen den beiden andern liegende Stück eine gegebene Grösse hat.

Anleitung. (Fig. 5). Es ist

$$\begin{aligned} PE + PF &= PC + PD - (CE + DF) \\ &= PC + PD - CD \\ &= PC + PD + CD - 2\,CD \end{aligned}$$

$$\text{also } 2\,PE = 2\,PA - 2\,CD$$

$$\text{und } PE = PA - CD,$$

hierdurch ist Kreis O bestimmt, die gesuchte Linie ist die gemeinsame Berührende der beiden Kreise.

13. Aufg. Es ist ein Kreis und ausserhalb desselben ein Winkel gegeben; man soll eine Grade so ziehen, dass sie den Kreis berührt und von dem Winkel ein Dreieck abschneidet, dessen Umfang von gegebener Grösse ist.

Anleitung. Durch die letzte Forderung ist ein Ankreis gegeben; die gesuchte Linie ist die gemeinschaftliche Berührende der beiden Kreise.

§ 4.

Der Umkreis.

Zieht man in einem $\triangle$ ABC (Fig. 6) von einer Ecke aus den Durchmesser des umbeschriebenen Kreises CD, ferner AD, so ist in dem rechtwinkligen Dreieck ACD $AC = b$, $CD = 2r$, $ADC = \beta$, folglich ist das Dreieck durch die 3 Stücke b, 2 r und β überbestimmt, da als 4tes Stück der R hinzukommt.

Es genügen demnach zur Zeichnung eines Dreiecks nicht die 3 Stücke a, α, r; b, β, r; c, γ, r, da nur 2 unabhängig von einander sind und das 3te mitgegeben ist.

Ist also a und α gegeben, so lässt sich mit Hülfe eines rechtwinkligen Dreiecks r herstellen, ebenfalls α durch a und r und a durch α und r.

Ein Dreieck zu zeichnen aus

14. Aufg. r, γ, t_c.
15. Aufg. r, α, h_a.
16. Aufg. c, γ, t_c.
17. Aufg. c, r, ϱ.
18. Aufg. a, r, ϱ_a.

Die Auffindung der 18. Aufgabe vollzieht sich folgendermassen: Da a und r gegeben ist, so ist α mitgegeben. Durch α und ϱ_a ist der Ankreis O_a bestimmt. Die Berührungspunkte des Inkreises sind von den auf derselben Seite liegenden des Ankreises um a entfernt, folglich ist der Inkreis mitgegeben. Die gemeinschaftliche innere Berührende der beiden Kreise schneidet von den Schenkeln von α das gesuchte Dreieck ab.

Die Lösung ergiebt sich also durch Anwendung von § 4, § 2 Lehrsatz 1 Zusatz; § 1 Lehrsatz 3 und § 3 6. Aufgabe.

§ 5.

Der Kreis und das einbeschriebene (Sehnen-) Viereck.

Um jedes Dreieck lässt sich ein Kreis beschreiben, aber nicht um jedes Viereck; denn zeichnet man durch 3 Ecken einen Kreis, so kann die 4te Ecke ausserhalb oder innerhalb des Kreises liegen.

Erklärung. Ein Viereck, dessen 4 Ecken auf dem Umfange eines Kreises liegen, heisst Sehnenviereck.

Lehrsatz. Im Sehnenviereck betragen die Summen der gegenüberliegenden Winkel je 2 R, folglich sind die Summen der gegenüberliegenden Winkel einander gleich.

Beweis. (Fig. 7). $\angle$ ABC + ADC = der halben Summe der zugehörigen Mittelpunktswinkel AOC und COA. Da die Summe der Mittelpunktswinkel 4 R ist, so ist $\angle$ ABC + ADC = 2 R, daher auch $\angle$ BAD + BCD = 2 R, also $\angle$ ABC + ADC = BAD + BCD.

Umkehrung. Beträgt in einem Viereck die Summe der gegenüberliegenden Winkel 2 R, oder sind die Summen der gegenüberliegenden Winkel einander gleich, so lässt sich um das Viereck ein Kreis beschreiben.

Beweis. (Fig. 8). Durch 3 Ecken lässt sich stets ein Kreis legen. Gesetzt, dieser Kreis gehe nicht durch die 4te Ecke D, sondern er schneide eine Seite oder ihre Verlängerung in E, so würde ein neues Sehnenviereck ABCE entstehen, in welchem die Summe der Gegenwinkel 2 R beträgt, folglich wäre $\angle B + E = 2R$, da $\angle B + D = 2R$ gegeben ist, so wäre

$$\angle B + D = \angle B + E,$$

dies um $\angle B = B$ vermindert, würde

$\angle D = E$ geben.

Dies ist ein Widerspruch gegen den Satz: Der Aussenwinkel eines Dreiecks ist grösser als ein gegenüberliegender innerer Winkel.

Es ist also unmöglich, dass der Kreis durch einen andern Punkt als durch D. geht.

Anmerkung. Da in dem rechtwinkligen Pm die Summen der Gegenwinkel 2 R betragen, so lässt sich um dieselben ein Kreis beschreiben.

§ 6.
Der Kreis und das umbeschriebene (Berührungs-) Viereck.

In jedes Dreieck lässt sich ein Kreis beschreiben, aber nicht in jedes Viereck, denn zieht man einen Kreis, der 3 Seiten des Vierecks berührt, so kann er die 4te schneiden oder gar nicht erreichen.

Erklärung. Ein Viereck, in welchem ein Kreis so liegt, dass er die Seiten berührt, heisst umbeschriebenes (Berührungs-, Tangenten-) Viereck.

Lehrsatz. Im umbeschriebenen Viereck sind die Summen der Gegenseiten gleich.

Beweis. (Fig. 9). Nach dem Satze: Die von einem Punkte an einen Kreis gezogenen Berührenden sind einander gleich, ist
$$\begin{aligned} AE &= AH \\ BE &= BF \\ CG &= CF \\ DG &= DH \end{aligned}$$
durch Addtition $AE + BE + CG + DG = AH + DH + BF + CF$
oder $AB + CD = AD + BC.$

Umkehrung. Sind in einem Viereck die Summen der Gegenseiten gleich, so lässt sich in dasselbe ein Kreis beschreiben.

Beweis. (Fig. 10). Es lässt sich stets ein Kreis zeichnen, der 3 Seiten des Vierecks berührt, sein Mittelpunkt ist der Durchschnittspunkt der beiden Winkelhalbierenden. Gesetzt, dieser Kreis berühre die 4te Seite nicht, so kann er sie schneiden oder gar nicht erreichen; in beiden Fällen lässt sich von einer Ecke, etwa von C aus eine Berührende ziehen, wodurch ein neues Berührungsviereck ABCE entsteht. In diesem wäre
$AB + CE = BC + AE$, dies verglichen mit der Voraussetzung
$AB + CD = BC + AD$
giebt durch Subtraktion $CE - CD = DE$,
also einen Widerspruch gegen den Satz: Der Unterschied zweier Dreiecksseiten ist kleiner als die dritte. Es ist also unmöglich, dass der Kreis die 4te Seite schneidet oder gar nicht erreicht, also muss er sie berühren.

Anmerkung. Da in den gleichseitigen Pm die Summen der Gegenseiten gleich sind, so lassen sich in dieselben Kreise beschreiben. Es sind also Sehnenvierecke: Rechtecke und Quadrate. Berührungsvierecke: Rhomben und Quadrate.

§ 7.
Aufgaben über Sehnen- und Berührungsvierecke.

Ein Dreieck ist bestimmt durch 3 von einander unabhängige Stücke, von denen mindestens 1 eine Linie sein muss. Ein Viereck lässt sich durch eine Eckenlinie in 2 Dreiecke zerlegen, von denen das eine durch 3 Stücke bestimmt ist, hierdurch ist die Eckenlinie mitgegeben, folglich bedarf man zur Bestimmung des 2ten Dreiecks nur noch zweier Stücke, so dass ein Viereck durch 5 Stücke bestimmt ist. In jedem Viereck ist durch 3 Winkel der 4te, im Sehnenviereck sind durch 2 aufeinanderfolgende die beiden andern Winkel mitgegeben, so dass also zur Darstellung des Sehnenvierecks ein Stück weniger, also 4 Stücke gehören. Zur Darstellung eines beliebigen Vierecks kann man einen Winkel und die 4 Seiten benutzen, die unabhängig von einander sind, im Berührungsviereck ist die 4te Seite $d = a + c - b$, also durch die 3 andern mitgegeben, folglich gebraucht man zur Darstellung des Berührungsvierecks ein Stück weniger, also auch 4 Stücke.

Ein Sehnenviereck zu zeichnen (Fig. 11) aus

19. Aufg. dem Halbmesser des umbeschriebenen Kreises, 2 anstossenden Seiten und dem Eckenlinienwinkel. (r, a, b, m.) (Ort VII.)

20. Aufg. 3 Seiten und einem eingeschlossenen Winkel. (a, b, c, β.)

Anleitung. a, b, β bestimmen ein Dreieck, dessen Umkreis zugleich der dem Sehnenviereck umbeschriebene ist.

21. Aufg. 2 anstossenden Seiten und den beiden Eckenlinien. (a, b, e, f.)

22. Aufg. 3 Seiten und einem nicht von ihnen eingeschlossenen Winkel. (a, b, c, α.) (S. § 5, Lehrsatz, 20. Aufg.)

Ein Berührungsviereck zu zeichnen aus

23. Aufg. (Fig. 12). dem Halbmesser des einbeschriebenen Kreises, einer Seite, einem anliegenden und einem nicht anliegenden Winkel. (ϱ, a, α, γ.)

24. Aufg. 3 Seiten und einem eingeschlossenen Winkel. (a, b, c, β.)

25. Auf. einer Seite, den beiden anliegenden Winkeln und einer Eckenlinie. (a, α, β, e.)

26. Aufg. 2 Seiten, dem eingeschlossenen und dem diesem gegenüberliegenden Winkel. (a, b, β, d.)

Anleitung. (Fig. 12.) Durch a, b, β ist ein Dreieck bestimmt, durch a und b ist a — b, folglich auch d — c nach § 6, Lehrsatz, gegeben. Trägt man c auf d ab, so erhält man ein $\triangle$ ACF, in welchem ausser den beiden Seiten AC und AF der $\angle$ AFC $= R + \frac{d}{2}$ bestimmt ist. Die 4te Ecke liegt senkrecht über der Mitte von CF. (Ort II.)

§ 8.
Die merkwürdigen Punkte im Dreieck.

Lehrsatz 1. Die 3 Höhen eines Dreiecks schneiden einander in einem Punkte.

Beweis (Gauss um 1800). (Fig. 13). Man zieht durch die Ecken des Dreiecks ABC Gleichlaufende zu den Gegenseiten, so entsteht das $\triangle$ DEF, dessen Seiten in A, B, C halbiert sind, denn in dem Pm ABFC ist CF = AB, in dem Pm ABCD ist CD = AB, folglich CE = CD u. s. w.

Errichtet man in diesen Punkten auf den Seiten des $\triangle$ DEF Senkrechte, so schneiden diese einander in einem Punkte. Diese Senkrechten stehen auch senkrecht zu den gleichlaufenden Seiten des $\triangle$ ABC, sie sind also die Höhen desselben, folglich schneiden die Höhen einander in einem Punkte.

Lehrsatz 2. Die 3 Mittellinien eines Dreiecks schneiden einander in einem Punkte. (Schwerpunkt. Archimedes, † 212 v. Chr.)

Beweis. (Fig. 14). Man zieht die beiden Mittellinien AD und BE, welche einander in S schneiden, dann zieht man CSF und hat nun zu beweisen, dass F die Mitte von AB ist.

Zieht man durch A zu BE die Gleichlaufende, welche die verlängerte CF in G schneidet, so ist in dem $\triangle$ AGC ES die durch die Mitte einer Seite zur andern gezogene Gleichlaufende, folglich ist S die Mitte von CG; verbindet man jetzt G mit B, so ist DS im $\triangle$ BCG die Verbindungslinie der Mitten zweier Dreiecksseiten, folglich gleichlaufend der dritten; also ist SD $\parallel$ BG.

Nun ist AGBS ein Pm, die Eckenlinien halbieren einander, folglich ist F die Mitte von AB.

Anmerkung. Da AS = BG und BG = 2 DS, so ist AS = 2 DS, also ergiebt sich: Der Schwerpunkt eines Dreiecks ist von den Ecken desselben doppelt so weit entfernt, als von den Mitten der Gegenseiten.

In dem Lernstoff von IIIb wurde bewiesen:

3. Die Mittelsenkrechten eines Dreiecks schneiden einander in einem Punkte, dem Mittelpunkte des Umkreises.

4. Die Winkelhalbierenden eines Dreiecks schneiden einander in einem Punkte, dem Mittelpunkte des Inkreises.

So ergeben sich im Dreieck 4 Durchschnittspunkte hervorragender Linien, zu ihnen kommen noch die Durchschnittspunkte der Halbierungslinien der Aussenwinkel des Dreiecks, die Mittelpunkte der 3 Ankreise.

Übungen zum § 8.

1. Beweis des Höhensatzes mit Hülfe der Fig. 15. (Archimedes.)

Anleitung. Es seien AD und BE Höhen, so geht der über AB gezogene Halbkreis durch D und E, $\angle$ DEB = DAB.

Um das Viereck CEHD lässt sich ein Kreis legen (§ 5, Umkehrung).

$\angle$ DEB = BCF, folglich $\angle$ BCF = DAB.

Die Dreiecke BCF und ABD haben nun 2 Winkel gleich, folglich auch die dritten, also $\angle$ F = R.

2. Die Verbindungslinien der Höhenfusspunkte bilden ein Dreieck, in welchem die Winkel durch die Höhen des Urdreiecks halbiert werden.

Beweis. (Fig. 16). Es sind 3 Sehnenvierecke zu betrachten, aus denen sich die Gleichheit der Winkel ergiebt.

27. Aufg. Von einem unzugänglichen Punkte die Senkrechte nach einer gegebenen Linie zu ziehen.

Anleitung. Man zieht 2 Linien nach P gerichtet, welche die gegebene Linie in A und B schneiden, und fällt von A und B auf PB und PA die Senkrechten, so ist ihr Durchschnittspunkt H ein Punkt der gesuchten Senkrechten.

28. Aufg. Ein Dreieck aus den 3 Mittellinien zu zeichnen (t_a, t_b, t_c).

Anleitung. (Fig. 14). Man beachte, dass die Mittellinien einander im Verhältnis 2 : 1 schneiden. Die 3 Seiten des $\triangle$ AGS sind $\frac{2}{3}\,t_a$, $\frac{2}{3}\,t_b$, $\frac{2}{3}\,t_c$.

29. Aufg. Ein Dreieck aus einer Mittellinie und den beiden Höhen nach den andern Seiten zu zeichnen (t_b, h_a, h_c).

Grössenvergleichung der Flächen geschlossener Figuren.

§ 9.

Abweichend von anderen Teilen der Planimetrie beginnt man die Grössenvergleichung der Flächen geschlossener Figuren mit dem Pm, denn die Entstehung eines solchen ergiebt sich am einfachsten, nämlich aus der stets gleichgerichteten Fortbewegung einer Strecke längs einer graden Leitlinie.

Es ist klar, dass die Grösse der von der fortbewegten Strecke durchstrichenen Fläche von der Strecke und der Länge der Leitlinie abhängt; unsere Untersuchung wird sich nun darauf richten, nachzuweisen, ob der Winkel, unter dem die beiden Linien geneigt sind, auf die Grösse der durchstrichenen Fläche einen Einfluss hat oder nicht.

Ein Pm hat 2 Höhen; man nimmt eine Seite als Grundseite und den Abstand zwischen ihr und der gleichlaufenden Seite als zugehörige Höhe an.

Aus dem Satze: Senkrechte zwischen Gleichlaufenden sind gleich, ergeben sich 2 Folgerungen:

1. Pm, welche zwischen Gleichlaufenden liegen, haben gleiche Höhen.

2. Pm mit gleichen Höhen können zwischen denselben Gleichlaufenden, deren Abstand die Höhe ist, liegend gedacht werden.

Lehrsatz 1. Pm mit gleicher Grundseite und Höhe haben gleichen Inhalt.

Beweis. (Fig. 17). Man denke die Pme über derselben Grundseite liegend, so liegen ihre Gegenseiten in derselben Gleichlaufenden; die beiden Pme seien ABCD und ABEF; sie bestehen aus demselben Trapez ABCF und je einem der kongruenten Dreiecke AFD und BEC (sws), die Winkel DAF und CBE sind gleich als Winkel mit gleichlaufenden und gleichgerichteten Schenkeln.

Zusatz. Ein Pm ist einem Rechteck gleich, wenn die Grundseiten gleich sind und die andere Seite des Rechtecks die Höhe des Pm ist.

Es ergiebt sich demnach, dass der Winkel, unter dem die beiden Seiten des Pm gegen einander geneigt sind, auf die Grösse der Fläche keinen Einfluss hat.

Lehrsatz 2. Ein Dreieck ist die Hälfte eines Pm mit gleicher Grundseite und Höhe.

Beweis. (Fig. 18). Zieht man durch die Ecken B und C zu den Seiten AC und AB Gleichlaufende, welche einander in D schneiden, so entsteht das Pm ABCD, von welchem $\triangle$ ABC die Hälfte ist.

Zusatz. Dreiecke mit gleicher Grundseite und Höhe sind flächengleich.

VIII Ort. Der Ort der Spitzen aller mit einem gegebenen Dreieck flächengleichen Dreiecke über derselben Grundseite ist die durch die Spitze zur Grundseite gezogene Gleichlaufende.

Anmerkung. Man kann nun die Ecken eines Dreiecks durch Gleichlaufende zu den Gegenseiten verschieben, ohne den Inhalt zu ändern.

§ 10.

Verwandlung von Figuren.

Erklärung. Eine Figur verwandeln bedeutet, sie bei unverändertem Inhalt in einer andern Form darstellen.

Ein Dreick zu verwandeln in

30. Aufg. ein gleichschenkliges. (Ort II, VIII.)

31. Aufg. in ein anderes mit gegebenem Winkel, so dass eine anliegende Seite unverändert bleibt. (Ort VIII.)

32. Aufg. in ein anderes mit gegebenem Winkel, so dass die gegenüberliegende Seite unverändert bleibt. (Ort VII, VIII.)

33. Aufg. in ein anderes mit gegebener Seite.

Lösung. (Fig. 19, I, II.) Man macht AD = der gegebenen Seite, zieht CD und durch B zu CD die Gleichlaufende BE, dann verbindet man E mit D, so ist ADE das gewünschte Dreieck, es mag AD $\lesseqgtr$ AB sein.

34. Aufg. in ein anderes mit gegebener Höhe.

Lösung. (Fig. 20, I, II). Man errichtet die neue Höhe beliebig auf AB etwa in A, zieht durch ihren Endpunkt die Gleichlaufende zu AB, welche AC oder ihre Verlängerung in D schneidet, zieht BD und durch C zu BD die Gleichlaufende CE, schliesslich noch DE, so ist ADE das verlangte Dreieck, es mag die neue Höhe grösser oder kleiner als die des gegebenen Dreiecks sein.

35. Aufg. Ein Viereck in ein Dreieck zu verwandeln.

Lösung. (Fig. 21). Man zieht die Eckenlinie BD und durch C zu BD die Gleichlaufende CE, ferner DE, so ist ADE das verlangte Dreieck.

Beweis. $\triangle$ DBC = DBE (§ 9. Lehrsatz 2. Zusatz.)
$\triangle$ ABD = ABD
durch Addition Viereck ABCD = $\triangle$ ADE.

36. Aufg. Ein Vieleck in ein anderes, welches eine Ecke weniger hat, zu verwandeln.

Lösung. (Fig. 22). Man zieht eine Eckenlinie so, dass nur eine Ecke überschlagen wird, z. B. DF und durch E zu DF die Gleichlaufende, welche die verlängerte CD in G schneidet, schliesslich FG, so hat man statt E die Ecke G; die Ecke D ist ausgefallen, da sie nun auf der Graden CG liegt.

37. Aufg. Ein Dreieck in ein Pm zu verwandeln.

Lösung. (Fig. 23). Man halbiert BC in D, zieht durch C und D Gleichlaufende zu AB und AC, welche AB in F und einander in E schneiden, so ist AFEC das verlangte Pm.

Beweis. $\triangle$ BDF = CDE (wsw)
AFDC = AFDC
durch Addition $\triangle$ ABC = Pm AFEC.

38. Aufg. Ein Pm in ein Rechteck zu verwandeln. (§ 9. Lehrsatz 1. Zusatz.)

Mit Hülfe der vorangegangenen Aufgaben kann man also jede beliebige Figur in ein Rechteck verwandeln. Die Verwandlung des Rechtecks in ein Quadrat vermittelt erst der pythagoräische Lehrsatz.

Die 39. Aufgabe: Ein Pm in ein anderes mit gegebener neuer Seite zu verwandeln, erhält ihre Lösung durch folgenden

Lehrsatz: Wenn durch einen Punkt einer Eckenlinie Gleichlaufende zu den anstossenden Seiten gezogen werden, so sind die von der Eckenlinie nicht durchschnittenen Pme einander gleich.

Beweis. (Fig. 24). Denkt man von $\triangle$ ABC $\cong$ ACD
$\triangle$ AHJ + JFC = AEJ + JGC
weg, so bleibt Pm BFJH = DEJG übrig.

Um also die 39. Aufgabe zu lösen, verlängert man eine Seite des gegebenen Pm, z. B. BH um die neue Seite bis A, zieht AJ, verlängert AJ bis zum Durchschnitt mit der verlängerten BF bis C und stellt das Pm ABCD her, so erhält man in EJGD das verlangte neue Pm.

§ 11.

Ausmessen der Flächen.

Erklärung. „Flächen messen“ heisst, sie mit einer willkürlich angenommenen vergleichen.

Als Grundmass der Vergleichung wird ein Quadrat angenommen, dessen Seite die Längeneinheit z. B. 1 Centimeter ist, dann wird der Inhalt der Fläche in Quadratcentimetern angegeben.

Lehrsatz. Der Inhalt eines Rechtecks wird durch das Produkt der Masszahlen von 2 anstossenden Seiten angegeben, kurz: Der Inhalt eines Rechtecks ist das Produkt von 2 anstossenden Seiten. (Fig. 25.)

Sind z. B. die beiden anstossenden Seiten 5 cm und 3 cm, so erhält man durch je 4 und 2 Gleichlaufende 15 Quadrate, folglich ist der Inhalt 15 qcm.

Sind dagegen die Seiten in Brüchen ausgemessen, z. B. $5\frac{1}{2}$ und $3\frac{2}{7}$ cm, so macht man dieselben gleichnamig, also zu $^{77}/_{14}$ und $^{46}/_{14}$ und teilt das Rechteck in 77 . 46 Quadrate, deren Seiten $^{1}/_{14}$ cm sind.

Giebt es für die beiden Seiten kein gemeinschaftliches Mass, sind sie „inkommensurabel“ wie die Seite und Eckenlinie eines Quadrats, oder die Seite und Höhe eines gleichseitigen Dreiecks, so nimmt man als Mass der Fläche ein unendlich kleines Quadrat mit etwa 0,001 mm Seite an und erhält die Richtigkeit der Messung bis auf einen verschwindenden, d. h. mit den feinsten Hilfsmitteln nicht wahrnehmbaren Rest.

Das Rechteck mit den Seiten a cm und b cm hat demnach den Inhalt ab qcm.

Zusatz 1. Der Inhalt eines Quadrats mit der Seite a cm wird durch a . a qcm $= a^2$ qcm ausgedrückt, daher erklärt es sich, dass a^2 a Quadrat gelesen wird.

Zusatz 2. Der Inhalt eines Pm ist das Produkt aus einer Seite und ihrer Höhe. Pm = gh. (§ 9. Lehrsatz 1. Zusatz.)

Zusatz 3. Der Inhalt eines Dreiecks ist das halbe Produkt aus einer Seite und der zugehörigen Höhe. Dreieck $= \frac{a \cdot h}{2}$. (§ 9. Lehrsatz 2.)

Zusatz 4. Der Inhalt eines Trapezes ist das Produkt aus der halben Summe der beiden Gleichlaufenden und der Höhe. Trapez $= \frac{a + c}{2} \cdot h$.

Beweis. Durch eine Eckenlinie wird das Trapez in 2 Dreiecke geteilt, deren Inhalte $\frac{a \cdot h}{2}$ und $\frac{c \cdot h}{2}$ sind.

Zusatz 5. Der Inhalt eines regelmässigen Vielecks ist das halbe Produkt aus dem Umfang und dem Halbmesser des Inkreises. Regelmässiges Vieleck $= \frac{u \cdot \varrho}{2}$.

Beweis. Das regelmässige Vieleck habe n Seiten a; man kann es in n kongruente gleichschenklige Dreiecke zerlegen, von denen jeder Inhalt $\frac{a \cdot \varrho}{2}$ ist, folglich ist der Inhalt der n Dreiecke $\frac{n \cdot a \cdot \varrho}{2} = \frac{u \cdot \varrho}{2}$.

§ 12.

Übertragung der arithmetischen Formelsprache auf räumliche Gebilde.

Bedeuten a, b, c, d . . Strecken, so lassen die arithmetischen Verbindungen derselben geometrische Deutung zu.

1. a + b ist die Summe, 2. a — b der Unterschied, 3. ab das Rechteck aus den Strecken a und b. Arithmetisch berechnet ist 4. $a \cdot (b + c) = ab + ac$, geometrisch (Fig. 26) bedeutet dies: Das Rechteck aus einer Strecke und der Summe von zwei andern ist gleich der Summe von 2 Rechtecken aus den einzelnen Strecken. 5. $(a + b) \cdot (c + d) = ac + ad + bc + bd$ bedeutet: (Fig. 27) Das Rechteck aus der Summe von je 2 Strecken ist gleich der Summe von 4 Rechtecken aus den einzelnen Strecken.

Demnach gilt auch geometrisch: 6. $(a + b)^2 = a^2 + b^2 + 2\,ab$ (Fig. 28).
7. $(a - b)^2 = a^2 + b^2 - 2\,ab$.

Um dies geometrisch zu deuten (Fig. 29), verlängert man die Gegenseite des Quadrats ABCD $= a^2$ um die kleinere Seite b bis L und zeichnet das Quadrat $b^2 =$ DLKJ, so ist Quadrat AEFJ $=$ der ganzen Figur ABCLKJ vermindert um 2 Rechtecke KFGL und BCGE oder $(a - b)^2 = a^2 + b^2 - ab - ab = a^2 + b^2 - 2\,ab$.

8. $(a + b) \cdot (a - b) = a^2 - b^2$.

Es ist (Fig. 30) ACDH $=$ ABFG $+$ BCEF $-$ HJFG $-$ DEFJ
oder $(a + b)\,(a - b) = a^2 + ab - ab - b^2$
$= a^2 - b^2$.

Figuren können also durch arithmetische Formeln ausgedrückt, gewisse arithmetische Formeln geometrisch dargestellt werden; man kann demnach in der Geometrie rechnen, andrerseits die Ergebnisse einer Rechnung geometrisch veranschaulichen.

§ 13.

Teilung von Figuren.

Im Übungsstoff von IIIb ist die Aufgabe, eine Strecke in 3 gleiche Teile zu teilen, gelöst; die Erweiterung, eine Strecke in eine beliebige Anzahl, in m gleiche Teile, zu teilen, bietet keine Schwierigkeit; hieran schliesst sich die

40. Aufg. Ein Dreieck von einer Ecke aus in m gleiche Teile zu teilen.

41. Aufg. Ein Dreieck von einem Punkte auf einer Seite in m gleiche Teile zu teilen.

Lösung. (Fig. 31). Man verwandelt das gegebene Dreieck in ein anderes mit dem gegebenen Punkt als Spitze nach § 10, 34, dann verfährt man nach 40 und überträgt die Teilung, soweit es nötig ist, durch Gleichlaufende auf das gegebene Dreieck.

42. Aufg. Ein Dreieck von einem innerhalb desselben gelegenen Punkte in m gleiche Teile zu teilen.

Anleitung. Man zieht durch den gegebenen Punkt zu einer Seite eine Gleichlaufende, dann nach 41.

43. Aufg. Ein Pm durch Gleichlaufende zu einer Seite in m gleiche Teile zu teilen.

44. Aufg. Ein Pm von einer Ecke aus in m (grade oder ungrade) gleiche Teile zu teilen.

Anleitung. Man halbiert das Pm durch eine Eckenlinie und verfährt nach 40, indem man berücksichtigt, dass beispielsweise $^1/_5$ eines Teildreiecks $= ^1/_{10}$ des doppelt so grossen Pm ist.

45. Aufg. Ein beliebiges Viereck von einem Punkte aus in m gleiche Teile zu teilen.

Anleitung. Man verwandelt erst das Viereck in ein Dreieck mit dem gegebenen Punkte als Spitze nach 35, 42, teilt das Dreieck von der Spitze aus in m gleiche Teile und überträgt die Teilung, soweit es nötig ist, durch Gleichlaufende auf das Viereck.

§ 14.

Im praktischen Leben ist es von grosser Wichtigkeit, Linien und Flächen zu berechnen aus anderen, die den Messwerkzeugen leichter zugänglich sind. In dem § 11 sind Flächen von Rechtecken, Pm, Dreiecken, Trapezen aus Seiten und Höhen berechnet; ein ferneres wichtiges Mittel zur Berechnung von Linien und Flächen liefert ein von dem griechischen Philosophen Pythagoras (500 v. Chr.) gefundener Satz von solcher Bedeutung, dass er magister matheseos genannt wurde.

Satz des Pythagoras. Im rechtwinkligen Dreieck ist die Summe der Quadrate der Anseiten dem Quadrate über der grössten Seite gleich.

I. Beweis. (Fig. 32, I und II).

In Fig. I ist $c^2 = (a + b)^2 - 4 \cdot \frac{ab}{2}$;

in Fig. II ist $a^2 + b^2 = (a + b)^2 - 4 \cdot \frac{ab}{2}$;

folglich $a^2 + b^2 = c^2$.

II. Beweis nach Euclides I. 47. (Fig. 33.)

Man fällt von C auf AB die Höhe CK und verlängert sie bis zum Durchschnitt mit der Gegenseite FG bis L, dann ist das Quadrat über AB in 2 Rechtecke zerlegt, von denen jedes dem anstossenden Quadrate gleich ist. Denn zieht man BE und CF, so erhält man 2 kongruente Dreiecke ABE und ACF (sws), das $\triangle$ ABE hat mit dem Quadrate ACDE die Seite AE gemeinsam, die Spitze B liegt in der verlängerten DC, folglich ist nach § 9, Lehrsatz 2. $\triangle$ ABE $= \frac{1}{2}$ ACDE.

In gleicher Weise ergiebt sich $\triangle$ ACF $= \frac{1}{2}$ AFLK; da die Dreiecke gleich sind, sind auch die doppelt so grossen Vierecke gleich, also Quadrat ACDE = Rechteck AFLK.

Ebenso wird bewiesen, dass Quadrat BCJH = Rechteck BGLK ist, da $\triangle$ ABH $\cong$ BCG, folglich ist die Summe der Quadrate der Summe der beiden Rechtecke gleich.

III. Beweis. (Fig. 34.)

Man trägt an die Seite FG des Quadrats ABGF entgegengesetzt das $\triangle$ ABC = FGK an, zieht DJ, ferner die grade Linie ECH (beweisen, dass ECH eine Grade ist!) und CK, dann ist

Viereck DEHJ $\cong$ CAFK und
Viereck EABH $\cong$ KGBC,
durch Addition Sechseck ABHJDE = AFKGBC,
hiervon weggenommen $\triangle$ ABC + DCJ = ABC + FKG,
bleibt übrig ACDE + BHJC = AFGB.

Der II. Beweis enthält zugleich den

Lehrsatz 2. Ein Quadrat über einer Anseite ist dem Rechteck aus der Gegenseite und dem der Anseite zunächst liegenden Abschnitt gleich.

Zusatz. Das Quadrat über einer Anseite ist dem Unterschied des Quadrates über der Gegenseite und dem Quadrate über der andern Anseite gleich.

In der arithmetischen Formelsprache lauten die 3 Sätze:

1. $a^2 + b^2 = c^2$.
2. $a^2 = cp$; $b^2 = c \cdot q$.
3. $a^2 = c^2 - b^2$; $b^2 = c^2 - a^2$.

Umkehrung des Pythagoras:

Wenn das Quadrat einer Dreiecksseite der Summe der Quadrate über den beiden andern Dreiecksseiten gleich ist, so schliessen diese Seiten einen rechten Winkel ein.

Beweis nach Euclides I, 48. (Fig. 35.)

Man errichtet auf einer Anseite AC in A die Senkrechte AD = AB, so ist im rechtwinkligen Dreieck ACD $CD^2 = b^2 + c^2$, gegeben ist
$a^2 = b^2 + c^2$
folglich ist $CD^2 = a^2$, CD = a; nun ist $\triangle$ ABC $\cong$ ADC (sss), folglich $\angle$ BAC = DAC = R.

Mit Hülfe des Euclidischen Beweises des Pythagoras, ist jetzt ermöglicht die Lösung der

46. Aufgabe: Ein Rechteck in ein Quadrat zu verwandeln.

Lösung. (Fig. 36). Man verlängert die kürzere Seite CD des Rechtecks ABCD über D bis E, so dass CE der längern Seite BC gleich wird, zieht über CE den Halbkreis, verlängert AD über D hinaus bis zum Durchschnitt mit dem Halbkreis bis F und zieht über CF das Quadrat, so ist dies das verlangte.

Hierdurch, in Verbindung mit den Aufgaben 36, 35, 37 und 38 des § 10 ist nun die Quadratur einer beliebigen gradlinigen Figur durchgeführt.

§ 15.

Zusammensetzen, Verkleinern und Vervielfältigen der Figuren.

47. Aufg. Ein Quadrat zu zeichnen, welches der Summe (dem Unterschied) von 2 gegebenen Quadraten gleich ist.

48. Aufg. Ein Quadrat zu zeichnen, welches n mal so gross als ein gegebenes ist.

Anleitung. Durch fortgesetzte Anwendung von 47, oder man wählt in geschickter Weise ein Vielfaches der Quadratsseiten, wodurch man schneller zum Ziel kommt. Z. B. ein Quadrat zu zeichnen, welches 10mal so gross als ein gegebenes mit der Seite a ist.

Lösung. Man zeichnet ein rechtwinkliges Dreieck mit den Anseiten a und 3a, so ist das Quadrat der Gegenseite $10a^2$.

Ein Quadrat $= 14a^2$ zu zeichnen.

Lösung. Man zeichnet ein rechtwinkliges Dreieck mit der Gegenseite 4a und der Eckenlinie von a^2 als einer Anseite, so ist das Quadrat über der andern Anseite $14a^2$.

49. Aufg. Ein Dreieck zu zeichnen, welches der Summe von m gegebenen gleich ist.

Anleitung. Man verwandelt $m - 1$ Dreiecke so, dass sie alle die Höhe des letzten Dreiecks haben, und stellt dann die Summe der Grundseiten her.

50. Aufg. Ein Quadrat zu zeichnen, welches der Summe von beliebig viel gradlinigen Figuren gleich ist.

Anleitung. Man verwandelt sämtliche Figuren in Dreiecke von gleicher Höhe, verfährt nach 49. und verwandelt das Summendreieck in ein Quadrat.

Zusammenfassung. In diesem Gebiete der ebenen Geometrie ergeben sich 3 Gruppen von Aufgaben.

1. Verwandlung ebener Figuren, deren Schlussaufgabe die Verwandlung eines beliebigen Vielecks in ein Quadrat, die Quadratur der Figur, bildet;
2. Die Teilung von Figuren;
3. Zusammensetzung, Verkleinerung und Vervielfältigung von Figuren.

§ 16.

Anwendungen des Pythagoras, nachdem in der Arithmetik das Notwendigste der Gleichungen, Potenzen und Wurzeln durchgenommen ist.

1. Die Gegenseite im rechtwinkligen Dreieck mit den Anseiten a und b ist $c = \sqrt{a^2 + b^2}$. Ein häufig vorkommender Fehler der Gedankenlosigkeit ist der, bei der Berechnung von $\sqrt{a^2 + b^2}$ unbeachtet zu lassen, dass unter der Wurzel 2 ab fehlt; es ist $\sqrt{a^2 + b^2 + 2ab} = a + b$; $3 + 4$ ist 7, aber $\sqrt{3^2 + 4^2}$ ist $\sqrt{9 + 16} = \sqrt{25} = 5$.

Eine Anseite ist $a = \sqrt{c^2 - b^2} = \sqrt{(c + b) \cdot (c - b)}$.

2. Die Höhe eines gleichschenkligen Dreiecks mit der Grundseite a und dem Schenkel b ist $h = \sqrt{b^2 - \frac{a^2}{4}}$, demnach der Inhalt $J = \frac{a}{2} \cdot \sqrt{b^2 - \frac{a^2}{4}}$.

3. Die Höhe eines gleichseitigen Dreiecks mit der Seite a ist $h = \frac{a}{2} \sqrt{3}$, demnach der Inhalt $J = \frac{a^2}{4} \cdot \sqrt{3}$.

4. Die Eckenlinie eines Quadrates mit der Seite a ist $d = a \sqrt{2}$.

5. Pythagoräische Dreiecke sind solche rechtwinkligen, deren Seiten sich in ganzen Zahlen z. B. 13, 12, 5 angeben lassen. Man findet die Seiten der pythagoräischen Dreiecke, indem man in den Formeln $a^2 + b^2$, 2 ab, $a^2 - b^2$ statt a und b ganze Zahlen setzt z. B.

	$a = 2,\ b = 1$	$a = 3,\ b = 2$	$a = 4,\ b = 3$	$a = 5,\ b = 4$
$a^2 + b^2$	5	13	25	41
2 ab	4	12	24	40
$a^2 - b^2$	3	5	7	9

6. Erklärung. Fällt man von den Endpunkten einer Strecke a Senkrechte auf eine unbegrenzte Grade L, so bildet man a auf L ab (projiziert).

Das Abbild (Projektion) von a auf L ist das auf L von den Senkrechten abgeschnittene Stück.

Zieht man durch einen Endpunkt von a eine Gleichlaufende zu L, so ist der entstandene Winkel der Abbildswinkel (Projektionswinkel).

Wenn der Abbildswinkel, den die Strecke a mit L bildet, 0°, 30°, 45°, 60° und 90° ist, so ist entsprechend das Abbild a, $\frac{a}{2} \cdot \sqrt{3}$, $\frac{a}{2} \cdot \sqrt{2}$, $\frac{a}{2}$, 0.

§ 17.
Zusätze zum Pythagoras.

1. Das Quadrat über der Höhe eines rechtwinkligen Dreiecks ist dem Rechteck aus den Abschnitten der Gegenseite gleich.

Beweis. (Fig. 37). Es ist im rechtwinkligen $\triangle$ ACD

$$\begin{aligned} h^2 &= b^2 - q^2 \\ b^2 &= ADEF = c \cdot q \\ q^2 &= FEHG \end{aligned}$$

folglich $h^2 = ADEF - FEHG = ADHG = p \cdot q$.

2. Bildet man die begrenzten Schenkel eines Winkels auf einander ab (projiziert man sie), so sind die Rechtecke aus den Schenkeln und den auf ihr liegenden Abbildern (Projektionen) einander gleich.

Beweis. (Fig. 38). Man bildet aus dem Schenkel AB und dem Abbild von AC auf AB, AD, das Rechteck AFED, ferner aus AC und dem Abbild von AB auf AC, AJ, das Rechteck AJHG. Zieht man BG und CF, so ist

$$\begin{aligned} &\triangle BAG \cong CAF \text{ (sws)}, \\ &\left.\begin{aligned} &\triangle BAG \text{ ist } = \tfrac{1}{2} \text{ Rechteck } AGHJ, \\ &\triangle CAF \text{ ist } = \tfrac{1}{2} \text{ Rechteck } AFED, \end{aligned}\right\} (\S\ 9,\ L.\ 2.) \end{aligned}$$

folglich ist AGHJ = AFED.

3. Der erweiterte Pythagoras.

Im schiefwinkligen Dreieck ist das Quadrat einer Dreiecksseite, welche einem spitzen (stumpfen) Winkel gegenüberliegt, kleiner (grösser) als die Summe der Quadrate der beiden andern Dreiecksseiten, und zwar um das doppelte Rechteck aus der einen von ihnen und dem Abbild (Projektion) der andern auf sie.

1. Beweis rechnend (Fig. 39, I, II).

$$\begin{aligned} a^2 &= h^2 + (c \pm q)^2 \\ h_2 &= b^2 - q^2 \\ (c \pm q)^2 &= c^2 + q^2 \pm 2cq, \end{aligned}$$

folglich $a^2 = b^2 + c^2 \mp 2\ cq;\ \alpha \lesseqgtr R.$

2. Beweis geometrisch (Fig. 40, I).

$$\left.\begin{aligned} \text{Rechteck } CPMJ &= CDKN \\ \text{Rechteck } BHMP &= BOLG, \end{aligned}\right\} (\S\ 17,\ 2)$$

durch Addition Quadrat BHJC = Rechteck CDKC + BOLG

$$\begin{aligned} \text{Rechteck } CDKN &= \text{Quadrat } ACDE - \text{Rechteck } ANKE \\ \text{Rechteck } BOLG &= \text{Quadrat } AFGB - \text{Reckteck } AFLO \end{aligned}$$

folglich ist $a^2 = b^2 + c^2 - 2$ cq, da Rechteck ANKE = AFLO (§ 17, 2).

Wenn α stumpf ist, so folgt der Beweis mit Hilfe der Fig. 40, II.

Zusatz. Es ist $q = \dfrac{b^2 + c^2 - a^2}{2\ c}$ oder $= \dfrac{a^2 - b^2 - c^2}{2\ c}$.

Es lassen sich also die Abbilder (Projektionen) zweier Dreiecksseiten auf einander aus den Seiten berechnen.

4. In jedem Pm ist die Summe der Quadrate der beiden Eckenlinien gleich der Summe der Quadrate der 4 Seiten.

Beweis. (Fig. 41). Im stumpfwinkligen $\triangle$ ACD ist $AC^2 = AD^2 + CD^2 + 2\ CD \cdot DF$, im spitzwinkligen $\triangle$ ABD ist $BD^2 = AB^2 + AD^2 - 2\ AB \cdot AE$.

Da $AD^2 = BC^2$, $AB \cdot AE = CD \cdot DF$, so ist $AC^2 + BD^2 = AB^2 + BC^2 + CD^2 + AD^2$.

§ 18.
Etwas über Proportionen.

Vergleicht man Strecken miteinander, so kann man die Frage aufwerfen, um wieviel eine grösser als eine andere, oder wieviel mal so gross eine als eine andere ist; letztere Frage wird durch den Quotienten oder das geometrische Verhältnis der Masszahlen der Strecken beantwortet.

Dass 6 cm $\frac{6}{4}$ mal so gross ist als 4 cm, wird ausgedrückt durch das geometrische Verhältnis 6 : 4; dieses Verhältnis ist fallend, sein Quotient grösser als 1; 4 : 6 dagegen steigend, sein Quotient ist kleiner als 1.

Die Regeln der Bruchrechnung gelten für geometrische Verhältnisse. Da $\frac{6}{4} = \frac{3}{2}$, so ist $6 : 4 = 3 : 2$.

Erklärung. Eine geometrische Proportion ist eine Gleichung von 2 geometrischen Verhältnissen.

In $a : b = c : d$ oder $\frac{a}{b} = \frac{c}{d}$ heissen a und d die äussern, b und c die innern, a und c, b und d gleichartige Glieder.

Multipliziert man die Quotientengleichung $\frac{a}{b} = \frac{c}{d}$ mit $b . d$, so erhält man $\frac{a}{b} . b . d = \frac{c}{d} . d . b$ oder $a . d = bc$, d. i.

Lehrsatz 1. In jeder Proportion ist das Produkt der äussern Glieder gleich dem der innern Glieder.

Da die Faktoren eines Produkts vertauscht werden können, so ist auch

$a : c = b : d$

und $d : b = c : a$, wodurch immer die Gleichung der Produkte $a . d = b . c$ ungestört bleibt; folglich:

Lehrsatz 2. In jeder Proportion können die innern Glieder unter einander vertauscht werden, ebenso die äussern.

Addiert man $\mp 1 = \mp 1$ zu $\frac{a}{b} = \frac{c}{d}$, so erhält man $\frac{a}{b} \mp 1 + \frac{c}{d} \mp 1$, bringt man links 1 auf den Nenner b, rechts auf d, so erhält man $\frac{a \mp b}{b} = \frac{c \mp d}{d}$ oder in Proportionsform mit Vertauschung der innern Glieder

$(a \mp b) : (c \pm d) = b : d = a : c$, schliesslich hieraus

$(a + b) : (a - b) = (c + d) : (c - d)$ in leicht auszusprechenden Sätzen, welche Additionssätze der Proportionen genannt werden sollen.

§ 19.

Proportionalität von Linien.

Lehrsatz 1. Zieht man durch 2 Linien beliebig Gleichlaufende, so schneiden diese die Linien so, dass sich die Abschnitte auf der einen wie die auf der andern verhalten.

Beweis. (Fig. 42). Man misst die Abschnitte auf der einen Linie aus, es sei AB = 3,6 cm und BC = 2,4 cm, demnach 1,2 cm das gemeinschaftliche Mass beider Abschnitte; trägt man nun 1,2 cm von A aus ab, so dass A 1 = 12 = 2 B = B 3 = 3 C, jede Strecke = 1,2 cm ist, und zieht durch die Teilpunkte zu AF die Gleichlaufenden 1α, 2β und 3γ, so wird FE ebenfalls in 3, DE in 2 gleiche Teile geteilt, denn zieht man durch die Teilpunkte auf AC noch Gleichlaufende zu FD, so entstehen 5 kongruente Dreiecke (wsw) und 5 Pm, in denen die Gegenseiten gleich sind, folglich ist auch $F\alpha = \alpha\beta = \beta E = E\gamma = \gamma D$, also auch FE in 3, ED in 2 gleiche Teile geteilt, von denen jeder $\lesseqgtr$ 1,2 cm sein kann, demnach ist AB : BC = FE : ED.

Ist das gemeinschaftliche Mass von AB und BC sehr klein, sind diese Strecken etwa 34,75 cm und 26,23 cm, ist also das gemeinschaftliche Mass 0,1 mm, so würde man im Ganzen 6096 Gleichlaufende ziehen müssen; die wirkliche Durchführung würde dadurch sehr erschwert, während theoretisch keine Änderung eintritt.

Findet man für die beiden Strecken kein gemeinschaftliches Mass, so heissen sie inkommensurabel; den Beweis führt man dann mit hinreichender Genauigkeit, indem man ein verschwindend kleines Mass annimmt.

Nur eine andere Form desselben Satzes ist der

Lehrsatz 2. Die in einem Dreieck zu einer Seite gezogene Gleichlaufende teilt die beiden andern in demselben Verhältnis. (Fig. 43). AD : CD = BE : CE.

Vertauscht man die innern Glieder, so erhält man AD : BE = CD : CE d. h.

Lehrsatz 3. Es verhalten sich die untern Abschnitte wie die obern.

Nach dem Additionssatz der Proportionen folgt:

Lehrsatz 4. Die ganzen Seiten verhalten sich wie die obern (untern) Abschnitte.

Um das Verhältnis der Gleichlaufenden DE zu AB zu untersuchen, zieht man durch D zu BC die Gleichlaufende DF, dann ist DE = BF und nach dem vorangegangenen Lehrsatz AB : AC = BF : CD.

Da BF = DE, so ist nach Vertauschung der innern Glieder AB : DE = AC : CD.

Lehrsatz 5. Eine Seite verhält sich zu ihrer Gleichlaufenden wie eine der andern Seite zum obern Abschnitt.

Umkehrung von Lehrsatz 2. Sind 2 Dreiecksseiten in ein und demselben Verhältnis geteilt, so ist die Verbindungslinie der Teilpunkte gleichlaufend der 3ten Seite.

Voraussetzung. (Fig. 43). AC : CD = BC : CE.

Behauptung. DE ∥ AB.

Beweis. Gesetzt, DE wäre nicht gleichlaufend AB, sondern die durch D gezogene Gleichlaufende sei DX, dann wäre AC : CD = BC : CX. Dies mit der Voraussetzung verglichen, würde CE = CX geben, also muss Punkt X mit E, demnach auch DX mit DE zusammenfallen, d. h. DE ∥ AB.

§ 20.

Teilung von Linien und Flächen nach einem gegebenen Verhältnis.

In der Proportion a : b = c : x sind die Strecken a, b und c gegeben, x gesucht. x heisst die 4. Proportionale zu a, b und c.

51. Aufg. Zu 3 gegebenen Strecken a, b und c die 4. Proportionale zu zeichnen.

Lösung. (Fig. 44). Man zeichnet einen beliebigen Winkel A und trägt vom Scheitelpunkt auf einem Schenkel a = AB, b = BC, auf dem andern c = AD ab, zieht BD und durch C zu BD die Gleichlaufende CE, so ist DE die gesuchte Linie.

Zur andern Darstellung desselben x kann man auch die Sätze 3, 4, 5 des vorigen Abschnitts benutzen.

52. Aufg. Die gegebene Strecke AB in einem gegebenem Verhältnis (3 : 2; m : n) zu teilen.

Lösung. Man zieht von A aus einen Strahl und trägt ein Mass 3 und 2 mal (oder m und n) nebeneinander ab, verbindet den Endpunkt mit B und zieht die Gleichlaufende.

53. Aufg. Ein Dreieck (Viereck) von einer Ecke aus in einem gegebenen Verhältnis zu teilen.

54. Aufg. Ein Pm durch eine Gleichlaufende zu einer Seite in einem gegebenen Verhältnis zu teilen.

55. Aufg. Ein Trapez in einem gegebenen Verhältnis zu teilen.

Lehrsatz 1. Sind durch die Strahlen eines Büschels beliebig viele Gleichlaufende gezogen, so werden sie durch die Strahlen in demselben Verhältnis geteilt.

Beweis. (Fig. 45). AB : EF = PB : PF (§ 19, L. 5)
BC : FG = PB : PF
folglich AB : EF = BC : FG

durch Vertauschung der innern Glieder AB : BC = EF : FG u. s. w.

Lehrsatz 2. Dreiecke verhalten sich wie die Produkte aus ihren Grundlinien und Höhen.

Beweis. $\triangle_1 : \triangle_2 = \frac{a_1 . h_1}{2} : \frac{a_2\ h_2}{2}$, rechts mit 2 erweitert $\triangle_1 : \triangle_2 = a_1\ h_1 : a_2\ h_2$.

Lehrsatz 3. Dreiecke mit gleichen Grundlinien verhalten sich wie ihre Höhen.

Da $a_1 = a_2$, so lässt sich das Verhältnis auf der rechten Seite durch a_1 heben.

Lehrsatz 4. Dreiecke mit gleichen Höhen verhalten sich wie ihre Grundlinien.

Da $h_1 = h_2$, so lässt sich das Verhältnis auf der rechten Seite durch h_1 heben.

Lehrsatz 5. Dreiecke, welche einen gleichen Winkel haben, verhalten sich wie die Produkte der diesen Winkel einschliessenden Seiten.

Beweis. (Fig. 46). Man lege die Dreiecke so, dass die Spitzen der gleichen Winkel C zusammenfallen, und die einschliessenden Seiten des kleinern Dreiecks auf den entsprechenden des grössern liegen.

Zieht man DB, so ist △ ABC : BDC = AC : CD nach Lehrsatz 4
und △ BDC : EDC = BC : CE.

Da Proportionen Gleichungen von Quotienten sind, so kann man sie miteinander multiplizieren, ferner hebt man in der dadurch entstandenen neuen Proportion das linke Verhältnis durch $\triangle$ DBC und erhält $\triangle$ ABC : EDC $=$ AC . BC : CD . CE,
oder $\triangle$ ABC : abc $=$ a . b : $\alpha . \beta$.

§ 21.

Ähnlichkeit der Dreiecke.

Auf die Ähnlichkeit leitet man hin durch die Vergleichung einer recht genauen Karte mit dem Felde, z. B. der Karte des Kottbuser Stadtfeldes, eines Bildes mit dem Original; nach genauer Betrachtung lässt man den Schulhof, den Marktplatz, einige Strassenzüge zeichnen und dabei finden, dass die Ähnlichkeit auf der Gleichheit der Winkel und der Proportionalität der Strecken beruht.

Erklärung. Dreiecke heissen ähnlich (Zeichen $\sim$, das liegende s von similis), wenn ihre Seiten in demselben Verhältnis stehen und ihre Winkel gleich sind.

Diese Bedingungen sind aber nicht unabhängig von einander, sondern es ist beispielsweise die Gleichheit von 2 Winkeln schon zur Ähnlichkeit hinreichend.

Wählt man also gewisse Bedingungen in geeigneter Weise so, dass die übrigen aus ihnen folgen, so erhält man die Ähnlichkeitssätze. Um sie zu beweisen, dient folgendes:

Wenn in einem Dreieck zu einer Seite eine Gleichlaufende gezogen wird, so wird ein ähnliches Dreieck abgeschnitten, denn die Winkel sind gleich, nämlich (Fig. 43) $\angle$ C gemeinsam, A $=$ D, B $=$ E als Gegenwinkel bei Gleichlaufenden, und die Seiten stehen in Proportion. (§ 19 L. 4, L. 5.)

I. Ähnlichkeitssatz. Dreiecke sind ähnlich, wenn in ihnen 2 Winkel gleich sind (ww$\sim$).

Voraussetzung. (Fig. 47). $\angle$ A $=$ D, B $=$ E, folglich auch C $=$ F.

Behauptung. $\triangle$ ABC $\sim$ DEF.

Beweis. Man trägt Seite DF auf der entsprechenden AC von C aus bis G ab und zieht durch G zu AB die Gleichlaufende GH; nun ist $\triangle$ ABC $\sim$ CGH, ferner ist $\triangle$ CGH $\cong$ DEF (wsw), denn CG $=$ DF, $\angle$ C $=$ F, $\angle$ G $=$ D, weil jeder $\angle$ A gleich ist, folglich ist $\triangle$ ABC $\sim$ DEF.

Wir lassen hier der Vereinfachung des Beweises halber die übrigen Ähnlichkeitssätze folgen, obschon man ihre Durchnahme nach Bedürfnis aufschieben kann.

II. Ähnlichkeitssatz. Dreiecke sind ähnlich, wenn in ihnen 2 Seiten in Proportion stehen, und die eingeschlossenen Winkel gleich sind (sws$\sim$).

Voraussetzung. (Fig. 47). AC : BC $=$ DF : EF, $\angle$ C $=$ F.

Beweis. Man macht CG $=$ DF und zieht GH $\parallel$ AB, so ist $\triangle$ CGH $\sim$ ABC; ferner CGH $\cong$ DEF (sws), denn es ist AC : BC $=$ CG : CH. Dies, verglichen mit der Voraussetzung, giebt CH $=$ FE, folglich ist $\triangle$ ABC $\sim$ DEF.

III. Ähnlichkeitssatz. Dreiecke sind ähnlich, wenn in ihnen 2 Seiten in Proportion stehen und die der grössern gegenüberliegenden Winkel gleich sind (ssw$\sim$).

Voraussetzung. (Fig. 47). AC : BC $=$ DF : EF, $\angle$ B $=$ E.

Beweis. Man stellt in der bekannten Weise $\triangle$ CGH her, so dass CG $=$ DF ist, dann ist $\triangle$ CGH $\sim$ ABC, ferner $\triangle$ CGH $\cong$ DEF (ssw), denn AC : BC $=$ CG : CH, dies, mit der Voraussetzung verglichen, giebt CH $=$ EF, folglich $\triangle$ ABC $\sim$ DEF.

IV. Ähnlichkeitssatz. Dreiecke sind ähnlich, wenn in ihnen 2 Seiten in Proportion stehen, der der kleinern Seite gegenüberliegende Winkel gleich und der der grössern gegenüberliegende Winkel gleichartig, nämlich zugleich spitz oder stumpf ist (wss$\sim$).

Beweis. (Fig. 47). $\triangle$ CGH $\sim$ ABC
$\triangle$ CGH $\cong$ DEF (wss),
folglich $\triangle$ ABC $\sim$ DEF.

V. Ähnlichkeitssatz. Dreiecke sind ähnlich, wenn in ihnen die 3 Seiten in Proportion stehen (sss$\sim$).

Voraussetzung. (Fig. 47). AB : BC : CA $=$ DE : EF : FD.

Beweis. AC : BC = CG : CH,
nach Vorauss. AC : BC = DF : EF,
folglich CH = EF;
und AC : AB = CG : GH,
nach Vorauss. AC : AB = DF : DE,
folglich GH = DE;
nun ist $\triangle$ CGH $\cong$ DEF (sss), demnach auch $\triangle$ ABC $\sim$ DEF.

Man führt also in allen 5 Ähnlichkeitssätzen den Beweis in derselben Weise:

Man trägt eine Seite des kleinern Dreiecks auf der entsprechenden des grössern ab und zieht durch den Endpunkt eine Gleichlaufende, so wird ein ähnliches Dreieck abgeschnitten. Dieses ist dem 2ten Dreieck kongruent. Da man Kongruentes für Kongruentes setzen kann, so sind auch die gegebenen Dreiecke ähnlich. Die Verschiedenheit der Beweise betrifft nur die Verschiedenheit der Begründung der Kongruenz.

§ 22.

Übungen zu den Ähnlichkeitssätzen.

Rechtwinklige Dreieck sind ähnlich, wenn in ihnen
1. ein spitzer Winkel gleich ist (ww$\sim$);
2. die Anseiten in Proportion stehen (sws$\sim$);
3. eine Anseite und die Gegenseite in Proportion stehen (ssw$\sim$).

Gleichschenklige Dreiecke sind ähnlich, wenn in ihnen
4. ein gleichartiger Winkel, nämlich der Grundwinkel oder der Winkel an der Spitze, gleich ist (ww$\sim$);
5. die Grundseite und der Schenkel in Proportion stehen (sss$\sim$).
6. Alle gleichseitigen Dreiecke sind ähnlich.
7. Alle rechtwinklig-gleichschenkligen Dreiecke sind ähnlich.

Um Dreiecke zu zeichnen, von denen Winkel oder Verhältnisse von Seiten gegeben sind, kann man ein ähnliches herstellen und in diesem das der Grösse nach gegebene Stück zeichnen.

56. Aufg. Ein Dreieck aus 2 Winkeln und der durch den 3ten gezogenen Höhe zu zeichnen.

Lösung. Man zeichnet ein beliebiges Dreieck, welches die beiden gegebenen Winkel enthält, zieht in diesem Dreieck die Höhe durch den dritten Winkel, trägt auf ihr die gegebene Höhe ab und zieht durch den Endpunkt derselben die Gleichlaufende zur Grundseite.

Ähnlich werden folgende Aufgaben gelöst: Ein Dreieck zu zeichnen aus

Aufg. 57. a, a : b : c = m : n : p (sss$\sim$).
Aufg. 58. a, $h_c : t_c$, α (ssw$\sim$).
Aufg. 59. a, α, $\angle$ bt_c (ww$\sim$).

Wenn das Verhältnis von 2 Dreiecksseiten und eine derselben gegeben ist, so ist auch die andere gegeben, denn aus a : b = m : n folgt b als 4te Proportionale zu m, n und a.

Wenn das Verhältnis von 2 Dreiecksseiten und ihre Summe oder Differenz gegeben ist, so sind auch die Seiten gegeben; denn aus a : b = m : n folgt $(a \mp b) : (m \mp n) = a : m$; ist nun $a \mp b$ gegeben, so ist a die 4te Proportionale zu $m \mp n$, $a \mp b$ und m.

Hierdurch löst man Aufgaben wie:
Ein Dreieck zu zeichnen aus
Aufg. 60. a, c, a : b = m : n.
Aufg. 61. c, a + b, a : b = m : n.
Aufg. 62. a — c, b — c, a : b = m : n.

Die Auffindung dieser Aufgabe gestaltet sich folgendermassen. Der Unterschied von a — c und b — c ist a — b; aus a : b = m : n folgt mit Anwendung der Proportionssätze (m — n) : (a — b) = m : a, folglich ist a bekannt; demnach auch b als 4te Proportionale zu m, n und a; c ist der Unterschied von a und a — c.

§ 23.

Proportionalität besonderer Linien in ähnlichen Dreiecken, Kreisumfang.

Lehrsatz 1. In ähnlichen Dreiecken verhalten sich die Höhen wie gleichartige Seiten.

Behauptung. (Fig. 48). $a : a_1 = h : h_1$.

Beweis. $\triangle$ BAD $\sim B_1A_1D_1$ (ww$\sim$), daher $c : c_1 = h : h_1$, da $\triangle$ ABC $\sim A_1B_1C_1$ gegeben, so ist auch $a : a_1 = h : h_1$.

Dieser Satz ist nicht zu verwechseln mit folgendem

Lehrsatz 2. In jedem Dreieck verhalten sich die Höhen umgekehrt wie die zugehörigen Seiten.

Beweis. (Fig. 49). $\triangle$ ADC $\sim$ BEC (ww$\sim$),

$$\text{folglich } AC : AD = BC : BE,$$
$$\text{oder } AC : BC = AD : BE.$$

Lehrsatz 3. In ähnlichen Dreiecken stehen alle gleichartig gezogenen Linien in demselben Verhältnis, nämlich in dem gleichartiger Seiten.

So verhalten sich die Mittellinien, die Winkelhalbierenden, die Halbmesser des Umkreises, des Inkreises, der Ankreise wie 2 gleichartige Seiten.

Die Beweise ergeben sich immer aus der Ähnlichkeit solcher Dreiecke, welche die genannten Linien enthalten; z. B. wird der Satz von den Mittellinien aus der Ähnlichkeit der halben Dreiecke (sws$\sim$), der Satz von den Winkelhalbierenden durch die Ähnlichkeit von Teildreiecken nach (ww$\sim$) bewiesen.

Lehrsatz 4. Die Umfänge ähnlicher Dreiecke verhalten sich wie 2 gleichartige Seiten.

Beweis. Aus $a : b : c = a_1 : b_1 : c_1$ folgt nach dem Additionssatz der Proportionen

$$(a + b + c) : (a_1 + b_1 + c_1) = a : a_1,$$
$$\text{oder} \quad U : U_1 = a : a_1.$$

Eine ähnliche Schlussfolgerung giebt

Zusatz 1. Die Umfänge ähnlicher Vielecke verhalten sich wie 2 gleichartige Seiten.

Zusatz 2. Alle regelmässigen Vielecke von derselben Seitenzahl sind ähnlich, folglich verhalten sich ihre Umfänge wie ihre Seiten.

Zusatz 3. Die Bestimmungsdreiecke aller regelmässigen Vielecke von derselben Seitenzahl sind ähnlich. deshalb verhalten sich in ihnen die Seiten wie die Halbmesser. Kreise können als regelmässige Vielecke mit unendlich vielen, unendlich kleinen Seiten betrachtet werden. Die Umfänge aller Kreise verhalten sich wie ihre Halbmesser.

Zusatz 4. Denkt man um einen Kreis ein Quadrat gezeichnet, so ist der Kreisumfang kleiner als die Summe der 4 Quadratsseiten, d. i. kleiner als 4 Durchmesser; denkt man in dem Kreise ein regelmässiges Sechseck, so ist der Kreisumfang grösser als die Summe der 6 Seiten, d. i. grösser als 3 Durchmesser

$$4\,d > U > 3\,d;$$

folglich muss man den Durchmesser d mit einer Zahl multiplizieren, welche zwischen 3 und 4 liegt; diese Zahl, welche genauer durch Betrachtung um- und einbeschriebener regelmässiger Figuren grösserer Seitenzahl ermittelt wird, heisst die Archimedische Zahl und wird mit π bezeichnet, folglich wird der Umfang eines Kreises durch $U = 2\,r\,\pi$ ausgedrückt.

Anmerkung. Archimedes betrachtete die Umfänge des regelmässigen ein- und umbeschriebenen 96-Ecks und fand $\pi = 3\frac{1}{7} = .3{,}14$. Ludolph van Keulen (1596 n. Chr.) fand einen genauern Wert; Adrian Metius, ein Zeitgenosse Keulens, fand den Näherungswert $\pi = \frac{355}{113} = 3{,}141592$ genau auf 6 Stellen.

§ 24.

Flächenvergleichung ähnlicher Figuren, Kreisinhalt.

Lehrsatz 1. Die Flächen ähnlicher Dreiecke verhalten sich wie die Quadrate gleichartiger Seiten.

Behauptung. $\triangle ABC : A_1B_1C_1 = a^2 : a_1^2$ (Fig. 48).

Beweis. Es ist $h : h_1 = a : a_1$ (§ 23, L. 1),

$$\text{dies multipliziert mit } \underline{a : a_1 = a : a_1,}$$
$$\text{giebt } ah : a_1h_1 = a^2 : a_1^2;$$

das linke Verhältnis, durch 2 gehoben,

$$\text{giebt } \frac{ah}{2} : \frac{a_1h_1}{2} = a^2 : a_1^2,$$

folglich ist $\triangle ABC : A_1B_1C_1 = a^2 : a_1^2$.

Zusatz. Da auch $a^2 : a_1^2 = h^2 : h_1^2$ ist, so folgt

$$\triangle ABC : A_1B_1C_1 = h^2 : h_1^2,$$

oder die Flächen ähnlicher Dreiecke verhalten sich wie die Quadrate gleichartiger Höhen.

Lehrsatz 2. Die Flächen ähnlicher Vielecke verhalten sich wie die Quadrate gleichartiger Seiten.

Beweis. (Fig. 50). Man zerlegt die ähnlichen Vielecke durch Eckenlinien in Dreiecke; von diesen sind die Seitendreiecke ABC und GHJ unmittelbar ähnlich nach (sws$\sim$); hieraus folgt $\angle BCA = HJG$, dies, von $\angle BCD = HJK$ abgezogen, giebt $\angle ACD = GJK$; ferner folgt $AC : GJ = BC : HJ$, nach Voraussetzung ist $BC : HJ = CD : JK$, folglich ist $AC : GJ = CD : JK$, folglich ist auch $\triangle ACD \sim GJK$ (sws$\sim$).

Nach 1. ist $\triangle ABC : GHJ = AC^2 : GJ^2$
und $\triangle ACD : GJK = AC^2 : GJ^2$,
folglich ist $\triangle ABC : GHJ = ACD : GJK$;

nach Vertauschung der innern Glieder $\triangle ABC : ACD = GHJ : GJK$; nach dem Additionssatz $(ABC + ACD) : (GHJ + GJK) = ABC : GHJ$.

Folgert man so weiter, so erhält man $ABCDE - F : GHJKL - M = ABC : GHJ$; da $ABC : GHJ = AB^2 : GH^2$ ist, so ist $ABCD - F : GHJKL - M = AB^2 : GH^2$.

Zusatz 1. Die Flächen aller regelmässigen Vielecke mit derselben Seitenzahl verhalten sich wie die Quadrate ihrer Seiten.

Zusatz 2. Die Flächen aller Kreise verhalten sich wie die Quadrate ihrer Halbmesser.

Zusatz 3. Die Kreisfläche ist kleiner als der Inhalt des umbeschriebenen Quadrates, also kleiner als $4\,r^2$, sie ist grösser als der Inhalt des einbeschriebenen regelmässigen Sechsecks, also grösser als $\frac{3}{2} . \sqrt{3} . r^2 = 2{,}598\ r^2$, folglich $4\,r^2 > J > 2{,}598\ r^2$; also ist der Faktor, mit dem man r^2 multiplizieren muss, um J zu finden, eine Zahl in der Nähe der 3. Durch genaue Berechnung des Inhaltes um- und einbeschriebener regelmässiger Vielecke mit gleicher, möglichst grosser Seitenzahl z. B. des 96ecks erhält man für die Zahl den früher angegebenen Wert π, so dass $J = r^2 . \pi$ ist.

§ 25.

Übungen zu den vorigen Abschnitten.

1. Eine genaue Darstellung der Kreislinie als grade Linie ist unmöglich, weil die Zahl π weder durch eine ganze Zahl, noch durch einen Bruch angebbar, d. h. irrational ist, aber man kann Strecken zeichnen, welche hinreichend genau dem Kreisumfang gleichkommen, so dass sie durch gewöhnliche Messwerkzeuge nicht zu unterscheiden sind.

Eine solche genäherte Berechnung rührt von dem polnischen Jesuiten Kochanski 1685 her. Man zieht (Fig. 51) in einem Kreise O den Durchmesser AB und in B die Berührende, zeichnet ferner in O an OB den Winkel 30^0, dessen Schenkel die Berührende in C schneidet, und von C aus auf der Berührenden den Halbmesser 3mal bis D, so ist die Linie AD hinreichend genau dem halben Kreisumfang gleich. (Durch einen Faden und Rechnung zu prüfen.)

Zusatz. Aus AD und dem Halbmesser kann man ein Rechteck zeichnen und in ein Quadrat verwandeln, so ist dies Quadrat hinreichend genau dem Inhalt des Kreises gleich.

2. Der Inhalt eines Kreisringes zwischen 2 gleichlaufenden Kreisen mit den Halbmessern r und ϱ ist $(r^2 - \varrho^2) . \pi$.

3. Der Inhalt eines Kreisausschnittes s ist, wenn der Halbmesser r und der Mittelpunktswinkel α ist, $s = \frac{r^2 \pi \alpha}{360}$.

4. Wie gross ist der Erdhalbmesser, wenn auf dem Gleicher ein Bogengrad 15 geogr. Meilen ist? $r = \frac{15 . 360}{2\pi} = 859{,}5$ Meilen.

5. Die Karte vom Kottbuser Stadtfelde ist im Verhältnis 1 : 5000 gezeichnet; wieviel Karten muss man neben einander legen, um das Feld genau zu bedecken?

6. Wenn in einem Atlas ein Land in dem Verhältnis 1 : 700 000, ein anderes in 1 : 6 000 000 gezeichnet ist, wieviel mal so gross ist dieses zu denken, um mit jenem der Grösse nach verglichen werden zu können?

7. Aufg. 63. Ein Fünfeck zu zeichnen, welches einem gegebenen ähnlich und 9 mal so gross ist.

Lösung. (Fig. 52). Man zieht von einem geeigneten Punkt O Strahlen durch die Ecken A, B, C, D, E und trägt auf dem Strahl OA von A aus 3 OA bis A_1 ab; nun zieht man zu AB die Gleichlaufende $A_1 B_1$, durch B_1 zu BC die Gleichlaufende $B_1 C_1$ und so fort; so ist $A_1 B_1 C_1 D_1 E_1$ das verlangte 5eck. Der Punkt O heisst der Ähnlichkeitspunkt.

Die Lage der beiden ähnlichen Figuren heisst perspektivisch.

Verlängert man die Strahlen über O hinaus, so erhält man ein entgegengesetzt ähnliches 5eck.

8. Zeichne eine ähnliche Figur, wenn der Ähnlichkeitspunkt in einer Ecke, auf einer Seite und innerhalb der gegebenen Figur liegt.

§ 26.

Proportionalität von Linien im rechtwinkligen Dreieck.

Erklärung. In der Proportion $a : b = b : c$ heisst b die mittlere Proportionale oder das geometrische Mittel zwischen a und c.

Lehrsatz 1. Im rechtwinkligen Dreieck ist die Höhe die mittlere Proportionale zwischen den Abschnitten der Gegenseite.

Beweis. (Fig. 53). $\triangle ACD \sim BCD$ (ww$\sim$),
folglich $AD : CD = CD : BD$.

Lehrsatz 2. Im rechtwinkligen Dreieck ist eine Anseite die mittlere Proportionale zwischen der Gegenseite und dem Abbild der Anseite auf die Gegenseite.

Beweis. (Fig. 53). $\triangle ACD \sim ABC$ (ww$\sim$), demnach $AB : AC = AC : AD$;
ebenso $\triangle BCD \sim ABC$ (ww$\sim$), demnach $AB : BC = BC : BD$.

Bildet man aus beiden Proportionen die Gleichungen der Produkte und addiert sie, so erhält man $AC^2 = AB . AD$
und $BC^2 = AB . BD$
durch Addition $AC^2 + BC^2 = AB\,(AD + BD) = AB^2$, also den Pythagoras (Beweis aus der Ähnlichkeit).

Lehrsatz 3. Die Quadrate der Anseiten verhalten sich wie die Abbilder auf der Gegenseite.

Beweis. (Fig. 53). $AC^2 : BC^2 = AB . AD : AB . BD$,
folglich $AC^2 : BC^2 = AD : BD$.

Aufg. 64. Die mittlere Proportionale zwischen 2 Strecken zu zeichnen.

2 Lösungen nach 1. und 2.

Aufg. 65. Eine Strecke AB so zu teilen, dass eine andere das geometrische Mittel zwischen den beiden Teilen wird.

Lösung nach 1.

Aufg. 66. Eine Strecke so zu teilen, dass sich ihre Teile wie 2 gegebene Quadrate verhalten.

Lösung. Man macht aus den Seiten der Quadrate die Anseiten eines rechtwinkligen Dreiecks, fällt die Höhe und überträgt die dadurch entstandene Teilung der Gegenseite auf die gegebene Strecke.

Aufg. 67. Eine Strecke so zu teilen, dass sich die Quadrate der Teile wie 2 gegebene Strecken verhalten.

Lösung. Man macht die Summe der beiden gegebenen Strecken zur Gegenseite eines rechtwinkligen Dreiecks, dessen Spitze über dem gemeinsamen Punkte beider Strecken liegt, und teilt die gegebene Strecke im Verhältnis der beiden entstandenen Anseiten.

Aufg. 68. Ein Dreieck durch eine zu einer Seite Gleichlaufende zu halbieren.

Auffindung. (Fig. 54). Wenn $XY \parallel AB$ und $\triangle CXY = \frac{1}{2} ABC$ wäre, so folgt nach § 24, L. 1
$AC^2 : CX^2 = 2 : 1$,
also $AC^2 = 2\, CX^2$ oder $\frac{1}{2}\, AC^2 = CX^2$;
dies in Proportion gesetzt, $AC : CX = CX : \frac{1}{2}\, AC$.

Aufg. 69. Ein Dreieck durch eine zu einer Höhe Gleichlaufende zu halbieren.

Auffindung. (Fig. 55). $\triangle AXY : ADC = AX^2 : AD^2$, § 24, L. 1,
$\triangle ADC : ABC = AD : AB$, § 20, L. 4,

durch Multiplikation, dann links durch $\triangle$ ADC, rechts durch AD gehoben, folgt $\triangle$ AXY : ABC $= AX^2 : AB . AD$; nun schliesst man, wie in Aufg. 68.

Aufg. 70. Ein Dreieck durch eine Linie von gegebener Richtung in einem gegebenen Verhältnis zu teilen.

Anleitung. Man zieht durch eine Ecke des Dreiecks eine Linie von derselben Richtung, dann nach Aufg. 69.

*Aufg. 71. Ein Dreieck in ein anderes zu verwandeln, welches einem gegebenen Dreieck ähnlich ist.

Anleitung. Man verwandelt das erste Dreieck in ein anderes mit einem Winkel des zweiten, trägt nun in dem neuen Dreieck an eine Seite einen zweiten Winkel an, so dass ein ähnliches Dreieck entsteht ohne Rücksicht auf die Grösse, und verfährt dann nach Aufg. 70.

Aufg. 72. Ein Dreieck in ein gleichschenkliges mit Beibehaltung eines Winkels zu verwandeln.

Lösung durch § 20, L. 5.

Aufg. 73. Ein Dreieck in ein gleichseitiges zu verwandeln.

Anleitung. Man verwandelt das gegebene Dreieck in ein anderes mit einem Winkel 60^0 und verfährt dann nach Aufg. 72.

§ 27.

Proportionen am Kreise.

Lehrsatz 1. Zieht man durch einen Punkt in einem Kreise beliebig viele Sehnen, so sind die Rechtecke aus den Abschnitten derselben einander gleich.

Beweis. (Fig. 56). $\triangle$ APC $\sim$ DPB (ww$\sim$),
hieraus folgt $AP : CP = DP : BP$
oder $AP . BP = CP . DP$.

Zusatz. Alle diese Rechtecke haben einen gemeinschaftlichen Wert, nämlich das Quadrat der halben kleinsten Sehne, d. i. derjenigen, welche auf OP in P senkrecht steht.

Lehrsatz 2. Zieht man von einem Punkte ausserhalb eines Kreises beliebig viele den Kreis Schneidende, so sind die Rechtecke aus den ganzen Schneidenden und ihren äussern Abschnitten einander gleich.

Beweis. (Fig. 57). $\triangle$ PAD $\sim$ PCB (ww$\sim$),
daher $PA : PD = PC : PB$
oder $PA . PB = PC . PD$.

Zusatz. Alle diese Rechtecke haben einen gemeinschaftlichen Wert, nämlich das Quadrat der von dem gegebenen Punkt an den Kreis gezogenen Berührenden.

Beweis. (Fig. 57). $\triangle$ PAE $\sim$ PBE (ww$\sim$),
folglich $PA : PE = PE : PB$
oder $PA . PB = PE^2$.

Bemerkung. (Fig. 58). Liegt P_1 innerhalb des Kreises, und ist $OP_1 = p$, so ist das Quadrat der halben kleinsten Sehne $CP_1{}^2 = r^2 - p^2$; liegt P_2 auf der Kreislinie, so ist $p = r$ und $r^2 - p^2 = o$; liegt P_3 ausserhalb des Kreises, so ist das Quadrat der Berührenden $P_3E^2 = p^2 - r^2$, hat also den entgegengesetzten Wert.

74. Aufg. Zu 3 gegebenen Strecken die 4te Proportionale zu zeichnen mit Hülfe von Lehrsatz 1.

75. Aufg. Zu 2 gegebenen Strecken die mittlere Proportionale zu zeichnen mit Hülfe der Zusätze zu Lehrsatz 1 und Lehrsatz 2.

76. Aufg. Eine Strecke a so zu verlängern, dass eine andere gegebene Strecke b die mittlere Proportionale zwischen der verlängerten a und der Verlängerung wird.

Lösung. (Fig. 59). Man zieht einen Kreis, in demselben $a = AB$ als Sehne, ferner an den Kreis eine Berührende $CD = b$, verbindet O mit D und zieht mit OD einen gleichlaufenden Kreis, der die verlängerte AB in E schneidet.

Frage. Welcher geometrische Ort liegt in der Lösung?

Erklärung. Eine Strecke heisst stetig oder nach dem goldenen Schnitt geteilt, wenn der grössere Teil derselben das geometrische Mittel zwischen der ganzen Strecke und dem kleinern Teil ist. (Euclid. VI.)

77. Aufg. Eine Strecke stetig zu teilen.

I. Lösung. (Fig. 60). Man errichtet auf AB in B die Senkrechte $AC = \frac{1}{2}$ AB und zieht um C mit CB den Kreis, ferner AC, welche Linie den Kreis in D schneidet, und trägt AD von A aus auf AB bis E_1 ab, so ist AB in E_1 stetig geteilt.

Beweis. Man verlängert AC bis zum Durchschnitt mit dem Kreise bis F, so ist nach L. 2. Zusatz

$$AB : AF = AD : AB$$

und nach dem Additionssatz der Proportionen

$$AB : \underbrace{(AF - AB)}_{AD} = AD : \underbrace{(AB - AD)}$$

$$AB \quad : \quad AE_1 \quad = AE_1 \quad : \quad BE_1.$$

II. Lösung. Man zieht in dem Kreise BF und durch D die Gleichlaufende DE_2, so ist jetzt BE_2 der grössere Abschnitt. Diese Lösung schliesst sich den frühern Teilungsaufgaben dadurch an, dass sie durch eine Gleichlaufende die Teilung auf die gegebene Strecke überträgt.

Die weitern Übungen zu den Kreissätzen bleiben der Ober-Sekunda vorbehalten.

Die Ableitung der 7 niedern Rechnungsarten und die Entwicklung des Zahlenbegriffs in der elementaren Arithmetik.

Die Zahl.

Die Zahlenlehre baut sich auf der Eins auf. Die Eins lässt sich vorläufig nicht erklären, sie liegt unbewusst schon in der Vorstellung des unbelehrten Kindes. Die Vielheit der Dinge auf dem Weihnachtstisch erfreut das Kindesherz, es vergleicht die ihm gehörigen mit den der Geschwister und ist zufrieden, wenn es nicht weniger hat. Noch unklar und allgemein offenbart sich ihm die Vielheit im Gegensatz zu der Einheit; auch vermag es kleinere und wertlosere Dinge von grösseren zu unterscheiden, wie Nüsse von Äpfeln; es reiht sich die Vorstellung der Gleichartigkeit und Verschiedenheit der Dinge an.

Mit der zunehmenden Belehrung klärt sich der Begriff der Einheit, man entkleidet ihn allmählich des anhaftenden Nebensächlichen, wie Frucht, Kugel, und erhält so die reine Eins, die Grundvorstellung der gesamten Zahlenlehre.

Selbst dem gereiften Verstande ist die Eins ein unerklärbarer Urbegriff; denn man muss, um einen Begriff zu erklären, zu einem einfachern, schon bekannten greifen, der jenen umschliesst; es giebt aber keinen einfachern Begriff als die Eins. Sie lässt sich weder nach Umfang noch nach Inhalt einem andern Begriff unterordnen, sondern sie ist das seiner Körperlichkeit entkleidete Ding an sich; so ist die Zahlenlehre im weitern Sinne: „Die Idee der Befreiung des Grössenbegriffs von den ihm anhaftenden unwesentlichen und störenden Beschränkungen."

Eine Zahl bedeutet die Aufforderung, die Eins einmal oder mehrmals zu denken; durch die einfach aufeinanderfolgende Wiederholung der Eins erhalten wir die natürliche Zahlenreihe. Diese ist unbegrenzt, denn denkt man eine noch so grosse Zahl, so lässt sich immer eine um Eins grössere vorstellen. Um grosse Zahlen zu veranschaulichen, teilt man sie in Gruppen von zehn, hundert, tausend u. s. w. ein, die ausserordentliche Einfachheit der Darstellung grosser Zahlen durch die Stellung der Ziffern (indisch-arabische Zahlenordnung) erfreut den Verstand, er erkennt, dass ein weiterer Ausbau der Zahlenlehre auf anderen Zeichen wie z. B. den griechischen und römischen nicht möglich wäre.

Die graden Rechnungsarten.

1. Die Addition.

Die Forderung, zwei beliebige Zahlen so zu verbinden wie die Eins mit der Eins, bildet die Aufgabe der Addition.

Zwei Zahlen addieren heisst eine dritte finden, die so oft Eins enthält wie jene beiden zusammengenommen.

Man könnte nun alle folgenden Rechnungsarten, die einzig und allein eine Ausbeutung des Additionsgedanken sind, in ähnlicher Weise in Worten beschreiben, würde aber dadurch eine ausserordentlich weitschweifige Ausdrucksweise der Rechengesetze erhalten; eine knappe, kurze Form liefert erst die Einführung der Buchstaben. Sie ermöglichen es, die Gesetze der Zahlenverbindungen unabhängig von den besondern Werten der Zahlen, die verbunden werden sollen, in völliger Allgemeinheit auszudrücken, und enthalten in ihrer Schlussform meist noch den Gang der Rechnung angedeutet, welcher in den besondern Zahlen, den Summen von Einheiten, fehlt.

Euclid gebrauchte zur Darstellung allgemeiner Zahlen Strecken; der Gebrauch der Buchstaben wurde erst ein allgemeiner im 16ten Jahrhundert durch Regiomontan und besonders durch Vieta.

Wir bezeichnen bekannte Zahlen durch die ersten Buchstaben, unbekannte durch die letzten des Alphabets.

Eine Klammer bezeichnet die Zusammengehörigkeit der in ihr vorhandenen Grössen.

Die Gesetze der Addition lassen sich in 1. $a + (b + c) = (a + b) + c$ (Gesetz der Zuordnung oder Association), und 2. $a + b = b + a$ (Gesetz der Vertauschung oder Kommutation) zusammenfassen, oder kurz in dem einen: Die Ordnung der Summanden ist beliebig.

Alle übrigen Rechnungsarten entstehen aus der Addition durch Wiederholung und Entgegensetzung.

2. Die Multiplikation.

Zwei Zahlen multiplizieren heisst die eine (Multiplikand) so oft als Summand setsen, als die andere (Multiplikator) Einheiten enthält; das Ergebnis heisst das Produkt. Ein Produkt ist demnach eine Summe gleicher Summanden.

Es ist $\begin{array}{ccc} \cdot & \cdot & \cdot \\ \cdot & \cdot & \cdot \\ \cdot & \cdot & \cdot \\ \cdot & \cdot & \cdot \end{array} = \begin{array}{cccc} \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \\ \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \\ \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \end{array}$

3 Einheiten, viermal als Summand gesetzt, giebt ebensoviel Einheiten, als 4 Einheiten, dreimal als Summand gesetzt, also $3 . 4 = 4 . 3$, das Gesetz der Vertauschung wird also dargestellt in

$$1.\quad a . b = b . a.$$

Das Gesetz der Zuordnung in

$$2.\quad a . (b . c) = (a . b) . c = (b . c) . a = (a . c) . b.$$

Da es demnach gleichgültig ist, wie eine Klammer gesetzt wird, so kann man sie weglassen, die zu multiplizierenden Zahlen werden nun Faktoren genannt.

Die Multiplikation hat dasselbe einfache Gesetz der Addition, nämlich: Die Ordnung der Faktoren ist beliebig.

Ein Summe $a + b$ mit 3 multiplizieren, heisst $a + b$ 3mal als Summand setzen, also $a + b + a + b + a + b = 3a + 3b$, allgemein: $(a + b) . m = am + bm$, die gliedweise (distributive) Eigenschaft der Multiplikation.

3. Das Potenzieren.

Eine Zahl mit einer andern potenzieren heisst die eine so oft als Faktor setzen, als die andere anzeigt. Das Potenzieren geht aus dem Multiplizieren hervor wie dies aus dem Addieren.

Die Potenz ist ein Produkt gleicher Faktoren.

Die Form a^m fordert, die Zahl a mmal als Faktor setzen. a heisst die Grundzahl, m der Exponent, a^m die Potenz.

Hier gilt nicht das Gesetz der Zuordnung, denn es ist $5^{(3^2)}$ verschieden von $(5^3)^2$, allgemein $a^{(m^n)}$ verschieden von $a^{(m)^n}$, auch gilt nicht das Gesetz der Vertauschung, denn es ist 3^2 verschieden von 2^3, allgemein a^m verschieden von m^a, aber es gilt das distributive oder das Gesetz der gliedweisen Potenzierung, also

$$\begin{array}{lll} a^{3 . 2} = (a^3)^2, & \text{allgemein } 1. & a^{m . n} = (a^m)^n \\ (ab)^2 = a^2 . b^2, & \text{allgemein } 2. & (ab)^m = a^m . b^m \\ a^3 . a^4 = a^7, & \text{allgemein } 3. & a^m . a^n = a^{m+n}. \end{array}$$

Diese 3 Rechnungsarten sind die graden, sie fliessen aus dem Wesen der Zahlen, als den Summen von Einheiten. Es würde nun nichts im Wege stehen, in derselben Weise aus den vorigen Rechnungsarten neue abzuleiten, indem man z. B. Grundzahl und Exponent gleich, demnach die Form a^a, darauf $(a^a)^a$ zur Grundlage weiterer Operationen macht; da sich aber ein solches Bedürfnis nicht herausgestellt hat, so bleibt man bei dem Bestand der 3 graden Rechnungsarten.

Die entgegengesetzten Rechnungsarten.

4. Die Subtraktion.

In der Gleichung $a + b = c$ wurde aus den bekannten Grössen a und b die Summe c abgeleitet.

Wirft man nun die Frage auf, welchen Wert eine Grösse haben muss, um, zu a addiert, die Summe c hervorzubringen, so kann dieser Wert nur b sein; die Antwort wird durch die Subtraktion, die Entgegensetzung der Addition, gegeben.

Eine Zahl a von c subtrahieren heisst demnach eine Zahl b finden, welche, zu a addiert, c ergiebt. Hier heisst c der Minuendus, a der Subtrahendus, b der Rest, geschrieben $c - a = b$.

Da a und b vertauscht werden können, also derselbe Vorgang ausgedrückt wird in $c - b = a$, so giebt es nur eine Umkehrung der Addition, die Subtraktion. Die Gesetze derselben ergeben sich aus denjenigen der Addition.

Im Verlauf der Untersuchung mit allen möglichen Zahlen treten Hindernisse ein; erhebt man z. B. die Forderung, eine grössere von einer kleinern Zahl abzuziehen, so findet man in der uns bekannten Zahlenreihe keine Zahl, die diese Forderung erfüllt. Man ist demnach gezwungen, entweder sein Unvermögen einzugestehen und die Aufgabe als unmöglich darzustellen, oder die Möglichkeit dadurch herbeizuführen, dass man neue Zahlenformen findet. Diese Überlegung führt zu der Bildung negativer und positiver, oder der Beziehungs- oder relativen Zahlen im Gegensatz zu den bisher betrachteten, den freistehenden oder absoluten Zahlen, den Summen von Einheiten.

Gesetzt, ein Dampfwagen fährt 80 m vorwärts und 30 m rückwärts, so ist er im Ganzen 50 m vorwärts gekommen, dies wird dargestellt durch + 50 m; fährt er aber 80 m vorwärts und 130 m rückwärts, so ist er, vom Anfangsort seiner Bewegung gerechnet, 50 m rückwärts gekommen, dies wird dargestellt durch — 50 m.

Allgemein enthält die positive Zahl $+ a$ die Aufforderung: Addiere a, die negative Zahl $- a$ die: Subtrahiere a.

Die Versinnlichung dieser Zahlen durch die Richtung giebt nur eine bildliche Vorstellung, nicht das Wesen derselben; weniger klare Vorstellungen geben Vermögen und Schuld, Bejahung und Verneinung.

Ist der Subtrahendus dem Minuendus gleich, so erhält man $a - a = 0$; 0 ist der Unterschied zweier gleichen Zahlen.

Die positive Zahl ist der Unterschied zweier Zahlen, von denen der Minuendus grösser als der Subtrahendus ist.

Die negative Zahl ist der Unterschied zweier Zahlen, von denen der Minuendus kleiner als der Subtrahendus ist.

Es gab eine Zeit, in welcher eine negative Zahl unmöglich erschien; in der angewandten Arithmetik kann in der That eine negative Zahl eine Unmöglichkeit darthun.

Beispielsweise ergiebt die Aufgabe: 10 M. so unter 2 Personen zu verteilen, dass die eine 16 M. mehr besitzt als die andere, eine Unmöglichkeit; sieht man aber von der Einkleidung der Aufgabe ab, die ja nichts mit der reinen Zahlenlehre und den aus der Eins geschöpften Rechnungsformen zu thun hat, so wird die Aufgabe zu lösen sein: Zwei Zahlen zu finden, deren Summe 10 und deren Unterschied 16 ist; man findet (+ 13) und (— 3). Der Fortschritt in der Arithmetik ist eben bedingt durch die Einführung neuer Erklärungen.

Wir haben jetzt über die natürliche Zahlenreihe hinaus eine andere gefunden, die sich ebenso aus der negativen Einheit bildet wie jene aus der positiven; diese beiden gewonnenen

Zahlenreihen kann man von 0 nach entgegengesetzten Richtungen darstellen, wie folgendermassen:

$$-\infty \;.\;.\;.\;.\; -4 \quad -3 \quad -2 \quad -1 \quad 0 \quad +1 \quad +2 \quad +3 \quad +4 \;.\;.\;.\;.\; +\infty$$

∞ ist das Zeichen für unendlich.

Es liegt nicht in unserer Absicht, hier eine erschöpfende Übersicht sämtlicher Rechnungsformen zu geben, die durch die Einführung dieses neuen Zahlenbegriffs entstehen, doch erklärt sich sehr leicht das Rechnen mit den Richtungszahlen durch das Bild der von 0 aus nach entgegengesetzten Richtungen bis ins Unendliche verlaufenden Zahlenreihe. So ist

1. $(+2).(+3) = +6$, denn $(+2)$ wird 3 mal nach derselben Richtung als Summand gesetzt.
2. $(-2).(+3) = -6$, denn (-2) wird 3 mal nach derselben Richtung als Summand gesetzt.
3. $(+2).(-3) = -6$, denn $(+2)$ wird 3 mal nach entgegengesetzter Richtung als Summand gesetzt.
4. $(-2).(-3) = +6$, denn (-2) wird 3 mal nach entgegengesetzter Richtung als Summand gesetzt.

Aus dem reinen Zahlenbegriff heraus und aus der ursprünglichen Erklärung der Multiplikation wäre es nicht möglich, (-3) als Multiplikator zu denken, man musste also entweder den Gang der Untersuchung hier abbrechen oder durch eine neue Abmachung weiterführen. $(-a).(-b) = +ab$ hat seinen Wert durch eine Vereinbarung, welcher weder Früherem widerspricht, noch in seinen Konsequenzen zu etwas Widersinnigem führt.

Das Bild von Vermögen und Schuld lässt uns hier ganz im Stich, denn Schuld mit Schuld vervielfacht, giebt niemals Vermögen, während das Entgegengesetzte von dem Entgegengesetzten wieder auf die erste ursprüngliche Richtung führt.

5. Die Division.

Die Aufgabe der Multiplikation war die, aus den Faktoren a und b das Produkt c zu berechnen; die umgekehrte, nämlich einen Faktor zu finden, wenn das Produkt und der andere Faktor gegeben ist, heisst Division. Da die Faktoren a und b vertauscht werden können, da also die Frage nach dem ersten oder nach dem zweiten Faktor dieselbe Antwort verlangt, so giebt es von der Multiplikation auch nur eine Umkehrung. Das Produkt heisst jetzt der Dividendus, der gegebene Faktor der Divisor, der gesuchte Faktor der Quotient.

Z. B. ist $(+6):(+2) = +3$, weil $(+2).(+3) = +6$ ist, und
$(+6):(+3) = +2$, weil $(+3).(+2) = +6$ ist.

Wollen wir aber aus dem Produkt $(+7)$ und dem einen Faktor $(+3)$ den andern Faktor bestimmen, so finden wir weder in der positiven noch in der negativen Zahlenreihe eine Zahl, welche der Bedingung der gestellten Aufgabe entspricht.

Wir haben also hier wieder eine Grenze unseres aus dem Zahlenbegriff entstandenen Rechenverfahrens und stossen auf etwas Neues, was sich dem Vorigen nicht unterordnet. Um nun der Forderung, alle Divisionen ohne Ausnahme ausführen zu können, gerecht zu werden, denkt man die Einheit, deren Vielheit in den natürlichen Zahlen enthalten ist, in soviel gleiche Teile geteilt, als der Teiler angiebt, ein solcher Teil (in diesem Falle $\frac{1}{3}$) heisst ein einfacher oder Stammbruch; allgemein ist der Zähler oder Dividendus die Anzahl der durch die Teilung entstandenen Untereinheiten, der Nenner oder Divisor die Anzahl der Teile. Der Bruch $\frac{7}{3}$ ist eigentlich $7 \,.\, \frac{1}{3}$.

Es kann freilich der Fall eintreten, dass die Lösung einer Aufgabe unmöglich wird, wenn die Natur der Aufgabe ihre Lösung durch diesen neuen Begriff nicht gestattet. Z. B. „Durch ein in einer Maschine befindliches Rad, welches 100 Zähne besitzt und in der Minute einmal umläuft, soll ein anderes Rad so in Bewegung gesetzt werden, dass dieses 12 mal in der Minute umläuft. Wieviel Zähne muss dieses Rad haben?"

Die dieser Einkleidung zu Grunde liegende rein mathematische Aufgabe besteht darin, 100 durch 12 zu dividiren, das Ergebnis ist $8\frac{1}{3}$. Das Auftreten des Bruches zeigt die Unmöglichkeit an, die ursprünglich gestellte Aufgabe zu lösen, da die zu bestimmende Anzahl der Zähne des kleinen Rades eine ganze Zahl sein muss.

Aus der Erklärung des Bruches ergeben sich ohne Weiteres die wichtigsten Gesetze der Bruchrechnung:

1. Ein Bruch bleibt ungeändert, wenn man Zähler und Nenner mit demselben Faktor multipliziert. (Bruch erweitern.)

2. Ein Bruch bleibt ungeändert, wenn man Zähler und Nenner durch denselben Faktor dividiert. (Bruch kürzen.)

3. Jeder Bruch, dessen Zähler und Nenner gleich sind, hat den Wert 1.

4. Alle Brüche, die ungleiche Nenner haben, also nicht unmittelbar mit einander verbunden werden können, müssen erst gleichnamig gemacht werden und folgen dann den bekannten Gesetzen; Rechenvorteile, die sich ergeben, werden als besondere Regeln ausgesprochen, z. B. mit einem Bruch wird dividiert, indem man mit umgekehrten Bruch multipliziert.

Beweis. Es soll $\frac{a}{b}$ durch $\frac{c}{d}$ dividiert werden. Macht man die Brüche gleichnamig, so erhält man $\frac{a \cdot d}{b \cdot d} : \frac{b \cdot c}{b \cdot d}$, da man jetzt dieselbe Untereinheit hat, so dividiert man nur die Zähler und erhält $\frac{a \cdot d}{b \cdot c} = \frac{a}{b} \cdot \frac{d}{c}$, wodurch die Regel bewiesen ist.

Auch die Brüche heissen wirkliche oder reelle Zahlen, weil sie an solchen Dingen, welche einer wirklichen Teilung fähig sind, diese Teile darstellen, wahrend es auch unzählig viel Dinge giebt, welche eine Teilung ihrem Begriffe nach gar nicht zulassen, wie z. B. das Auge.

In unserem Zahlenbilde ordnen sich nun die Brüche ein als Untereinheiten der ursprünglichen Einheiten, so dass jetzt die Zahlen mit Brüchen sich folgendermassen veranschaulichen lassen.

$$-\tfrac{8}{3} - \tfrac{7}{3} \quad -\tfrac{5}{3} - \tfrac{4}{3} \quad -\tfrac{2}{3} - \tfrac{1}{3} \; 0 + \tfrac{1}{3} + \tfrac{2}{3} \quad + \tfrac{4}{3} + \tfrac{5}{3} \quad + \tfrac{7}{3} + \tfrac{8}{3}$$

$$-\infty \ldots -3 \qquad -2 \qquad -1 \qquad\qquad +1 \qquad +2 \qquad +3 \ldots +\infty$$

6. Das Wurzelausziehen.

Unter $a^m = b$ verstanden wir ein Produkt von m Faktoren a. Ist nun die Potenz b und der Exponent m gegeben, und wird die Grundzahl a gesucht, so ist dies die Aufgabe des Wurzelausziehens oder Radizierens.

Unter $\sqrt[m]{b}$ verstehen wir diejenige Zahl, welche mit m (dem Wurzelexponenten) potenziert die gegebene Zahl (den Radikanden) giebt, so dass

Wurzelexponent

Wurzel = Radikand ist.

Da $b = a^m$, so ist 1. $\sqrt[m]{a^m} = a$.

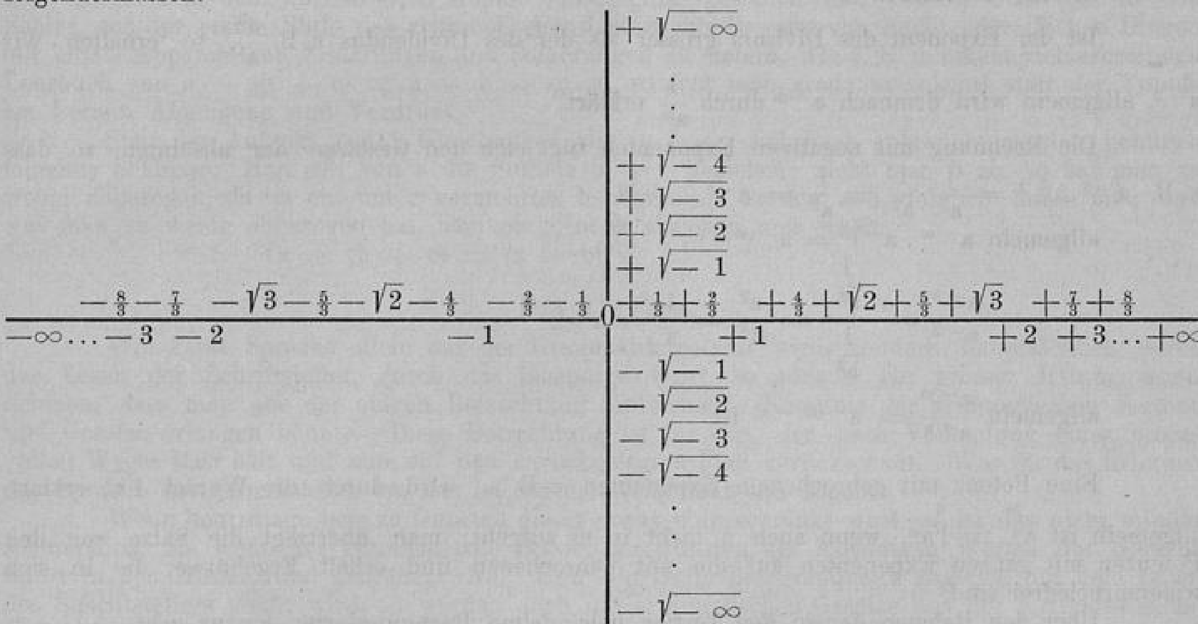
Die Gesetze der Wurzelrechnung beziehen sich natürlich auf die der Potenzrechnung.

Beispielsweise ist $\sqrt[4]{81} = \mp 3$, weil sowohl $(+3)^4$ als auch $(-3)^4$ 81 ist.

Stellen wir aber die Frage, was $\sqrt{3}$ ist, so finden wir wieder in der von uns zum Schluss der Subtraktion angegebenen erweiterten Zahlenreihe keine Zahl, die hierauf eine Antwort giebt, sondern nur eine, nämlich 1,732 . . . , die, mit 2 potenziert, annähernd 3 giebt. Solche Zahl, die weder durch eine ganze noch durch einen Bruch genau ausgedrückt werden kann, heisst irrational. Diese Zahlen lassen sich in unserm Zahlenbilde zwischen den Brüchen, wenn auch nicht mit völliger Genauigkeit, einschalten.

Dehnen wir ferner diese aus der Potenz fliessende Umkehrung, die Wurzelrechnung, auch auf negative Zahlen aus, fordern wir also eine Zahl, welche, mit einem Exponenten potenziert, eine negative Zahl giebt, so können wir auch nicht einmal einen genäherten oder irrationalen Wert angeben, und wir gelangen zu dem Begriff der unmöglichen oder imaginären Zahl, deren Einheit $\sqrt{-1}$ seit Gauss mit i bezeichnet wird.

Durch diese Zahlen, die Seiten- oder lateralen Zahlen, erweitert sich nun das Zahlenbild folgendermassen:



Wenn das Auftreten von negativen Grössen oder Brüchen schon die Unmöglichkeit einer Aufgabe enthielt, so wird dies erst recht durch imaginäre Grössen angezeigt, wie aus folgendem Beispiel Montucla's erhellt: „Eine gegebene Grade von der Länge 2 soll in 2 Teile geteilt werden, dass das von ihnen gebildete Rechteck den Inhalt 4 hat."

Entkleiden wir diese Aufgabe ihrer geometrischen Form, so erhalten wir die rein arithmetische Aufgabe: Zwei Zahlen zu finden, deren Summe 2, deren Produkt 4 ist.

Die Lösung der beiden Gleichungen

$$x + y = 2; \; x \, . \, y = 4 \text{ oder der einen Gleichung}$$
$$x^2 - 2x + 4 = 0$$

giebt die beiden Zahlenwerte $1 + \sqrt{-3}$, $1 - \sqrt{-3}$.

Nimmt man jetzt auf die ursprünglich gestellte Aufgabe Rücksicht, wonach die gesuchten Grössen Teile einer graden Linie und daher reelle Grössen sein sollen, dann ist die Lösung der Aufgabe unmöglich; diese Unmöglichkeit wird hier durch das Auftreten imaginärer Grössen angezeigt.

So sehen wir, dass sich in den bis jetzt erklärten 6 Rechnungsarten neue Zahlenbegriffe ergaben, welche sich der ursprünglichen Festsetzung der Eins und der Zahl nicht unterordneten, nämlich die negativen, die gebrochenen, die irrationalen und imaginären Grössen; alle haben ihre gemeinsame Entstehungsart in den umgekehrten Rechnungsarten, alle haben ihre Daseinsberechtigung in einer Erklärung, die nur dann zulässig ist, wenn die Übertragung der früher festgesetzten Rechnungsmethoden zu widerspruchsfreien Ergebnissen führt.

Wäre man in der Erklärung ganz willkürlich verfahren und hätte sich nicht an die durch die reellen ganzen Zahlen festgelegten Normen gebunden, so hätte das arithmetische Gebäude eine wunderliche, schwer zu übersehende Gestaltung angenommen; eine folgerichtige und harmonische Übereinstimmung in allen ihren Teilen gewann diese Wissenschaft durch die Befolgung des Grundgedankens, dass man jedesmal, wenn man einen neu eingeführten Zahlenbegriff den bekannten Rechnungsarten unterwarf, die in diesen früher geltenden Sätze nun als weiter fortgeltend annahm.

So überträgt man das aus $\frac{a^5}{a^3} = a^2$, allgemein $\frac{a^m}{a^n} = a^{m-n}$ fliessende Gesetz: P o t e n z e n m i t g l e i c h e r G r u n d z a h l w e r d e n d i v i d i e r t , i n d e m m a n d e n E x p o n e n t e n d e s D i v i s o r s v o n d e m d e s D i v i d e n d u s a b z i e h t, auch auf den Fall, dass $m = n$ ist, dann ist $\frac{a^m}{a^m} = a^{m-m}$, oder $1 = a^0$, folglich erklärt man a^0 durch 1, während die ursprüngliche Erklärung von 0 Faktoren a keinen Sinn hätte.

Ist der Exponent des Divisors grösser als der des Dividendus z. B. $\frac{a^3}{a^5}$, so erhalten wir a^{-2}, allgemein wird demnach a^{-m} durch $\frac{1}{a^m}$ erklärt.

Die Rechnung mit negativen Exponenten fügt sich den Gesetzen der absoluten, so dass z. B. $a^{-3} . a^{-2} = \frac{1}{a^3} . \frac{1}{a^2} = \frac{1}{a^5} = a^{-5}$,

allgemein $a^{-m} . a^{-n} = a^{-(m+n)}$,

$$\frac{a^{-3}}{a^{-2}} = \frac{\frac{1}{a^3}}{\frac{1}{a^2}} = \frac{a^2}{a^3} = \frac{1}{a} = a^{-1},$$

allgemein $\frac{a^{-m}}{a^{-n}} = a^{-(m-n)}$ ist.

Eine Potenz mit gebrochenem Exponenten z. B. $a^{\frac{3}{5}}$ wird durch die Wurzel $\sqrt[5]{a^3}$ erklärt, allgemein ist $a^{\frac{m}{n}} = \sqrt[n]{a^m}$, wenn auch n nicht in m aufgeht; man überträgt die Sätze von den Potenzen mit ganzen Exponenten auf die mit gebrochenen und erhält Ergebnisse, die in sich widerspruchsfrei sind.

Über den Rahmen der in den Tertien behandelten Rechnungsarten hinaus geht

7. Das Logarithmieren.

Da in der Potenz nicht das Gesetz der Vertauschung gilt, da Grundzahl und Exponent nicht vertauscht werden können, so giebt es von der dritten graden Rechnungsart, dem Potenzieren, eine zweite Umkehrung. Diese sucht aus der Potenz und der Grundzahl den Exponenten, der jetzt Logarithmus (log) heisst; der Logarithmus einer Zahl ist der Exponent, mit welchem man die Grundzahl potenzieren muss, um die Zahl zu erhalten, so dass

$$\text{Grundzahl}^{\text{Logarithmus}} = \text{Zahl ist.}$$

Beispielsweise ist $\overset{3}{\log}\, 81$, (gelesen log 81 zur Grundzahl 3) $= 4$, weil $3^4 = 81$ ist,

$$\overset{10}{\log}\, 1000 = 3, \text{ weil } 10^3 = 1000,$$

$$\overset{a}{\log}\, a^m = m, \text{ weil } a^m = a^m,$$

$$\overset{a}{\log}\, 1 = 0, \text{ weil } a^0 = 1 \text{ ist.}$$

Eine Logarithmentafel ist eine Potenztafel, in der die Exponenten aller reellen Zahlen angegeben sind, welche als Potenzen von ein und derselben Grundzahl gedacht werden.

Fassen wir die Ergebnisse unserer Betrachtung zusammen, so haben wir gefunden 3 grade und 4 entgegengesetzte

Rechnungsarten.

Grade	Entgegengesetzte
1. Addieren	4. Subtrahieren
2. Multiplizieren	5. Dividieren
3. Potenzieren	6. Wurzelausziehen 7. Logarithmieren;

ferner, als Erweiterungen unseres einfachen Zahlenbegriffs, aus der Subtraktion die negative Zahl, aus der Division den Bruch, aus der Wurzel die irrationale und die imaginäre Zahl.

So haben wir in der elementaren Arithmetik ein in sich abgerundetes Gebiet, die einzige Wissenschaft, die für den Schüler in einem streng in sich geschlossenen System auftritt.

Freilich ist nicht zu übersehen, dass dasjenige, was dem gereiften Verstande Freude macht, noch lange nicht dem ungeschulten Kopfe Befriedigung gewährt, und verfällt man gar in den Fehler, auf der ersten Stufe des arithmetischen Unterrichts Beweise von leicht begreiflichen Dingen mit einem Apparate von Erklärungen und Folgerungen zu liefern, wie z. B. in einem vielverbreiteten Lehrbuch von $a - (b + c) = a - b - c$, so erreicht man grade umgekehrt statt der Freude am Lernen Abneigung und Verdruss.

Statt des Aufzugs von 9 Gleichungen, die in jenem Lehrbuch gebraucht werden, genügen folgende Schlüsse: Man soll von a die Summe $b + c$ abziehen; zieht man b ab, so hat man zu wenig abgezogen, da ja ein um c vermehrtes b abgezogen werden soll, folglich muss man das, was man zu wenig abgezogen hat, nämlich c, noch abziehen und erhält

$$a - (b + c) = (a - b) - c.$$

Die Algebra.

Wie keine Sprache allein aus der Grammatik gelernt wird, sondern hauptsächlich durch das Lesen der Schriftsteller, durch das lebendige Wort, so wäre es ein grosser Irrtum, anzunehmen, dass man aus der obigen Betrachtung hinreichende Kenntnis der arithmetischen Formen und Gesetze erlangen könnte. Diese Betrachtung ist für den, der nach Vollendung eines mühevollen Weges Rast hält und nun auf den zurückgelegten Pfad zurückschaut. Was für das Erlernen der Sprache der Schriftsteller ist, das ist für die Arithmetik die Algebra.

Wenn heutzutage jene zu Gunsten dieser etwas eingeschränkt wird, so ist das nicht minder schmerzlich, als wenn der grammatische Betrieb zu Gunsten des lebendigen Wortes der Sprache selbst in den Hintergrund gedrängt wird. Und wie heute die Grammatik zugleich mit dem Lesen des Schriftstellers geübt wird, so werden auch die arithmetischen Gesetze aus der fortschreitenden Übung, die uns die Algebra liefert, herausgelöst und zur innern Überzeugung gefestigt.

Die Algebra oder die Wissenschaft von den Gleichungen fordert erstens die Übertragung aus der Wortsprache in die Zeichensprache, die Bildung der Gleichung, zweitens die Lösung der Gleichung und drittens die Deutung der Lösung, das heisst, die Zurückübersetzung aus der Zeichensprache in die Wortsprache.

Die Algebra bietet dem Verstande des Schülers in ihrer Eigentümlichkeit Dreierlei, wie es kein anderer Zweig des Unterrichts in gleicher Weise kann.

Erstens übt sie ausserordentlich den Scharfsinn, sie gewährt den Genuss des selbständigen Schaffens und verschafft die Freude, selbst verwickelte Verhältnisse in ihre einfachen Bestandteile zu zerlegen und durch einen eigenartigen Rechenmechanismus zu lösen.

Zweitens stellt sie den Schüler mitten in das menschliche Leben, sie nimmt ihre Aufgabe aus allen Zweigen des menschlichen Daseins und der menschlichen Thätigkeit, aus allen Erscheinungen und Gesetzen der Natur. Die Mischung verschiedener Flüssigkeiten, die Legierung der Metalle, die Fahrpläne der Eisenbahnen, die Bewegungen, Finsternisse und Durchgänge der Gestirne, die Zins- und Rentenverhältnisse, Rabatt- und Diskontovergütigungen, mittleren Zahlungstermine, das Steigen und Fallen der Papiere, die Akkord- und Gesellschaftsarbeit, die Thätigkeit von Pumpen und Schleusen, alles dies bietet ihr willkommenen Stoff, den sie mit ihrer niemals versagenden, niemals irrenden Methode verarbeitet. Die Kristallbildung, die Gesetzmässigkeit der unorganischen Welt, liefert ihrer Behandlung erst recht das geeignete Feld; selbst in dem organischen Leben, im Tier- und Pflanzenreich, sucht sie die Entwicklung in Zahlenformen zu fassen, sie erklärt die Zweckmässigkeit der Gliedmassen, die gesetzmässige Stellung der Blätter durch Mass und Zahl, ja sie scheut sich nicht, unser Wohlgefallen an dem, was schön und gut ist, durch die ihr eigenartige Form auszudrücken.

Das Ende unseres Jahrhunderts steht unter dem Zeichen der Beherrschung und Ausbeutung der Naturkräfte wie nie zuvor, nun — die Gesetze des Pendels und des freien Falls, des Hebels und der schiefen Ebene, der beweglichen Flüssigkeit und der sich schrankenlos ausdehnenden Dämpfe und Gase werden von der Algebra spielend bewältigt, sie verfolgt die Schwingungen der Metallsaite und der geschlossenen Luftsäule, sie bannt die Harmonie der Töne in ihre Formen, sie begleitet den durch das Prisma und die Linse dringenden Lichtstrahl, sie giebt dem den Weltraum durchforschenden Fernrohr und dem das Kleinste sichtbar machenden Mikroskop ihren Begleitschein, sie drückt der Dampf- und Dynamomaschine ihren Stempel auf und zwingt den elektrischen Strom, den ewig wechselnden Proteus, in ihre Formeln und Berechnungen.

Drittens aber bietet sie dem Schüler das erhabene Bild einer Wissenschaft, deren Anfänge im grauen Altertum wurzeln und deren jüngste Zweige in der neuesten Zeit fröhlich grünen und wachsen. Ein wahres Beispiel von der Kontinuität des Wissens durch alle Völker, alle Geschlechter!

Thales, der Berechner der Höhe der Pyramiden, Pythagoras, dem die Zahl das wirklich Seiende aller Dinge war, führen uns nach Ägypten, Griechenland, Süditalien. Euclid mahnt an die Blüte Alexandriens, Archimedes an Syrakus; aber nicht nur die Griechen und ihre Nachfolger, die Römer, leiten unsere ersten Schritte, sondern Völker, von denen wir sonst nur eine unbestimmte und zum Teil wenig erfreuliche Vorstellung haben, treten durch die gemeinsame Liebe zur Algebra unserm Denken und Fühlen näher, wie die Inder und Araber. Ist doch unser Zahlensystem selbst ein Geschenk der Inder, seit dem 12ten Jahrhundert der christlichen Zeitrechnung durch die Araber vermittelt; stammt doch das Wort Algebra selber aus dem Arabischen.

Die beiden von den Arabern immer zusammen gebrauchten Ausdrücke aldjebr w'almokabalâ sind die Bezeichnungen für 2 in der Algebra häufig vorkommenden Rechnungsformen. Beha-Eddin, ein persischer Mathematiker aus Syrien (1550 nach Chr.), sagt in seiner Essenz der Rechenkunst: „Die Seite, welche mit einer Negation behaftet ist, wird ergänzt und etwas dieser Gleiches auf der andern Seite addiert, das ist aldjebr. Die gleichen und gleichartigen Glieder auf beiden Seiten werden ausgeworfen, das ist almokabalâ."

In der Gleichung $x - 3a + 2b = 2b - 2a$
ist $x + 2b = 2b + a$ (aldjebr),
$x = a$ (almokabalâ).

Aldjebr ist also die Ergänzung (restauratio), noch heute heisst in Spanien der Wundarzt algebrista, hergeleitet aus demselben Wortstamm.

Bei den Indern erreichte die Mathematik im Mittelalter eine hohe Stufe der Ausbildung; sie unterschieden genau die Arithmetik, die reine Zahlenlehre, d. i. die Untersuchung der Eigenschaften der Zahlen an und für sich, und die Algebra, d. i. die Kunst, aus gegebenen Grössen und ihren Beziehungen zu andern noch unbekannten Grössen diese zu berechnen.

Die Unbekannten, welche wir mit den letzten Buchstaben des kleinen lateinischen Alphabets zu bezeichnen pflegen, wurden von ihnen „Farben" genannt und durch die Anfangsbuchstaben der Farbenamen ausgedrückt, wie K (kaluk, schwarz), N (niluk, blau), P (pandu, weiss).

In der Astronomie des Brahmegupta (650 n. Chr.) findet sich eine vollständige Auflösung der Gleichungen des I. und II. Grades; dieses Werk bezieht sich auf die Arithmetik und Astronomie des Aryabattha (350 n. Chr.), welches in Versen geschrieben ist. Im Bija-ganita des Bhaskara Acharya (1200 n. Chr.) findet sich der Gebrauch des Bruchstrichs und die Zeichen „senkrechter Strich" und „Punkt" für plus und minus.

Die Chinesen beteiligten sich ebenfalls an dem Ausbau der Algebra. Etwa ein Jahrhundert vor der christlichen Zeitrechnung veröffentlichte ein gewisser Tschang Tsang ein Werk „Kiu tschang swan suh" oder „Neun Sektionen der Arithmetik", eine neue verbesserte Auflage eines viel ältern Buches, dessen Verfasser unbekannt ist. Hierin sind 246 Aufgaben, deren Lösung eine ausgedehnte Kenntnis der Algebra, des pythagoräischen Lehrsatzes, des Flächeninhaltes, des Dreiecks und des Kreises (sehr ungenau) voraussetzt, von denen einige in unsere Aufgabensammlungen übergegangen sind. Die Fassung der Aufgaben deutet auf die Bekanntschaft mit indischen und arabischen Werken.

Positive und negative Zahlen unterscheiden die chinesischen Mathematiker dadurch, dass sie erstere mit roter, letztere mit schwarzer Tinte schreiben, plus heisst tsching, minus fu. Die den Chinesen nachgerühmte Eigenschaft der ausserordentlichen Verehrung ihrer Vorfahren zeigt sich auch an ihren Mathematikern; sie verschweigen lieber ihre eigenen Verdienste und geben ihre Gedanken nur für Entwickelungen der in den alten Werken, wie Kiu tchsang, aufgestellten Sätze aus, offenbar in der Absicht, den Ruhm jener ehrwürdigen Schriftsteller zu vermehren.

Sobald also die Menschen aus dem Zustande der rohen Barbarei heraustraten und an die Erscheinungen in der Natur nicht mehr mit abergläubischer Furcht, sondern mit dem Zweck, sie zu deuten und zu verstehen, herantraten, sobald stellte sich ihrem Forschungstriebe ein Werkzeug zur Verfügung, welches — wunderbar — bei allen Kulturvölkern dieselbe Ausbildung, dieselbe Form bis auf unwesentliche, wohl hauptsächlich im Sprachbau begründete Einzelheiten gewann, die Mathematik.

Diese geistige innere Übereinstimmung ist wie ein Wehen des göttlichen Geistes durch die Menschheit, und Recht hat jener alte Philosoph Aristipp, der, schiffbrüchig an eine unbekannte Küste geworfen, hier mathematische Zeichen im Sande erblickte und seinen Gefährten zurief: Seien wir guter Hoffnung, denn ich sehe die Spuren von Menschen. (Vitruo. de Archit. Praefatio.)

Mit Recht kann man erwarten, dass die andern Wissenschaften sich zu der Mathematik nicht feindlich, sondern dankbar stellen, denn sie ist eine bereitwillige Magd derselben; die Schulung des jugendlichen Verstandes durch die strenge und knappe Folge ihrer Schlüsse behütet vor der blossen Phrase, sie hilft so dem Studium der Grammatik und bildet in hohem Grade das Unterscheidungsvermögen des Seins von dem Schein aus.

Über ihren Wert für die Charakterbildung sagt Simon im Handbuch der Erziehungs- und Unterrichtslehre für höhere Schulen: „Die Sätze der Mathematik sind ewige Wahrheiten, erhaben ob Raum und Zeit. Und wie die reine Wahrheit der Polarstern unserer Wissenschaft ist, so ist es ihr grosser Vorzug, leichter als andere die Liebe zur Wahrheit in unsern Schülern zu wecken.“ Wenn Hegel mit Recht sagt: „Wer die Werke der Alten nicht kennt, der hat gelebt, ohne die Schönheit gekannt zu haben“, so erwidert Schellbach mit nicht minderem Recht: „Wer die Mathematik und die Resultate der neuern Naturforschung nicht gekannt hat, der stirbt, ohne die Wahrheit zu kennen.“

Τὰ μαθήματα καθάρματα ψυχῆς.

I.

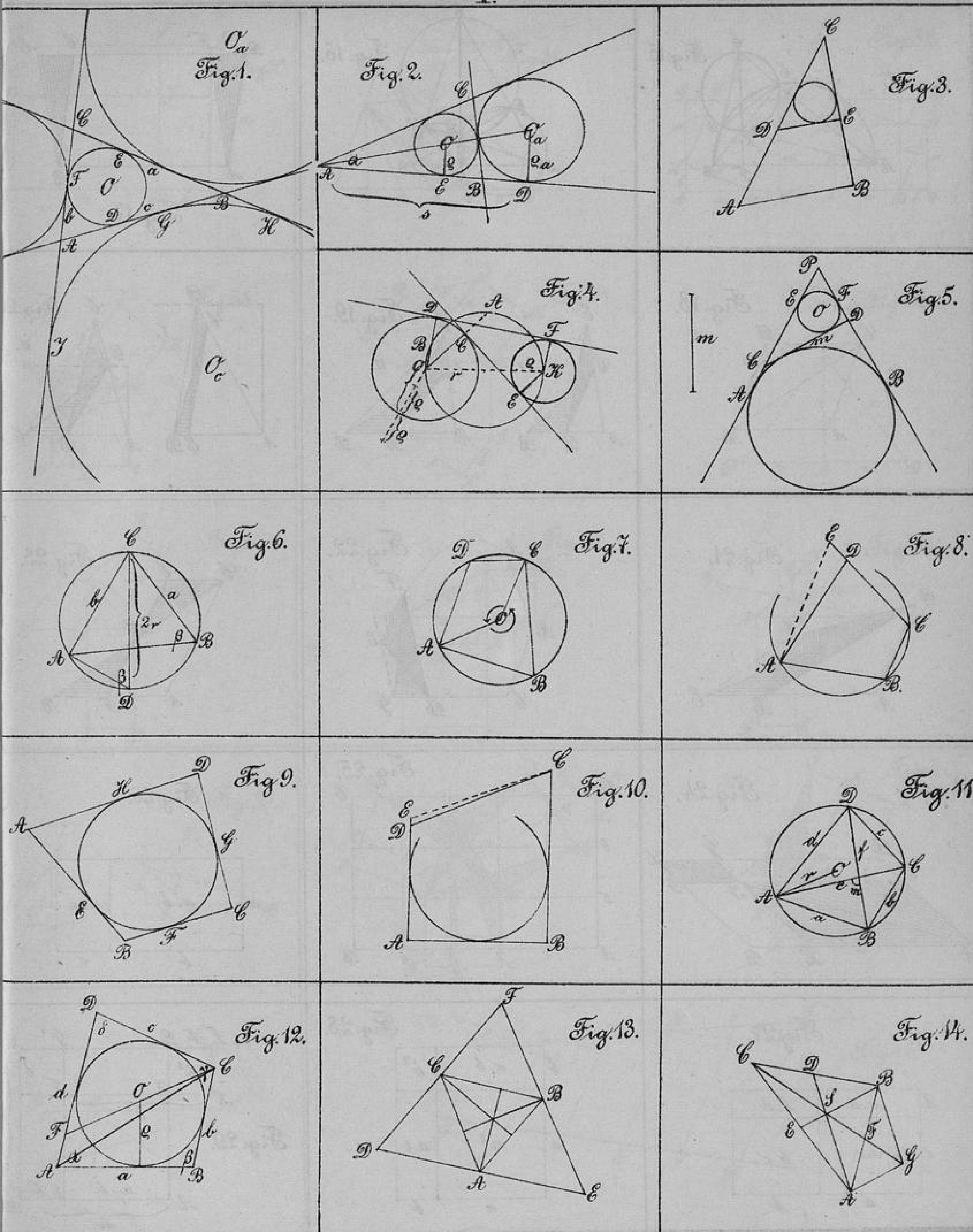


Fig. 1.
Fig. 2.
Fig. 3.
Fig. 4.
Fig. 5.
Fig. 6.
Fig. 7.
Fig. 8.
Fig. 9.
Fig. 10.
Fig. 11.
Fig. 12.
Fig. 13.
Fig. 14.

II.

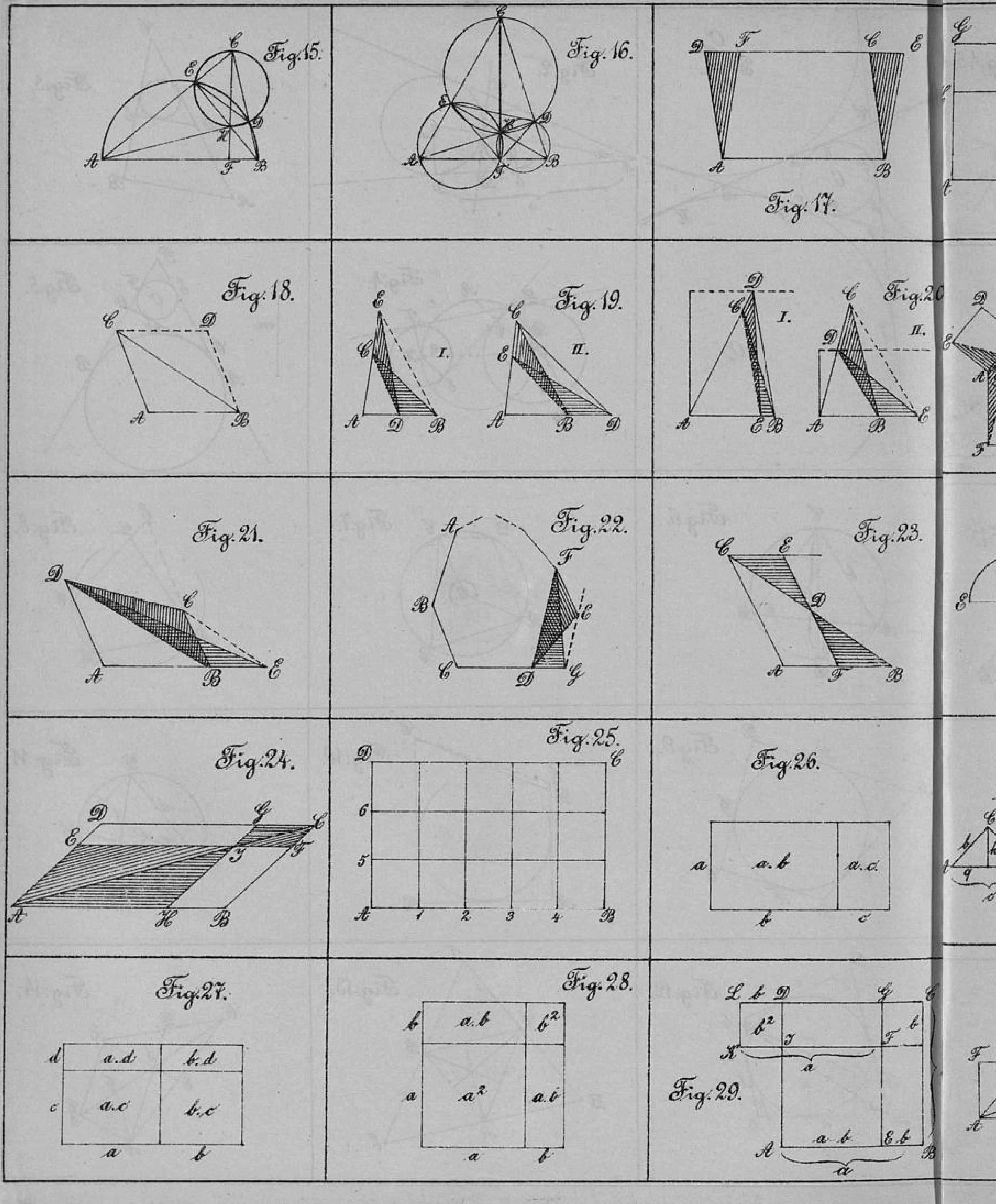


Fig. 15.
Fig. 16.
Fig. 17.
Fig. 18.
Fig. 19.
I.
II.
Fig. 20
I.
II.
Fig. 21.
Fig. 22.
Fig. 23.
Fig. 24.
Fig. 25.
Fig. 26.
a
a.b
a.c
b
c
Fig. 27.
d
a.d
b.d
c
a.c
b.c
a
b
Fig. 28.
b
a.b
b²
a
a²
a.b
a
b
Fig. 29.
b²
a
a-b.
E.b
a

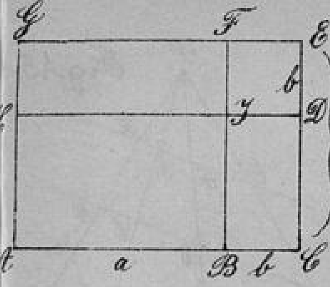


Fig. 30.

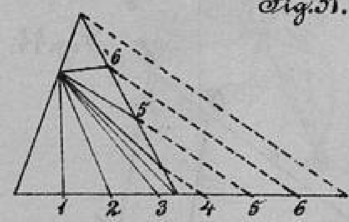


Fig. 31.

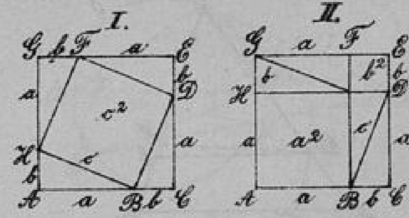


Fig. 32.

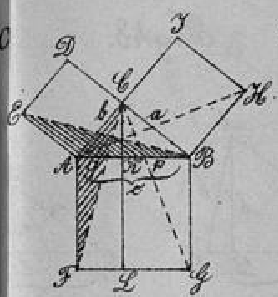


Fig. 33.

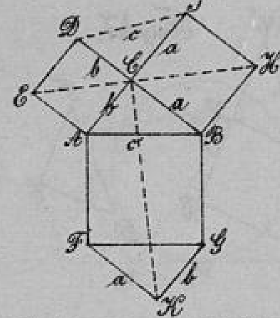


Fig. 34.

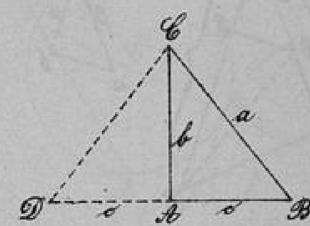


Fig. 35.

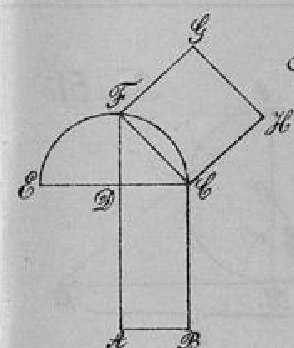


Fig. 36.

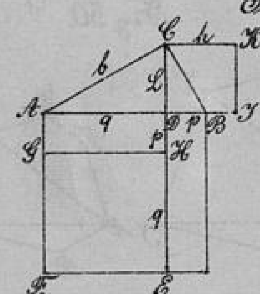


Fig. 37.

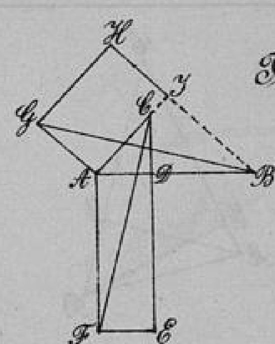


Fig. 38.

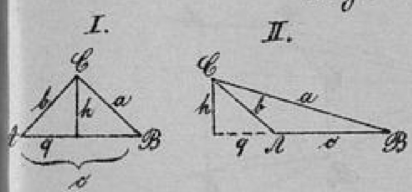


Fig. 39.

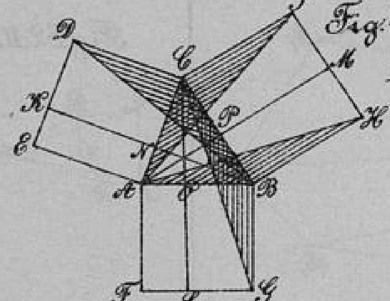


Fig. 40. I.

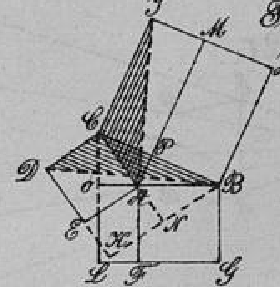


Fig. 40. II.

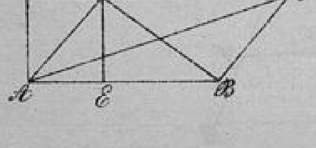


Fig. 41.

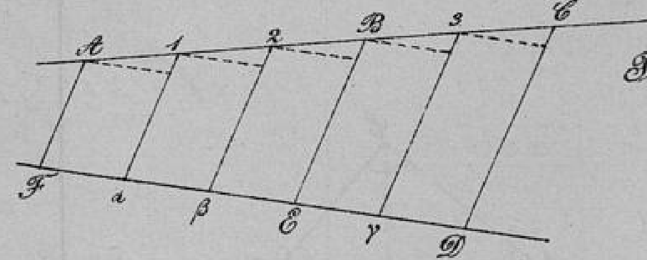


Fig. 42.

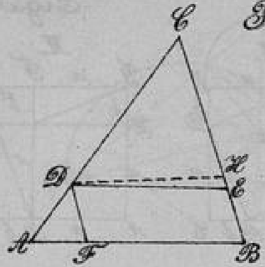


Fig. 43.

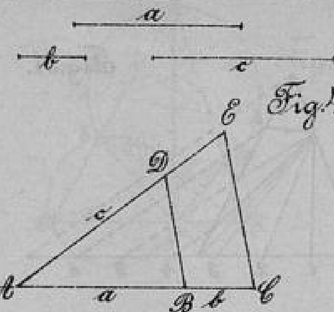


Fig. 44.

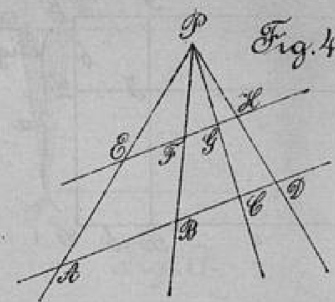


Fig. 45.

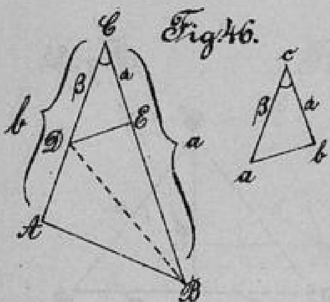


Fig. 46.

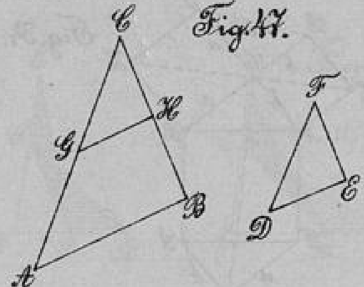


Fig. 47.

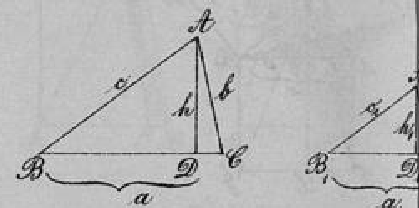


Fig. 48.

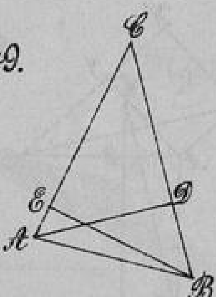


Fig. 49.

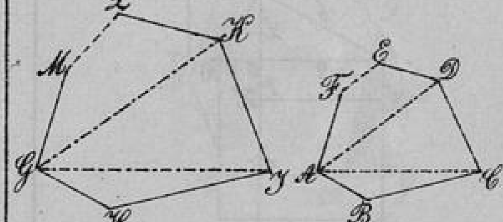


Fig. 50.

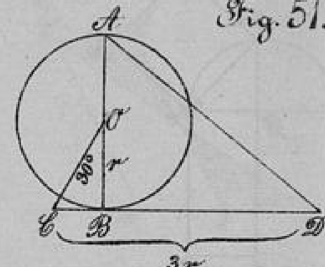


Fig. 51.

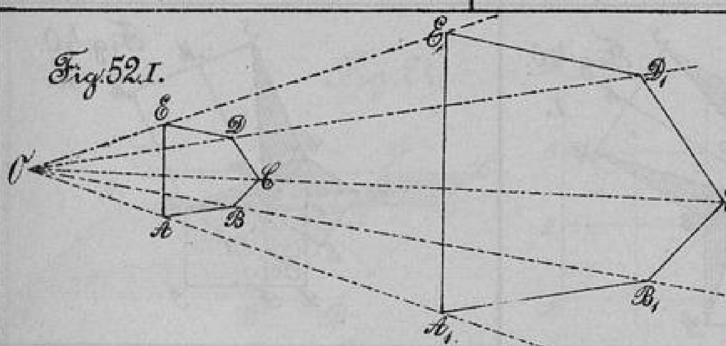


Fig. 52. I.

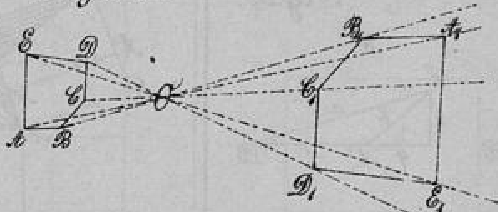


Fig. 52. II.

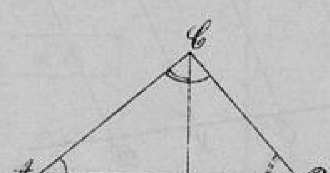


Fig. 53.

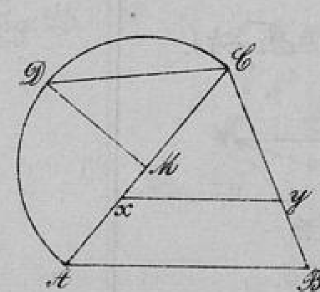


Fig. 54.

Fig. 55.

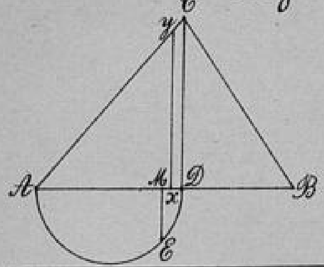


Fig. 56.

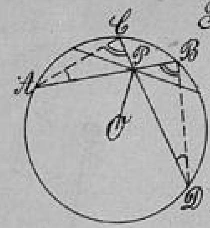


Fig. 57.

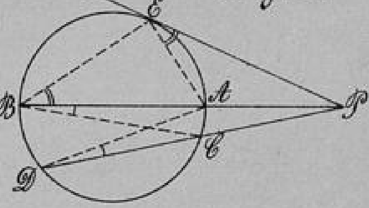


Fig. 58.

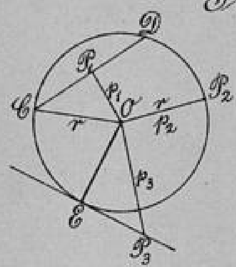


Fig. 59.

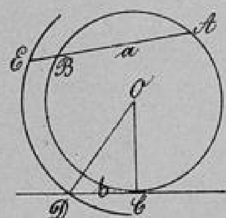


Fig. 60.

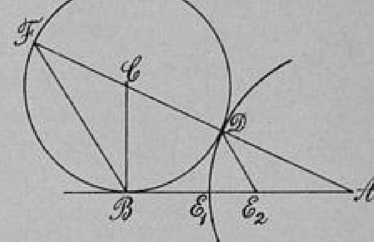


Fig. 43.

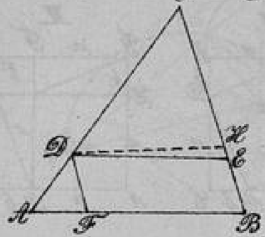


Fig. 45.

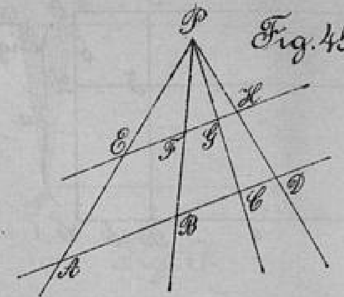


Fig. 46.

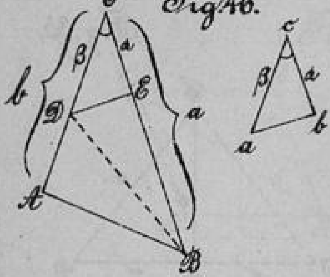


Fig. 48.

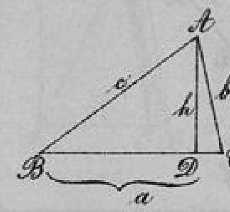


Fig. 49.

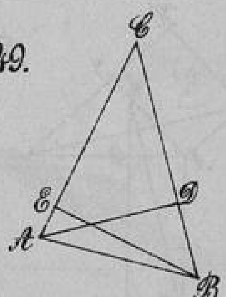


Fig. 51.

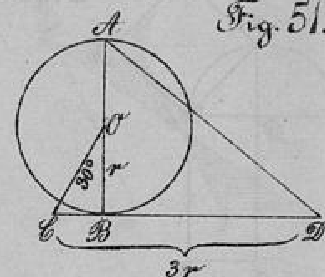
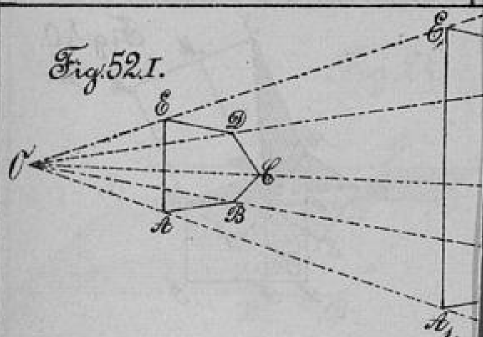


Fig. 52 I.



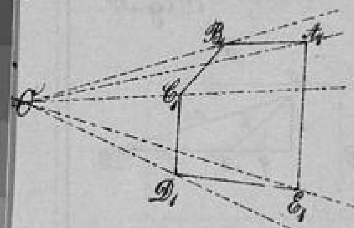


Fig. 53.

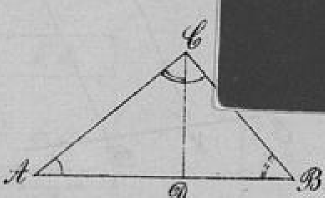


Fig. 54.