EIN DREIECK

zu zeichnen

aus der Grundlinie g, der Summe der beiden andern Seiten s und der zur Grundlinie gehörenden Höhe h.

1.

ANALYSIS.

Angenommen das Dreieck $a\,b\,c$ sei das verlangte und es sei $a\,b = g$, $c\,d = h$ und $a\,c + c\,b = s$. Beschreibt man, um die Summe herbeizuführen um c mit der kleineren Seite $c\,b$ einen Kreis, welcher die $a\,b$ in l, die $a\,c$ in f schneidet und verlängert man die $a\,c$ über c bis zur Peripherie, so erhält man die Linie $a\,g$, welche der gegebenen Summe s gleich ist. Betrachtet man die Figur näher, so ist einleuchtend, dass es nur darauf ankommt, die Lage des Punktes c festzulegen, also zwei geometrische Örter zu bestimmen, in deren Durchschnitt die Spitze des Dreiecks liegen muss, da die Endpunkte der Grundlinie, weil sie der Grösse nach gegeben ist, festgelegt werden können. Verbindet man l mit c und verlängert diese Verbindungslinie, bis sie ein Durchmesser wird, so ergiebt sich der Punkt h; zieht man $h\,b$, so ist der entstandene Winkel $l\,b\,h = R$ als Peripheriewinkel auf dem Halbkreise, wozu $l\,h$ Durchmesser ist, folglich steht $b\,h$ sekrecht auf $a\,b$ und da $c\,d$ auch senkrecht auf $b\,a$ ist, so muss $c\,d$ mit $b\,h$ parallel sein. Da $l\,d = d\,b$, denn im gleichschenkligen Dreiecke wird die Grundlinie durch die Höhe halbirt, so muss $h\,b = 2\,d\,c = 2\,h$ sein, denn wenn man in einem Dreiecke durch den Halbirungspunkt einer Seite eine Parallele zur Grundlinie zieht, so ist die Grundlinie das Doppelte der Parallelen. Da $h\,b$ gegeben und $h\,c\,b$ ein gleichschenkliges Dreieck ist, so liegt die Spitze c in der Senkrechten, welche man im Halbirungspunkte der Grundlinie errichtet. Es ist daher die Senkrechte im Halbirungspunkte k der $h\,b$ errichtet ein Ort für die Spitze c. Da c aber auch in der Linie $a\,g$ liegt, also der zweite Ort für c sein muss, so kommt es darauf an, die Lage des Punktes g zu ermitteln, um dadurch die Lage der Linie $a\,g$ bestimmen zu können. Verbindet man demnach die Punkte h und g und verlängert die Verbindungslinie, bis sie die verlängerte Grundlinie $a\,b$ im m schneidet, welches geschehen muss, da l und b, g und h benachbarte Punkte im Umfange eines Halbkreises sind, so erhält man das rechtwinkelige Dreieck $h\,b\,m$, in welchem sich die Winkel $b\,h\,m$ und m zu einem Rechten ergänzen.

Universitäts- und
Landesbibliothek Düsseldorf

Zieht man die $g\,b$, so betragen auch die $b\,h\,g$ und $f\,g\,b$ zusammen einen rechten Winkel, indem beide Peripheriewinkel desselben Kreises sind und die Bogen $g\,b$ und $f\,b$ zusammen einen Halbkreis betragen. Daraus ergiebt sich die Aehnlichkeit der Dreiecke $a\,b\,g$ und $a\,g\,m$, mithin müssen die den gleichen Winkeln gegenüberstehenden Seiten proportionirt sein und es ist

$$a\,b : a\,g = a\,g : a\,m \text{ oder}$$
$$g : s = s : a\,m,$$
$$\text{foglich } a\,m = \frac{s^2}{g}$$

wodurch die Lage des Punktes m bestimmt ist. Da nun m und h festliegt, so ist $h\,m$ bestimmt, ein Ort für g, und da a festliegt, so liegt g zweitens im Umfange desjenigen Kreises, der mit $a\,g = s$ um a beschrieben wird. Da nun die beiden graden Linien $a\,g$ und $k\,r$ die geometrischen Örter für die gesuchte Spitze c des Dreiecks $a\,b\,c$ und beide Linien nachgewiesenermassen zu zeichnen sind, so ist die Aufgabe lösbar.

CONSTRUCTION.

Man ziehe eine Linie gleich $a\,m = \frac{s^2}{g}$, schneide von a aus ein Stück $a\,b = g$ ab, errichte in b eine Senkrechte $b\,h =$ der doppelt gegebenen Höhe, verbinde h mit m, beschreibe um a mit dem Radius s einen Kreis, welcher $h\,m$ in g durchschneidet, verbinde a mit dem Durchschnittspunkte g, halbire $h\,b$, errichte im Halbirungspunkte k eine Senkrechte, welche die $a\,g$ in c der Spitze des gesuchten Dreiecks schneidet und verbinde endlich c mit b, so ist $a\,b\,c$ das verlangte Dreieck.

BEWEIS.

c liegt fest, denn $r\,k \parallel a\,b$, als Senkrechte auf $h\,l$, aber $a\,b$ hat mit $a\,g$ den Punkt a gemeinschaftlich, wird aber eine von zwei Parallelen durchschnitten, muss auch die zweite durchschnitten werden. Man ziehe die Höhe $c\,d$. Nach Construction ist $a\,b = g$; $c\,d = k\,b$ als Parallele zwischen Parallelen und weil $k\,b = \frac{h\,b}{2}$ und $h\,b = 2\,h$, folglich $k\,b = h$, so ist $c\,d$ gleich der gegebenen Höhe. Es wird auch $a\,c + c\,b = s$ sein, wenn gezeigt werden kann, dass $c\,g = c\,b$ ist. Denkt man sich durch die Punkte h, g und b einen Kreis gelegt, so muss der Mittelpunkt in die Senkrechte $k\,r$, welche man im Halbirungspunkte der Sehne errichtet hat, fallen. Da der Kreis die Linie $a\,g$ in dem Punkte g, so muss er dieselbe auch noch in einem andern Punkte f durchschneiden. Denn weil $m\,g = \frac{s^2}{g}$, so ist $g : s = s : m\,g$, und daraus ergiebt sich die Aehnlichkeit der Dreiecke $a\,b\,g$ und $a\,g\,m$, woraus die Gleichheit der Winkel $a\,g\,b$ und $f\,g\,b$ und m sich ergiebt. Da sich aber die Winkel m und $b\,h\,m$ oder $b\,h\,g$ zu einem rechten Winkel ergänzen, so

Universitäts- und
Landesbibliothek Düsseldorf

müssen auch die Winkel $f g b$ und $b h g$ einen rechten Winkel betragen, als Peripheriewinkel in dem Kreise durch die Punkte h, g, b; ihre Bogen $f b$ und $g b$ ergänzen sich also zu einem Halbkreise, d. h. $f g$ ist der Durchmesser des Kreises oder der Mittelpunkt liegt in der Linie $a g$. Der Mittelpunkt des Kreises durch die Punkte h, g und b liegt also im Durchschnittspunkte der Linien $g h$ und $k r$, d. h. im Punkte c, folglich muss

$$b c = c g \text{ sein und } a c = a c,$$
$$\text{folglich } a c + c g = a c + c b = s.$$

DETERMINATION.

Da $g < s$ ist, so wird der Punkt b innerhalb des um a mit dem Radius s beschriebenen Kreises liegen; m aber fällt ausserhalb, da $a m = \frac{s^2}{g}$. Es fragt sich, wo der Punkt h liegen muss, damit die Lösung dieser Aufgabe möglich werde, d. h. damit die Linie $h m$ den mit s um a beschriebenen Kreis treffe. h kann innerhalb, auf der Peripherie, oder ausserhalb fallen. Fällt der Punkt innerhalb, so wird $h m$ den Kreis mit s um a in zwei Punkten g und g^1 schneiden, von denen der eine unterhalb, der andere oberhalb h liegt. Es sind dann zwei Auflösungen möglich, es ist $s \lesseqgtr \sqrt{g^2 + 4 h^2}$. Liegt h auf der Peripherie, so ist $a h = s$ und es wird der Winkel $a g b = a h b = m$ und da $m + b h m = R$ und auch $a h b + b h m = R$ ist, so muss $h m$ eine Tangente sein und die Punkte g^1, h und g zusammenfallen. Ist also $a h = s = \sqrt{g^2 + 4 h^2}$, so ist nur eine Auflösung möglich. Liegt h ausserhalb, so kann $h m$ den Kreis mit s um a nicht treffen, die Aufgabe ist dann unmöglich. — Ist $s > \sqrt{g^2 + 4 h^2}$, so schneidet $h m$ den Kreis um a in zwei Punkten g und g^1. $a g$ wird von $k r$ in c, $a g^1$ in c^1 geschnitten und es ergeben sich die zwei Dreiecke $a c b$ und $a c^1 b$, welche beide den Bedingungen der Aufgabe entsprechen, welches leicht gezeigt werden kann, wenn man durch die Punkte h, g^1, b sich einen Kreis gelegt denkt. —

Vergleicht man die beiden Dreiecke $a b c$ $a b c^1$, wird man leicht die Beziehung, welche zwischen ihnen stattfindet, auffinden können, denn beide haben dieselbe Grundlinie $a b$ und dieselbe Höhe $k b$.

$$< a c^1 b = 2 a g^1 b = 2 m$$
$$< a c b = 2 a g b = 2 m$$
$$\text{also } < a c^1 b = < a c b$$

mithin die Dreiecke kongruent wegen der Gleichheit der Höhe, Grundlinie und des Winkels an der Spitze. —

2.

Da das Berührungsproblem für viele Constructionsaufgaben leicht ausführbare und elegante Auflösungen darbietet und diese Auflösungen vorzüglich geeignet sind, der Schüler geometrisches Auffassungsvermögen zu bilden und zu üben, so glaube ich im Interesse der Schüler zu handeln, wenn ich noch eine zweite Auflösung der Aufgabe kurz folgen lasse.

Universitäts- und
Landesbibliothek Düsseldorf

ANALYSIS.

Ein Kreis um c mit cb beschrieben, schneidet eine in b auf $ab = g$ errichtete Senkrechte $= 2h$ in dem Punkte h, welcher ebensoweit nach links vom Fusspunkte k des Lothes kc auf bh absteht, als b nach rechts. Dieser Kreis um c berührt ferner einen aus a mit dem Radius $s = ac + cb$ beschriebenen Kreis in g, so dass $cg = cl$, weil der Abstand ihrer Mittelpunkte a und c gleich der Differenz ihrer Radien ist, welche ac ist. Sowie die Senkrechte kr ein geometrischer Ort für die gesuchte Spitze c des Dreiecks ist, so ist ag der zweite Ort, wo g der Punkt ist, in welchem ein durch b und h gehender Kreis den Kreis um a, mit dem Radius s, berührt, wodurch c bestimmt wird.

CONSTRUCTION.

Man lege durch b und h einen beliebigen Kreis, welcher den Kreis mit s um a in zwei Punkten n und o schneidet, ziehe die gemeinschaftliche Sehne no, verläugere bh und no, bis sie sich in p durchschneiden, so ist p der Sehnenpunkt des beliebigen Kreises, des Kreises um a und des gesuchten Kreises, lege von p an den Kreis um a eine Tangente und dann einen Kreis durch b, h und g, so ist dessen Mittelpunkt die Spitze des gesuchten Dreiecks.

BEWEIS.

Das Dreieck enthält die gegebenen Stücke, denn

$$ab = g \text{ u. K. } cd = kb = h$$

$$cg = cb \text{ u. } ca = ac \text{ folglich}$$

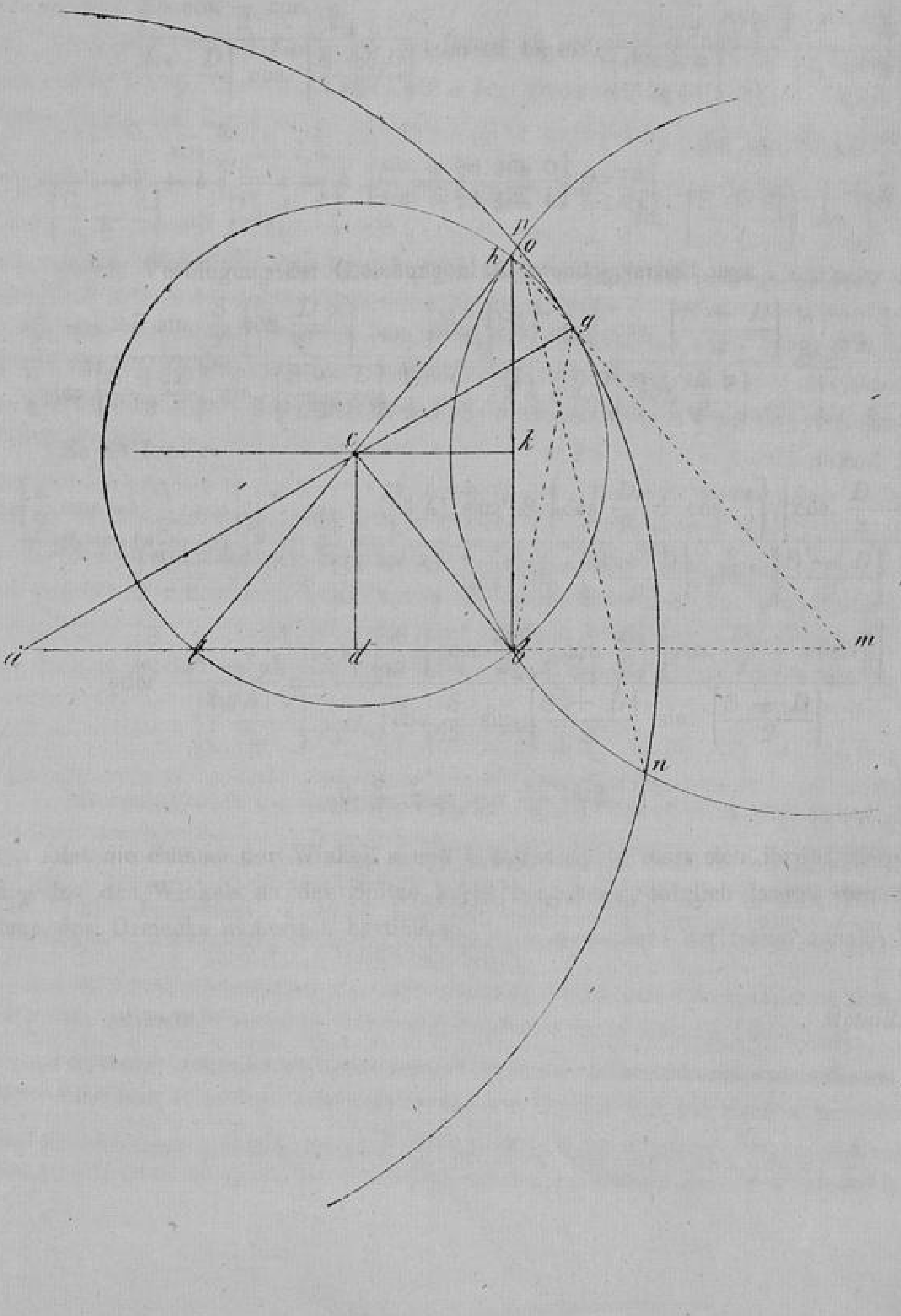
$$ac + cb = ac + cg = s.$$

DETERMINATION.

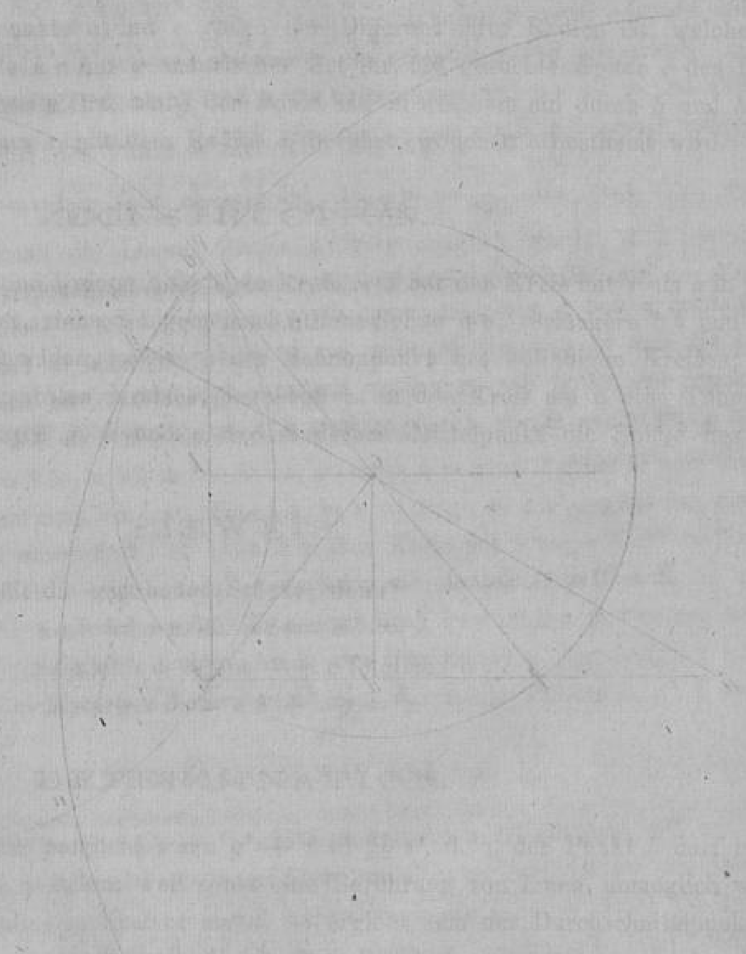
Die Aufgabe ist nur möglich, wenn $g^2 + 4h^2 \leqq s^2$, d. h. der Punkt h darf nicht ausserhalb des Kreises um a fallen, weil sonst eine Berührung von innen unmöglich wird. Liegt der Punkt h innerhalb des Kreises um a, so ergiebt sich der Durchschnittspunkt p, folglich zwei Tangenten, wodurch man die beiden Berührungspunkte g und g^1 erhält, welche beide zur Lösung der Aufgabe genügen.

Zur Vervollständigung, da diese Aufgabe vorzüglich der Schüler wegen entwickelt worden ist, sei es mir vergönnt noch die trignometrische Lösung beizufügen.

Da es nur darauf ankommt, zwei Winkel durch ihre Summe und Differenz zu bestimmen, so setze man $\angle a + \angle b = s$ und $\angle b - \angle a = d$ und die Summe der beiden Seiten $ac + cb = s$ und die Grundlinie $ab = g$. Zieht man die Höhe, so ist $\frac{h}{ad} = \text{tang. } a$,



Universitäts- und
Landesbibliothek Düsseldorf



folglich $a\,d = \frac{h}{\text{tang. } a}$ und $b\,d = \frac{h}{\text{tang. } b}$; also $a\,d + b\,d = g = h \left(\frac{1}{\text{tang. } a} + \frac{1}{\text{tang. } b}\right)$

oder $g = h \left(\frac{\text{sin. } a \text{ cos. } b + \text{sin. } b \text{ cos. } a}{\text{sin. } a \text{ sin. } b}\right) = \frac{h \text{ sin. } S}{\text{sin. } \left(\frac{S+D}{2}\right) \text{ sin. } \left(\frac{S-D}{2}\right)} =$

$\frac{2\,h \text{ sin. } \frac{S}{2} \text{ cos. } \frac{S}{2}}{\text{sin. } \left(\frac{S+D}{2}\right) \text{ cos. } \left(\frac{S-D}{2}\right)}$; ferner ist $a\,c = \frac{h}{\text{sin. } a}$ und $b\,c = \frac{h}{\text{sin. } b}$,

folglich $a\,c + b\,c = s = h \left(\frac{\text{sin. } a + \text{sin. } b}{\text{sin. } a - \text{sin. } b}\right) = \frac{2\,h \text{ sin. } \frac{S}{2} \text{ cos. } \frac{D}{2}}{\text{sin. } \left(\frac{S+D}{2}\right) \text{ sin. } \left(\frac{S-D}{2}\right)}$.

Durch Verbingung der Gleichungen für s und g, erhält man

$$\frac{s}{g} = \frac{2\,h \text{ sin. } \frac{S}{2} \text{ cos. } \frac{D}{2}}{\text{sin. } \left(\frac{S+D}{2}\right) \text{ sin. } \left(\frac{S-D}{2}\right)} + \frac{\text{sin. } \left(\frac{S+D}{2}\right) \text{ cos. } \left(\frac{S-D}{2}\right)}{2\,h \text{ sin. } \frac{S}{2} \text{ cos. } \frac{S}{2}} \text{ oder } \frac{s}{g} = \frac{\text{cos. } \frac{D}{2}}{\text{cos. } \frac{S}{2}}.$$

Es ist ferner

$$s^2 - g^2 = (s+g)\,(s-g) = \frac{4\,h^2 \text{ sin.}^2\, S \left(\text{cos. } \frac{D}{2} + \text{cos. } \frac{s}{2}\right) \left(\text{cos. } \frac{D}{2} - \text{cos. } \frac{s}{2}\right)}{\text{sin.}^2 \left(\frac{S+D}{2}\right) \text{ sin.}^2 \left(\frac{S-D}{2}\right)}$$

$$\text{oder } \frac{s^2 - g^2}{2\,g\,h} = \frac{\text{sin. } \frac{S}{2} \left(\text{cos. } \frac{D}{2} + \text{cos. } \frac{S}{2}\right) \left(\text{cos. } \frac{D}{2} - \text{cos. } \frac{S}{2}\right)}{\text{cos. } \frac{S}{2} \text{ sin. } \left(\frac{S+D}{2}\right) \text{ sin. } \left(\frac{S-D}{2}\right)}$$

$$\text{d. h. } \frac{s^2 - c^2}{2\,g\,h} = \text{tang. } \frac{S}{2}.$$

Ist die Summe der Winkel a und b bekannt, so lässt sich ihre Differenz aus s, h und g und des Winkels an der Spitze leicht berechnen, folglich lassen sich die übrigen Stücke des Dreiecks numerisch bestimmen.

Mothill.

Universitäts- und
Landesbibliothek Düsseldorf

Universitäts- und
Landesbibliothek Düsseldorf