Zwei neue allgemeine Differentiationsgesetze

von Max Birckenstaedt.

Zu Beginn seines Werkes über „Prinzipien der Mechanik *)“ hat Professor Koenigsberger 4 mathematische Hülfssätze bewiesen, welche für die Folge von großem Nutzen sind. Auf Grund derselben werden sodann von dem Verfasser die notwendigen und hinreichenden Bedingungen für die Form eines kinetischen Potentials erster Ordnung entwickelt sowie der Weg zur Aufstellung dieser Bedingungen für kinetische Potentiale höherer Ordnung vorgezeichnet.

Bevor es möglich ist, die Bedingungsgleichungen für die Existenz eines kinetischen Potentials ν ter Ordnung aufzustellen, müssen allgemeine Differentiationsgesetze abgeleitet werden, und zwar lassen sich diese Gesetze entwickeln, wenn wir die oben von Koenigsberger aufgestellten Hülfssätze verallgemeinern.

Ich lasse hier zunächst den Hülfssatz 1 folgen, wie wir ihn in den „Prinzipien der Mechanik“ S. 4 u. ff. vorfinden.

„Seien $p_1, p_2, \cdots p_\mu$ von der Zeit t abhängige Größen, und

$$R = f\left(t, p_1, p_1', \ldots, p_1^{(\nu)}, p_2, p_2', \ldots, p_2^{(\nu)}, \ldots, p_\mu, p_\mu', \ldots, p_\mu^{(\nu)}\right),$$

worin ν die höchste Ordnung der nach t genommenen Ableitungen der p darstellt, so folgt aus

$$\delta R^{(\varrho)} = \frac{d^\varrho \delta R}{d t^\varrho},$$

worin $R^{(\varrho)}$ die nach t genommene ρ^{te} Ableitung bedeutet, weil

$$\delta R^{(\varrho)} = \sum_1^\mu{}_\lambda \left\{ \frac{\partial R^{(\varrho)}}{\partial p_\lambda} \delta p_\lambda + \frac{\partial R^{(\varrho)}}{\partial p_\lambda'} \delta p_\lambda' + \cdots + \frac{\partial R^{(\varrho)}}{\partial p_\lambda^{(\nu+\varrho)}} \delta p_\lambda^{(\nu+\varrho)} \right\}$$

und (1)

$$\frac{d^\varrho \delta R}{d t^\varrho} = \frac{d^\varrho}{d t^\varrho} \sum_1^\mu{}_\lambda \sum_0^\nu{}_\alpha \frac{\partial R}{\partial p_\lambda^{(\alpha)}} \delta p_\lambda^{(\alpha)}$$

$$= \sum_1^\mu{}_\lambda \sum_0^\nu{}_\alpha \left\{ \frac{d^\varrho}{d t^\varrho} \frac{\partial R}{\partial p_\lambda^{(\alpha)}} \delta p_\lambda^{(\alpha)} + \rho_1 \frac{d^{\varrho-1}}{d t^{\varrho-1}} \frac{\partial R}{\partial p_\lambda^{(\alpha)}} \delta p_\lambda^{(\alpha+1)} + \cdots + \frac{\partial R}{\partial p_\lambda^{(\alpha)}} \delta p_\lambda^{(\alpha+\varrho)} \right\}$$

ist, durch Gleichsetzen der Koeffizienten der entsprechenden Variationen:

---

*) Prinzipien der Mechanik. Mathematische Untersuchungen von L. Koenigsberger, Professor an der Universität zu Heidelberg. Verlag von B. G. Teubner. 1901.

$$\frac{\partial R^{(\varrho)}}{\partial p_\lambda^{(\varrho-\varkappa)}} = \frac{d^\varrho}{d t^\varrho}\frac{\partial R}{\partial p_\lambda^{(\varrho-\varkappa)}} + \rho_1 \frac{d^{\varrho-1}}{d t^{\varrho-1}}\frac{\partial R}{\partial p_\lambda^{(\varrho-\varkappa-1)}} \tag{2}$$

$$+ \rho_2 \frac{d^{\varrho-2}}{d t^{\varrho-2}}\frac{\partial R}{\partial p_\lambda^{(\varrho-\varkappa-2)}} + \cdots + \rho_{\varrho-\varkappa}\frac{d^\varkappa}{d t^\varkappa}\frac{\partial R}{\partial p_\lambda} \quad (\varkappa = 1, 2, \ldots, \rho)$$

und

$$\frac{\partial R^{(\varrho)}}{\partial p_\lambda^{(\varrho+\varkappa)}} = \frac{d^\varrho}{d t^\varrho}\frac{\partial R}{\partial p_\lambda^{(\varrho+\varkappa)}} + \rho_1 \frac{d^{\varrho-1}}{d t^{\varrho-1}}\frac{\partial R}{\partial p_\lambda^{(\varrho+\varkappa-1)}} \tag{3}$$

$$+ \rho_2 \frac{d^{\varrho-2}}{d t^{\varrho-2}}\frac{\partial R}{\partial p_\lambda^{(\varrho+\varkappa-2)}} + \cdots + \frac{\partial R}{\partial p_\lambda^{(\varkappa)}} \quad (\varkappa = 1, 2, \ldots, \nu).$$

Hängt R nur von t, $p_1, \ldots, p_\mu$ und nicht von deren Ableitungen ab, so folgt aus (2) für $\varkappa = \rho$ und für $\varkappa = \rho - \sigma$, wenn $\sigma \leqq \rho$ ist,

$$\frac{\partial R^{(\varrho)}}{\partial p_\lambda} = \frac{d^\varrho}{d t^\varrho}\frac{\partial R}{\partial p_\lambda} \quad \text{und} \quad \frac{\partial R^{(\varrho)}}{\partial p_\lambda^{(\sigma)}} = \rho_\sigma \frac{d^{\varrho-\sigma}}{d t^{\varrho-\sigma}}\frac{\partial R}{\partial p_\lambda};$$

und aus diesen beiden Gleichungen, wenn die letzte σ mal nach t differenziert wird, die häufig zur Anwendung kommende Beziehung

$$\frac{d^\sigma}{d t^\sigma}\frac{\partial R^{(\varrho)}}{\partial p_\lambda^{(\sigma)}} = \rho_\sigma \frac{\partial R^{(\varrho)}}{\partial p_\lambda}. \tag{4}$$

Hängt R außer von t, $p_1, \ldots, p_\mu$ noch von den ersten Ableitungen dieser Größen ab, so liefert (2) für $\varkappa = \rho$, $\varkappa = \rho - 1$ und $\varkappa = \rho - \sigma$ die Beziehungen:

$$\frac{\partial R^{(\varrho)}}{\partial p_\lambda} = \frac{d^\varrho}{d t^\varrho}\frac{\partial R}{\partial p_\lambda}, \quad \frac{\partial R^{(\varrho)}}{\partial p'_\lambda} = \frac{d^\varrho}{d t^\varrho}\frac{\partial R}{\partial p'_\lambda} + \rho_1 \frac{d^{\varrho-1}}{d t^{\varrho-1}}\frac{\partial R}{\partial p_\lambda};$$

$$\frac{\partial R^{(\varrho)}}{\partial p_\lambda^{(\sigma)}} = \rho_{\sigma-1}\frac{d^{\varrho-\sigma+1}}{d t^{\varrho-\sigma+1}}\frac{\partial R}{\partial p'_\lambda} + \rho_\sigma \frac{d^{\varrho-\sigma}}{d t^{\varrho-\sigma}}\frac{\partial R}{\partial p_\lambda}, \tag{5}$$

und hieraus folgt die Relation:

$$\frac{d^\sigma}{d t^\sigma}\frac{\partial R^{(\varrho)}}{\partial p_\lambda^{(\sigma)}} = (\rho_\sigma - \rho_1\,\rho_{\sigma-1})\frac{\partial R^{(\varrho)}}{\partial p_\lambda} + \rho_{\sigma-1}\frac{d}{dt}\frac{\partial R^{(\varrho)}}{\partial p'_\lambda}, \tag{6}$$

während sich aus den beiden ersten und der aus (3) für $\varkappa = 1$ folgenden Gleichung

$$\frac{\partial R^{(\varrho)}}{\partial p_\lambda^{(\varrho+1)}} = \frac{\partial R}{\partial p'_\lambda}$$

die Beziehung

$$\frac{d^{\varrho+1}}{d t^{\varrho+1}}\frac{\partial R^{(\varrho)}}{\partial p_\lambda^{(\varrho+1)}} = \rho_1 \frac{\partial R^{(\varrho)}}{\partial p_\lambda} + \frac{d}{dt}\frac{\partial R^{(\varrho)}}{\partial p'_\lambda}$$

ergibt."

Ich will jetzt die Beschränkung fallen lassen, wonach die Funktion R nur die **ersten** Ableitungen der p_μ enthalten soll. Setze ich also voraus, daß die Ableitungen der p_λ zur ν^{ten} Ordnung in die Funktion R eintreten dürfen, so wird es möglich sein:

$$\frac{d^\sigma}{d\,t^\sigma}\,\frac{\partial\,R^{(\varrho)}}{\partial\,p_\lambda^{(\sigma)}} \text{ durch die Ableitungen } \frac{\partial\,R^{(\varrho)}}{\partial\,p_\lambda},\ \frac{d}{dt}\,\frac{\partial\,R^{(\varrho)}}{\partial\,p_\lambda'} \cdots \frac{d^\alpha}{d\,t^\alpha}\,\frac{\partial\,R^{(\varrho)}}{\partial\,p_\lambda^{(\alpha)}} \text{ auszudrücken,}$$

deren Koeffizienten Binomialkoeffizienten der ρ darstellen.

In der Folge werde ich die bereits von Koenigsberger benutzten Symbole $\rho_1, \rho_2 \ldots \rho_\sigma$ kurz für $\binom{\rho}{1}, \binom{\rho}{2}, \ldots \binom{\rho}{\sigma}$ gebrauchen.

Zunächst möge R auch von den **zweiten** Ableitungen der p_μ abhängen, dann lassen sich aus (2) für $\varkappa = \rho$, ferner für $\varkappa = \rho - 1$, $\varkappa = \rho - 2$ und $\varkappa = \rho - \sigma$ folgende Beziehungen herleiten

$$\frac{\partial\,R^{(\varrho)}}{\partial\,p_\lambda} = \frac{d^\varrho}{d\,t^\varrho}\,\frac{\partial\,R}{\partial\,p_\lambda}; \tag{7}$$

$$\frac{\partial\,R^{(\varrho)}}{\partial\,p_\lambda'} = \frac{d^\varrho}{d\,t^\varrho}\,\frac{\partial\,R}{\partial\,p_\lambda'} + \rho_1\,\frac{d^{\varrho-1}}{d\,t^{\varrho-1}}\,\frac{\partial\,R}{\partial\,p_\lambda}; \tag{8}$$

$$\frac{\partial\,R^{(\varrho)}}{\partial\,p_\lambda''} = \frac{d^\varrho}{d\,t^\varrho}\,\frac{\partial\,R}{\partial\,p_\lambda''} + \rho_1\,\frac{d^{\varrho-1}}{d\,t^{\varrho-1}}\,\frac{\partial\,R}{\partial\,p_\lambda'} + \rho_2\,\frac{d^{\varrho-2}}{d\,t^{\varrho-2}}\,\frac{\partial\,R}{\partial\,p_\lambda},$$

und

$$\begin{aligned}\frac{\partial\,R^{(\varrho)}}{\partial\,p_\lambda^{(\sigma)}} = \rho_{\sigma-2}\,\frac{d^{\varrho-\sigma+2}}{d\,t^{\varrho-\sigma+2}}\,\frac{\partial\,R}{\partial\,p_\lambda''} + \rho_{\sigma-1}\,\frac{d^{\varrho-\sigma+1}}{d\,t^{\varrho-\sigma+1}}\,\frac{\partial\,R}{\partial\,p_\lambda'}\\ + \rho_\sigma\,\frac{d^{\varrho-\sigma}}{d\,t^{\varrho-\sigma}}\,\frac{\partial\,R}{\partial\,p_\lambda};\end{aligned} \tag{9}$$

Wird die letzte Form (9) σ mal, (8) 2 mal und (7) 1 mal nach t differenziert, so lassen sich die neuen Beziehungen herleiten:

$$\begin{aligned}\frac{d^\sigma}{d\,t^\sigma}\,\frac{\partial\,R^{(\varrho)}}{\partial\,p_\lambda^{(\sigma)}} &= \rho_{\sigma-2}\,\frac{d^{\varrho+2}}{d\,t^{\varrho+2}}\,\frac{\partial\,R}{\partial\,p_\lambda''} + \rho_{\sigma-1}\,\frac{d^{\varrho+1}}{d\,t^{\varrho+1}}\,\frac{\partial\,R}{\partial\,p_\lambda'} + \rho_\sigma\,\frac{d^\varrho}{d\,t^\varrho}\,\frac{\partial\,R}{\partial\,p_\lambda};\\ \frac{d^2}{d\,t^2}\,\frac{\partial\,R^{(\varrho)}}{\partial\,p_\lambda^{(2)}} &= \frac{d^{\varrho+2}}{d\,t^{\varrho+2}}\,\frac{\partial\,R}{\partial\,p_\lambda^{(2)}} + \rho_1\,\frac{d^{\varrho+1}}{d\,t^{\varrho+1}}\,\frac{\partial\,R}{\partial\,p_\lambda'} + \rho_2\,\frac{d^\varrho}{d\,t^\varrho}\,\frac{\partial\,R}{\partial\,p_\lambda};\\ \frac{d}{d\,t}\,\frac{\partial\,R^{(\varrho)}}{\partial\,p_\lambda'} &= \frac{d^{\varrho+1}}{d\,t^{\varrho+1}}\,\frac{\partial\,R}{\partial\,p_\lambda'} + \rho_1\,\frac{d^\varrho}{d\,t^\varrho}\,\frac{\partial\,R}{\partial\,p_\lambda};\\ \frac{\partial\,R^{(\varrho)}}{\partial\,p_\lambda} &= \frac{d^\varrho}{d\,t^\varrho}\,\frac{\partial\,R}{\partial\,p_\lambda}.\end{aligned}$$

Durch Multiplikation vorstehender Formen mit den entsprechenden Binomialkoeffizienten der ρ und Addition läßt sich

$\frac{d^\sigma}{d t^\sigma} \frac{\partial R^{(\varrho)}}{\partial p_\lambda^{(\sigma)}}$ als lineare und homogene Funktion von $\frac{d^2}{d t^2} \frac{\partial R^{(\varrho)}}{\partial p_\lambda^{(2)}}, \; \frac{d}{dt} \frac{\partial R^{(\varrho)}}{\partial p'_\lambda}, \; \frac{\partial R^{(\varrho)}}{\partial p_\lambda}$ in folgender Form darstellen:

$$\begin{aligned} \frac{d^\sigma}{d t^\sigma} \frac{\partial R^{(\varrho)}}{\partial p_\lambda^{(\sigma)}} &= \rho_{\sigma-2} \frac{d^2}{d t^2} \frac{\partial R^{(\varrho)}}{\partial p_\lambda^{(2)}} + (\rho_{\sigma-1} - \rho_{\sigma-2}\, \rho_1) \frac{d}{d t} \frac{\partial R^{(\varrho)}}{\partial p'_\lambda} \\ &+ \left(\rho_\sigma - \rho_{\sigma-1}\, \rho_1 + \rho_{\sigma-2}\, \rho_1^2 - \rho_{\sigma-2}\, \rho_2\right) \frac{\partial R^{(\varrho)}}{\partial p_\lambda}. \end{aligned} \tag{10}$$

Unter derselben Voraussetzung, daß R die z w e i t e n Ableitungen der p_λ enthält, wird die Form (3) S. 5, siehe Koenigsberger, Prinzipien der Mechanik, für $\varkappa = 1$ übergehen in:

$$\frac{\partial R^{(\varrho)}}{\partial p_\lambda^{(\varrho+1)}} = \frac{\partial R}{\partial p'_\lambda} + \rho_1 \frac{d}{d t} \frac{\partial R}{\partial p''_\lambda};$$

und durch $(\rho + 1)$ malige Differentiation wird die neue Beziehung gewonnen:

$$\frac{d^{\varrho+1}}{d t^{\varrho+1}} \frac{\partial R^{(\varrho)}}{\partial p_\lambda^{(\varrho+1)}} = \frac{d}{d t} \frac{d^\varrho}{d t^\varrho} \frac{\partial R}{\partial p'_\lambda} + \rho_1 \frac{d^2}{d t^2} \frac{d^\varrho}{d t^\varrho} \frac{\partial R}{\partial p''_\lambda}.$$

Durch Differentiation der Formen (7) und (8) lassen sich die Funktionen $\frac{\partial R}{\partial p'_\lambda}$ und $\frac{\partial R}{\partial p''_\lambda}$ ersetzen, d. h. es wird

$$\begin{aligned} \frac{d^{\varrho+1}}{d t^{\varrho+1}} \frac{\partial R^{(\varrho)}}{\partial p_\lambda^{(\varrho+1)}} &= - \rho_1 \frac{\partial R^{(\varrho)}}{\partial p_\lambda} + \frac{d}{d t} \frac{\partial R^{(\varrho)}}{\partial p'_\lambda} + \rho_1 \frac{d^2}{d t^2} \frac{\partial R^{(\varrho)}}{\partial p''_\lambda} \\ &- \rho_1^2 \frac{d}{d t} \frac{\partial R^{(\varrho)}}{\partial p'_\lambda} + \rho_1^3 \frac{\partial R^{(\varrho)}}{\partial p_\lambda} - \rho_1\, \rho_2 \frac{\partial R^{(\varrho)}}{\partial p_\lambda}. \end{aligned}$$

Durch Zusammenfassung entsprechender Glieder erhalten wir eine der Form (10) entsprechende Gleichung:

$$\begin{aligned} \frac{d^{\varrho+1}}{d t^{\varrho+1}} \frac{\partial R^{(\varrho)}}{\partial p_\lambda^{(\varrho+1)}} &= \rho_1 \frac{d^2}{d t^2} \frac{\partial R^{(\varrho)}}{\partial p''_\lambda} + (1 - \rho_1^2) \frac{d}{d t} \frac{\partial R^{(\varrho)}}{\partial p'_\lambda} + \\ & (\rho_1^3 - \rho_1\, \rho_2 - \rho_1) \frac{\partial R^{(\varrho)}}{\partial p_\lambda}. \end{aligned} \tag{11}$$

Differenzieren wir $(\rho + 2)$ mal die Form (3) bei Koenigsberger S. 5 für $\varkappa = 2$, so erhalten wir die analoge Form:

$$\frac{d^{\varrho+2}}{d t^{\varrho+2}} \frac{\partial R^{(\varrho)}}{\partial p_\lambda^{(\varrho+2)}} = \frac{d^2}{d t^2} \frac{\partial R^{(\varrho)}}{\partial p''_\lambda} - \rho_1 \frac{d}{dt} \frac{\partial R^{(\varrho)}}{\partial p'_\lambda} + (\rho_1^2 - \rho_2) \frac{\partial R^{(\varrho)}}{\partial p_\lambda}. \tag{12}$$

Wir erkennen schon jetzt, daß es stets möglich sein wird, sowohl $\frac{d^\sigma}{d t^\sigma} \frac{\partial R^{(\varrho)}}{\partial p_\lambda^{(\sigma)}}$ als auch $\frac{d^{\varrho+\alpha}}{d t^{\varrho+\alpha}} \frac{\partial R^{(\varrho)}}{\partial p_\lambda^{(\varrho+\alpha)}}$ als Funktion der Größen $\frac{\partial R^{(\varrho)}}{\partial p_\lambda}, \; \frac{d}{d t} \frac{\partial R^{(\varrho)}}{\partial p'_\lambda}, \; \frac{d^2}{d t^2} \frac{\partial R^{(\varrho)}}{\partial p_\lambda^{(2)}} \; \ldots \; \frac{d^\alpha}{d t^\alpha} \frac{\partial R^{(\varrho)}}{\partial p_\lambda^{(\alpha)}}$ darzustellen. Die Koeffizienten der Ableitungen sind Aggregate der ρ-Größen, deren Bildungsgesetz, soweit man die Formen (10) und (12) betrachtet, nicht ersichtlich ist. Es wird daher nötig sein, noch einen Schritt in der Verallgemeinerung weiter durchzuführen:

Für die folgende Entwicklung treffe ich die Annahme, daß R von den Ableitungen der p_λ bis zur d r i t t e n Ordnung hin abhängt. Auf Grund ähnlicher Differentiationsmethoden, wie ich sie bereits früher zur Herstellung der Formen (7), (8), (9), (10) und (12) anwandte, lassen sich nun folgende jenen analoge Formen aufstellen.

$$\left.\begin{aligned}
&\frac{\partial R^{(\varrho)}}{\partial p_\lambda} = \frac{d^\varrho}{d t^\varrho}\frac{\partial R}{\partial p_\lambda}; \qquad \frac{\partial R^{(\varrho)}}{\partial p'_\lambda} = \frac{d^\varrho}{d t^\varrho}\frac{\partial R}{\partial p'_\lambda} + \rho_1 \frac{d^{\varrho-1}}{d t^{\varrho-1}}\frac{\partial R}{\partial p_\lambda};\\
&\frac{\partial R^{(\varrho)}}{\partial p''_\lambda} = \frac{d^\varrho}{d t^\varrho}\frac{\partial R}{\partial p''_\lambda} + \rho_1 \frac{d^{\varrho-1}}{d t^{\varrho-1}}\frac{\partial R}{\partial p'_\lambda} + \rho_2 \frac{d^{\varrho-2}}{d t^{\varrho-2}}\frac{\partial R}{\partial p_\lambda};\\
&\frac{\partial R^{(\varrho)}}{\partial p^{(3)}_\lambda} = \frac{d^\varrho}{d t^\varrho}\frac{\partial R}{\partial p^{(3)}_\lambda} + \rho_1 \frac{d^{\varrho-1}}{d t^{\varrho-1}}\frac{\partial R}{\partial p^{(2)}_\lambda} + \rho_2 \frac{d^{\varrho-2}}{d t^{\varrho-2}}\frac{\partial R}{\partial p'_\lambda} + \rho_3 \frac{d^{\varrho-3}}{d t^{\varrho-3}}\frac{\partial R}{\partial p_\lambda};\\
&\text{und}\\
&\frac{\partial R^{(\varrho)}}{\partial p^{(\sigma)}_\lambda} = \rho_{\sigma-3}\frac{d^{\varrho-\sigma+3}}{d t^{\varrho-\sigma+3}}\frac{\partial R}{\partial p^{(3)}_\lambda} + \rho_{\sigma-2}\frac{d^{\varrho-\sigma+2}}{d t^{\varrho-\sigma+2}}\frac{\partial R}{\partial p^{(2)}_\lambda}\\
&\qquad + \rho_{\sigma-1}\frac{d^{\varrho-\sigma+1}}{d t^{\varrho-\sigma+1}}\frac{\partial R}{\partial p'_\lambda} + \rho_\sigma \frac{d^{\varrho-\sigma}}{d t^{\varrho-\sigma}}\frac{\partial R}{\partial p_\lambda}.
\end{aligned}\right\} \quad (13)$$

Durch σ-malige Differentiation der letzten Form in (13) nach t gewinnen wir unter Benutzung früherer Beziehungen:

$$\left.\begin{aligned}
&\frac{d^\sigma}{d t^\sigma}\frac{\partial R^{(\varrho)}}{\partial p^{(\sigma)}_\lambda} = \rho_{\sigma-3}\frac{d^3}{d t^3}\frac{\partial R^{(\varrho)}}{\partial p^{(3)}_\lambda} + (\rho_{\sigma-2} - \rho_{\sigma-3}\,\rho_1)\frac{d^2}{d t^2}\frac{\partial R^{(\varrho)}}{\partial p^{(2)}_\lambda}\\
&+ (\rho_{\sigma-1} - \rho_{\sigma-2}\,\rho_1 + \rho_{\sigma-3}\,\rho_1^2 - \rho_{\sigma-3}\,\rho_2)\frac{d}{d t}\frac{\partial R^{(\varrho)}}{\partial p'_\lambda} +\\
&(\rho_\sigma - \rho_{\sigma-1}\,\rho_1 + \rho_{\sigma-2}\,\rho_1^2 - \rho_{\sigma-2}\,\rho_2 + \rho_{\sigma-3}\,\rho_1\,\rho_2 - \rho_{\sigma-3}\,\rho_1^3 +\\
&\qquad + \rho_{\sigma-3}\,\rho_2\,\rho_1 - \rho_{\sigma-3}\,\rho_3)\frac{\partial R^{(\varrho)}}{\partial p_\lambda},
\end{aligned}\right\} \quad (14)$$

oder, wenn wir der Kürze wegen

$$\begin{aligned}
\alpha_3 &= \rho_{\sigma-3}\\
\alpha_2 &= (\rho_{\sigma-2} - \rho_{\sigma-3}\,\rho_1)\\
\alpha_, &= (\rho_{\sigma-1} - \rho_{\sigma-2}\,\rho_1 + \cdots)\\
\alpha_0 &= (\rho_\sigma - \rho_{\sigma-1}\,\rho_1 \;\cdots)
\end{aligned} \qquad \text{setzen,}$$

$$\frac{d^\sigma}{d t^\sigma}\frac{\partial R^{(\varrho)}}{\partial p^{(\sigma)}_\lambda} = a_3\frac{d^3}{d t^3}\frac{\partial R^{(\varrho)}}{\partial p^{(3)}_\lambda} + a_2\frac{d^2}{d t^2}\frac{\partial R^{(\varrho)}}{\partial p^{(2)}_\lambda} + a_1\frac{d}{d t}\frac{\partial R^{(\varrho)}}{\partial p^{(1)}_\lambda} + a_0\frac{\partial R^{(\varrho)}}{\partial p_\lambda}.$$

Aus der Form (14) ist bereits deutlich das Bildungsgesetz der Koeffizienten zu erkennen, so daß sich eine a l l g e m e i n e Formel herleiten läßt, in der R und deren Ableitungen die p_λ-Größen bis zur α^{ten} Ordnung enthalten kann. Da die Koeffizienten der a-Größen in Form von Determinanten darstellbar sind, so wird sich dadurch das allgemeine Differentiationsgesetz anschaulicher und übersichtlicher gestalten.

Die Aggregate der a lassen sich durch folgende Determinanten ausdrücken:

$$a_0 = \begin{vmatrix} \rho_\sigma & \rho_1 & \rho_2 & \rho_3 \\ \rho_{\sigma-1} & \rho_0 & \rho_1 & \rho_2 \\ \rho_{\sigma-2} & 0 & \rho_0 & \rho_1 \\ \rho_{\sigma-3} & 0 & 0 & \rho_0 \end{vmatrix}; \qquad a_1 = \begin{vmatrix} \rho_{\sigma-1} & \rho_1 & \rho_2 \\ \rho_{\sigma-2} & \rho_0 & \rho_1 \\ \rho_{\sigma-3} & 0 & \rho_0 \end{vmatrix};$$

$$a_2 = \begin{vmatrix} \rho_{\sigma-2} & \rho_1 \\ \rho_{\sigma-3} & \rho_0 \end{vmatrix} \text{ und } a_3 = \rho_{\sigma-3}.$$

Dann läßt sich (14) folgende Gestalt geben:

$$\frac{d^\sigma}{d t^\sigma} \frac{\partial R^{(\varrho)}}{\partial p_\lambda^{(\sigma)}} = \begin{vmatrix} \rho_\sigma & \rho_1 & \rho_2 & \rho_3 \\ \rho_{\sigma-1} & \rho_0 & \rho_1 & \rho_2 \\ \rho_{\sigma-2} & 0 & \rho_0 & \rho_1 \\ \rho_{\sigma-3} & 0 & 0 & \rho_0 \end{vmatrix} \frac{\partial R^{(\varrho)}}{\partial p_\lambda} + \begin{vmatrix} \rho_{\sigma-1} & \rho_1 & \rho_2 \\ \rho_{\sigma-2} & \rho_0 & \rho_1 \\ \rho_{\sigma-3} & 0 & \rho_0 \end{vmatrix} \frac{d}{dt} \frac{\partial R^{(\varrho)}}{\partial p_\lambda'}$$
$$+ \begin{vmatrix} \rho_{\sigma-2} & \rho_1 \\ \rho_{\sigma-3} & \rho_0 \end{vmatrix} \frac{d^2}{d t^2} \frac{\partial R^{(\varrho)}}{\partial p_\lambda^{(2)}} + \rho_{\sigma-3} \frac{d^3}{d t^3} \frac{\partial R^{(\varrho)}}{\partial p_\lambda^{(3)}}. \tag{15}$$

Da das Bildungsgesetz der Determinanten aus (15) erkennbar ist, wird folgendes Gesetz allgemeine Gültigkeit haben.

Ist also

$$R = \varphi\left(t, p_1\, p_1' \cdots p_1^{(\alpha)}, p_2, p_2' \cdots p_2^{(\alpha)}, \cdots p_\lambda, p_\lambda' \cdots p_\lambda^{(\alpha)}\right),$$

so ist

$$\frac{d^\sigma}{d t^\sigma} \frac{\partial R^{(\varrho)}}{\partial p_\lambda^{(\sigma)}} = \begin{vmatrix} \rho_\sigma & \rho_1 & \rho_2 & \rho_3 & \cdots & & \rho_\alpha \\ \rho_{\sigma-1} & \rho_0 & \rho_1 & \rho_2 & \cdots & & \rho_{\alpha-1} \\ \rho_{\sigma-2} & 0 & \rho_0 & \rho_1 & \cdots & & \rho_{\alpha-2} \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ \cdots & \cdots & 0 & \rho_0 & \rho_1 & \rho_2 & \\ \cdots & \cdots & 0 & 0 & \rho_0 & \rho_1 & \\ \rho_{\sigma-\alpha} & 0 \cdots 0 & 0 & 0 & \rho_0 & & \end{vmatrix} \frac{\partial R^{(\varrho)}}{\partial p_\lambda} + \begin{vmatrix} \rho_{\sigma-1} & \rho_1 & \rho_2 & \cdots & & \rho_{\alpha-1} \\ \rho_{\sigma-2} & \rho_0 & \rho_1 & \cdots & & \rho_{\alpha-2} \\ \rho_{\sigma-3} & 0 & \rho_0 & \cdots & & \rho_{\alpha-3} \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ \cdots & \cdots & \rho_0 & \rho_1 & \rho_2 & \\ \cdots & \cdots & 0 & \rho_0 & \rho_1 & \\ \rho_{\sigma-\alpha} & 0 \cdots & 0 & 0 & \rho_0 & \end{vmatrix} \frac{d}{dt} \frac{\partial R^{(\varrho)}}{\partial p_\lambda'}$$

$$+ \begin{vmatrix} \rho_{\sigma-2} & \rho_1 & \rho_2 & \cdots & & \rho_{\alpha-2} \\ \rho_{\sigma-3} & \rho_0 & \rho_1 & \cdots & & \\ \rho_{\sigma-4} & 0 & \rho_0 & \cdots & & \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ \cdots & \cdots & \rho_0 & \rho_1 & \rho_2 & \\ \cdots & \cdots & 0 & \rho_0 & \rho_1 & \\ \rho_{\sigma-\alpha} & 0 \cdots & 0 & 0 & \rho_0 & \end{vmatrix} \frac{d^2}{d t^2} \frac{\partial R^{(\varrho)}}{\partial p_\lambda^{(2)}} + \cdots + \cdots + \begin{vmatrix} \rho_{\sigma-\alpha+1} & \rho_1 \\ \rho_{\sigma-\alpha} & \rho_0 \end{vmatrix} \frac{d^{\alpha-1}}{d t^{\alpha-1}} \frac{\partial R^{(\varrho)}}{\partial p_\lambda^{(\alpha-1)}}$$
$$+ \rho_{\sigma-\alpha} \frac{d^\alpha}{d t^\alpha} \frac{\partial R^{(\varrho)}}{\partial p_\lambda^{(\alpha)}}. \tag{16}$$

Letzteres Gesetz läßt sich auch als Summenformel kürzer folgendermaßen fassen:

$$\frac{d^\sigma}{d\,t^\sigma}\,\frac{\partial\,R^{(\varrho)}}{\partial\,p_\lambda^{(\sigma)}} = \sum_{0}^{\alpha}{}_{\mu} \begin{vmatrix} \rho_{\sigma-\mu} & \rho_1 & \rho_2 & \cdots & & \rho_{\alpha-\mu} \\ \rho_{\sigma-\mu-1} & \rho_0 & \rho_1 & \cdots & & \rho_{\alpha-\mu-1} \\ \rho_{\sigma-\mu-2} & 0 & \rho_0 & \cdots & & \rho_{\alpha-\mu-2} \\ \vdots & \vdots & \vdots & & & \vdots \\ \rho_{\sigma-\alpha+1} & 0 & & \cdots & \rho_0 & \rho_1 \\ \rho_{\sigma-\alpha} & 0 & & & 0 & \rho_0 \end{vmatrix} \frac{d^\mu}{d\,t^\mu}\,\frac{\partial\,R^{(\varrho)}}{\partial\,p_\lambda^{(\mu)}} \tag{17}$$

und unterliegt nur der Bedingung, daß

$$\sigma \leqq \rho.$$

Ich will auch diese letzte Beschränkung $\sigma \leq \rho$ beseitigen, d. h. ein zweites Differentiationsgesetz aufstellen, welches für den Fall gilt, daß $\sigma > \rho$ ist.

Um die der Formel (17) entsprechende Form zu finden, werden wir die Relationen im Anschluß an Formel (6) S. 6 (bei Koenigsberger Prinzipien der Mechanik) erweitern müssen. Die erste Erweiterung ist bereits durch (12) gegeben.

Der weitere Aufbau dieser Gleichungen bietet keine prinzipiellen Schwierigkeiten, zur Entwicklung derselben sind nur ähnliche Differentiationsmethoden anzuwenden, wie wir sie bereits früher verwerteten.

Nehme ich an, daß auch die d r i t t e n Ableitungen der p_λ in der Funktion R auftreten können, so wird sich vermöge der Beziehung (Koenigsberger S. 5 (3) für $\varkappa = 1, 2, 3$, ergeben:

$$\begin{aligned} \frac{d^{\varrho+1}}{d\,t^{\varrho+1}}\,\frac{\partial\,R^{(\varrho)}}{\partial\,p_\lambda^{(\varrho+1)}} &= \frac{d^{\varrho+1}}{d\,t^{\varrho+1}}\left[\frac{\partial\,R}{\partial\,p_\lambda'} + \rho_1\,\frac{d}{dt}\,\frac{\partial\,R}{\partial\,p_\lambda^{(2)}} + \rho_2\,\frac{d^2}{d\,t^2}\,\frac{\partial\,R}{\partial\,p_\lambda^{(3)}}\right], \\ \frac{d^{\varrho+2}}{d\,t^{\varrho+2}}\,\frac{\partial\,R^{(\varrho)}}{\partial\,p_\lambda^{(\varrho+2)}} &= \frac{d^{\varrho+2}}{d\,t^{\varrho+2}}\left[\frac{\partial\,R}{\partial\,p_\lambda^{(2)}} + \rho_1\,\frac{d}{dt}\,\frac{\partial\,R}{\partial\,p_\lambda^{(3)}}\right], \\ \frac{d^{\varrho+3}}{d\,t^{\varrho+3}}\,\frac{\partial\,R^{(\varrho)}}{\partial\,p_\lambda^{(\varrho+3)}} &= \frac{d^{\varrho+3}}{d\,t^{\varrho+3}}\,\frac{\partial\,R}{\partial\,p_\lambda^{(3)}}, \end{aligned} \tag{18}$$

welche Beziehungen mit Benutzung der Form (13) folgende Umgestaltung erleiden:

$$\left.\begin{aligned} \frac{d^{\varrho+1}}{d\,t^{\varrho+1}}\,\frac{\partial\,R^{(\varrho)}}{\partial\,p_\lambda^{(\varrho+1)}} &= q_0\,\frac{\partial\,R^{(\varrho)}}{\partial\,p_\lambda} + q_1\,\frac{d}{d\,t}\,\frac{\partial\,R^{(\varrho)}}{\partial\,p_\lambda'} + q_2\,\frac{d^2}{d\,t^2}\,\frac{\partial\,R^{(\varrho)}}{\partial\,p_\lambda^{(2)}} + q_3\,\frac{d^3}{d\,t^3}\,\frac{\partial\,R^{(\varrho)}}{\partial\,p_\lambda^{(3)}}; \\ \frac{d^{\varrho+2}}{d\,t^{\varrho+2}}\,\frac{\partial\,R^{(\varrho)}}{\partial\,p_\lambda^{(\varrho+2)}} &= r_0\,\frac{\partial\,R^{(\varrho)}}{\partial\,p_\lambda} + r_1\,\frac{d}{d\,t}\,\frac{\partial\,R^{(\varrho)}}{\partial\,p_\lambda'} + r_2\,\frac{d^2}{d\,t^2}\,\frac{\partial\,R^{(\varrho)}}{\partial\,p_\lambda^{(2)}} + r_3\,\frac{d^3}{d\,t^3}\,\frac{\partial\,R^{(\varrho)}}{\partial\,p_\lambda^{(3)}}; \\ \frac{d^{\varrho+3}}{d\,t^{\varrho+3}}\,\frac{\partial\,R^{(\varrho)}}{\partial\,p_\lambda^{(\varrho+3)}} &= p_0\,\frac{\partial\,R^{(\varrho)}}{\partial\,p_\lambda} + p_1\,\frac{d}{d\,t}\,\frac{\partial\,R^{(\varrho)}}{\partial\,p_\lambda'} + p_2\,\frac{d^2}{d\,t^2}\,\frac{\partial\,R^{(\varrho)}}{\partial\,p_\lambda^{(2)}} + p_3\,\frac{d^3}{d\,t^3}\,\frac{\partial\,R^{(\varrho)}}{\partial\,p_\lambda^{(3)}}. \end{aligned}\right\} \tag{19}$$

In diesen 3 Relationen sind unter den $q_0\ q_1 \cdots q_3$ und $r_0 \cdots r_3$ ebenfalls Aggregate aus den Binomialkoeffizienten der ρ zu verstehen, ferner ist

$$
\begin{aligned}
p_0 &= -\rho_1^3 + \rho_1\,\rho_2 - \rho_3 + \rho_1\,\rho_2 \\
p_1 &= \rho_1^2 - \rho_2 \\
p_2 &= -\rho_1 \\
p_3 &= \rho_0 = 1.
\end{aligned}
$$

Die Werte der r und q Koeffizienten habe ich der Kürze wegen nicht angeführt, da sie für die weitere Entwicklung keine Bedeutung haben.

Die Formen (19) lassen deutlich erkennen, daß nach Analogie früher entwickelter Gesetze sich $\frac{d^{\varrho+\alpha}}{d\,t^{\varrho+\alpha}}\,\frac{\partial\,R^{(\varrho)}}{\partial\,p_\lambda^{(\varrho+\alpha)}}$ als lineare und homogene Funktion der Ableitungen $\frac{\partial\,R^{(\varrho)}}{\partial\,p_\lambda}$, $\frac{d}{d\,t}\,\frac{\partial\,R^{(\varrho)}}{\partial\,p_\lambda}\,\dots\,\frac{d^\alpha}{d\,t^\alpha}\,\frac{\partial\,R^{(\varrho)}}{\partial\,p_\lambda^{(\alpha)}}$ darstellen läßt.

Die letzte der Formen zeigt, daß die Koeffizienten der Ableitungen sich wiederum als Determinanten umformen lassen. Das heißt,

$$
\text{es ist } p_0 = -\begin{vmatrix} \rho_1 & \rho_2 & \rho_3 \\ \rho_0 & \rho_1 & \rho_2 \\ 0 & \rho_0 & \rho_1 \end{vmatrix} \qquad p_1 = \begin{vmatrix} \rho_1 & \rho_2 \\ \rho_0 & \rho_1 \end{vmatrix}
$$

$$
p_2 = -\rho_1 \qquad\qquad p_3 = \rho_0\,.
$$

Es wird daher keine Schwierigkeit bestehen, das Differentiationsgesetz für den Fall aufzustellen, daß R die Derivierten der p-Größen bis zur α^{ten} Ordnung enthält:

$$
\begin{aligned}
\frac{d^{\varrho+\alpha}}{d\,t^{\varrho+\alpha}}\,\frac{\partial\,R^{(\varrho)}}{\partial\,p_\lambda^{(\varrho+\alpha)}} &= \rho_0\,\frac{d^\alpha}{d\,t^\alpha}\,\frac{\partial\,R^\varrho}{\partial\,p_\lambda^{(\alpha)}} - \rho_1\,\frac{d^{\alpha-1}}{d\,t^{\alpha-1}}\,\frac{\partial\,R^\varrho}{\partial\,p_\lambda^{(\alpha-1)}} \\
&+ \begin{vmatrix} \rho_1 & \rho_2 \\ \rho_0 & \rho_1 \end{vmatrix}\,\frac{d^{\alpha-2}}{d\,t^{\alpha-2}}\,\frac{\partial\,R^{(\varrho)}}{\partial\,p_\lambda^{(\alpha-2)}} - \begin{vmatrix} \rho_1 & \rho_2 & \rho_3 \\ \rho_0 & \rho_1 & \rho_2 \\ 0 & \rho_0 & \rho_1 \end{vmatrix}\,\frac{d^{\alpha-3}}{d\,t^{\alpha-3}}\,\frac{\partial\,R^{(\varrho)}}{\partial\,p_\lambda^{(\alpha-3)}} \\
&+ \begin{vmatrix} \rho_1 & \rho_2 & \rho_3 & \rho_4 \\ \rho_0 & \rho_1 & \rho_2 & \rho_3 \\ 0 & \rho_0 & \rho_1 & \rho_2 \\ 0 & 0 & \rho_0 & \rho_1 \end{vmatrix}\,\frac{d^{\alpha-4}}{d\,t^{\alpha-4}}\,\frac{\partial\,R^{(\varrho)}}{\partial\,p_\lambda^{(\alpha-4)}} - \dots + \dots - \dots + [-1]^\alpha \begin{vmatrix} \rho_1 & \rho_2 & \rho_3 & \cdots & \rho_\alpha \\ \rho_0 & \rho_1 & \rho_2 & \cdots & \rho_{\alpha-1} \\ 0 & \rho_0 & \rho_1 & \cdots & \rho_{\alpha-2} \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ 0\,0\,0 \cdots 0 & \rho_0 & \rho_1 & \rho_2 & \\ 0\,0\,0 \cdots 0 & 0 & \rho_0 & \rho_1 & \end{vmatrix}\,\frac{\partial\,R^{(\varrho)}}{\partial\,p_\lambda}\,.
\end{aligned}
\tag{20}
$$

Setzen wir $\rho + \alpha = \sigma$ so läßt sich (20) analog (17) in Gestalt einer Summenformel wiedergeben:

$$
\frac{d^\sigma}{d\,t^\sigma}\,\frac{\partial\,R^{(\varrho)}}{\partial\,p_\lambda^{(\varrho)}} = \sum_{0}^{\sigma-\varrho}{}_{\mu}\,[-1]^{\sigma-\varrho-\mu} \begin{vmatrix} \rho_1 & \rho_2 & \rho_3 & \cdots\cdots & \rho_{\sigma-\varrho-\mu} \\ \rho_0 & \rho_1 & \rho_2 & \cdots\cdots & \rho_{\sigma-\varrho-\mu-1} \\ 0 & \rho_0 & \rho_1 & \cdots\cdots & \rho_{\sigma-\varrho-\mu-2} \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \\ 0\;\;0\;\;0 \cdots 0 & \rho_0 & \rho_1 & \rho_2 & \\ 0\;\;0\;\;0 \cdots 0\;0 & & \rho_0 & \rho_1 & \end{vmatrix}\,\frac{d^\mu}{d\,t^\mu}\,\frac{\partial\,R^{(\varrho)}}{\partial\,p_\lambda^{(\mu)}}
\tag{21}
$$

und dieses Differentiationsgesetz hat Gültigkeit für $\sigma > \rho$.

Möge zur Erläuterung vorstehender Formel ein Beispiel dienen:

Habe die Funktion R die Form:

$$R = p_\lambda \cdot p_\lambda^{(4)}$$

sei ferner $\rho = 5$; $\sigma = 6$, dann ist

$$R^{(5)} = p_\lambda\, p_\lambda^{(9)} + 5\, p_\lambda^{(1)}\, p_\lambda^{(8)} + 10\, p_\lambda^{(2)}\, p_\lambda^{(7)} + 10\, p_\lambda^{(3)}\, p_\lambda^{(6)} + 5\, p_\lambda^{(4)}\, p_\lambda^{(5)} + p_\lambda^{(5)}\, p_\lambda^{(4)}.$$

Bilden wir die partiellen Ableitungen der R-Funktion, so ist $\dfrac{\partial R^{(5)}}{\partial p_\lambda^{(6)}} = 10\, p_\lambda^{(3)}$;
$\dfrac{d^6}{d t^6} \dfrac{\partial R^{(5)}}{\partial p_\lambda^{(6)}} = 10\, p_\lambda^{(9)}$; $\dfrac{d}{d t} \dfrac{\partial R^{(5)}}{\partial p_\lambda'} = 5\, p_\lambda^{(9)}$; $\dfrac{\partial R^{(5)}}{\partial p_\lambda} = p_\lambda^{(9)}$, so wird offenbar

$$\frac{d^6}{d t^6} \frac{\partial R^{(5)}}{\partial p_\lambda^{(6)}} = \binom{5}{0} \frac{d}{d t} \frac{\partial R^{(5)}}{\partial p_\lambda'} + \binom{5}{1} \frac{\partial R^{(5)}}{\partial p_\lambda}.$$

Die beiden allgemeinen Gesetze (17), (21) haben den Vorzug, daß durch Anwendung derselben die oft umständliche Methode der Differentiation im wesentlichen eingeschränkt wird, denn die Differentialquotienten höherer Ordnung lassen sich durch diejenigen niedriger Ordnung ausdrücken. Die Methode der Differentiation läßt sich durch die Berechnung von Determinanten ersetzen. Der Grad der Determinanten richtet sich nach der Ordnung der Differentiation. Für den speziellen Fall $\rho = 1$; $\sigma = \nu$ resultiert aus (21).

$$\frac{d^\nu}{d t^\nu} \frac{\partial R'}{\partial p_\lambda^{(\nu)}} = \frac{d^{\nu-1}}{d t^{\nu-1}} \frac{\partial R'}{\partial p_\lambda^{(\nu-1)}} - \frac{d^{\nu-2}}{d t^{\nu-2}} \frac{\partial R'}{\partial p_\lambda^{(\nu-2)}} + \cdots - \cdots (-1)^{\nu-1} \frac{\partial R'}{\partial p_\lambda}; \tag{22}$$

d. h. alle Determinanten werden „1".

Das Gesetz (21) bestätigt hier den im Hülfssatz „3" bei Koenigsberger angeführten Satz, wo noch eine Funktion V, welche von t, $p_1, p_2 \cdots p_\mu$ und deren Ableitungen bis zur ν^{ten} Ordnung hin abhängt und sich darstellen läßt als ein nach t genommener totaler Differentialquotient einer Funktion $R\left(t, p_1, p_2, p_\mu \cdots p_1', p_2', \cdots p_\mu', \cdots \overset{(\nu-1)}{p_1}, \overset{(\nu-1)}{p_2}, \cdots \overset{(\nu-1)}{p_\mu}\right)$, stets der Identität genügen muß:

$$\frac{\partial V}{\partial p_\lambda} - \frac{d}{d t} \frac{\partial V}{\partial p_\lambda'} + \frac{d^2}{d t^2} \frac{\partial V}{\partial p_\lambda^{(2)}} - \cdots + \cdots - \cdots + (-1)^\nu \frac{d^\nu}{d t^\nu} \frac{\partial V}{\partial p_\lambda^\nu} = 0. \tag{23}$$

Es ist ohne weiteres ersichtlich, daß die Beziehung (22) durch Umstellung der Glieder, wenn wir

$$R' = \frac{d R}{d t} = V$$

setzen, die identische Relation (23) liefert.

Vor allem bieten die Gesetze eine wertvolle Grundlage bei der Verallgemeinerung des 4^{ten} Hülfssatzes von Koenigsberger, insbesondere bei der Entwicklung und Aufstellung der notwendigen und hinreichenden Bedingungsgleichungen für die Existenz eines kinetischen Potentials beliebiger Ordnung, eine Untersuchung, welche auszuführen ich mir für eine spätere Arbeit vorbehalten möchte.