Über die Differentialgleichung der Krümmungslinien bei einigen krummen Oberflächen.

Krümmungslinien einer krummen Oberfläche werden bekanntlich erhalten, wenn man von einem Punkte aus auf der Fläche in Richtungen fortschreitet, in welchen die aufeinander folgenden, unendlich nahen Normalen sich schneiden.

Durch jeden Punkt der Fläche gehen zwei daselbst sich senkrecht schneidende Linien dieser Art, die ganze Oberfläche enthält also zwei Scharen von Krümmungslinien.

Die Gleichung der Krümmungslinien wird aus der Gleichung der Normale gewonnen. Ist die Gleichung der Fläche in der Form $z = f(x, y)$ vorausgesetzt, so entsteht bei Anwendung der gebräuchlichen Bezeichnungsweise für die Krümmungslinien die Gleichung

$$\frac{dx + p\,dz}{dp} = \frac{dy + q\,dz}{dq}.$$

Die Integration dieser Gleichung ist meist mit grossen Schwierigkeiten verbunden. Sie lässt sich, wie bekannt, nur stets ausführen bei allen Cylinder-, Kegel-, Rotations- und Kanalflächen, ferner bei den abwickelbaren Flächen und allen Flächen zweiten Grades. Schon für die Flächen dritten Grades ist das Problem noch nicht allgemein gelöst. Es giebt jedoch viele Flächen aller Grade, für welche man die Krümmungslinien bestimmen kann.

Es mag hier sogleich mit einer Fläche vierten Grades begonnen werden, der Einhüllenden aller Kugeln, deren Mittelpunkte auf einer gegebenen Ellipse liegen und deren Oberflächen durch den Mittelpunkt derselben Ellipse gehen. Die Gleichung dieser Fläche findet sich bei Schloemilch, Übungsbuch zum Studium der höheren Analysis, I, Seite 180, nämlich

$$(x^2 + y^2 + z^2)^2 = 4\,(a^2 x^2 + b^2 y^2).$$

Die oben angegebene Differentialgleichung wird bei dieser Fläche zur bequemeren Handhabung besser in die Form gesetzt

$$\frac{d\,(x + p\,z)}{dp} = \frac{d\,(y + q\,z)}{dq}.$$

Aus der Gleichung der Fläche erhält man durch einmaliges partielles Differentiieren nach den unabhängigen Variabelen x und y, wie man leicht übersieht,

$$x + z\,p = a^2 \cdot \frac{x}{\sqrt{a^2 x^2 + b^2 y^2}},$$

$$y + z\,q = b^2 \cdot \frac{y}{\sqrt{a^2 x^2 + b^2 y^2}},$$

worin die Quadratwurzeln dieselben Zeichen haben. Differentiiert man beide Ausdrücke, wie es obige Gleichung vorschreibt, vollständig, so ergiebt sich

$$d\,(x + p\,z) = a^2 b^2 \cdot \frac{y\,(y\,d\,x - x\,d\,y)}{(a^2 x^2 + b^2 y^2)^{\frac{3}{2}}}.$$

Der Ausdruck für $y + z\,q$ kann aus dem für $x + z\,p$ erhalten werden durch Vertauschung von a und b und gleichzeitig von x und y, daher wird

$$d\,(y + q\,z) = a^2 b^2 \cdot \frac{x\,(x\,dy - y\,dx)}{(a^2 x^2 + b^2 y^2)^{\frac{3}{2}}},$$

folglich lautet die Gleichung der Krümmungslinien nach Aufhebung der gleichen Faktoren

$$\frac{y\,(y\,d\,x - x\,d\,y)}{dp} = \frac{x\,(x\,dy - y\,d\,x)}{dq}$$

oder

$$(y\,d\,x - x\,dy)\,(y\,d\,q + x\,dp) = 0.$$

Es zerfällt also diese Gleichung in zwei, nämlich

$$y\,d\,x - x\,dy = 0$$

und

$$y\,d\,q + x\,dp = 0,$$

von denen die erstere die Projectionen der einen, die zweite die der andern Schar von Krümmungslinien auf die xy-Ebene liefert.

Aus der ersteren beider Gleichungen folgt sofort durch Integration

$$\frac{y}{x} = const.,$$

d. h. die Projektionen der Krümmungslinien der ersten Schar auf die xy-Ebene sind gerade Linien, die durch den Koordinatenanfang gehen; die Krümmungslinien selber liegen also in Ebenen, welche sich um die z-Axe drehen.

Die Auffindung der Projektionen der zweiten Schar fordert die Integration der Gleichung

$$\frac{dp}{dq} = -\frac{y}{x}.$$

Hierin ist p und q durch x und y auszudrücken. Es ist

$$d\,(x + z\,p) = d\,x + z\,dp + p\,d\,z$$

oder, wenn man dz vermittelst der Gleichung

$$dz = p\,d\,x + q\,dy$$

eliminiert,

$$d\,(x + zp) = (1 + p^2)\,d\,x + p\,q\,dy + z\,dp.$$

Ebenso folgt

$$d\,(y + z\,q) = (1 + q^2)\,dy + p\,q\,dx + z\,dq.$$

Für beide Ausdrücke sind oben aus der Gleichung der Fläche Werte berechnet. Man findet aus den bestehenden Gleichungen

$$z\,dp = a^2 b^2 \frac{y\,(y\,dx - x\,dy)}{(a^2 x^2 + b^2 y^2)^{\frac{3}{2}}} - \Big((1 + p^2)\,d\,x + p\,q\,dy\Big),$$

$$z\,dq = a^2 b^2 \frac{x\,(x\,dy - y\,dx)}{(a^2 x^2 + b^2 y^2)^{\frac{3}{2}}} - \Big((1 + q^2)\,dy + p\,q\,dx\Big).$$

Die Division beider Gleichungen durch einander ergiebt mit Berücksichtigung dessen, dass $\frac{dp}{dq} = -\frac{y}{x}$ sein muss,

$$-\frac{y}{x} = \frac{a^2 b^2 y\,(y\,dx - x\,dy) - \Big((1 + p^2)\,d\,x + p\,q\,dy\Big)(a^2 x^2 + b^2 y^2)^{\frac{3}{2}}}{-a^2 b^2 x\,(y\,dx - x\,dy) - \Big((1 + q^2)\,dy + pq\,dx\Big)\,(a^2 x^2 + b^2 y^2)^{\frac{3}{2}}}.$$

Hieraus folgt nach Weglassung der Glieder, die durch Subtraktion und Division in Wegfall kommen,

$$y\,\Big((1 + q^2)\,dy + p\,q\,dx\Big) = -x\Big((1 + p^2)\,d\,x + p\,q\,dy\Big)$$

oder

$$dy\Big((1 + q^2)\,y + p\,q\,x\Big) = -dx\Big((1 + p^2)\,x + p\,q\,y\Big),$$

$$\frac{dy}{dx} = -\frac{(1 + p^2)\,x + p\,q\,y}{(1 + q^2)\,y + p\,q\,x}.$$

Es ist zu bilden

$$\left(1 + x^2 \frac{(a^2 - \sqrt{a^2 x^2 + b^2 y^2})^2}{z^2\,(a^2 x^2 + b^2 y^2)}\right) x + x\,y^2 \frac{(a^2 - \sqrt{a^2 x^2 + b^2 y^2})\,(b^2 - \sqrt{a^2 x^2 + b^2 y^2})}{z^2\,(a^2 x^2 + b^2 y^2)}.$$

Der Zähler dieses unter gleichen Nenner gebrachten Ausdrucks lautet in den Variabelen x und y allein

$$\Big[2\sqrt{a^2 x^2 + b^2 y^2} - (x^2 + y^2)\,(a^2 x^2 + b^2 y^2) + x^2\,(a^2 - \sqrt{a^2 x^2 + b^2 y^2})^2\Big]\,x$$
$$+\,x\,y^2\,\Big\{a^2 b^2 - (a^2 + b^2)\sqrt{a^2 x^2 + b^2 y^2} + a^2 x^2 + b^2 y^2\Big\}$$

oder

$$x\,\Big[\Big(2\,(a^2 x^2 + b^2 y^2) - 2\,a^2 x^2 - (a^2 + b^2)\,y^2\Big)\sqrt{a^2 x^2 + b^2 y^2} - (x^2 + y^2)\,(a^2 x^2 + b^2 y^2)$$
$$+\,a^4 x^2 + x^2\,(a^2 x^2 + b^2 y^2) + a^2 b^2 y^2 + y^2\,(a^2 x^2 + b^2 y^2)\Big].$$

Hieraus entsteht nach gehöriger Reduktion

$$x\,\Big[(b^2 - a^2)\,y^2\,\sqrt{a^2 x^2 + b^2 y^2} + a^2\,(a^2 x^2 + b^2 y^2)\Big]$$

oder

$$x\,\sqrt{a^2 x^2 + b^2 y^2}\,\Big[(b^2 - a^2)\,y^2 + a^2\,\sqrt{a^2 x^2 + b^2 y^2}\Big].$$

Ferner ergiebt sich für $(1 + q^2)\,y + p\,q\,x$ ein Bruch mit demselben Nenner als für den Ausdruck $(1 + p^2)\,x + p\,q\,y$ und mit dem Zähler

$$y\,\sqrt{a^2 x^2 + b^2 y^2}\,\Big[(a^2 - b^2)\,x^2 + b^2\,\sqrt{a^2 x^2 + b^2 y^2}\Big].$$

In der That lehrt eine Vergleichung beider noch nicht entwickelter Ausdrücke, dass sie auseinander entstehen durch gleichzeitige Vertauschung von x und y und von a und b.

Die Differentialgleichung der Krümmungslinien der zweiten Schar ist also nach Weglassung der sich hebenden Faktoren

$$\frac{dy}{dx} = -\frac{x\left[(b^2 - a^2)\, y^2 + a^2 \sqrt{a^2 x^2 + b^2 y^2}\right]}{y\left[(a^2 - b^2)\, x^2 + b^2 \sqrt{a^2 x^2 + b^2 y^2}\right]}.$$

Die Integration gelingt, wenn man als neue Variabelen u und v einführt, die mit x und y durch die Gleichungen verbunden sind

$$\tfrac{1}{2}(b^2 - a^2)\, y^2 + a^2 \sqrt{a^2 x^2 + b^2 y^2} = u\,(b^2 - a^2),$$
$$-\tfrac{1}{2}(b^2 - a^2)\, x^2 + b^2 \sqrt{a^2 x^2 + b^2 y^2} = v\,(b^2 - a^2).$$

Setzt man zur Abkürzung $\frac{a^2}{b^2 - a^2} = m$, $\frac{b^2}{b^2 - a^2} = n$ und $\sqrt{a^2 x^2 + b^2 y^2} = w$, so lauten die beiden Gleichungen

$$\alpha) \qquad \tfrac{1}{2} y^2 = u - m w,$$
$$\beta) \qquad -\tfrac{1}{2} x^2 = v - n w.$$

Hieraus erhält man weiter

$$-\frac{y}{x} \cdot \frac{dy}{dx} = \frac{du - m\, dw}{dv - n\, dw}.$$

Ferner geht

$$\frac{(b^2 - a^2)\, y^2 + a^2 \sqrt{a^2 x^2 + b^2 y^2}}{-(b^2 - a^2)\, x^2 + b^2 \sqrt{a^2 x^2 + b^2 y^2}}$$

über in

$$\frac{2\,(u - m w) + m w}{2\,(v - n w) + n w} = \frac{2 u - m w}{2 v - n w}.$$

Die Differentialgleichung ist demnach

$$\frac{du - m\, dw}{dv - n\, dw} = \frac{2 u - m w}{2 v - n w}$$

oder

$$2\,(v\, du - u\, dv) - 2\,(mv - nu)\, dw - w\,(n\, du - m\, dv) = o.$$

Aus den oben mit α) und β) gekennzeichneten Gleichungen geht durch Elimination von w hervor

$$\tfrac{1}{2}(m x^2 + n y^2) = n u - m v,$$

d. i.

$$\tfrac{1}{2}(a^2 x^2 + b^2 y^2) = (b^2 - a^2)(n u - m v)$$

oder

$$\tfrac{1}{2} w^2 = (b^2 - a^2)(n u - m v),$$

also besteht die Gleichung

$$2\,(v\, du - u\, dv) + \frac{w^2}{b^2 - a^2}\, d w - \frac{w\, dw}{b^2 - a^2} \cdot w = o$$

oder

$$v\, du - u\, dv = o,$$

woraus das Integral hervorgeht

$$\frac{u}{v} = const..$$

Es wird also die zweite Schar der Krümmungslinien der behandelten Fläche dargestellt durch die Gleichung

$$(b^2 - a^2)\, y^2 + 2\, a^2 \sqrt{a^2 x^2 + b^2 y^2} = c\left(-(b^2 - a^2)\, x^2 + 2\, b^2 \sqrt{a^2 x^2 + b^2 y^2}\right),$$

worin c eine Konstante bedeutet. Durch Rationalmachen verwandelt sie sich in

$$(b^2 - a^2)^2\, (y^2 + c\, x^2)^2 = 4\, (b^2 c - a^2)^2\, (a^2 x^2 + b^2 y^2).$$

Man erhält also einen geraden Cylinder vierten Grades, dessen Gleichung zusammen mit der der Fläche die Gleichung der Krümmungslinien darstellt.

Bringt man besser aus dem gefundenen Integral mit Hülfe der Gleichung der Fläche den Ausdruck

$$2 \sqrt{a^2 x^2 + b^2 y^2} = x^2 + y^2 + z^2$$

heraus, so entsteht

$$(b^2 - a^2)\, y^2 + a^2\, (x^2 + y^2 + z^2) = c\left(-(b^2 - a^2)\, x^2 + b^2\, (x^2 + y^2 + z^2)\right),$$

d. h.

$$a^2 x^2 + b^2 y^2 + a^2 z^2 = c\, (a^2 x^2 + b^2 y^2 + b^2 z^2)$$

oder

$$a^2 x^2 + b^2 y^2 = \frac{b^2 c - a^2}{1 - c}\, z^2.$$

Es liegen also die Krümmungslinien zweiten Systems auf elliptischen Kegeln.

Die zu Anfang angeführte unentwickelte Differentialgleichung der Krümmungslinien verwandelt sich durch die Elimination von z bekanntlich in eine Differentialgleichung zweiten Grades von der Form

$$P\left(\frac{dy}{dx}\right)^2 + Q\,\frac{dy}{dx} + R = o,$$

worin P, Q, R von x und y abhängige, durch die ersten und zweiten partiellen Differentialquotienten von z nach den unabhängigen Variabelen ausgedrückte Grössen bedeuten. Die Wurzeln dieser Gleichung

$$\frac{dy}{dx} = X \quad \text{und} \quad \frac{\delta y}{\delta x} = Y$$

sind die Differentialgleichungen für je eine Schar.

Es müssen zwischen den Grössen P, Q, R, X und Y die Relationen bestehen

$$-\frac{Q}{P} = X + Y \quad \text{und} \quad \frac{R}{P} = X\, Y.$$

Aus der Zusammensetzung der Ausdrücke

$$P = (1 + q^2)\, s - p\, q\, t,$$
$$Q = (1 + q^2)\, r - (1 + p^2)\, t,$$
$$R = p\, q\, r - (1 + p^2)\, s$$

erkennt man die Existenz der identischen Gleichungen

$$(1 + p^2)\, P - p\, q\, Q + (1 + q^2)\, R = o,$$
$$P\, r - Q\, s + R\, t = o$$

oder nach obigen Relationen

$$1 + p^2 + p\,q\,(X + Y) + (1 + q^2)\,X\,Y = o,$$
$$r + s\,(X + Y) + t\,X\,Y = o.$$

Aus der ersteren Gleichung findet man, sobald die eine Wurzel X obiger Differentialgleichung bekannt ist, sofort die andere, nämlich

$$Y = \frac{\delta y}{\delta x} = -\frac{1 + p^2 + p\,q\,X}{(1 + q^2)\,X + p\,q}.$$

Die Beachtung dieser Beziehung hätte, beiläufig bemerkt, bei der vorhin behandelten Fläche vierten Grades sofort auf die Differentialgleichung der Krümmungslinien zweiter Schar geführt.

Im folgenden soll mit der Differentialgleichung

$$(dx + p\,d\,z)\,dq = (d\,y + q\,dz)\,dp$$

eine Entwickelung vorgenommen werden, von deren Resultat ich nicht weiss, ob es bekannt und benutzt ist.

Entfernt man dz durch die Gleichung $dz = p\,dx + q\,dy$, so erhält man zunächst

$$\big((1 + p^2)\,d\,x + p\,q\,dy\big)\,dq = \big((1 + q^2)\,dy + p\,q\,d\,x\big)\,dp.$$

Beseitigt man nun nicht wie im früheren dp und dq durch die Relationen

$$dp = r\,d\,x + s\,dy,$$
$$dq = s\,d\,x + t\,dy,$$

sondern dx und dy unter Beibehaltung von dp und dq, so hat man einzuführen

$$dx = \frac{s\,dq - t\,dp}{s^2 - rt},$$
$$dy = \frac{s\,dp - r\,dq}{s^2 - rt}.$$

Es folgt, wenn man nach Potenzen von $\frac{dp}{dq}$ ordnet, die Differentialgleichung zweiten Grades

$$\big((1 + q^2)\,s - p\,q\,t\big)\left(\frac{dp}{dq}\right)^2 - \big((1 + q^2)\,r - (1 + p^2)\,t\big)\frac{dp}{dq} + p\,q\,r - (1 + p^2)\,s = o,$$

d. h. mit Benutzung früherer Bezeichnungen

$$P\left(\frac{dp}{dq}\right)^2 - Q\,\frac{dp}{dq} + R = o.$$

Die Anwendbarkeit dieser Gleichung erfordert, dass die zweiten Differentialquotienten r, s, t sich durch die ersten p und q ausdrücken lassen. Dass dies, wenn auch in einzelnen Fällen nicht ohne Rechnungsschwierigkeiten, möglich sein muss, zeigt folgende Überlegung.

Die Gleichung der Fläche mit den für p und q daraus zu entnehmenden Werten stellen drei Gleichungen mit den Grössen x, y, z dar. Da diese drei Gleichungen im allgemeinen von einander unabhängig sind, wird sich aus ihnen jede der drei Grössen durch p und q ausdrücken lassen. Ist dies möglich, so müssen auch r, s, t durch p und q allein wiedergegeben werden können.

Der Vergleich der zuletzt erhaltenen Differentialgleichung zweiten Grades mit der gewöhnlichen zeigt, dass sie in der äussern Form bis auf das Vorzeichen des mittleren Gliedes übereinstimmen, dass also die eine aus der andern hervorgeht, wenn $\frac{dy}{dx}$ mit $-\frac{dp}{dq}$ vertauscht wird. Die Wurzeln der Gleichung

$$P\left(\frac{dp}{dq}\right)^2 - Q\frac{dp}{dq} + R = o$$

werden also sein

$$\frac{dp}{dq} = -X \text{ und } \frac{\delta p}{\delta q} = -Y,$$

worin nunmehr X und Y als Funktionen von p und q gedacht werden. Setzt man in die oben erwähnte Gleichung

$$r + s(X + Y) + tXY = o$$

die Werte für X und Y in p und q, so hat man eine partielle Differentialgleichung zweiter Ordnung, welche als Differentialgleichung der Flächen mit den den Grössen X und Y entsprechenden Krümmungslinien anzusehen ist.

Zur Illustrierung des Verfahrens mag die Aufsuchung der Differentialgleichung der Krümmungslinien des dreiaxigen Ellipsoids vorgenommen werden.

Aus der Mittelpunktsgleichung desselben

$$\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} + \frac{z^2}{c^2} = 1$$

folgt

$$p = -\frac{c^2}{a^2}\frac{x}{z}, \quad q = -\frac{c^2}{b^2}\frac{y}{z}$$

und hieraus

$$x = -\frac{a^2}{c^2}zp, \quad y = -\frac{b^2}{c^2}zq.$$

Differentiiert man p und q partiell nach x und y, so entsteht

$$r = -\frac{c^2}{a^2}\cdot\frac{z - xp}{z^2} = -\frac{c^2}{a^2}\cdot\frac{1 + \frac{a^2}{c^2}p^2}{z},$$

$$s = \frac{c^2}{a^2}\cdot\frac{x}{z^2}q = -\frac{pq}{z},$$

$$t = -\frac{c^2}{b^2}\cdot\frac{z - yq}{z^2} = -\frac{c^2}{b^2}\cdot\frac{1 + \frac{b^2}{c^2}q^2}{z}$$

oder

$$rz = -\frac{c^2}{a^2} - p^2, \quad sz = -pq, \quad tz = -\frac{c^2}{b^2} - q^2.$$

Multipliciert man die Gleichung der Krümmungslinien mit $(-z)$ und setzt

$$-rz = r_1, \quad -sz = -s_1, \quad -st = t_1,$$

so erhält man, nachdem man gebildet hat

$$(1+q^2)s_1 - pq\,t_1 = (1+q^2)pq - pq\left(\frac{c^2}{b^2}+q^2\right) = pq\left(1-\frac{c^2}{b^2}\right),$$

$$(1+q^2)r_1 - (1+p^2)t_1 = (1+q^2)\left(\frac{c^2}{a^2}+p^2\right) - (1+p^2)\left(\frac{c^2}{b^2}+q^2\right)$$

$$= \frac{c^2}{a^2} - \frac{c^2}{b^2} + p^2\left(1-\frac{c^2}{b^2}\right) - q^2\left(1-\frac{c^2}{a^2}\right),$$

$$pq\,r_1 - (1+p^2)s_1 = pq\left(\frac{c^2}{a^2}+p^2\right) - (1+p^2)pq = pq\left(\frac{c^2}{a^2}-1\right),$$

als Differentialgleichung der Krümmungslinien

$$\beta^2 pq\left(\frac{dp}{dq}\right)^2 - (\beta^2 - \alpha^2 + \beta^2 p^2 - \alpha^2 q^2)\frac{dp}{dq} - \alpha^2 pq = 0,$$

worin zur Abkürzung geschrieben ist

$$\alpha^2 = 1 - \frac{c^2}{a^2}, \qquad \beta^2 = 1 - \frac{c^2}{b^2}.$$

Die Differentialgleichung in den Variabelen x und y lautet

$$\beta^2 xy\left(\frac{dy}{dx}\right)^2 + (\alpha^2 x^2 - \beta^2 y^2 + b^2 - a^2)\frac{dy}{dx} - \alpha^2 xy = 0.$$

Man erkennt, dass die vorige Gleichung von letzterer in der Form nicht wesentlich abweicht, es wird also die erstere durch eine gleichartige Substitution, als bei der zweiten von Monge angewandt ist, integriert werden können. In der That, substituiert man $pq\dfrac{dp}{dq} = t^2$, entwickelt nach p^2 und differentiiert vollständig, so gelangt man auch hier zu einer Gleichung, deren linke Seite aus zwei Faktoren besteht, nämlich

$$(t\,dq - q\,dt)\cdot\left(\frac{t}{q} - \frac{\alpha^2 qt}{(\beta^2 t^2 + \alpha^2 q^2)^2}\right) = 0.$$

Die Differentialgleichung $t\,dq - q\,dt = 0$ liefert das vollständige Integral

$$p^2 = \varkappa^2 q^2 - \frac{(\beta^2 - \alpha^2)\varkappa^2}{\beta^2\varkappa^2 + \alpha^2}.$$

Das entsprechende Integral in den Variabelen x und y ist

$$y^2 = \mu^2 x^2 - \frac{e^2\mu^2}{\beta^2\mu^2 + \alpha^2},$$

worin μ für $\varkappa$ und $e^2 = a^2 - b^2$ für $\beta^2 - \alpha^2$ auftritt. Die eine von beiden letzteren Integralgleichungen muss sich genau in die andere überführen lassen. Die längere Rechnung, welche dies bestätigt, möge hier unterlassen werden.

Als zweites Beispiel diene die windschiefe Schraubenfläche, deren Gleichung ist

$$z = arctg\,\frac{y}{x}.$$

Man findet $\qquad p = -\dfrac{y}{x^2+y^2}, \quad q = \dfrac{x}{\sqrt{x^2+y^2}}.$

Hieraus folgt

$$\frac{p}{q} = -\frac{y}{x} \quad \text{und} \quad p^2 + q^2 = \frac{1}{x^2+y^2},$$

folglich $$p = -y(p^2+q^2)\,, \quad \text{d. h.} \quad y = -\frac{p}{p^2+q^2}$$
und
$$q = x(p^2+q^2) \qquad \text{oder} \qquad x = \frac{q}{p^2+q^2}\,.$$

Aus der Relation $\frac{p}{q} = -\frac{y}{x}$ oder $qy + px = o$ folgt weiter
$$ys + p + xr = o\,, \tag{α}$$
$$q + yt + xs = o\,. \tag{β}$$

Differentiiert man $x = \frac{q}{p^2+q^2}$ partiell nach y, so folgt
$$o = (p^2-q^2)\,t - 2pqs\,.$$

Das hieraus entnommene s werde in $\beta)$ eingesetzt, so ergiebt sich mit Berücksichtigung der Werte für x und y
$$q - \frac{p}{p^2+q^2}\,t + \frac{1}{p^2+q^2}\cdot\frac{p^2-q^2}{2p}\,t = o\,,$$
$$2pq(p^2+q^2) - 2p^2t + (p^2-q^2)\,t = o\,,$$
also $$t = 2pq\,.$$
Dann ist $$s = p^2 - q^2\,.$$
Aus $\alpha)$ folgt
$$-\frac{p}{p^2+q^2}(p^2-q^2) + p + \frac{qr}{p^2+q^2} = o$$
und hieraus nach einiger Reduktion
$$r = -2pq\,.$$

Die Grössen P, Q, R der Differentialgleichung werden
$$P = (1+q^2)(p^2-q^2) - 2p^2q^2 = p^2 - q^2(1+p^2+q^2)\,,$$
$$Q = -(1+q^2)\,2pq - (1+p^2)\,2pq = -2pq - 2pq(1+p^2+q^2)\,,$$
$$R = -2p^2q^2 - (1+p^2)(p^2-q^2) = q^2 - p^2(1+p^2+q^2)\,.$$

Die Gleichung selbst lautet demnach, wenn man $1+p^2+q^2 = \triangle$ setzt,
$$(p^2 - q^2\triangle)\left(\frac{dp}{dq}\right)^2 + 2pq(\triangle+1)\frac{dp}{dq} + (q^2 - p^2\triangle) = o\,.$$

Die Discriminante dieser Gleichung ist
$$p^2q^2(\triangle+1)^2 - (p^2-q^2\triangle)(q^2-p^2\triangle) = \triangle\,(2p^2q^2+p^4+q^4) = (p^2+q^2)^2\,\triangle\,.$$
Demnach ist
$$(p^2-q^2\triangle)\frac{dp}{dq} = -pq(\triangle+1) \pm (p^2+q^2)\sqrt{\triangle}\,.$$

Für die erste Schar gilt
$$(p^2-q^2\triangle)\frac{dp}{dq} = -pq(\triangle+1) + (p^2+q^2)\triangle = (p - q\sqrt{\triangle})(-q + p\sqrt{\triangle})$$
oder
$$(p + q\sqrt{\triangle})\frac{dp}{dq} = -q + p\sqrt{\triangle}\,,$$

also

$$\frac{dp}{dq} = \frac{-q + p\sqrt{\triangle}}{p + q\sqrt{\triangle}}. \qquad \text{I}$$

Für die zweite Schar ist

$$(p^2 - q^2\triangle)\frac{\delta p}{\delta q} = -pq(\triangle + 1) - (p^2 + q^2)\sqrt{\triangle} = -(q + p\sqrt{\triangle})(p + q\sqrt{\triangle}),$$

also

$$\frac{\delta p}{\delta q} = -\frac{q + p\sqrt{\triangle}}{p - q\sqrt{\triangle}}. \qquad \text{II.}$$

Entwickelt man Gleichung I in

$$p\,dp + q\,d\,q + (q\,dp - p\,d\,q)\sqrt{\triangle} = o,$$

so erkennt man, dass hierfür gesetzt werden kann

$$d\,(p^2 + q^2) + q^2\sqrt{\triangle}\,d\left(\frac{p}{q}\right) = o.$$

Als neue Variabele werden eingeführt

$$u^2 = 1 + p^2 + q^2 \text{ und } v = \frac{p}{q}.$$

Dann ist

$$p\,dp + q\,d\,q = u\,du$$

und

$$q\,dp - p\,d\,q = q^2\,dv.$$

Also wird die Differentialgleichung

$$u\,du + q^2 u\,dv = o,$$

d. h.

$$du + q^2\,dv = o.$$

Aus $\frac{p}{q} = v$ folgt $\frac{p^2 + q^2}{q^2} = v^2 + 1$ oder $q^2 = \frac{p^2 + q^2}{v^2 + 1} = \frac{u^2 - 1}{v^2 + 1}$.

Folglich ist zu integrieren

$$du + \frac{u^2 - 1}{v^2 + 1}\,dv = o \text{ oder } \frac{du}{u^2 - 1} + \frac{dv}{v^2 + 1} = o.$$

Hierin sind die Variabelen getrennt. Schreibt man ferner noch die Gleichung folgendermassen

$$\frac{\frac{1}{2}\,du}{u - 1} - \frac{\frac{1}{2}\,du}{u + 1} + \frac{dv}{1 + v^2} = o,$$

so ergiebt die gliedweise vorgenommene Integration

$$\tfrac{1}{2}\,l\,(u - 1) - \tfrac{1}{2}\,l\,(u + 1) + \operatorname{arctg} v = Const.,$$

woraus nach Wiedereinführung von p und q folgt

$$\tfrac{1}{2}\,l\,\frac{\sqrt{1 + p^2 + q^2} - 1}{\sqrt{1 + p^2 + q^2} + 1} + \operatorname{arctg}\frac{p}{q} = Const..$$

Für die zweite Schar ist

$$p\,dp + q\,dq - (q\,dp - p\,dq)\sqrt{\triangle} = o$$

oder, unter Anwendung derselben Substitution wie vorhin,

$$du - q^2\,dv = o,$$

woraus mit Benutzung der früheren Entwickelungen folgt

$$\frac{du}{u^2-1}-\frac{dv}{1+v^2}=o$$

und hieraus das Integral

$$\tfrac{1}{2}\,l\,\frac{\sqrt{1+p^2+q^2}-1}{\sqrt{1+p^2+q^2}+1}-arctg\,\frac{p}{q}=const.\,.$$

Setzt man für p und q ihre Werte in x und y zurück, so folgt für die erste Schar

$$\tfrac{1}{2}\,l\,\frac{\sqrt{1+x^2+y^2}-\sqrt{x^2+y^2}}{\sqrt{1+x^2+y^2}+\sqrt{x^2+y^2}}+arctg\left(-\frac{y}{x}\right)=Const.\,,$$

oder, wenn man die Konstante gleich $-l\,c_1$ nimmt und den Nenner von der Irrationalität befreit,

$$\tfrac{1}{2}\,l\,(\sqrt{1+x^2+y^2}-\sqrt{x^2+y^2})^2+l\,c_1=arctg\,\frac{y}{x}\,,$$

d. h.

$$\frac{y}{x}=tg\,l\,c_1\,(\sqrt{1+x^2+y^2}-\sqrt{x^2+y^2}):$$

Ganz ebenso ergiebt sich für die zweite Schar

$$\frac{y}{x}=tg\,l\,c_2\,(\sqrt{1+x^2+y^2}+\sqrt{x^2+y^2})\,,\text{*)}$$

Es war oben gezeigt worden, dass die Gleichung der zweiten Schar der Krümmungslinien aus der ersten erhalten wird durch die Gleichung

$$\frac{\delta y}{\delta x}=-\frac{1+p^2+p\,q\,X}{(1+q^2)\,X+p\,q}=-\frac{\delta p}{\delta q}\,.$$

Hierdurch ist man in den Stand gesetzt, die Krümmungslinien von Flächen aufzufinden, ohne das Integral der partiellen Differentialgleichung, durch welche sie charakterisiert sind, zu kennen.

Wir nehmen den speciellen Fall an, dass $\frac{dy}{dx}=-\frac{p}{q}$ Differentialgleichung der Krümmungslinien sei, so ist in p und q allein

$$\frac{dp}{dq}=\frac{p}{q}\qquad\text{und}\qquad\frac{\delta p}{\delta q}=\frac{1+p^2-\frac{p}{q}\,p\,q}{-(1+q^2)\,\frac{p}{q}+p\,q}\,.$$

Die erstere beider Gleichungen liefert sofort

$$\frac{p}{q}=Const.$$

als Gleichung der Projectionen der einen Schar; die andere Gleichung verwandelt sich zunächst in

$$\frac{\delta p}{\delta q}=-\frac{q}{p}\,,$$

*) cf. L. Fuchs Inaug. Dissert.

d. h.

$$p\,\delta p + q\,\delta q = o\,,$$

woraus die Integration ergiebt

$$p^2 + q^2 = const.\,.$$

Die partielle Differentialgleichung der Flächen, bei welchen die eben gefundenen Integrale, wieder in x und y ausgedrückt, die Projectionen der Krümmungslinien darstellen, ist

$$r + s\left(-\frac{p}{q} + \frac{q}{p}\right) - t = o$$

oder

$$p\,q\,r - (p^2 - q^2)\,s - p\,q\,t = o\,.$$

Hierhin gehören die Flächen, bei denen eine Schar der Krümmungslinien in Ebenen liegen, welche der xy-Ebene parallel sind, da sich hierfür als Differentialgleichung ergiebt $\frac{dy}{dx} = -\frac{p}{q}$, von welcher wir ausgingen. Andererseits ersieht man, dass auch hierher zu rechnen sind die Flächen, welche durch die Gleichungen charakterisiert sind

$$q\,x - p\,y = o\,,$$
$$p^2 + q^2 = f(z)\,,$$

d. h. die Rotations- und Kanalflächen.

Dem vorigen Beispiel schliesst sich unmittelbar an das folgende. Es sei Differentialgleichung der Krümmungslinien

$$\frac{dy}{dx} = \frac{p}{q}\,,$$

dann wird

$$\frac{\delta p}{\delta q} = \frac{1 + p^2 + p\,q\,\frac{p}{q}}{(1+q^2)\frac{p}{q} + p\,q} = \frac{q}{p}\,\frac{1 + 2\,p^2}{1 + 2\,q^2}\,.$$

Aus der ersteren Gleichung wird

$$\frac{dp}{dq} = -\frac{p}{q}\,,$$

woraus durch Integration für die eine Schar folgt

$$p\,q = Const.\,.$$

Auch die zweite Gleichung kann sofort integriert werden. Es ergiebt sich für die andere Schar

$$\frac{1 + 2\,p^2}{1 + 2\,q^2} = const.\,.$$

Die partielle Differentialgleichung der in Rede stehenden Flächen ist

$$r + s\left(\frac{p}{q} - \frac{q}{p}\,\frac{1 + 2\,p^2}{1 + 2\,q^2}\right) - t\,\frac{1 + 2\,p^2}{1 + 2\,q^2} = o$$

oder

$$p\,q\,(1 + 2\,q^2)\,r + (p^2 - q^2)\,s - p\,q\,(1 + 2\,p^2)\,t = o\,.$$

Aus dieser Differentialgleichung möge eine Fläche hergeleitet werden.

Man kann der Gleichung folgende Gestalten geben

1) $$q\frac{\partial}{\partial x}\frac{1+2p^2}{1+2q^2}+p\frac{\partial}{\partial y}\frac{1+2p^2}{1+2q^2}=0,$$

2) $$\frac{p}{1+2p^2}\frac{\partial}{\partial x}(pq)-\frac{q}{1+2q^2}\frac{\partial}{\partial y}(pq)=0.$$

Wir setzen $$x=mp\ ,\ y=nq,$$
worin m und n unbestimmte Funktionen von x und y bedeuten mögen. Differentiiert man erstere von beiden Substitutionsgleichungen nach y, die zweite nach x partiell, so ist

$$ms+p\frac{\partial m}{\partial y}=0,$$

$$ns+q\frac{\partial n}{\partial x}=0.$$

Die Elimination von s ergiebt

$$\frac{p}{m}\frac{\partial m}{\partial y}=\frac{q}{n}\frac{\partial n}{\partial x}.$$

Specialisiert man n dadurch, dass man annimmt

$$n=\frac{\lambda}{m},$$

worin λ eine Konstante bedeutet, so wird

$$\frac{p}{m}\frac{\partial m}{\partial y}=-\frac{qm}{\lambda}\frac{\lambda}{m^2}\cdot\frac{\partial m}{\partial x},$$

woraus weiter folgt

$$q\frac{\partial m}{\partial x}+p\frac{\partial m}{\partial y}=0.$$

Diese Gleichung hat dieselbe Form, wie Gleichung 1). Letztere wird demnach erfüllt, wenn man

$$m=\frac{1+2p^2}{1+2q^2}$$

setzt. Hiernach wird nun

$$x=\frac{1+2p^2}{1+2q^2}\cdot p\ ,\ y=\frac{\lambda(1+2q^2)}{1+2p^2}\cdot q,$$

woraus sich ergiebt

3) $$xy=\lambda pq.$$

Nun war die Gleichung der Projectionen der einen Schar von Krümmungslinien $pq=Const.$, daher auch

$$xy=a,$$

worin a eine Konstante bedeutet.

Setzt man nun pq in Gleichung 2) ein, so folgt

$$\frac{p}{1+2p^2}y=\frac{q}{1+2q^2}x,$$

woraus sich weiter ergiebt

4) $$\frac{1+2p^2}{1+2q^2}=\frac{p}{q}\frac{y}{x}.$$

Setzt man für λ die Konstante $4c^2$, so erhält man aus 3) und 4) für p und q die Ausdrücke

$$p = \frac{x}{2c}\sqrt{\frac{y^2 - 2c^2}{x^2 - 2c^2}},$$

$$q = \frac{y}{2c}\sqrt{\frac{x^2 - 2c^2}{y^2 - 2c^2}}.$$

Die Integration ergiebt die Gleichung

$$4c^2 z^2 = (x^2 - 2c^2)(y^2 - 2c^2).$$

Dieselbe stellt eine algebraische Eläche vierten Grades dar. Bringt man sie auf die irrationale Form

$$\sqrt{\tfrac{1}{2}(x-y)^2 + z^2} + \sqrt{\tfrac{1}{2}(x+y)^2 + z^2} = 2c,$$

so erkennt man, dass die Fläche der geometrische Ort eines Punktes ist, dessen Abstände von zwei sich rechtwinklig schneidenden geraden Linien eine konstante Summe haben.

Die Projectionen der Krümmungslinien auf die xy-Ebene sind für diese Fläche ausgedrückt durch die Gleichungen

$$xy = Const. \text{ und } \frac{y^2 - 2c^2}{x^2 - 2c^2} = const..$$

In den für die zweite Schar geltenden Ausdruck

$$\frac{\delta p}{\delta q} = \frac{1 + p^2 + pqX}{(1+q^2)X + pq},$$

worin $X = -\frac{dp}{dq}$ der ersten Schar bedeutet, werde im folgenden substituiert

$$u^2 = \frac{p^2}{1+p^2+q^2}, \quad v^2 = \frac{q^2}{1+p^2+q^2}.$$

Hieraus findet man zunächst

$$1 - u^2 - v^2 = \frac{1}{1+p^2+q^2} \text{ und umgekehrt } 1 + p^2 + q^2 = \frac{1}{1-u^2-v^2},$$

also

$$p^2 = \frac{u^2}{1-u^2-v^2} \text{ und } q^2 = \frac{v^2}{1-u^2-v^2}.$$

$$1+p^2 = \frac{1-v^2}{1-u^2-v^2}, \quad 1+q^2 = \frac{1-u^2}{1-u^2-v^2}, \quad pq = \frac{uv}{1-u^2-v^2}.$$

Ferner erhält man

$$p\,dp = u\frac{(1-v^2)\,du + uv\,dv}{(1-u^2-v^2)^2},$$

$$q\,dq = v\frac{(1-u^2)\,dv + uv\,du}{(1-u^2-v^2)^2}.$$

Setzt man dies in den obigen Ausdruck ein, so folgt

$$\frac{(1-v^2)\,du + uv\,dv}{(1-u^2)\,dv + uv\,du} = \frac{1 - v^2 + uvX}{(1-u^2)X + uv}.$$

Aus der Form erkennt man, dass diese Gleichung befriedigt wird durch

$$\frac{dv}{du} = X,$$

worin man sich X durch u und v ausgedrückt denken muss.

Ist z. B., wie bei der eben behandelten Fläche, $X = \frac{p}{q}$, d. h. $\frac{dp}{dq} = -\frac{p}{q}$ für die erste Schar, so ist für die zweite

$$\frac{dv}{du} = \frac{u}{v},$$

woraus sogleich folgt

$$u^2 - v^2 = const.$$

als Integral, d. h.

$$\frac{p^2 - q^2}{1 + p^2 + q^2} = Const. .$$

Setzt man die Konstante gleich c und bildet $\frac{1+c}{1-c}$, so kommt man auf das früher entwickelte Integral $\frac{1 + 2\,p^2}{1 + 2\,q^2} = const.$ zurück.

Ist $X = 1$, so ist für die erste Schar

$$\frac{dp}{dq} = -1,$$

$$p + q = Const. .$$

Für die zweite Schar wird

$$\frac{\delta p}{\delta q} = \frac{1 + p^2 + p\,q}{1 + q^2 + p\,q}.$$

Die Substitution führt auf

$$\frac{dv}{du} = 1,$$

woraus sogleich erhalten wird

$$u - v = Const.,$$

d. h.

$$\frac{p - q}{\sqrt{1 + p^2 + q^2}} = Const.,$$

welches auch das Integral der in p und q ausgedrückten Differentialgleichung sein muss.

Ähnliches gilt, wenn $X = -1$ genommen wird. Dann ist für die eine Schar der Krümmungslinien $\frac{dp}{dq} = 1$, daher $p - q = Const.$. Für die zweite Schar gilt

$$\frac{dv}{du} = -1, \qquad \text{woraus folgt}$$

$$u + v = const.,$$

d. h.

$$\frac{p + q}{\sqrt{1 + p^2 + q^2}} = const. .$$

Im folgenden mögen noch drei naheliegende Fälle behandelt werden.

Ist $X = o$, d. h. $\frac{dy}{dx} = o$, so folgt für die eine Schar der Krümmungskurven $y = Const.$, sie wird also erhalten, wenn man die Oberfläche durch Ebenen schneidet, welche der xz-Ebene parallel sind. In p und q ausgedrückt gilt für dieselbe Schar

$$\frac{dp}{dq} = o\,, \quad \text{also} \quad p = Const.\,.$$

Für die zweite Schar wird

$$\frac{\delta p}{\delta q} = \frac{1 + p^2}{p\,q}\,,$$

wofür mit getrennten Variabelen geschrieben werden kann

$$\frac{p\,\delta p}{1 + p^2} = \frac{\delta q}{q}\,.$$

Hieraus folgt durch Integration

$$l\,(1 + p^2) - l\,(q^2) = l\,const.$$

oder

$$\frac{1 + p^2}{q^2} = const.\,,$$

woraus leicht abzuleiten, dass für diese Schar auch $\frac{q}{\sqrt{1 + p^2 + q^2}}$ konstant sein muss. Auf die geometrische Bedeutung dieser Bemerkung soll hier nicht weiter eingegangen werden.

Die Flächen, bei welchen die Differentialgleichungen der Krümmungslinien von der angegebenen Beschaffenheit sind, sind enthalten in der partiellen Differentialgleichung zweiter Ordnung

$$r + s\left(-\frac{1 + p^2}{p\,q}\right) = o$$

oder

$$p\,q\,r - (1 + p^2)\,s = o\,.$$

Die linke Seite dieser Gleichung ist der letzte Koefficient in der allgemeinen Gleichung der Krümmungslinien.

Ist $X = \infty$, d. h. $\frac{dx}{dy} = o$, so ergiebt sich als Gleichung der Projectionen der einen Schar

$$x = Const. \text{ oder } q = Const.\,.$$

Für die zweite Schar gilt die Differentialgleichung

$$\frac{\delta p}{\delta q} = \frac{p\,q}{1 + q^2}\,.$$

Die Integration liefert die Gleichung

$$\frac{p^2}{1 + q^2} = const.$$

oder

$$\frac{p}{\sqrt{1+p^2+q^2}} = const. .$$

Man erkennt, dass man auf den vorher behandelten Fall zurückkommt, wenn man nur p und q, ferner x und y mit einander vertauscht.

Die partielle Differentialgleichung der hierher gehörenden Flächen ist

$$(1+q^2)s - p\,q\,t = o.$$

Der gleich Null gesetzte Ausdruck ist in diesem Falle der erste Koefficient der allgemeinen Gleichung der Krümmungskurven.

Hierbei sei bemerkt, dass die eben behandelten Flächen, bei denen also eine Schar von Krümmungslinien in Ebenen liegt, welche der yz-Ebene parallel sind, sich bekanntlich durch die Gleichungen ausdrücken lassen

$$x = u,$$

$$y = U \sin v + \int V \cos v\, dv,$$

$$z = U \cos v - \int V \sin v\, dv,$$

worin u und v Parameter von der Beschaffenheit bezeichnen, dass $u = Const.$ und $v = Const.$ die beiden Systeme von Krümmungslinien darstellen, und worin ferner U und V Funktionen von u resp. v allein bedeuten. Obige partielle Differentialgleichung wird in der That durch die den angegebenen Gleichungen entnommenen Werte für p, q, s, t befriedigt.

Drittens werde angenommen, dass die Summe der beiden Wurzeln der allgemeinen Gleichung der Krümmungslinien gleich Null werde. Nach unserer Bezeichnung ist alsdann

$$X - \frac{1+p^2+p\,q\,X}{(1+q^2)\,X+p\,q} = o.$$

Hieraus entwickelt man für X den Wert

$$X = \sqrt{\frac{1+p^2}{1+q^2}}.$$

Daher gilt für die eine Schar die Differentialgleichung

$$\frac{dp}{dq} = -\sqrt{\frac{1+p^2}{1+q^2}}$$

und, wie man sofort erkennt, für die zweite Schar

$$\frac{\delta p}{\delta q} = \sqrt{\frac{1+p^2}{1+q^2}}.$$

Setzt man die Gleichungen in die Form

$$\frac{dp}{\sqrt{1+p^2}} + \frac{dq}{\sqrt{1+q^2}} = o$$

und

$$\frac{\delta p}{\sqrt{1+p^2}} - \frac{\delta q}{\sqrt{1+q^2}} = o,$$

so erkennt man als die zugehörigen Integrale

$$(p+\sqrt{1+p^2})\,(q+\sqrt{1+q^2})=c_1$$

und

$$\frac{p+\sqrt{1+p^2}}{q+\sqrt{1+q^2}}=c_2\,.$$

Zu denselben Gleichungen gelangt L. Fuchs in seiner Diss. inaug. auf anderem Wege.

Die Differentialgleichung der Flächen, deren Krümmungslinien in der angegebenen Weise sich darstellen lassen, ist, wie auch aus der Annahme hervorgeht, dass die Summe der Wurzeln der Gleichung der Krümmungslinien gleich Null sein soll,

$$(1+q^2)\,r-(1+p^2)\,t=o\,.$$

Der die linke Seite dieser Gleichung ausmachende Ausdruck ist der zweite Koefficient in der allgemeinen Gleichung der Krümmungskurven.

Es sei erwähnt, dass letztere Differentialgleichung erfüllt wird für das Paraboloid $\frac{x\,y}{z}=c$, da die Differentialquotienten r und t gleich Null werden. Die Projectionen der Krümmungslinien letzterer Fläche auf die xy-Ebene werden also ausgedrückt durch die Gleichungen

$$(y+\sqrt{c^2+y^2})\,(x+\sqrt{c^2+x^2})=c_1\,,$$

$$\frac{y+\sqrt{c^2+y^2}}{x+\sqrt{c^2+x^2}}=c_2\,.$$

Es ist ersichtlich, dass man in derselben Weise fortfahren kann für die Grösse X Werte in p und q einzuführen, wofür wenigstens die Differentialgleichung der einen Schar der Krümmungslinien leicht integrierbar ist. Ob das Integral der Differentialgleichung der andern Schar leicht gefunden werden kann, geht dann oft aus der Differentialgleichung hervor, welche aus der obigen Einführung der Grössen u und v entsteht. Man erhält also eine beträchtliche Anzahl von Flächen, ausgedrückt durch partielle Differentialgleichungen zweiter Ordnung, für welche, wenn die Integration letzterer ausgeführt ist, die Krümmungslinien angegeben werden können.