Ueber die Componenten der Anziehung eines homogenen dreiaxigen Ellipsoids.

Die Gleichung eines homogenen dreiaxigen Ellipsoids, bezogen auf den Mittelpunkt desselben als Coordinaten-Anfang, sei

$$\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} + \frac{z^2}{c^2} = 1.$$

Von den ungleichen Halbaxen a, b, c sei a die kleinste; alsdann darf gesetzt werden

$$\frac{b^2 - a^2}{a^2} = \lambda^2 \quad \text{und} \quad \frac{c^2 - a^2}{a^2} = \lambda'^2.$$

Ferner seien α, β, γ die Coordinaten eines von dem Ellipsoid angezogenen äußeren Punktes mit der Masse M, f die anziehende Kraft in der Einheit der Entfernung, a' die Halbaxe der x eines durch den gegebenen Punkt gehenden, mit dem ursprünglichen homofocalen Ellipsoides. Denkt man sich dann den anziehenden Körper durch ähnliche Ellipsoide in eine Reihe unendlich dünner Schalen zerschnitten, bezeichnet die Halbaxen der x der innern Flächen von zwei beliebigen Schalen mit A und A' und setzt $\frac{A}{A'} = u$, so stellen sich die Componenten X, Y, Z der Anziehung unter der Form dar: *

$$X = -\frac{3\,M\,f\,\alpha}{a^3} \int_0^{\frac{a}{a'}} \frac{u^2\,du}{(1+\lambda^2 u^2)^{\frac{1}{2}}\,(1+\lambda'^2 u^2)^{\frac{1}{2}}},$$

$$Y = -\frac{3\,M\,f\,\beta}{a^3} \int_0^{\frac{a}{a'}} \frac{u^2\,du}{(1+\lambda^2 u^2)^{\frac{3}{2}}\,(1+\lambda'^2 u^2)^{\frac{1}{2}}},$$

$$Z = -\frac{3\,M\,f\,\gamma}{a^3} \int_0^{\frac{a}{a'}} \frac{u^2\,du}{(1+\lambda^2 u^2)^{\frac{1}{2}}\,(1+\lambda'^2 u^2)^{\frac{3}{2}}}.$$

Wir beschäftigen uns im Folgenden mit den in diesen Ausdrücken enthaltenen Integralen und werden zeigen, daß dieselben einiger nicht uninteressanter Umgestaltungen fähig sind.

* Duhamel, Handbuch der reinen Mechanik 146.

Aus der Zusammensetzung der Nenner der unter dem Integralzeichen vorhandenen Brüche erkennt man, daß man es mit elliptischen Integralen zu thun hat. Durch eine einfache Substitution wird es gelingen, alle drei Integrale in andere umzusetzen, welche leicht auf die Normalform reducirbar sind.

Man setze zu dem Ende zunächst in das in die X-Componente eingehende Integral

$$u = \frac{1}{\lambda'} \operatorname{tg} \varphi \,,$$

alsdann wird

$$du = \frac{1}{\lambda'} \frac{d\varphi}{\cos^2\varphi} \,.$$

Ferner geht $(1 + \lambda'^2 u^2)^{\frac{1}{2}}$ über in $(1 + \operatorname{tg}^2\varphi)^{\frac{1}{2}} = \frac{1}{\cos\varphi}$, und das betreffende Integral, dessen Grenzen vorläufig unbestimmt bleiben mögen, verwandelt sich hierdurch zunächst in folgendes:

$$\frac{1}{\lambda'^3} \int \frac{\operatorname{tg}^2\varphi \, \frac{d\varphi}{\cos^2\varphi}}{\frac{1}{\cos\varphi} \left(1 + \frac{\lambda^2}{\lambda'^2} \operatorname{tg}^2\varphi\right)^{\frac{1}{2}}} \,.$$

Lassen wir den vor das Integralzeichen tretenden constanten Factor $\frac{1}{\lambda'^3}$ unberücksichtigt, multipliciren im Zähler und Nenner mit $\cos^2\varphi$, so nimmt der Ausdruck unter dem Integralzeichen die Gestalt an

$$\frac{\operatorname{tg}^2\varphi \, d\varphi}{\left(\cos^2\varphi + \frac{\lambda^2}{\lambda'^2} \sin^2\varphi\right)^{\frac{1}{2}}} \,,$$

woraus sofort erhalten wird

$$\frac{\operatorname{tg}^2\varphi \, d\varphi}{\left(1 - (1 - \frac{\lambda^2}{\lambda'^2}) \sin^2\varphi\right)^{\frac{1}{2}}} \,.$$

Es wird sich um die Größe des Factors $(1 - \frac{\lambda^2}{\lambda'^2})$ handeln.

Oben war gesetzt $\lambda^2 = \frac{b^2 - a^2}{a^2}$ und $\lambda'^2 = \frac{c^2 - a^2}{a^2}$ und angenommen worden, daß c die kleinste der drei hierin vorkommenden Größen a, b und c sei. Man darf außerdem annehmen, daß von den Halbaxen b und c letztere die größere sei. Alsdann folgt aus der Zusammensetzung obiger Ausdrücke für λ^2 und λ'^2, daß $\lambda^2 < \lambda'^2$, d. h. $\frac{\lambda^2}{\lambda'^2}$ ein echter Bruch ist. Ferner ist $\frac{\lambda^2}{\lambda'^2}$ stets positiv, folglich auch der Factor $(1 - \frac{\lambda^2}{\lambda'^2})$ stets ein positiver echter Bruch. Daher ist es gestattet zu setzen

$$1 - \frac{\lambda^2}{\lambda'^2} = \varkappa^2 \,,$$

wobei $\varkappa^2 \gtrless {}^0_1$ ist.

Hiernach nimmt das Integral der X-Componente, unbestimmt genommen, die Gestalt an

$$\frac{1}{\lambda'^3} \int \frac{\operatorname{tg}^2\varphi \, d\varphi}{\sqrt{1 - \varkappa^2 \sin^2\varphi}} \,,$$

oder wenn man, wie gewöhnlich, $\sqrt{1 - \varkappa^2 \sin^2\varphi} = \Delta\varphi$ setzt,

$$\frac{1}{\lambda'^3}\int\frac{\mathrm{tg}^2\varphi\, d\varphi}{\Delta\varphi}.$$

Die Grenzen waren in dem ursprünglichen Integral $\frac{a}{a'}$ und o. Ist nun $u = \frac{a}{a'}$, so ist nach der Substitution $u = \frac{1}{\lambda'}\mathrm{tg}\,\varphi$

$$\varphi = \mathrm{arctg}\ (\lambda'\frac{a}{a'}),$$

und ist zweitens $u = 0$, so folgt auch $\varphi = 0$.

Es hängt die X-Componente demnach von dem Integral

$$\int_0^{\varphi}\frac{\mathrm{tg}^2\varphi\, d\varphi}{\Delta\varphi}$$

ab, worin die obere Grenze $\varphi = \mathrm{arctg}\ (\lambda'\frac{a}{a'})$ zu setzen ist.

Wendet man dieselbe Substitution $u = \frac{1}{\lambda'}\mathrm{tg}\varphi$ auf das für die Y-Componente gültige Integral

$$\int\frac{u^2 du}{(1+\lambda^2u^2)^{\frac{3}{2}}\ (1+\lambda'^2u^2)^{\frac{1}{2}}}$$

an, so erhält man

$$\frac{1}{\lambda'^3}\int\frac{\mathrm{tg}^2\varphi\ \frac{d\varphi}{\cos^2\varphi}}{(1+\frac{\lambda^2}{\lambda'^2}\mathrm{tg}^2\varphi)^{\frac{3}{2}}\ \frac{1}{\cos\varphi}}.$$

Multiplicirt man hierin Zähler und Nenner mit $\cos^3\varphi$, so geht der Ausdruck über in

$$\frac{1}{\lambda'^3}\int\frac{\mathrm{tg}^2\varphi\ \cos^2\varphi\ d\varphi}{(\cos^2\varphi+\frac{\lambda^2}{\lambda'^2}\sin^2\varphi)^{\frac{3}{2}}}.$$

Durch Einführung von sin statt cos erhält man hieraus weiter

$$\frac{1}{\lambda'^3}\int\frac{\sin^2\varphi\ d\varphi}{(1-[1-\frac{\lambda^2}{\lambda'^2}]\ \sin^2\varphi)^{\frac{3}{2}}}.$$

Setzt man wieder $1-\frac{\lambda^2}{\lambda'^2} = \varkappa^2$ und beachtet, daß die Grenzen, zwischen denen das Integral zu nehmen ist, dieselben sind, als für das Integral der X-Componente, so hat man, abgesehen von einem constanten Factor $-\frac{3\,M\,f\,\beta}{\alpha^2\lambda'^3}$, für die Y-Componente das Integral

$$\int_0^{\varphi}\frac{\sin^2\varphi\ d\varphi}{\Delta^3\varphi}.$$

In dem dritten Integral, der Z-Componente angehörig,

$$\int\frac{u^2\, du}{(1+\lambda^2u^2)^{\frac{1}{2}}\ (1+\lambda'^2u^2)^{\frac{3}{2}}}$$

wird für $u = \frac{1}{\lambda'}\ \mathrm{tg}\varphi$

$$(1+\lambda'^2u^2)^{\frac{3}{2}} = (1+\mathrm{tg}^2\varphi)^{\frac{3}{2}} = \frac{1}{\cos^3\varphi},$$

und man erhält

$$\frac{1}{\lambda'^3}\int\frac{\mathrm{tg}^2\varphi\ \frac{1}{\cos^2\varphi}\ d\varphi}{\frac{1}{\cos^3\varphi}\ (1+\frac{\lambda^2}{\lambda'^2}\ \mathrm{tg}^2\varphi)},$$

woraus durch Multiplication mit $\cos^4\varphi$ im Zähler und Nenner entsteht

$$\frac{1}{\lambda'^2}\int\frac{\operatorname{tg}^2\varphi\,\cos^2\varphi\,d\varphi}{\left(\cos^2\varphi+\frac{\lambda^2}{\lambda'^2}\sin^2\varphi\right)^{\frac{1}{2}}}$$

und hieraus

$$\frac{1}{\lambda'^3}\int\frac{\sin^2\varphi\,d\varphi}{\Delta\varphi}.$$

Die Grenzen des Integrals sind auch hier dieselben, wie bei den früheren.

Setzen wir $-\frac{3\,M\,f\,\alpha}{a^3\lambda'^3}=P$, $-\frac{3\,M\,f\,\beta}{a^3\lambda'^3}=Q$, $-\frac{3\,M\,f\,\gamma}{a^3\lambda'^3}=R$, so erscheinen die Componenten in folgender Form:

$$X=P\int_0^{\varphi}\frac{\operatorname{tg}^2\varphi\,d\varphi}{\Delta\varphi},$$

$$Y=Q\int_0^{\varphi}\frac{\sin^2\varphi\,d\varphi}{\Delta^3\varphi},$$

$$Z=R\int_0^{\varphi}\frac{\sin^2\varphi\,d\varphi}{\Delta\varphi},$$

worin überall die obere Grenze $\varphi=\operatorname{arctg}\left(\lambda'\frac{a}{a'}\right)$ zu nehmen ist.

Aehnliche Ausdrücke hätte man erhalten, wenn man überall die Substitution $u=-\frac{1}{\lambda}\cot\varphi$ gemacht hätte.

Es ist von Interesse, die erhaltenen Integrale auf die Normalform zu reduciren. Dies gelingt sogleich bei dem letzten Integrale, wenn man beachtet, daß

$$\sin^2\varphi=\frac{1-(1-\varkappa^2\sin^2\varphi)}{\varkappa^2}=\frac{1-\Delta^2\varphi}{\varkappa^2}$$

ist. Man erhält

$$\int_0^{\varphi}\frac{\sin^2\varphi\,d\varphi}{\Delta\varphi}=\int_0^{\varphi}\frac{1-\Delta^2\varphi}{\varkappa^2\Delta\varphi}\,d\varphi=\frac{1}{\varkappa^2}\left(\int_0^{\varphi}\frac{d\varphi}{\Delta\varphi}-\int_0^{\varphi}\Delta\varphi\,d\varphi\right)$$

oder nach der Legendre'schen Bezeichnung

$$\frac{1}{\varkappa^2}\left(F(\varphi)-E(\varphi)\right).$$

Das erste Integral $\int\frac{\operatorname{tg}^2\varphi\,d\varphi}{\Delta\varphi}$, vorläufig noch unbestimmt genommen, läßt sich schreiben $\int\frac{1-\cos^2\varphi}{\cos^2\varphi}\,\frac{d\varphi}{\Delta\varphi}$, wofür man setzen kann $\int\frac{d\varphi}{\cos^2\varphi\,\Delta\varphi}-\int\frac{d\varphi}{\Delta\varphi}$.
Ersteres dieser beiden Integrale verwandelt man durch folgende identische Gleichung

$$\operatorname{tg}\varphi\,\Delta\varphi=\int\frac{d\,(\operatorname{tg}\varphi\,\Delta\varphi)}{d\varphi}\,d\varphi=\int\left[\frac{-\varkappa^2\sin\varphi\,\cos\varphi\,\operatorname{tg}\varphi}{\Delta\varphi}+\frac{\Delta\varphi}{\cos^2\varphi}\right]d\varphi$$
$$=\int\frac{\Delta^2\varphi-\varkappa^2\sin^2\varphi\,\cos^2\varphi}{\Delta\varphi\,\cos^2\varphi}\,d\varphi.$$

Setzt man hierin für $\Delta^2\varphi$ seinen Werth $1-\varkappa^2\sin^2\varphi$ oder $1-\varkappa^2+\varkappa^2\cos^2\varphi$, so geht das Integral über in

$$\int\frac{1-\varkappa^2+\varkappa^2\cos^2\varphi\,(1-\sin^2\varphi)}{\Delta\varphi\,\cos^2\varphi}\,d\varphi.$$

Setzt man $1 - \varkappa^2 = \varkappa'^2$ (complementärer Modul), so ist das Integral gleich

$$\int \frac{\varkappa'^2 + \varkappa^2 \cos^4\varphi}{\varDelta\varphi \cos^2\varphi}\, d\varphi,$$

welches sich trennen läßt in die beiden

$$\varkappa'^2 \int \frac{d\varphi}{\cos^2\varphi\, \varDelta\varphi} + \varkappa^2 \int \frac{\cos^2\varphi\, d\varphi}{\varDelta\varphi}.$$

Sonach hat man die Reductionsformel

$$\int \frac{d\varphi}{\cos^2\varphi\, \varDelta\varphi} = \frac{\operatorname{tg}\varphi\, \varDelta\varphi}{\varkappa'^2} - \frac{\varkappa^2}{\varkappa'^2} \int \frac{\cos^2\varphi\, d\varphi}{\varDelta\varphi}. \text{ *)}$$

Setzt man dies oben ein, so ist

$$\int \frac{\operatorname{tg}^2\varphi\, d\varphi}{\varDelta\varphi} = \frac{\operatorname{tg}\varphi\, \varDelta\varphi}{\varkappa'^2} - \frac{\varkappa^2}{\varkappa'^2} \int \frac{\cos^2\varphi\, d\varphi}{\varDelta\varphi} - \int \frac{d\varphi}{\varDelta\varphi}.$$

Es ist aber

$$\int_0^\varphi \frac{\cos^2\varphi\, d\varphi}{\varDelta\varphi} = \int_0^\varphi \frac{d\varphi}{\varDelta\varphi} - \int_0^\varphi \frac{\sin^2\varphi\, d\varphi}{\varDelta\varphi} = F(\varphi) - \frac{1}{\varkappa^2} F(\varphi) + \frac{1}{\varkappa^2} E(\varphi)$$

$$= \frac{-\varkappa'^2 F(\varphi) + E(\varphi)}{\varkappa^2}.$$

Danach wird unser Integral

$$\int_0^\varphi \frac{\operatorname{tg}^2\varphi\, d\varphi}{\varDelta\varphi} = \frac{\operatorname{tg}\varphi\, \varDelta\varphi}{\varkappa'^2} - \frac{\varkappa^2}{\varkappa'^2} \cdot \frac{-\varkappa'^2 F(\varphi) + E(\varphi)}{\varkappa^2} - F(\varphi)$$

$$= \frac{1}{\varkappa'^2} \operatorname{tg}\varphi\, \varDelta\varphi + F(\varphi) - \frac{1}{\varkappa'^2} E(\varphi) - F(\varphi)$$

$$= \frac{1}{\varkappa'^2} \operatorname{tg}\varphi\, \varDelta\varphi - \frac{1}{\varkappa'^2} E(\varphi)$$

Um drittens das Integral der Y-Componente $\int_0^\varphi \frac{\sin^2\varphi\, d\varphi}{\varDelta^3\varphi}$ auf die Normalform zu bringen bemerke man wieder, daß $\sin^2\varphi = \frac{1 - \varDelta^2\varphi}{\varkappa^2}$ ist, daher

$$\int \frac{\sin^2\varphi\, d\varphi}{\varDelta^3\varphi} = \frac{1}{\varkappa^2} \int \frac{1 - \varDelta^2\varphi}{\varDelta^3\varphi}\, d\varphi = \frac{1}{\varkappa^2} \int \frac{d\varphi}{\varDelta^3\varphi} - \frac{1}{\varkappa^2} \int \frac{d\varphi}{\varDelta\varphi}.$$

Das erstere der beiden letzten Integrale wird reducirt nach der Formel, die man erhält aus der identischen Gleichung

$$\frac{\sin\varphi\, \cos\varphi}{\varDelta\varphi} = \int \frac{d\,(\sin\varphi\, \cos\varphi)}{\varDelta\varphi}\, d\varphi. \qquad \text{(cf. Durège § 17.)}$$

Hieraus folgt

$$\frac{\sin\varphi\, \cos\varphi}{\varDelta\varphi} = \int \frac{\varDelta^2\varphi\, (\cos^2\varphi - \sin^2\varphi) + \varkappa^2 \sin^2\varphi \cos^2\varphi}{\varDelta^3\varphi}\, d\varphi.$$

Führt man allenthalben cos statt sin ein, so reducirt sich der Zähler auf

$$1 - 2\sin^2\varphi + \varkappa^2 \sin^4\varphi,$$

---

*) cf. Durège, elliptische Funktionen §. 17, 2.

wofür man schreiben kann

$$\frac{1}{\varkappa^2} - 2\sin^2\varphi + \varkappa^2\sin^4\varphi - \frac{1-\varkappa^2}{\varkappa^2}$$

$$= \frac{1}{\varkappa^2}(1 - \varkappa^2\sin^2\varphi)^2 - \frac{\varkappa'^2}{\varkappa^2}.$$

Daher

$$\frac{\sin\varphi\ \cos\varphi}{\Delta\varphi} = \int\left(\frac{1}{\varkappa^2}\Delta^4\varphi - \frac{\varkappa'^2}{\varkappa^2}\right)\frac{d\varphi}{\Delta^3\varphi}$$

$$= \frac{1}{\varkappa^2}\int\Delta\varphi\ d\varphi - \frac{\varkappa'^2}{\varkappa^2}\int\frac{d\varphi}{\Delta^3\varphi},$$

woraus folgt

$$\int\frac{d\varphi}{\Delta^3\varphi} = -\frac{\varkappa^2}{\varkappa'^2}\,\frac{\sin\varphi\ \cos\varphi}{\Delta\varphi} + \frac{1}{\varkappa'^2}\int\Delta\varphi\ d\varphi.$$

Hiernach wird

$$\int_0^\varphi\frac{\sin^2\varphi\ d\varphi}{\Delta^3\varphi} = -\frac{1}{\varkappa'^2}\,\frac{\sin\varphi\ \cos\varphi}{\Delta\varphi} + \frac{1}{\varkappa^2\varkappa'^2}\,E(\varphi) - \frac{1}{\varkappa^2}\,F(\varphi).$$

Die letzte Formel wird auch erhalten, wenn man $\int\frac{\mathrm{tg}^2\varphi\ d\varphi}{\Delta\varphi}$ partiell integrirt. Es ist nämlich

$$\int\frac{\mathrm{tg}^2\varphi\ d\varphi}{\Delta\varphi} = \int\frac{\sin^2\varphi}{\cos^2\varphi}\cdot\frac{d\varphi}{\Delta\varphi} = \frac{\sin^2\varphi}{\Delta\varphi}\int\frac{d\varphi}{\cos^2\varphi} - \int\mathrm{tg}\varphi\ d\left(\frac{\sin^2\varphi}{\Delta\varphi}\right)\ d\varphi.$$

$$= \frac{\sin^2\varphi\ \mathrm{tg}\varphi}{\Delta\varphi} - \int\mathrm{tg}\varphi\ \frac{2\sin\varphi\ \cos\varphi\ \Delta^2\varphi + \varkappa^2\sin^3\varphi\ \cos\varphi}{\Delta^3\varphi}\ d\varphi$$

$$= \frac{\sin^2\varphi\ \mathrm{tg}\varphi}{\Delta\varphi} - \int\sin^2\varphi\ \frac{2(1-\varkappa^2\sin^2\varphi) + \varkappa^2\sin^2\varphi}{\Delta^3\varphi}\ d\varphi$$

$$= \frac{\sin^2\varphi\ \mathrm{tg}\varphi}{\Delta\varphi} - \int\sin^2\varphi\ \frac{1 + (1-\varkappa^2\sin^2\varphi)}{\Delta^3\varphi}\ d\varphi$$

$$= \frac{\sin^2\varphi\ \mathrm{tg}\varphi}{\Delta\varphi} - \int\frac{\sin^2\varphi}{\Delta^3\varphi}\ d\varphi - \int\frac{\sin^2\varphi}{\Delta\varphi}\ d\varphi.$$

Hieraus folgt

$$\int\frac{\sin^2\varphi}{\Delta^3\varphi}\ d\varphi = \frac{\sin^2\varphi\ \mathrm{tg}\varphi}{\Delta\varphi} - \int\frac{\sin^2\varphi}{\Delta\varphi}\ d\varphi - \int\frac{\mathrm{tg}^2\varphi\ d\varphi}{\Delta\varphi}.$$

Nun ist das erste Integral rechts das Integral der Z-Componente, das zweite das der X-Componente; beide sind oben bereits auf die Normalform gebracht. Setzt man die ihnen für die Grenzen o und φ zukommenden Werthe $\frac{1}{\varkappa^2}F(\varphi) - \frac{1}{\varkappa^2}E(\varphi)$ resp. $\frac{1}{\varkappa'^2}\mathrm{tg}\varphi\ \Delta\varphi - \frac{1}{\varkappa'^2}E(\varphi)$ ein, so wird

$$\int_0^\varphi\frac{\sin^2\varphi\ d\varphi}{\Delta^3\varphi} = \frac{\sin^2\varphi\ \mathrm{tg}\varphi}{\Delta\varphi} - \frac{1}{\varkappa'^2}\,\mathrm{tg}\varphi\,\frac{\Delta^2\varphi}{\Delta\varphi} - \frac{1}{\varkappa^2}\,F(\varphi) + \left(\frac{1}{\varkappa^2} + \frac{1}{\varkappa'^2}\right)E(\varphi)$$

$$= \frac{\mathrm{tg}\varphi}{\Delta\varphi}\left(\sin^2\varphi - \frac{1}{\varkappa'^2} + \frac{\varkappa^2}{\varkappa'^2}\sin^2\varphi\right) - \frac{1}{\varkappa^2}\,F(\varphi) + \frac{1}{\varkappa^2\varkappa'^2}\,E(\varphi).$$

In der Klammer wird $\sin^2\varphi + \frac{\varkappa^2}{\varkappa'^2}\sin^2\varphi = \frac{1}{\varkappa'^2}\sin^2\varphi$, daher reducirt sich die ganze eingeschlossene Größe auf

$$-\frac{1}{\varkappa'^2}(1-\sin^2\varphi) = -\frac{1}{\varkappa'^2}\cos^2\varphi,$$

und man erhält genau den vorhin entwickelten Ausdruck

$$\frac{1}{\varkappa'^2}\,\frac{\sin\varphi\,\cos\varphi}{\varDelta\varphi} + \frac{1}{\varkappa^2\varkappa'^2}\,E(\varphi) - \frac{1}{\varkappa^2}\,F(\varphi).$$

Wir gehen dazu über, die für unsere Integrale erhaltenen Werthe in Jacobi'schen Functionen auszudrücken und folgen dabei der Methode, welche wir bei „Schellbach, Lehre von den elliptischen Integralen und den Thetafunctionen" finden.

Wir benutzen die Bezeichnung (Schellbach §. 23.):

$$fx = \frac{\Theta_1 x}{\Theta x},$$

$$gx = \frac{\Theta_2 x}{\Theta x},$$

$$hx = \frac{\Theta_3 x}{\Theta x},$$

worin die Θ die bekannten Jacobi'schen Functionen bedeuten sollen.

Zwischen den Functionen f, g, h existirt nun (Sch. §. 34.) die Relation

$$\frac{ho^2}{go^2}\,hx^2 + \frac{gx^2}{go^2} = 1,$$

daher man setzen darf

$$1)\quad \frac{ho}{go}\,fx = \sin\varphi$$

$$2)\quad \frac{gx}{go} = \cos\varphi.$$

Da

$$ho^2 - hx^2 = go^2\,fx^2 \text{ (Sch. §. 26, 4.)},$$

folgt

$$\frac{hx}{ho} = \sqrt{1-\left(\frac{go}{ho}\right)^4\sin^2\varphi}.$$

Setzt man $\left(\frac{go}{ho}\right)^4 = \varkappa^2$, was erlaubt ist, da $ho^4 - go^4 = 1$ d. h. $\frac{go^4}{ho^4} < 1$ ist, so ist

$$3)\quad \frac{hx}{ho} = \varDelta\varphi.$$

Durch Differentiation von 1) leitet man ab

$$x\,\Theta_3 0^2 = \int_0^\varphi \frac{d\varphi}{\varDelta\varphi}.$$

Die hierin vorkommende Größe x ist aus den unter 1, 2, 3 verzeichneten Bedingungen mit Hülfe der obigen Annahme

$$\sqrt{\varkappa} = \frac{go}{ho} = \frac{\Theta_2 0}{\Theta_3 0} = \frac{2q^{\frac{1}{4}} + 2q^{\frac{9}{4}} + 2q^{\frac{25}{4}} + \ldots}{1 + 2q + 2q^4 + \ldots}$$

bestimmbar und daher

$$\text{I.}\quad F(\varphi) = x\Theta_3 0^2$$

zu berechnen.

Unter Zugrundelegung derselben Bedingungen 1, 2, 3 leitet man für das elliptische Integral zweiter Gattung die Formel ab (Sch. §. 113, 4.)

$$\text{II.}\quad E(\varphi) = \frac{l'\Theta x - x\, l''\Theta_2 o}{\Theta_3 o^2},$$

worin l' und l'' den ersten resp. zweiten Differentialquotienten des natürlichen Logarithmus bedeutet.

Das Integral der X-Componente war nun gleich $-\frac{1}{\varkappa'^2}(\operatorname{tg}\varphi\ \Delta\varphi - E(\varphi))$. Aus 1) und 2) folgt

$$\operatorname{tg}\varphi = \frac{ho\ fx}{gx},$$

daher erhält obiger Ausdruck, wenn man 3) und II. berücksichtigt, die Form

$$\frac{1}{\varkappa'^2}\left(\frac{fx\ hx}{gx} - \frac{l'\Theta x - x\, l''\Theta_2 o}{\Theta_3 o^2}\right).$$

Nun ist (Sch. §. 78.)

$$\frac{fx\ hx}{gx} = -\frac{l'gx}{\Theta_3 o^2} = -\frac{l'\Theta_2 x - l'\Theta x}{\Theta_3 o^2}$$

daher hat man weiter

$$\frac{1}{\varkappa'^2}\ \frac{l'\Theta x - l'\Theta_2 x - l'\Theta x + x\, l''\Theta_2 o}{\Theta_3 o^2}$$

$$= \frac{1}{\varkappa'^2\,\Theta_3 o^2}(x\, l''\Theta_2 o - l'\Theta x),$$

oder, da

$$\varkappa'^2 = \frac{1}{ho^4} = \left(\frac{\Theta o}{\Theta_3 o}\right)^4$$

ist,

$$= \frac{\Theta_3 o^2}{\Theta o^4}(x\, l''\Theta_2 o - l'\Theta x). \qquad (\alpha)$$

Das Integral der Y-Componente war

$$= -\frac{1}{\varkappa'^2}\,\frac{\sin\varphi\ \cos\varphi}{\Delta\varphi} + \frac{1}{\varkappa^2\varkappa'^2}E(\varphi) - \frac{1}{\varkappa^2}F(\varphi).$$

Dieser Ausdruck kann geschrieben werden

$$\frac{1}{\varkappa^2\varkappa'^2}\left(-\varkappa^2\frac{\sin\varphi\ \cos\varphi}{\Delta\varphi} + E(\varphi) - \varkappa'^2 F(\varphi)\right)$$

$$= \frac{1}{\varkappa^2\varkappa'^2}\left(-\left(\frac{go}{ho}\right)^2\frac{fx\ gx}{hx} + \frac{l'\Theta x - x\, l''\Theta_2 o}{\Theta_3 o^2} - \frac{1}{ho^4}\,x\,\Theta_3 o^2\right).$$

Nun ist

$$\frac{fx\ gx}{hx} = -\frac{l'hx}{\Theta_3 o^2} = -\frac{l'\Theta_3 x - l'\Theta x}{\Theta_3 o^2},$$

folglich hat man

$$\frac{1}{\varkappa^2\varkappa'^2}\left(\left(\frac{go}{ho}\right)^2\frac{l'\Theta_3 x - l'\Theta x}{\Theta_3 o^2} + \frac{l'\Theta x - x\, l''\Theta_2 o}{\Theta_3 o^2} - \frac{\Theta o^4}{\Theta_3 o^4}\,x\,\Theta_3 o^2\right).$$

Hebt man im Nenner $\Theta_3 o^2$ heraus und beachtet, daß $\left(\frac{go}{ho}\right)^2 = \varkappa$ und

$$\Theta o^4 = l''\Theta_3 o - l''\Theta_2 o \qquad \text{(Sch. §. 77, 13.)}$$

ist, so erhält man

$$\frac{1}{\varkappa^2 \varkappa'^2\ \Theta_3 0^2}\Big(\varkappa\, (l'\Theta_3 x - l'\Theta x) + l'\Theta x - x\, l''\Theta_2 0 - x\, l''\Theta_3 0 + x\, l''\Theta_2 0\Big)$$
$$= \frac{1}{\varkappa'\varkappa'^2\ \Theta_3 0^2}\Big(\varkappa\, (l'\Theta_3 x - l'\Theta x) + l'\Theta x - x\, l''\Theta_3 0 \Big).$$

Endlich verwandelt sich das Integral für die Z-Componente, für welches der Ausdruck entwickelt war

$$\frac{1}{\varkappa^2}\Big(F(\varphi) - E(\varphi)\Big),$$

in folgenden

$$\frac{1}{\varkappa^2}\Big(x\ \Theta_3 0^2 - \frac{l'\Theta x - x\, l''\Theta_2 0}{\Theta_3 0^2}\Big)$$
$$= \frac{1}{\varkappa^2}\,\frac{x\ (\Theta_3 0^4 + l''\Theta_2 0) - l'\Theta x}{\Theta_3 0^2}.$$

Nun ist

$$\Theta_3 0^4 = -\ l''go = l''\Theta 0 - l''\Theta_2 0,\ (\text{Sch. § 77, 11.}),$$

daher erhält man

$$\frac{1}{\varkappa^2}\,\frac{x\ l''\Theta 0 - l'\Theta x}{\Theta_3 0^2}.$$

Da ferner

$$\varkappa^2 = \left(\frac{go}{ho}\right)^4 = \left(\frac{\Theta_2 0}{\Theta_3 0}\right)^4$$

ist, so hat man schließlich

$$\frac{\Theta_3 0^2}{\Theta_2 0^4}\,(x\ l''\Theta 0 - l'\Theta x),$$

eine Form, welche aus dem Ausdruck (α) $\frac{\Theta_3 0^2}{\Theta 0^4}$ $(x\ l''\Theta_2 0 - l'\Theta x)$ durch Vertauschung von $\Theta 0$ und $\Theta_2 0$ erhalten wird.