In der elementaren Planimetrie versteht man unter der Vervielfältigung einer gegebenen Figur die Herstellung einer anderen, deren Flächeninhalt ein Vielfaches des Flächeninhaltes der gegebenen Figur ist; für gewöhnlich wird noch gefordert, daß die zu zeichnende Figur von derselben Art sei wie die gegebene. Soll man z. B. ein gleichschenklig-rechtwinkliges Dreieck verdoppeln, so kann man es um eine seiner Katheten umklappen; die Summe des neu erhaltenen Dreiecks und des ursprünglichen ist das gesuchte. Klappt man das Dreieck, welches nunmehr aus zwei gleichschenklig-rechtwinkligen Dreiecken besteht, um eine seiner Katheten um, so erhält man dadurch ein gleichschenklig-rechtwinkliges Dreieck, welches aus 4 kongruenten Teildreiecken zusammengesetzt ist; dieses Umklappen kann man beliebig oft fortsetzen, stets ist die Anzahl der in dem gezeichneten Dreiecke enthaltenen Teildreiecke eine Potenz von 2. Umgekehrt kann man auch jedes vorgelegte gleichschenklig-rechtwinklige Dreieck durch wiederholte Konstruktion der Symmetrieachsen in 2^n kongruente Teildreiecke zerlegen, wobei die Zahl n eines unbegrenzten Wachstums fähig ist. — Es braucht nicht hervorgehoben zu werden, daß man Rechtecke, insbesondere Quadrate, gleichseitige Dreiecke und halbe gleichseitige Dreiecke in ähnlicher Weise vervielfältigen bezw. teilen kann.

Während bei dem angeführten Beispiel und überhaupt bei dem Umklappen eines jeden von geradlinigen Strecken begrenzten ebenen Dreiecks je zwei Nachbardreiecke, welche eine Seite gemeinsam haben und in den Winkeln übereinstimmen, symmetrisch, also auch flächeninhaltsgleich sind, findet dies nicht mehr statt, sobald man als Begrenzungslinien der ebenen Dreiecke statt der geradlinigen Strecken Kreisbogen wählt, denn zwei Kreisbogendreiecke, welche in einer Seite und den

Winkeln übereinstimmen, sind im allgemeinen nicht kongruent, symmetrisch (im engeren Sinne) oder auch nur flächeninhaltsgleich, so daß von einer Vervielfältigung des Flächeninhaltes in dem oben beschriebenen Sinne nicht mehr die Rede sein kann. Man kann von einer Vervielfältigung der Kreisbogendreiecke nur dann sprechen, wenn alle Kreisbogendreiecke in der unten (S. 7 f.) erklärten Weise zueinander symmetrisch sind; solche Kreisbogendreiecke lassen sich zusammenhängend und in den kleinsten Teilen ähnlich so auf eine Fläche konstanten Krümmungsmaßes abbilden, daß den Seiten der Dreiecke geodätische Linien der Fläche entsprechen; diese Abbildung bewirkt, daß zwei Kreisbogendreiecken, welche eine Seite gemeinsam haben und in den Winkeln übereinstimmen, zwei kongruente bezw. symmetrische, jedenfalls flächeninhaltsgleiche geodätische Dreiecke der Fläche konstanten Krümmungsmaßes entsprechen. Das Krümmungsmaß der Fläche ist positiv oder negativ zu wählen, je nachdem die Summe der drei Winkel der Kreisbogendreiecke größer oder kleiner als 180^0 ist.

Die vorliegende Arbeit, zu welcher der Verfasser durch die Beteiligung an den von Herrn Schwarz veranstalteten mathematischen Kolloquien angeregt wurde, beschäftigt sich mit dem sogenannten pseudosphärischen Fall, d. h. mit Kreisbogendreiecken, deren Winkelsumme kleiner als 180^0 ist. Es wird die Frage beantwortet, in welchem Falle durch Vervielfältigung eines Kreisbogendreieckes ein neues Kreisbogendreieck entstehen kann, welches eine möglichst große Anzahl isothermisch äquivalenter Kreisbogendreiecke enthält.[1])

---

1) Herr Karstens in Petersburg will, wie er dem Verfasser brieflich mitteilte, demnächst eine Untersuchung veröffentlichen über die folgende allgemeinere Aufgabe: Es sollen, wenn l, m, n irgend welche der Ungleichheitsbedingung $\frac{1}{l}+\frac{1}{m}+\frac{1}{n}<1$ genügende positive ganze Zahlen sind, alle Kreisbogendreiecke ermittelt werden, die durch eine Anzahl von Kreisbogen in Dreiecke mit den Winkeln $\frac{\pi}{l}, \frac{\pi}{m}, \frac{\pi}{n}$ derart zerlegt werden können, daß von letzteren je zwei, die eine Seite gemein haben, in Bezug auf diese symmetrisch sind. Das Ergebnis der Arbeit des Herrn Karstens ist folgendes: Es gibt solche Dreiecke, wenn

Am Schlusse der Arbeit wird durch ein Beispiel, dessen Kenntnis der Verfasser Herrn Schwarz verdankt, dargetan, daß einem von Herrn Forsyth veröffentlichten Satze, zu welchem die vorliegenden Untersuchungen in gewisser Beziehung stehen, allgemeine Gültigkeit nicht zukommt.

Das Symmetriegesetz.

Der Begriff der „Symmetrie in Bezug auf eine Kreislinie" ist von Herrn Schwarz[1]) in folgender Weise in die Wissenschaft eingeführt worden.

Es gibt unendlich viele Funktionen, welche die Eigenschaft haben, zwei ebene, durch ein angemessen begrenztes Stück einer analytischen Linie getrennte Gebiete Z_1 und Z_2 auf zwei andere, durch eine geradlinige Strecke getrennte Teile T_1 und T_2 einer zweiten Ebene zusammenhängend und in den kleinsten Teilen ähnlich abzubilden. Werden insbesondere die in Bezug auf die Trennungsgerade von T_1 und T_2 symmetrisch gelegenen Punkte einander zugeordnet, so ist das aus dieser Zuordnung sich ergebende punktweise Entsprechen der Gebiete Z_1 und Z_2 allein von der Natur der

---

$l \leqq m \leqq n$ angenommen wird, nur im Falle $l = 2$, und zwar gehören zu ihnen, wenn (λ, μ, ν) ein Dreieck mit den Winkeln $\lambda\pi$, $\mu\pi$, $\nu\pi$ bedeutet, allgemein die Dreiecke: $\left(\frac{1}{m}, \frac{1}{m}, \frac{2}{n}\right)$, $\left(\frac{1}{n}, \frac{1}{n}, \frac{2}{m}\right)$, ferner für $m = 4$ das Dreieck: $\left(\frac{1}{n}, \frac{1}{n}, \frac{2}{n}\right)$, für $m = 3$: $\left(\frac{1}{2}, \frac{1}{n}, \frac{2}{n}\right)$, $\left(\frac{1}{3}, \frac{1}{n}, \frac{3}{n}\right)$, $\left(\frac{1}{n}, \frac{1}{n}, \frac{4}{n}\right)$, $\left(\frac{2}{n}, \frac{2}{n}, \frac{2}{n}\right)$, endlich speziell für $m = 3$, $n = 8$ das Dreieck: $\left(\frac{1}{8}, \frac{1}{8}, \frac{2}{8}\right)$, für $m = 3$, $n = 7$ die Dreiecke: $\left(\frac{1}{3}, \frac{1}{7}, \frac{2}{7}\right)$, $\left(\frac{1}{7}, \frac{1}{7}, \frac{1}{7}\right)$.

1) H. A. Schwarz, Über die Integration der partiellen Differentialgleichung $\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} = 0$ unter vorgeschriebenen Grenz- und Unstetigkeitsbedingungen. Ber. d. Kgl. Ak. d. Wiss. Berlin, 1870, S. 767—795. Gesammelte Abhandlungen, Berlin 1890. Bd. II, S. 144—171, besonders S. 151; außerdem: Über diejenigen Fälle, in welchen die Gaußische hypergeometrische Reihe eine algebraische Funktion ihres vierten Elementes darstellt. Crelles Journal, Bd. 75, S. 292—335. Gesammelte Abhandlungen, Bd. II, S. 211—259, besonders S. 238.

analytischen Linie, nicht aber von der die Abbildung vermittelnden Funktion abhängig.

Die Annahme, daß die analytische Linie ein Kreisbogen sei, liefert den besonderen Fall der Möbiusschen Kreisverwandtschaft.

Da es möglich ist, jedes von Kreisbogen begrenzte ebene Dreieck S zusammenhängend und in den kleinsten Teilen ähnlich auf eine durch eine Gerade — die Achse des Reellen — begrenzte Halbebene E dergestalt abzubilden, daß den Seiten des Kreisbogendreiecks beziehlich die Strecken $-\infty \cdots\cdots 0$, $0 \cdots\cdots 1$, $1 \cdots\cdots +\infty$ entsprechen, und da ferner diese Abbildung über jede der drei genannten Strecken analytisch fortgesetzt werden kann, so entsprechen der zweiten Halbebene E' drei für die Abbildung äquivalente Kreisbogendreiecke S', von denen jedes mit S eine Seite gemeinsam hat. Setzt man nun fest, daß je zwei in Bezug auf die Achse des Reellen symmetrisch gelegene Punkte der Halbebenen E und E' einander zugeordnet sein sollen, so sind die entsprechenden Punkte der Kreisbogendreiecke S und S' im Möbiusschen Sinne kreisverwandt[1]), und jedes der drei bei der analytischen Fortsetzung der konformen Abbildung erhaltenen, der Halbebene E' entsprechenden Kreisbogendreiecke S' kann eine „symmetrische Wiederholung" des Kreisbogendreiecks S genannt werden.

Allgemein kann man unter der symmetrischen Wiederholung einer Figur in Bezug auf eine Kreislinie diejenige Figur verstehen, welche aus der ursprünglichen vermöge der Transformation durch reziproke Radien hervorgeht, wofern der Mittelpunkt jener Kreislinie zum Transformationsmittelpunkt und das Quadrat des Kreishalbmessers zur Transformationspotenz gewählt wird.

Für die vorliegende Untersuchung kommt besonders in

1) Die Möbiussche Kreisverwandtschaft ist identisch mit der Transformation durch reziproke Radien. Im vorliegenden Falle ist der Kreis, welchem die den Dreiecken S und S' gemeinsame Seite angehört, die Direktrix dieser Verwandtschaft.

Betracht, daß zwei Kreisbogendreiecke, welche eine Seite gemeinsam haben und in Bezug auf diese zueinander symmetrisch sind, gleiche Winkel besitzen.

Die konforme Abbildung der Kreisbogendreiecke.

Wie Beltrami gezeigt hat[1]), kann man die Flächen konstanten Krümmungsmaßes zusammenhängend und in den kleinsten Teilen ähnlich auf eine reelle Ebene dergestalt abbilden, daß den geodätischen Linien der Fläche Kreisbogen der Ebene entsprechen[2]). Umgekehrt kann man auch ein ebenes Kreisbogendreieck auf ein von geodätischen Linien begrenztes Dreieck einer Fläche konstanten Krümmungsmaßes abbilden, so daß die Winkelgrößen ungeändert bleiben. Bildet man also zwei in dem angegebenen Sinne zueinander symmetrische Kreisbogendreiecke, die eine Seite gemeinsam haben, in der von Beltrami beschriebenen Weise auf eine Fläche konstanten Krümmungsmaßes ab, so erhält man als Bilder zwei geodätische Dreiecke, welche in einer Seite und den Winkeln übereinstimmen. Da aber auf den Flächen konstanten Krümmungsmaßes Sätze über Kongruenz und Flächengleichheit gelten, welche den entsprechenden planimetrischen Sätzen völlig analog sind, so sind jene beiden Bilddreiecke flächeninhaltsgleich.

Wenn in der Ebene durch fortgesetzte symmetrische Wiederholung eines Kreisbogendreiecks ABC ein neues Kreisbogendreieck $A_1 B_1 C_1$ entsteht, so ist dieses aus einer Anzahl von Teildreiecken zusammengesetzt, von denen je zwei einander benachbarte Dreiecke eine Seite gemeinsam haben und in Bezug

---

1) Beltrami, Saggio di interpretazione della Geometria non-euclidea. Battagl. Giorn. t. VI. pag. 284—312. (Übersetzt in Annales de l'École normale, t. VI. pag. 251—288.)

Man sehe ferner: F. Busse, Über eine spezielle konforme Abbildung der Flächen konstanten Krümmungsmaßes auf die Ebene mit einem Anhange, enthaltend die Literatur über die Flächen konstanten Krümmungsmaßes. Berlin (Göttingen) 1896.

2) Vgl. hierzu des Verfassers frühere Arbeit: Über die geodätischen Linien und Dreiecke auf den Flächen konstanten Krümmungsmaßes und ihre Beziehungen zur sogenannten Nicht-Euklidischen Geometrie. Progr. Charlottenburg, 1902.

auf diese zueinander symmetrisch sind. Bildet man das so erhaltene Dreieck $A_1 B_1 C_1$ in der vorher erwähnten Weise konform auf eine Fläche konstanten Krümmungsmaßes ab, so muß auch das dem Kreisbogendreieck $A_1 B_1 C_1$ entsprechende geodätische Dreieck aus isothermisch äquivalenten Teildreiecken bestehen, von denen je zwei benachbarte in einer Seite und den Winkeln übereinstimmen. Die geodätischen Teildreiecke sind aber nach dem soeben Gesagten untereinander flächeninhaltsgleich, so daß man die Anzahl der in dem ebenen Kreisbogendreieck enthaltenen Teildreiecke erhält, wenn man den Flächeninhalt des dem Dreieck $A_1 B_1 C_1$ entsprechenden geodätischen Dreiecks durch den Flächeninhalt eines seiner Teildreiecke dividiert.

Wie schon bemerkt, sollen hier nur Kreisbogendreiecke betrachtet werden, bei denen die Summe der zu den Winkeln gehörigen Bogenzahlen kleiner als π ist. Derartige Kreisbogendreiecke bildet man auf eine Fläche konstanten negativen Krümmungsmaßes, etwa die Pseudosphäre, ab. Die Maßzahl $\triangle$ des Flächeninhaltes eines von geodätischen Linien begrenzten pseudosphärischen Dreiecks, dessen Winkel die Bogenzahlen α, β, γ besitzen, wird gegeben durch die Gaußische Gleichung:

$$\triangle = k^2 (\pi - \alpha - \beta - \gamma)\,^{1)},$$

in welcher k^2 den negativ genommenen reziproken Wert des Krümmungsmaßes der Fläche bedeutet; der Inhalt der Klammer ist der „pseudosphärische Defekt" des Dreiecks.

Geht also aus einem Kreisbogendreieck mit den Winkeln α, β, γ durch Vervielfältigung nach dem Symmetriegesetze ein anderes Dreieck mit den Winkeln α_1, β_1, γ_1 hervor, so ist die Anzahl der in dem letzteren enthaltenen, isothermisch äquivalenten Teildreiecke gleich dem Quotienten der pseudosphärischen Defekte:

$$\frac{\pi - (\alpha_1 + \beta_1 + \gamma_1)}{\pi - (\alpha + \beta + \gamma)}.$$

Die Untersuchung dieses Quotienten wird zur Lösung der auf S. 6 genannten Aufgabe führen.

---

1) C. F. Gauß, Disquisitiones generales circa superficies curvas, 1827, art. 20. Werke Bd. IV (Göttingen 1873), S. 217 ff.

Die symmetrische Wiederholung pseudosphärischer Kreisbogendreiecke.

Die von Herrn Schwarz untersuchte Funktion $s(\lambda, \mu, \nu, x)$, welche die Eigenschaft hat, ein Kreisbogendreieck mit den Winkeln $\lambda\pi$, $\mu\pi$, $\nu\pi$ auf eine Halbebene der Variablen x derart konform abzubilden, daß den Ecken des Dreiecks die Werte $x = 0$, ∞, 1 entsprechen, ist im allgemeinen transcendent, in einigen Fällen algebraisch. Es kann der Fall eintreten, daß, während die Größe s eine unendlich vieldeutige, also transcendente Funktion von x ist, diese letztere Größe eine eindeutige Funktion der Größe s ist. Ein Beispiel hierfür hat Herr Schwarz in der citierten Abhandlung über die hypergeometrische Reihe angeführt. Man kann allgemein die Frage stellen, wann die erwähnte Umkehrungsfunktion endlich-vieldeutig ist.

Die folgende Untersuchung hat zur Voraussetzung, daß die Größe x eine endlich-vieldeutige Funktion der Größe $s = s(\lambda_1, \mu_1, \nu_1, x)$ ist. Die Zahlen λ_1, μ_1, ν_1 müssen hierbei rationale Zahlen sein. Gelegentlich eines Vortrages in den von ihm veranstalteten Kolloquien hat Herr Schwarz den Satz mitgeteilt, daß das Kreisbogendreieck, dessen Winkel den Bogenzahlen $\lambda_1\pi$, $\mu_1\pi$, $\nu_1\pi$ entsprechen, unter der angegebenen Voraussetzung die Eigenschaft haben müsse, durch eine endliche Anzahl von Kreisbogen in eine gewisse Zahl von isothermisch äquivalenten, einfacheren Kreisbogendreiecken zerlegt werden zu können, in der Art, daß, falls die Bogenzahlen der diesen isothermisch äquivalenten Dreiecken gemeinsamen Winkel mit $\lambda\pi$, $\mu\pi$, $\nu\pi$ bezeichnet werden, die reziproken Werte von λ, μ, ν ganze Zahlen sind.

Wenn aus einem solchen Kreisbogendreiecke S mit den Winkeln $\lambda\pi$, $\mu\pi$, $\nu\pi$ durch Vervielfältigung nach dem Symmetriegesetze ein größeres Kreisbogendreieck S_1 mit den Winkeln $\lambda_1\pi$, $\mu_1\pi$, $\nu_1\pi$ entsteht, so wird, wie gezeigt, die Anzahl der in S_1 enthaltenen, isothermisch äquivalenten Kreisbogendreiecke ausgedrückt durch den Quotienten der pseudosphärischen Defekte:

$$\tau = \frac{1 - (\lambda_1 + \mu_1 + \nu_1)}{1 - (\lambda + \mu + \nu)}.$$

Es soll untersucht werden, wann dieser Ausdruck einen möglichst großen Wert annimmt, und welches dieser Maximalwert ist.

Jedenfalls erhält man eine Zahl, welche dieser Bruch nicht überschreiten kann, wenn man den größten Wert, dessen der Zähler fähig ist, durch den kleinsten Wert, welchen der Nenner annehmen kann, dividiert, ganz abgesehen davon, ob diese beiden Werte miteinander verträglich sind oder nicht, und ob der so berechnete Wert von der Größe τ auch wirklich erreicht wird oder nicht.

Wenn man aber zu diesem Zwecke das Minimum des Nenners und das Maximum des Zählers berechnet, so zeigt sich im Laufe der Untersuchung, daß man mit Hilfe der benutzten Methode nicht nur die soeben charakterisierte, von τ nicht zu überschreitende Zahl finden, sondern auch den größten Wert ermitteln kann, den der Bruch τ tatsächlich annehmen kann, d. h. das wirkliche Maximum von τ.

Zunächst soll untersucht werden, wann der Nenner von τ einen möglichst kleinen Wert erhält, ohne jedoch zu verschwinden. Es sind λ, μ, ν Brüche, deren Zähler je gleich der Einheit und deren Nenner ganze Zahlen sind, also von der Form:

$$\lambda = \frac{1}{l}, \quad \mu = \frac{1}{m}, \quad \nu = \frac{1}{n}.$$

Es ist demnach folgende zahlentheoretische Aufgabe zu lösen:

Drei ganze Zahlen l, m, n so zu bestimmen, daß die Summe ihrer reziproken Werte sich von der Zahl 1 um möglichst wenig unterscheidet, jedoch kleiner ist als diese.

Es kann angenommen werden, daß die Zahlen l, m, n ihrer Größe nach geordnet sind, so daß:

$$l \leqq m \leqq n \tag{1}$$

ist. Unter dieser Annahme werden die geforderten Eigenschaften der Zahlen l, m, n ausgedrückt durch die Ungleichheitsbedingungen:

$$\left\{\begin{array}{lr} \frac{1}{l} + \frac{1}{m} + \frac{1}{n} < 1 & (2) \\ \frac{1}{l} + \frac{1}{m} + \frac{1}{n-1} \geqq 1. & (3) \end{array}\right.$$

Zunächst soll bewiesen werden, daß in der letzten Bedingung nur das Gleichheitszeichen gelten kann; es soll also die Richtigkeit des folgenden Satzes dargetan werden:

Es ist unmöglich, drei ganze Zahlen $l \leqq m \leqq n$ so zu bestimmen, daß im strengen Sinne:

$$\frac{1}{l}+\frac{1}{m}+\frac{1}{n} < 1, \tag{2}$$

$$\frac{1}{l}+\frac{1}{m}+\frac{1}{n-1} > 1 \tag{3a}$$

ist, wobei in der Bedeutung der Zeichen $>$, $<$ die Gleichheit ausgeschlossen wird.

Die Fälle $l=1$ sowie $l=m=2$ sind wegen der Ungleichheitsbedingung (2) von vornherein auszuschließen; die kleinsten Zahlen, welche dann folgen, sind $l=2$, $m=3$. Die Ungleichheit (3a), die auch in der Form:

$$\frac{1}{n-1} > 1-\frac{1}{l}-\frac{1}{m}$$

geschrieben werden kann, lehrt, daß für diesen Fall ($l=2, m=3$) die Zahl n kleiner als 7 sein muß. Wenn man nun l und m beziehlich größer wählt als 2 und 3, so ist klar, daß n kleiner werden muß als im vorhergehenden Falle, damit die Ungleichheitsbedingung (3a) noch erfüllt sei; es ist also n überhaupt in jedem Falle kleiner als 7.

Für die somit allein in Betracht kommenden Werte der Zahlen l, m, n kann man folgende Tabelle entwerfen:

l	m	n	$\frac{1}{l}+\frac{1}{m}+\frac{1}{n}$	$\frac{1}{l}+\frac{1}{m}+\frac{1}{n-1}$
2	3	3		
2	3	4	>1	
2	3	5		>1
2	3	6		
2	4	4	1	
2	4	5		1
2	4	6		
2	5	5	<1	<1
2	5	6		
2	6	6		
3	3	3	1	>1
3	3	4		1
3	3	5	<1	
.	.	.		<1
.	.	.		

Man sieht, daß es Werte der Zahlen l, m, n, für welche im strengen Sinne

$$\frac{1}{l} + \frac{1}{m} + \frac{1}{n} < 1,$$

$$\frac{1}{l} + \frac{1}{m} + \frac{1}{n-1} > 1$$

ist, überhaupt nicht gibt; es kann mithin in der Bedingung (3) nur das Gleichheitszeichen gelten, was gezeigt werden sollte.

Um also drei Zahlen zu finden, für welche die Summe der reziproken Werte der Zahl 1 möglichst nahe kommt, hat man in den ganzzahligen Lösungen der Gleichung

$$\frac{1}{l^*} + \frac{1}{m^*} + \frac{1}{n^*} = 1 \tag{4}$$

die größte der drei Zahlen l^*, m^*, n^*, etwa n^*, um 1 zu vermehren, man hat also zu setzen:

$$l = l^*,$$
$$m = m^*,$$
$$n = n^* + 1.$$

Es besitzt aber die Gleichung (4) bekanntlich nur folgende drei Systeme ganzzahliger Lösungen:

l^*	m^*	n^*
2	3	6
2	4	4
3	3	3

Für die vorliegende Aufgabe kommen also nur folgende Werte in Betracht:

l	m	n
2	3	7
2	4	5
3	3	4

Die Summe der reziproken Werte ist beziehlich $\frac{41}{42}$, $\frac{19}{20}$, $\frac{11}{12}$; davon kommt $\frac{41}{42}$ der Zahl 1 am nächsten; die gesuchten Zahlen sind also

$$l = 2, \quad m = 3, \quad n = 7.$$

Der Nenner des Bruches τ nimmt demnach seinen kleinsten Wert an für

$$\lambda = \tfrac{1}{2}, \quad \mu = \tfrac{1}{3}, \quad \nu = \tfrac{1}{7};$$

dieser kleinste Wert beträgt $\frac{1}{42}$.

Der größte Wert, den der Zähler von τ erhalten kann, ist 1; derselbe ergibt sich für $\lambda_1 = \mu_1 = \nu_1 = 0$.

Die Zahl, welche von τ nicht überschritten werden kann, ist also $1 : \frac{1}{42}$, d. h. **42**; dieser Wert wird aber von τ nicht erreicht, denn es können nicht λ_1, μ_1, ν_1 sämtlich verschwinden, während gleichzeitig λ, μ, ν sämtlich von Null verschieden sind, oder mit anderen Worten, es kann nicht ein Kreisbogendreieck mit drei Spitzen durch Vervielfältigung eines Dreiecks entstehen, dessen sämtliche Winkel von Null verschieden sind.

Da also das Minimum des Nenners mit dem Maximum des Zählers nicht verträglich ist, so sind zur Ermittelung des größten Wertes, den der Bruch τ annehmen kann und auch wirklich annimmt, die extremen Werte des Zählers und des Nenners zunächst gesondert zu untersuchen.

a. Wenn der Zähler ein Maximum ist, also wenn

$$\lambda_1 = \mu_1 = \nu_1 = 0$$

ist, so muß mindestens eine der Größen λ, μ, ν verschwinden; es sei also etwa $\nu = 0$; wenn dann τ einen möglichst großen Wert annehmen soll, so muß sein Nenner möglichst klein, also λ und μ möglichst groß werden. Die größten Werte, die λ und μ in diesem Falle annehmen können, sind

$$\lambda = \tfrac{1}{2}, \quad \mu = \tfrac{1}{3};$$

es ist also in diesem Falle die größte Anzahl der in einem Kreisbogendreieck (mit drei Spitzen) enthaltenen Kreisbogendreiecke:

$$\frac{1}{1 - \frac{5}{6}} = 6.$$

Das Maximum des Zählers liefert demnach im günstigsten Falle 6 Kreisbogendreiecke; dieser Fall tritt ein bei der Vervielfältigung eines Kreisbogendreiecks mit den Winkeln $\frac{\pi}{2}$, $\frac{\pi}{3}$, 0.

Fig. 1 stellt für diese Art der Vervielfältigung das einfachste Beispiel dar; andere kann man leicht daraus herstellen.

b. Ist der Nenner von τ ein Minimum, ist also, wie S. 14 gezeigt,

$$\lambda = \tfrac{1}{2}, \quad \mu = \tfrac{1}{3}, \quad \nu = \tfrac{1}{7},$$

so kann man folgendes aussagen:

Da das durch Vervielfältigung entstandene Dreieck eine kleinere Winkelsumme hat als das ursprüngliche, da aber die einzelnen Winkel des erzeugten Dreiecks nicht unter $\frac{1}{7}\pi$ herabsinken können, so enthält das durch symmetrische Wiederholung des Kreisbogendreiecks S mit den Winkeln $\frac{1}{2}\pi$, $\frac{1}{3}\pi$, $\frac{1}{7}\pi$ entstandene Kreisbogendreieck S_1, dessen Winkel sämtlich gleich $\frac{1}{7}\pi$ sind, die für diesen Fall größtmögliche Anzahl von Kreisbogendreiecken, nämlich

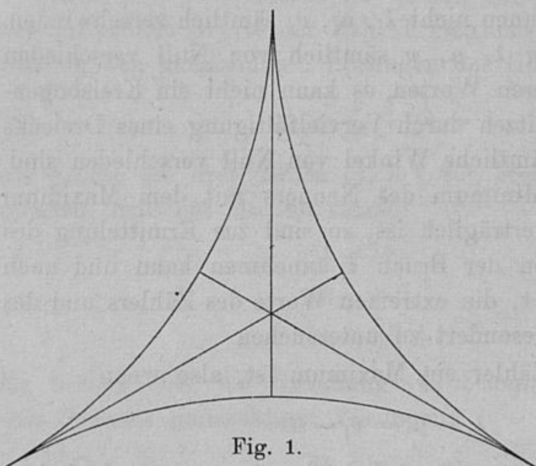

Fig. 1.

$$\frac{1 - (\frac{1}{7} + \frac{1}{7} + \frac{1}{7})}{1 - (\frac{1}{2} + \frac{1}{3} + \frac{1}{7})} = 24.$$

Damit ist gezeigt, daß, wenn der Nenner von τ seinen kleinsten Wert ($\frac{1}{42}$) annimmt, die größte Anzahl von Kreisbogendreiecken, welche in einem anderen enthalten sein können, 24 ist.

Es wäre nun denkbar, daß, wenn der Nenner von τ einen größeren Wert als $\frac{1}{42}$ annähme, der Zähler in stärkerem Maße wüchse als der Nenner, so daß es einen Fall gäbe, in welchem ein Kreisbogendreieck mehr als 24 Teildreiecke enthielte; es gelingt indessen leicht, zu zeigen, daß dies nicht eintreten kann, daß vielmehr die Zahl **24** das Maximum von τ darstellt.

Um diesen Beweis zu führen, bezeichne man die Winkel des ursprünglichen Dreiecks S wie oben mit $\frac{1}{l}\pi$, $\frac{1}{m}\pi$, $\frac{1}{n}\pi$, wobei man wieder

(1) $$l \leqq m \leqq n$$

voraussetzen möge. Da $\frac{1}{n}\pi$ der kleinste Winkel des Kreisbogendreiecks ist, so kann kein Winkel des durch Vervielfältigung entstehenden Dreiecks kleiner sein als $\frac{1}{n}\pi$; da ferner mit abnehmender Winkelsumme der Flächeninhalt des erzeugten Dreiecks und damit die Anzahl der in dem letzteren enthaltenen Teildreiecke wächst, so erhält dasjenige Kreisbogendreieck die größte Anzahl von Teildreiecken, dessen sämtliche Winkel die Größe $\frac{1}{n}\pi$ besitzen, vorausgesetzt, daß es ein solches Dreieck gibt. Die Anzahl der in diesem Dreieck enthaltenen Teildreiecke ist

$$\frac{1-\frac{3}{n}}{1-\left(\frac{1}{l}+\frac{1}{m}+\frac{1}{n}\right)}.$$

Um die aufgestellte Behauptung als richtig zu erweisen, genügt es zu zeigen, daß dieser Bruch $\leqq 24$ ist oder daß

$$1-\frac{3}{n} \leqq 24-\frac{24}{l}-\frac{24}{m}-\frac{24}{n}$$

oder endlich

(5) $$\frac{24}{l}+\frac{24}{m} \leqq 23-\frac{21}{n}$$

ist.

Wenn $n > 7$ ist, so ist $\frac{21}{n} < 3$, die rechte Seite von (5) ist also größer als 20, während die linke Seite, da die kleinsten zulässigen Nenner $l = 2$, $m = 3$ sind, höchstens den Wert $\frac{24}{2}+\frac{24}{3} = 20$ annehmen kann; die Ungleichheit (5) ist also, wenn $n > 7$ ist, erfüllt.

Für den Fall $n = 7$ ist die Untersuchung bereits geführt worden; sie hat ergeben, daß dann in der Bedingung (5) das Gleichheitszeichen gilt.

Ist $n < 7$, so kann man die folgenden in Tabellenform gebrachten Möglichkeiten unterscheiden:

l	m	n	Wert der linken Seite	Wert der rechten Seite
2	4	6	18	$19\frac{1}{2}$
3	3	6	16	
2	4	5	18	$18\frac{4}{5}$
3	3	5	16	
3	3	4	16	$17\frac{3}{4}$

Wie man sieht, ist auch für diese Fälle die Ungleichheit (5) erfüllt; in den sonst noch möglichen Fällen $l = 2$, $m = 5$; $l = 2$, $m = 6$; $l = 3$, $m = 4$; $l = 3$, $m = 5$; $l = 3$, $m = 6$ gilt

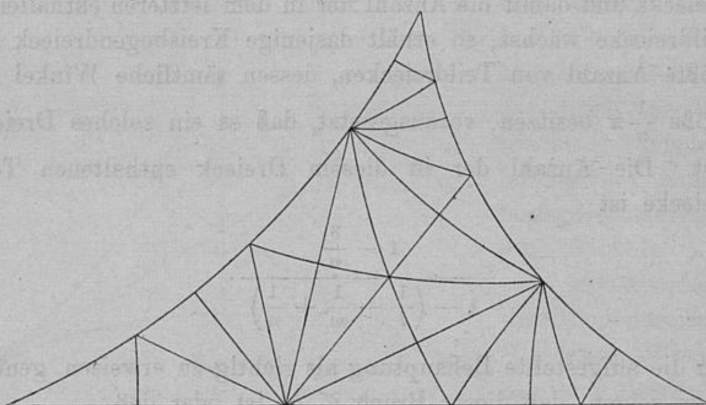

Fig. 2.

sie also a fortiori; andere als vorstehende Fälle kommen wegen der Bedingungen (1) und (2) nicht in Betracht.

Damit ist für den pseudosphärischen Fall endgültig der Satz bewiesen:

Die größte Anzahl isothermisch äquivalenter Kreisbogendreiecke, aus welchen ein anderes Kreisbogendreieck zusammengesetzt sein kann, ist 24. Diese Anzahl wird erreicht bei der Zerlegung eines Kreisbogendreiecks, dessen Winkel sämtlich gleich $\frac{\pi}{7}$ sind, in Teildreiecke mit den Winkeln $\frac{\pi}{2}$, $\frac{\pi}{3}$, $\frac{\pi}{7}$.

Fig. 2 veranschaulicht diese Zerlegung bezw. Vervielfältigung; in jeder Seite des großen Dreiecks findet sich ein

Punkt, in welchem je 7 Teildreiecke zusammenstoßen; drei andere Teildreiecke liegen an den Ecken des großen Dreiecks.[1])

Ein Satz des Herrn Forsyth.

In seinem Werke über die Theorie der Funktionen einer komplexen Veränderlichen[2]) stellt Herr Forsyth zunächst den Satz auf:

„When $\lambda + \mu + \nu < 1$ and either λ or μ or ν is incommensurable, the integral relation between w and z, which is equivalent to the differential relation $\{w, z\} = 2\,I(z)$[3]), is transcendental both in w and in z."

Dieser Satz ist zweifellos richtig; Herr Forsyth fährt aber fort:

„When $\lambda + \mu + \nu < 1$ and λ, μ, ν have the forms of fractions in their lowest terms, and if N be the least common

---

1) Eine zu dieser Art der Vervielfältigung gehörige Figur ist weiter ausgeführt in Klein-Fricke, Vorlesungen über die Theorie der elliptischen Modulfunktionen, 2 Bde., Leipzig 1890, 1892. (Bd. I, S. 109, Fig. 33.) In demselben Werke findet man, außer vielen anderen die Vervielfältigung von Kreisbogendreiecken betreffenden Figuren, auch eine eingehendere Durchführung der oben (S. 16) durch die Fig. 1 nur für den einfachsten Fall angedeuteten Vervielfältigung eines Kreisbogendreiecks mit den Winkeln $\frac{\pi}{2}$, $\frac{\pi}{3}$, 0. (Klein-Fricke, a. a. O. S. 112, Fig. 35.)

2) A. R. Forsyth, Theory of functions of a complex variable. Sec. ed. Cambridge, 1900. No. 275, pag. 654.

3) In dieser Differentialgleichung ist $\{w, z\}$ das von Cayley eingeführte Symbol für die „Schwarzsche Derivierte"

$$\frac{w'''}{w'} - \frac{3}{2}\left(\frac{w''}{w'}\right)^2,$$

während

$$I(z) = \frac{1}{4} \cdot \frac{1-\lambda^2}{z^2} + \frac{1}{4} \cdot \frac{1-\nu^2}{(z-1)^2} + \frac{1}{4} \cdot \frac{\lambda^2 - \mu^2 + \nu^2 - 1}{z(z-1)}$$

ist. Mit den von Herrn Schwarz in der bereits mehrmals citierten Abhandlung über die hypergeometrische Reihe angewendeten Bezeichnungen bringt man die von Herrn Forsyth benutzten in Übereinstimmung, wenn man w durch s, z durch x und $I(z)$ durch $\frac{1}{2}F(x)$ ersetzt.

multiple of their numerators, the integral relation between w and z equivalent to the differential relation

$$\{w, z\} = 2\,I(z)$$

is an algebraical equation of degree N in z, the coefficients of which are transcendental functions of w."

Mittelst eines von Herrn Schwarz gefundenen Beispieles kann gezeigt werden, daß dieser Satz nicht allgemein richtig ist.

Man zeichne ein Kreisbogendreieck mit den Winkeln $\frac{1}{3}\pi$, $\frac{1}{5}\pi$, $\frac{2}{5}\pi$, welche der Reihe nach zur Abkürzung mit α, β, γ bezeichnet werden mögen; dieses Dreieck bilde man in der oben beschriebenen Weise unter Aufrechterhaltung der Größe der drei Winkel dergestalt auf eine Fläche konstanten negativen Krümmungsmaßes ab, daß den das Dreieck begrenzenden Kreisbogen Stücke geodätischer Linien entsprechen. Das so entstandene geodätische Dreieck besitzt wie das Kreisbogendreieck Winkel, deren Bogenzahlen $\alpha = \frac{1}{3}\pi$, $\beta = \frac{1}{5}\pi$, $\gamma = \frac{2}{5}\pi$ sind; die diesen Winkeln gegenüberliegenden Seiten seien beziehlich mit a, b, c, die Ecken mit A, B, C bezeichnet. Man halbiere den Winkel mit der Bogenzahl γ durch eine geodätische Linie, welche die gegenüberliegende Seite $AB = c$ in einem Punkte D schneiden möge; die Bogenzahl des Winkels BDC sei δ. Wäre der Satz des Herrn Forsyth allgemein richtig, so müßte δ zu π ein rationales Verhältnis haben; es soll gezeigt werden, daß dies nicht der Fall ist.

Um über die Größe von δ eine Aussage machen zu können, berechnet man zunächst a aus dem Dreieck ABC. In diesem sind bekannt $\alpha = \frac{1}{3}\pi$, $\beta = \frac{1}{5}\pi$, $\gamma = \frac{2}{5}\pi$; aus dem Cosinussatze der pseudosphärischen Trigonometrie

$$\cos\alpha = \sin\beta \sin\gamma \operatorname{Cof} a - \cos\beta \cos\gamma,$$

der in diesem Falle die Form

$$\cos\left(\tfrac{1}{3}\pi\right) = \sin\left(\tfrac{1}{5}\pi\right) \sin\left(\tfrac{2}{5}\pi\right) \operatorname{Cof} a - \cos\left(\tfrac{1}{5}\pi\right) \cos\left(\tfrac{2}{5}\pi\right)$$

hat, findet man unter Benutzung der Werte

$$\cos\left(\frac{2}{5}\pi\right) = \sin\left(\frac{1}{10}\pi\right) = \frac{\sqrt{5} - 1}{4},$$

$$\sin\left(\frac{2}{5}\pi\right) = \cos\left(\frac{1}{10}\pi\right) = \frac{\sqrt{10 + 2\sqrt{5}}}{4},$$

$$\sin\left(\frac{1}{5}\pi\right) = \frac{\sqrt{10 - 2\sqrt{5}}}{4},$$

$$\cos\left(\frac{1}{5}\pi\right) = \frac{\sqrt{5} + 1}{4}$$

durch einfache Rechnung

$$\frac{1}{2} = \frac{\sqrt{5}}{4}\,\mathfrak{Cos}\,a - \frac{1}{4}, \quad \text{d. h.}$$

$$\mathfrak{Cos}\,a = \frac{3}{\sqrt{5}}.$$

Wendet man nunmehr den Cosinussatz der pseudosphärischen Trigonometrie auf das Dreieck BCD an, in welchem eine Seite a und die beiden ihr anliegenden Winkel β und $\frac{\gamma}{2}$ bekannt sind, so erhält man

$$\cos\delta = \sin\beta\sin\frac{\gamma}{2}\,\mathfrak{Cos}\,a - \cos\beta\cos\frac{\gamma}{2}$$

oder

$$\cos\delta = [\sin(\tfrac{1}{5}\pi)]^2\,\mathfrak{Cos}\,a - [\cos(\tfrac{1}{5}\pi)]^2.$$

Berücksichtigt man die obigen Werte, so erhält man

$$\cos\delta = \tfrac{1}{4}\sqrt{5} - \tfrac{3}{4}.$$

Der auf der rechten Seite dieser Gleichung stehende Ausdruck ist eine der beiden Wurzeln der im natürlichen Rationalitätsbereiche irreduziblen quadratischen Gleichung

$$x^2 + \tfrac{3}{2}x + \tfrac{1}{4} = 0;$$

die andere Wurzel dieser Gleichung ist

$$-\tfrac{3}{4} - \tfrac{1}{4}\sqrt{5},$$

also ihrem absoluten Betrage nach größer als 1, kann demnach keinen Cosinus darstellen, da der absolute Betrag eines solchen höchstens gleich 1 ist.

Hätte aber δ zu π ein rationales Verhältnis, oder, was dasselbe sagt, wäre $\cos\delta$ Wurzel einer Kreisteilungsgleichung, so müßte die zweite Wurzel der obigen Gleichung auch einen Cosinus darstellen, denn nach einem bekannten Satze muß eine Kreisteilungsgleichung, die mit einer im natürlichen Rationalitätsbereiche irreduziblen algebraischen Gleichung eine

Wurzel gemeinsam hat, alle Wurzeln derselben zu Wurzeln haben.

Daraus folgt, daß $\cos\delta$ nicht Wurzel einer Kreisteilungsgleichung sein kann, daß also das Verhältnis $\delta:\pi$ nicht rational ist; in dem betrachteten Falle gilt demnach der citierte Satz des Herrn Forsyth nicht, also kann diesem Satze allgemeine Gültigkeit nicht zuerkannt werden.

Es ist dem Verfasser eine angenehme Pflicht, seinem hochverehrten Lehrer, Herrn Geheimen Regierungsrat Professor Dr. H. A. Schwarz, für das rege Interesse, welches er der vorliegenden Arbeit entgegenbrachte, auch an dieser Stelle den ehrerbietigsten Dank auszusprechen.

Wurzel … en zu Wurzeln
haben.

Dar… er Kreisteilungs-
gleichung … nis $\delta : \pi$ nicht
rational i… nach der citierte
Satz des … esem Satze all-
gemeine …

Es i… t, seinem hoch-
verehrten … gsrat Professor
Dr. H. A… welches er der
vorliegen… dieser Stelle den
ehrerbieti…