Wissenschaftliche Beilage zum 13. Jahresbericht 1908 der Oberrealschule
zu Bielefeld.

Die mathematische Darstellung des täglichen Ganges der Lufttemperatur

als Folge von Insolation und Ausstrahlung

von

Dr. Walter Schmiedeberg
Oberlehrer.

Bielefeld
Druck von Fritz Eilers junr.
1909.

1909. Progr.-Nr. 507.

Inhalt:

Einleitung.

Die Darstellung periodischer Erscheinungen durch die Besselsche Form wird in der Meteorologie häufig auch auf den täglichen Gang der Lufttemperatur angewandt. ϑ bedeute die Temperatur, ϑ_0 die mittlere Tagestemperatur, t die Tageszeit ausgedrückt durch Winkelmaß (24 Stunden $= 2\pi$). Dann pflegt man die Temperatur darzustellen durch die Formel

$$\begin{aligned}\vartheta = \vartheta_0 &+ p_1 . \sin t + p_2 . \sin 2t + p_3 . \sin 3t + \ldots \\ &+ q_1 . \cos t + q_2 . \cos 2t + q_3 . \cos 3t + \ldots,\end{aligned} \tag{1}$$

in der sich die Konstanten ϑ_0, $p_{1,\,2\,\ldots}$, $q_{1,\,2\,\ldots}$ in bekannter Weise einfach berechnen lassen. Diese Gleichung wird durch eine leichte Umformung auf die Form gebracht

$$\vartheta = \vartheta_0 + A_1 . \sin (t + a_1) + A_2 . \sin (2t + a_2) + A_3 . \sin (3t + a_3) + \ldots \tag{2}$$

Die trigonometrischen Glieder dieser Reihe bedeuten Temperaturwellen mit den Amplituden A_1, A_2, A_3 . . . und den Phasenzeiten a_1, a_2, a_3 . . . Das erste Glied ist eine ganztägige Welle, das zweite Glied eine halbtägige Welle, die Schwingungsdauer der dritten Welle ist $^1/_3$ Tag usw. Der tägliche Gang der Temperatur stellt sich also dar als eine Ueberlagerung mehrerer Wellenbewegungen von verschiedener Amplitude und Phase.

Die erste Welle gibt in großen Zügen den allgemeinen Charakter der Erscheinung wieder und hat dementsprechend die größte Amplitude. Die folgenden Wellen bringen die kleineren Abweichungen von dieser Hauptschwingung zum Ausdruck. Bei der praktischen Verwendung berechnet man bis zu drei oder vier trigonometrischen Gliedern [1]) und erzielt dadurch eine ausreichende Genauigkeit der Darstellung.

Diese Darstellung hat aber den Fehler, daß sie ein irrtümliches Bild von dem Vorgang gibt. Die Uebereinstimmung der aus der Formel berechneten Werte mit den beobachteten Temperaturwerten erweckt den Anschein, als ob wirklich mehrfache tägliche Temperaturwellen beständen. Die Uebereinstimmung ist aber kein Beweis für die letztere Annahme. Denn bei jeder beliebigen periodischen Funktion, die nicht unendlich wird, nicht unendlich viele Maxima und Minima besitzt und nicht unendlich oft durch Sprung unstetig wird, ist es möglich, sie durch eine konvergente unendliche trigonometrische Reihe der Form (1) darzustellen. (Fouriersche Reihe). Also wird

[1]) Neuere Beispiele aus der meteorologischen Zeitschrift:
B. J. Birkeland berechnet für den täglichen Gang der Lufttemperatur in Kristiania und einigen anderen norwegischen Stationen drei trigonometrische Glieder. (Met. Zeitschr. 1906 S. 540).
W. Brückmann berechnet desgl. für Potsdam vier Glieder. (Met. Zeit. 1907).

es bei jeder den obigen sog. Dirichletschen Bedingungen genügenden Funktion möglich sein, sie bei Anwendung einer genügenden Anzahl von Gliedern durch die Besselsche Formel darzustellen. Das Gelingen dieser Darstellung hat dann aber nur eine rechnerische Bedeutung und beweist nichts über das Wesen des durch die Funktion wiedergegebenen Vorganges.

Tatsächlich kann es sich bei dem täglichen Temperaturgang garnicht um eine Ueberlagerung mehrerer Wellenbewegungen handeln. Denn der tägliche Temperaturgang setzt sich aus zwei ihrem Wesen nach verschiedenen Teilen zusammen, dem Temperaturgang während der Nacht und am Tage. Während der Nacht, wo die erkaltenden Luftmassen auf dem Boden lagern, ist der Temperaturverlauf wesentlich dadurch bedingt, daß durch Ausstrahlung Wärme abgegeben wird. Daher muß die Temperatur vom Abend bis zum Morgen dauernd fallen; ihr geometrisches Bild wird eine sich bis zum Morgen senkende Linie sein; die mathematische Untersuchung läßt den Verlauf einer Exponentialkurve erkennen. Am Tage ist die Erscheinung viel zusammengesetzter. Der am stärksten erwärmte Boden ruft dynamische Bewegungen der Luftmassen in vertikaler Richtung hervor; außerdem nimmt die Wärmeleitung einen größeren Anteil als während der Nacht. Aber auch abgesehen von diesen komplizierten Verhältnissen bleiben noch zwei Ursachen für den Wärmegang übrig, nämlich erstens die Wärmestrahlung der Sonne, die Insolation, welche eine Temperatursteigerung bedingt, und zweitens die Ausstrahlung, welche eine Temperaturverminderung zur Folge hat. Die Wärmestrahlung der Sonne hängt vom Sonnenstande ab, ist also eine während des Tages periodische Funktion; die Ausstrahlung ist eine unperiodische Erscheinung. Wenn man versuchen will, den Temperaturgang durch eine Formel darzustellen, die seinen periodischen und unperiodischen Elementen Rechnung trägt, wird man den Temperaturgang bei Nacht und am Tage gesondert betrachten müssen.

Der Temperaturgang bei Nacht ist oft untersucht worden. Zuerst ist er von Lambert[2]) durch die Exponentialgleichung

(3) $$\vartheta = \vartheta_0 + A. b^t$$

dargestellt worden, welche mit ausreichender Genauigkeit die Stundenwerte der Temperatur liefert. Eine Reihe späterer Arbeiten z. B. von Weilenmann[3]), Angot[4]), Maurer[5]), Tamura[6]) beschäftigen sich mit dem Problem, aus theoretischen Ueberlegungen über die nächtliche Ausstrahlung die Form der Temperaturgleichung herzuleiten. Für die praktische Verwendung kommen sie durch Vereinfachungen stets

[2]) Lambert: Pyrometrie. Berlin 1779.

[3]) A. Weilenmann: Ueber den täglichen Gang der Temperatur in Bern. (Schweizerische meteorologische Beobachtungen. 1872).

[4]) A. Angot: Influence de la nébulosité sur la variation diurne de la temperature de Paris. (Annales du Bureau Central meteorologique de France. 1888).

[5]) Maurer: Temperaturleitung und Strahlung in der ruhenden Atmosphäre. (Meteorol. Zeitschr. 1886. S. 208).
— Theoretische Darstellung des Temperaturganges während der Nachtstunden und die Wärmestrahlung der Atmosphäre. (Meteorol. Zeitschr. 1887. S. 189.)
Außerdem: Meteorol. Beobachtungen in der Schweiz. 1885.

[6]) Tetsu Tamura: Mathematical theory of the nocturnal cooling of the athmosphere. (Monthly Weather Revew. 1905). — Dort findet sich auch eine Zusammenstellung mehrerer anderer Arbeiten, die Teile des vorliegenden Problems behandeln.

wieder auf eine Gleichung von dem Typus (3). Durch die theoretische Herleitung gewinnen aber die Konstanten der Gleichung (3) eine physikalische Bedeutung, welche Maurer und Trabert dazu benutzen, um den Strahlungskoeffizienten der atmosphärischen Luft zu bestimmen.[7]) Doch stimmt der von ihnen errechnete Wert des Strahlungskoeffizienten noch nicht überein mit den Ergebnissen der experimentellen Messungen von Hutchins und Very. Das kann seinen Grund darin haben, daß das Gesetz des Zusammenhangs der Konstanten der Gleichung mit dem Strahlungskoeffizienten der Luft komplizierter ist als Maurer angenommen hatte. Tatsächlich erhält Tamura unter andern Voraussetzungen ein anderes Gesetz für diesen Zusammenhang wie Maurer. Man kann also über die Größe des Strahlungskoeffizienten noch in Zweifel sein; aber die Möglichkeit der Darstellung des Temperaturverlaufes durch die Gleichung (3) bleibt unbestreitbar.

Den Temperaturgang während des Tages für sich gesondert zu betrachten, ist der Endzweck dieser Arbeit. Theoretische Untersuchungen sind darüber von J. Halm[8]) angestellt worden. Auf anderer Grundlage soll hier versucht werden, eine Gleichung für den Temperaturgang am Tage aufzustellen, welche der periodischen und unperiodischen Ursache Rechnung trägt. Die Konstanten einer solchen Gleichung werden von der Sonnenwirkung abhängen und außerdem Funktionen der physikalischen Eigenschaften der Luft und des Erdbodens, also des Strahlungs- und Leitungsvermögens und der spezifischen Wärme sein. Der Zusammenhang der Konstanten der Gleichung mit diesen physikalischen Größen wird aber ein sehr komplizierter sein. Es kann daher hier nicht das Ziel sein, ein festes Gesetz für diesen Zusammenhang zu finden; sondern es soll nur erstrebt werden, für den Verlauf am Tage eine typische Form der Gleichung aufzustellen, wie es für den nächtlichen Verlauf durch Gleichung (3) gelungen ist. Da es bei den theoretischen Ueberlegungen also nur auf den Typus der Gleichung ankommt, wird es zulässig sein, die einfachsten Annahmen für die Herleitung der Gleichung zu machen. Die so erhaltene Gleichung wird dann an einem beobachteten mittleren täglichen Temperaturgang darauf geprüft werden, ob sie den Verlauf bei Tage ebenso genau wiedergeben kann, wie die Gleichung (3) den Verlauf während der Nacht.

Die Form der Temperaturgleichung während der Nacht.

Die nächtliche Abkühlung ist eine Folge der Ausstrahlung von Wärme an kältere Luftschichten in größerer Höhe. Die angestellten Messungen zeigen, daß der Erdboden selbst an dieser Ausstrahlung stärker beteiligt ist, als die auflagernden Luftschichten. Denn der Boden kühlt sich schneller ab und hat während der Nacht eine niedrigere Temperatur als die Luft. Dieser Umstand kann bei der theoretischen Herleitung der Formel berücksichtigt werden, wenn man annimmt, daß der Boden gegen eine höhere Luftschicht von konstanter Temperatur ausstrahlt und

[7]) Maurer a. a. O.; Trabert: Die Wärmestrahlung der atmosphärischen Luft. (Meteorol. Zeitschr. 1892. S. 41.)

[8]) J. Halm: Versuch einer theoretischen Darstellung des täglichen Ganges der Lufttemperatur. Halle. 1895.

daß die unteren Luftschichten wieder gegen den Boden hin ihre Wärme ausstrahlen. Unter dieser Annahme lassen sich dann Differentialgleichungen für die Wärmeänderung des Bodens und der Luft aufstellen. Alle bisher angestellten Berechnungen setzen voraus, daß die ausgestrahlte Wärmemenge der Temperaturdifferenz zwischen dem ausstrahlenden Körper und der Fläche, gegen welche die Ausstrahlung gerichtet ist, proportional sei. ϑ_b bezeichne die Bodentemperatur, ϑ_0 die Temperatur der konstanten Luftschicht, m eine Konstante, dann ist die Aenderung der in 1 ccm des Bodens enthaltenen Wärmemenge Q während des Zeitteilchens dt

$$dQ = - m\,(\vartheta_b - \vartheta_0).\ dt$$

und, wenn c die spezifische Wärme des Bodens bedeutet,

$$c.\ d\vartheta_b = - m\,(\vartheta_b - \vartheta_0).\ dt$$

oder, wenn wir $\frac{m}{c} = m_1$ setzen,

(4) $$\frac{d\vartheta_b}{dt} = - m_1\,(\vartheta_b - \vartheta_0)$$

Daraus folgt durch Integration

(5) $$\vartheta_b = \vartheta_0 + A\,.\,e^{-m_1 t}$$

als Gleichung für die Temperatur des Erdbodens.

Die Lufttemperatur sei ϑ_l; dann folgt in entsprechender Weise unter der Annahme, daß die Wärmestrahlung der Luft gegen den Erdboden von der Temperatur ϑ_b stattfindet,

$$\frac{d\vartheta_l}{dt} = - m_2\,(\vartheta_l - \vartheta_b) = - m_2\,\left(\vartheta_l - \vartheta_0 - A\,.\,e^{-m_1 t}\right)$$
$$= - m_2\,(\vartheta_l - \vartheta_0) + A\,.\,m_2\,.\,e^{-m_1 t}$$

Die Integration ergibt

(6) $$\vartheta_l = \vartheta_0 + A_1\,.\,e^{-m_1 t} + A_2\,.\,e^{-m_2 t}$$

also eine Gleichung, welche zwei Exponentialglieder enthält.

Selbstverständlich ist die Formel für die wirklich stattfindenden Vorgänge noch nicht kompliziert genug. Ganz außer Acht gelassen ist die Wärmeleitung. Allerdings zeigen Maurer und Tamura, daß die Leitung in der Nacht nur einen ganz geringen Anteil an der Wärmebewegung in den unteren Luftschichten haben kann. Wenn auch diese Formel schon eine Vereinfachung im Vergleiche mit den wirklichen Vorgängen bedeutet, so ist sie doch für die zahlenmäßige Berechnung stets noch weiter vereinfacht worden. Weilenmann weist an Zahlenbeispielen nach, daß der Koeffizient des einen Exponentialgliedes verschwindend klein wird. Auch alle anderen Autoren, welche den nächtlichen Temperaturgang zahlenmäßig berechnet haben, begnügen sich mit einem Exponentialgliede.

Da die erhaltene Formel also weder die wirklichen Vorgänge ganz zutreffend darstellt noch für die Rechnung verwandt wird, so kann es genügen, auf einem einfacheren Wege das Ziel zu erreichen.

Man kann die Rechnung sofort mit der Ausstrahlung des betrachteten Luftteilchens beginnen, wenn man annimmt, die gesamte Strahlung dieses Luftteilchens sowohl gegen die höhere Atmosphäre als auch gegen den erkalteten Erdboden lasse sich ersetzen durch die Strahlung dieses Luftteilchens gegen eine einzige Hülle von der konstanten Temperatur ϑ_0. Dann entsteht die Gleichung

$$\frac{d\vartheta_1}{dt} = - m (\vartheta_1 - \vartheta_0) \tag{7}$$

und daraus durch Integration

$$\vartheta_1 = \vartheta_0 + A \,.\, e^{-mt} = \vartheta_0 + A \,.\, b^t \tag{8}$$

Diese Formel ist bisher stets für die zahlenmäßige Berechnung zu Grunde gelegt worden und stellt den beobachteten Gang mit ausreichender Genauigkeit dar. Maurer und Trabert benutzen diese Gleichung, um daraus die Strahlungsgröße der atmosphärischen Luft zu berechnen. σ bedeute den Strahlungskoeffizienten der Masseneinheit der Luft, c die spezifische Wärme der Luft; dann setzt Trabert

$$m = \frac{\sigma}{c}, \text{ also } b = e^{-\frac{\sigma}{c}}$$

und berechnet aus dem durch den nächtlichen Gang gefundenen Wert von b die Größe von σ. Es ist in der Einleitung schon gesagt worden, daß die Ergebnisse dieser Berechnung noch nicht in Einklang gebracht sind mit experimentellen Berechnungen. Sicher ist, daß diese Berechnungen nur erste Annäherungen sein können, da ja die Formeln (7) und (8) den Verlauf auch nur näherungsweise wiedergeben können. Außerdem ist m voraussichtlich eine kompliziertere Funktion von ϑ als für die Berechnung zu Grunde gelegt worden ist.

Wesentlich für das Ziel dieser Arbeit ist es, zu konstatieren, daß unter den einfachsten Annahmen ein brauchbarer Typus der nächtlichen Gleichung erhalten werden kann, daß aber über den Zusammenhang der Koeffizienten mit den physikalischen Eigenschaften der Luft Zweifel bestehen bleiben.

Die Form der Temperaturgleichung am Tage.

Die Temperaturzunahme während des Tages ist eine Folge der Wärmezustrahlung durch die Sonne. Die Größe dieser Insolation ist nach physikalischen Gesetzen proportional mit dem Sinus der Sonnenhöhe über dem Horizont, wenn von der Absorption der Sonnenstrahlen in der Atmosphäre abgesehen wird. Die Sonnenhöhe h ist der Komplementwinkel zur Zenitdistanz z, und diese liegt in dem astronomischen Dreieck der sphärischen Trigonometrie. Also läßt sich die Sonnenhöhe durch die geographische Breite φ und die Sonnendeklination δ ausdrücken. Es ist

$$\sin h = \cos z = \sin \varphi \,.\, \sin \delta + \cos \varphi \,.\, \cos \delta \,.\, \cos \tau,$$

wo τ den Stundenwinkel des Sonnenstandes in Graden bedeutet, gerechnet vom Meridian des Ortes. ($\tau = \frac{\pi t}{12}$; $\tau = 0$ bedeutet Mittag; 1 Stunde $= 15^0$). Die der

Flächeneinheit des Erdbodens in dem Zeitteilchen dt zugestrahlte Wärmemenge ist also

$$dQ = C \,.\, \sin h \,.\, dt = C \left(\sin\varphi \sin\delta + \cos\varphi \,.\, \cos\delta \,.\, \cos\frac{\pi t}{12}\right) dt.$$

Diese Wärmemenge wird zur Temperaturerhöhung des Bodens benutzt. Also ist

$$c \,.\, d\vartheta_b = C \left(\sin\varphi \,.\, \sin\delta + \cos\varphi \,.\, \cos\delta \,.\, \cos\frac{\pi}{12}\, t\right) dt$$

(9)
$$\frac{d\vartheta_b}{dt} = \frac{C}{c} \left(\sin\varphi \,.\, \sin\delta + \cos\varphi \,.\, \cos\delta \,.\, \cos\frac{\pi}{12}\, t\right)$$

Da die geographische Breite φ für den Beobachtungsort konstant ist und die Sonnendeklination δ innerhalb eines Tages als konstant angesehen werden kann, so ersetzen wir die Gleichung (9) durch

(10)
$$\frac{d\vartheta_b}{dt} = M + N \,.\, \cos\frac{\pi}{12} \,.\, t$$

wo M und N Konstanten bedeuten.

Die rechte Seite der Gleichung (10) ist stets positiv, so lange die Sonne über dem Horizont steht. Also würde unter dem Einfluß der Insolation allein die Temperatur vom Sonnenaufgang bis zum Sonnenuntergang steigen, zuerst langsam, am Mittag am schnellsten, gegen Abend wieder langsamer.

Diesem fortdauernden Temperaturzuwachs stellt sich die Wärmeabgabe durch Leitung und Strahlung entgegen. Die Temperaturabgabe durch Leitung vollzieht sich gemäß der Differentialgleichung der Wärmeleitung

$$\frac{\delta\vartheta}{\delta t} = \alpha \,.\, \frac{\delta^2\vartheta}{\delta x^2},$$

worin x die Länge in der Richtung des Temperaturflusses, also in unserm Fall vertikal zur Erdoberfläche bezeichnet; die Temperaturänderung ist also proportional zum zweiten Differentialquotienten der jeweiligen Temperaturverteilung, d. h. proportional zur örtlichen Aenderung des Temperaturgefälles in vertikaler Richtung.

Die Ausstrahlung können wir wieder proportional zur Differenz der Bodentemperatur gegen eine höhere Luftschicht konstanter Temperatur setzen. Denn die täglichen Aenderungen der Temperatur reichen ja nur bis zu einer verhältnismäßig geringen Höhe.

Berücksichtigen wir zunächst nur die Ausstrahlung als die Ursache, welche der dauernden Temperaturerhöhung während des Tages entgegenwirkt, dann geht die Gleichung (10) über in

(11)
$$\frac{d\vartheta_b}{dt} = M + N \,.\, \cos\frac{\pi}{12} \,.\, t - m\,(\vartheta_b - \vartheta_0)$$

Zur Integration setzen wir $\vartheta_b - \vartheta_0 = z$; $d\vartheta_b = dz$.

Dann ist

$$\frac{dz}{dt} = M + N \,.\, \cos\frac{\pi}{12}\, t - m \,.\, z.$$

Nach bekannter Methode wird gesetzt

$$z = y \,.\, e^{-mt}$$

$$\frac{dz}{dt} = -my \,.\, e^{-mt} + \frac{dy}{dt} \,.\, e^{-mt}.$$

Also

$$\frac{dy}{dt} . e^{-mt} - my . e^{-mt} = M + N . \cos\frac{\pi}{12} t - m . y . e^{-mt}$$

Daraus folgt

$$\frac{dy}{dt} . e^{-mt} = M + N . \cos\frac{\pi}{12} . t.$$

$$\frac{dy}{dt} = M . e^{mt} + N . e^{mt} . \cos\frac{\pi}{12} . t.$$

Da bekanntlich

$$\int e^{mt} . \cos\frac{\pi}{12} t \, dt = e^{mt} . \frac{\frac{\pi}{12} \sin\frac{\pi}{12} t + m . \cos\frac{\pi}{12} . t}{\left(\frac{\pi}{12}\right)^2 + m^2}$$

ist, so folgt

$$y = \frac{M}{m} . e^{mt} + \frac{N . e^{mt}}{\left(\frac{\pi}{12}\right)^2 + m^2} . \left(\frac{\pi}{12} \sin\frac{\pi}{12} t + m . \cos\frac{\pi}{12} . t\right) + K,$$

wo K eine Konstante ist. Also ist

$$z = y . e^{-mt} = \frac{M}{m} + \frac{N}{\left(\frac{\pi}{12}\right)^2 + m^2} . \left(\frac{\pi}{12} . \sin\frac{\pi}{12} t + m . \cos\frac{\pi}{12} t\right) + K . e^{-mt}$$

und, da $z = \vartheta_b - \vartheta_0$ gesetzt war,

$$\vartheta_b = \vartheta_0 + \frac{M}{m} + \frac{N}{\left(\frac{\pi}{12}\right)^2 + m^2} . \left(\frac{\pi}{12} . \sin\frac{\pi}{12} t + m . \cos\frac{\pi}{12} t\right) + K . e^{-mt}$$

Hierin setzen wir

$$\vartheta_0 + \frac{M}{m} = u$$

$$\frac{N . \frac{\pi}{12}}{\left(\frac{\pi}{12}\right)^2 + m^2} = b . \sin a \qquad (12)$$

$$\frac{N . m}{\left(\frac{\pi}{12}\right)^2 + m^2} = b . \cos a$$

Dann folgt

$$\vartheta_b = u + b . \left(\sin a . \sin\frac{\pi t}{12} + \cos a . \cos\frac{\pi}{12} t\right) + K e^{-mt}$$

$$\vartheta_b = u + b . \cos\left(\frac{\pi t}{12} - a\right) + K . e^{-mt} \qquad (13)$$

als Gleichung für die Temperatur des Erdbodens.

Es ist bisher noch die Wärmeleitung unberücksichtigt geblieben. Es findet hier eine Leitung sowohl in den Boden als auch nach oben hin statt. Ich berücksichtige nur die Wärmeleitung nach außen, welche bestimmt ist durch die Gleichung

(14) $$\frac{\delta\vartheta}{\delta t} = a \cdot \frac{\delta^2\vartheta}{\delta x^2}$$

wo ϑ die Temperatur in irgend einer Höhe x über dem Boden bedeutet. Die partielle Differentialgleichung (14) soll als Lösung eine Funktion $\vartheta = f(x, t)$ zulassen, welche für $x = 0$ die Temperaturgleichung des Erdbodens ergibt, die wieder der Bedingung (11) entsprechen soll. Da periodische und Exponentialfunktionen einzeln bekannte Lösungen der Gleichung (14) sind, so läßt sich daraus auch eine Lösung zusammensetzen, die für $x = 0$ die Form (13) annimmt. Die Funktion

(15) $$\vartheta = u + b \cdot e^{-x \cdot \sqrt{\frac{1}{2a}}} \cdot \cos\left(\frac{\pi t}{12} - a - x\sqrt{\frac{1}{2a}}\right) + K \cdot e^{-mt}\left(K_1 \sin x\sqrt{\frac{m}{a}} + \cos x\sqrt{\frac{m}{a}}\right)$$

nimmt für $x = 0$ die Form (13) an und befriedigt die Gleichung (14), wie sich durch Bildung der Ableitungen leicht bestätigen läßt. Die Gleichung (15) zeigt, daß unter den gemachten Voraussetzungen in allen Höhen $x = x_0$ über dem Boden der Typus der Temperaturgleichung derselbe bleibt. Die Unterschiede in verschiedenen Höhen liegen nur in Aenderungen der Koeffizienten der Gleichung (13). Nach (15) bedeuten diese Koeffizientenänderungen mit der Höhe für das periodische Glied eine Abnahme der Amplitude und eine Phasenverschiebung, für das Exponentialglied eine wellenförmige Bewegung des Wärmeflusses in vertikaler Richtung.

Es ist schon genügend betont worden, daß es unmöglich sein wird, bei Zugrundelegung so einfacher Verhältnisse ein zutreffendes Gesetz der Koeffizientenänderungen zu erhalten. Dagegen wird die Frage berechtigt sein, ob eine Gleichung vom Typus (13) imstande ist, die Beobachtungen annähernd wiederzugeben. Das Ziel der vorherigen Betrachtungen kann als erreicht gelten, wenn es gelingt, zahlenmäßige Beobachtungen der Temperatur während des Tages durch eine Gleichung von der Form

$$\vartheta = u + b \cdot \cos\left(\frac{\pi t}{12} - a\right) + K \cdot e^{-mt}$$

(16) $$= u + b \cdot \cos\left(\frac{\pi t}{12} - a\right) + K \cdot c^{t}$$

darzustellen. Der Versuch dazu soll weiter unten gemacht werden.

Die Bedeutung der Gleichung (16) ist einleuchtend. u ist konstant; das periodische Glied $b. \cos\left(\frac{\pi t}{12} - a\right)$ bedeutet eine Temperaturwelle, die für $t = \frac{12a}{\pi}$ ihr Maximum erreicht. Ohne Ausstrahlung und Leitung würde das Maximum der Temperatur erst am Abend erreicht. Daß das Maximum des periodischen Gliedes sich schon auf die Zeit $t = \frac{12a}{\pi}$ verlegt, die in den Nachmittagsstunden liegt, ist eine Folge der Ausstrahlung und Leitung. Das Exponentialglied bewirkt, daß die Temperaturkurve vor und nach dem Maximum unsymmetrisch ist und verschiebt außerdem das Maximum noch etwas. Wenn K positiv ist, steigt die Temperatur langsamer, als sie zum Abend fällt; wenn K negativ ist, ist der Anstieg bis zum Maximum steiler als der Abfall am Nachmittag.

Numerische Berechnung des Temperaturganges während der Nacht.

Die in den vorigen Abschnitten entwickelten Formeln erhalten ihre Bedeutung erst durch die Anwendung zur numerischen Berechnung. Da an einem einzelnen Tage der Temperaturgang zu sehr durch anderweitige Umstände wie wechselnde Bewölkung und Winde mitbestimmt wird, sind für die Berechnung einer Formel nur mittlere Werte verwendbar, bei welchen sich die Nebeneinflüsse möglichst ausgeglichen haben. Weilenmann und Angot, welche in den zu Anfang genannten Arbeiten numerische Berechnungen für den nächtlichen Gang nach der Formel

$$\vartheta = \vartheta_0' + A \cdot b^t \tag{8}$$

geliefert haben, legen mehrjährige mittlere Stundenwerte der einzelnen Monate zu Grunde. Dabei hat sich gezeigt, daß der Wert von b in den verschiedenen Monaten, bei verschiedenen Bewölkungsgraden und an verschiedenen Orten nahezu konstant ist. Angot findet b = 0,869. Trabert hat a. a. O. ebenfalls Berechnungen angestellt; doch hat er nicht den Temperaturgang bestimmt, sondern nur die Größe von b für 42 europäische und asiatische Stationen berechnet, um daraus den Strahlungskoeffizienten σ herzuleiten. Auch er findet, daß die verschiedenen Werte von b einander sehr nahe liegen und daß ihre kleinen Schwankungen kein bestimmtes Gesetz, etwa eine Abhängigkeit von der Temperatur oder der Dichte der Luft, erkennen lassen. Für die folgenden Berechnungen lege ich den von Angot gefundenen Wert b = 0,869 zu Grunde.

Meine erste Berechnung hat den Zweck, zu erfahren, mit welchem Grade der Genauigkeit die Formel (8) den Temperaturgang während der Nacht wiedergibt, um daran einen Maßstab für die Beurteilung der Tagesformel zu gewinnen. Ich benutze die zehnjährigen mittleren Stundenwerte der Monate nach den Beobachtungen am meteorologischen Observatorium in Potsdam. Aus den in den ersten zehn Jahrgängen der Veröffentlichungen[9]) des Observatoriums mitgeteilten Werten habe ich die Mittel gebildet und den jährlichen Gang während der einzelnen Monate durch lineare Interpolation eliminiert. Die so erhaltenen Werte für die Temperatur der Nachtstunden in den einzelnen Monaten sind in der folgenden Tabelle zusammengestellt:

[9]) Ergebnisse der meteorologischen Beobachtungen in Potsdam. 1893—1902.

Nächtlicher Temperaturgang in Potsdam (1893—1902) (Celsiusgrade).

(I.)

	Jan.	Febr.	März	April	Mai	Juni	Juli	Aug.	Sept.	Okt.	Nov.	Dez.
5p	–0,91	—	—	—	—	—	—	—	—	—	4,11	0,49
6p	–1,13	0,34	—	—	—	—	—	—	—	8,96	3,77	0,29
7p	–1,34	0,00	4,04	—	—	—	—	—	13,34	8,55	3,52	0,17
8p	–1,50	–0,31	3,54	7,96	12,08	—	—	16,48	12,70	8,24	3,29	0,09
9p	–1,57	–0,57	3,16	7,31	11,17	15,13	16,64	15,83	12,30	8,01	3,12	0,01
10p	–1,78	–0,84	2,72	6,63	10,38	14,29	15,93	15,24	11,83	7,67	2,94	–0,13
11p	–1,93	–1,04	2,43	6,11	9,79	13,68	15,46	14,73	11,41	7,41	2,76	–0,29
Mitternacht	–2,06	–1,22	2,14	5,67	9,24	13,17	15,00	14,33	11,10	7,18	2,61	–0,33
1a	–2,18	–1,34	1,94	5,30	8,80	12,73	14,55	13,94	10,77	6,97	2,52	–0,37
2a	–2,26	–1,46	1,70	4,94	8,37	12,26	14,17	13,60	10,49	6,82	2,42	–0,47
3a	–2,33	–1,53	1,47	4,66	8,03	11,87	13,84	13,25	10,31	6,64	2,35	–0,57
4a	–2,36	–1,61	1,27	4,40	7,74	11,62	13,54	13,01	10,12	6,52	2,26	–0,62
5a	–2,38	–1,67	1,10	4,14	—	—	—	—	9,92	6,39	2,15	–0,69
6a	–2,44	–1,75	0,97	—	—	—	—	—	—	6,28	2,08	–0,73
7a	(–2,39)	–1,79	—	—	—	—	—	—	—	—	2,03	–0,73

In der Formel (8) soll t = 0 Mitternacht bedeuten und die Zeit zum Morgen hin positiv, zum Abend hin negativ gerechnet werden. Zur Berechnung habe ich die Differenzen je zweier aufeinander folgender Nachtstunden gebildet.

$$\vartheta_t - \vartheta_{t+1} = A\,.\,(b^t - b^{t+1})$$
$$\vartheta_{t+1} - \vartheta_{t+2} = A\,.\,(b^{t+1} - b^{t+2})$$
$$\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots$$

Da b = 0,869 gesetzt werden sollte, ist in diesen Gleichungen nur A unbestimmt. A habe ich bestimmt, indem ich das arithmetische Mittel der aus den einzelnen Gleichungen berechneten Werte genommen habe. Diesen Mittelwert von A und den Wert b = 0,869 habe ich als Annäherungswerte betrachtet. Indem ich dann A durch A + x und b durch b + y ersetzte, habe ich nach der Methode der kleinsten Quadrate die Zuschläge x und y berechnet. Auf diese Weise habe ich die folgenden Formeln erhalten.

Nächtlicher Temperaturgang in Potsdam.

(II.)

Januar	$\vartheta = -\,2{,}83 + 0{,}81\,.\,0{,}886^t$
Februar	$\vartheta = -\,2{,}10 + 0{,}93\,.\,0{,}852^t$
März	$\vartheta = -\,0{,}05 + 2{,}20\,.\,0{,}884^t$
April	$\vartheta = 2{,}59 + 3{,}10\,.\,0{,}872^t$
Mai	$\vartheta = 6{,}21 + 3{,}03\,.\,0{,}851^t$
Juni	$\vartheta = 10{,}18 + 2{,}95\,.\,0{,}846^t$
Juli	$\vartheta = 11{,}61 + 3{,}35\,.\,0{,}874^t$
August	$\vartheta = 11{,}11 + 3{,}20\,.\,0{,}879^t$
September	$\vartheta = 8{,}74 + 2{,}34\,.\,0{,}874^t$
Oktober	$\vartheta = 5{,}36 + 1{,}84\,.\,0{,}896^t$
November	$\vartheta = 1{,}68 + 0{,}94\,.\,0{,}873^t$
Dezember	$\vartheta = -\,1{,}02 + 0{,}68\,.\,0{,}896^t$

In diesen Gleichungen bedeutet das erste Glied die Temperatur ϑ_0 der Schicht, gegen welche die Ausstrahlnng stattfindet, also die Temperatur, welcher sich die nächtliche Temperaturkurve gegen Morgen asymptotisch nähert. ϑ_0 erreicht im Januar mit — 2,83° ein Minimum und im Juli mit 11,61° ein Maximum. Aus der Gleichung (8) folgt für Mitternacht ($t = 0$) $\vartheta_{12} = \vartheta_0 + A$; d. h. A ist der Ueberschuß der Lufttemperatur um Mitternacht über die asymptotische Temperatur. Dieser Ueberschuß erreicht den höchsten Wert im Juli mit 3,35° und den tiefsten Wert im Dezember mit 0,68°; der Dezember ist der Monat des geringsten nächtlichen Temperaturfalles. Der Faktor b schwankt zwischen 0,846 im Juni und 0,896 im Oktober und Dezember. Ein reeller jährlicher Gang ist nicht erkennbar. Es bleibt also wahrscheinlich, daß die kleinen Abweichungen von dem mittleren Wert $b = 0{,}869$ rechnerische Zufälligkeiten sind, die in unregelmäßigen sekundären Einflüssen ihre Ursache haben.

Bei Weilenmann und Angot ist als Nullpunkt der Zeit die erste Nachtstunde gewählt. Dasselbe läßt sich bei den obigen Formeln durch eine leichte Koordinatentransformation erreichen.

Die durch die Formeln erreichte Genauigkeit der Darstellung läßt sich aus der folgenden Tabelle ersehen. Zuerst habe ich die sich aus den Formeln ergebenden Stundenwerte berechnet nnd die einzelnen Fehler (v = beobachteter Wert minus berechneter Wert) gebildet. Als mittlerer Fehler ist dann der Ausdruck $\pm\sqrt{\frac{\Sigma v^2}{n}}$ berechnet worden, wobei Σv^2 die Summe der einzelnen Fehlerquadrate, n die Anzahl der für den Monat berechneten Nachtstunden bedeutet. Diese Fehler sind in Einheiten der zweiten Dezimalen, also in Hundertstelgrad (h^0), angegeben. Da die Fehler naturgemäß im Sommer größer werden, wo der Temperaturfall vom Abend zum Morgen steiler ist, habe ich in der zweiten Reihe den Temperaturfall, also die Differenz D der ersten und letzten Nachtstunde hinzugefügt. Die letzte Reihe enthält den mittleren Fehler in Prozenten der Temperaturdifferenz, ein Maß, das mir für den Vergleich der Genauigkeit besonders geeignet erscheint.

Mittlerer Fehler der Formeln (II).

	Jan.	Febr.	März	April	Mai	Juni	Juli	Aug.	Sept.	Okt.	Nov.	Dez.
$\sqrt{\frac{\Sigma v^2}{n}}$ in h°	±4,8	±2,4	±2,9	±2,5	±4,4	±5,8	±3,1	±1,8	±3,0	±3,7	±2,1	±4,2
D in°	1,53	2,13	3,07	3,82	4,34	3,51	3,10	3,47	3,42	2,68	2,08	1,22
Mittlerer Fehler in % von D	3,1%	1,1%	1,0%	0,7%	1,0%	1,6%	1,0%	0,6%	0,9%	1,4%	1,0%	3,4%

(III.)

Der absolute mittlere Fehler erreicht im Juni fast 6 Hundertstelgrad; doch ist dieser Fehler bei dem starken Temperaturfall der Sommermonate nur 1,6% der Temperaturschwankung vom Abend zum Morgen. Dagegen ist im Dezember, wo die

Temperaturdifferenz vom Abend zum Morgen 1,22° beträgt, der Fehler ± 4,2 Hundertstelgrad 3,4 % der nächtlichen Temperaturschwankung. Demnach stellt die Formel für den Dezember den nächtlichen Temperaturgang weniger befriedigend dar als die Formel für den Juni. Die Tabelle zeigt, daß die Genauigkeit der Formeln für Januar und Dezember am wenigsten befriedigt.

Numerische Berechnung des Temperaturganges am Tage.

Die früheren theoretischen Ueberlegungen haben als Resultat die Vermutung ergeben, daß sich der Temperaturgang durch eine Formel von dem Typus

$$\vartheta = u + b \,.\, \cos\left(\frac{\pi t}{12} - a\right) + K \,.\, c^t \tag{16}$$

darstellen läßt. Zur Berechnung nach dieser Formel benutze ich die von Birkeland in der Meteorol. Zeitschrift 1906 mitgeteilten mittleren Stundenwerte der Temperatur in Kristiania. Da Birkeland dort auch den Temperaturgang in den einzelnen Monaten nach der Besselschen Formel berechnet hat, so läßt sich an diesem Beispiel die Genauigkeit der Darstellungen nach Formel (2) und Formel (16) leicht vergleichen. Die folgende Tabelle gibt die für die Berechnung zu Grunde gelegten Stundenwerte an.

Temperaturgang am Tage in Kristiania. (1884—1903) (Celsiusgrade).
(Mittlere beobachtete Werte.)

(IV.)

	Jan.	Febr.	März	April	Mai	Juni	Juli	Aug.	Sept.	Okt.	Nov.	Dez.
4a	—	—	—	—	—	10,60	12,60	—	—	—	—	—
5a	—	—	—	1,04	6,52	11,48	13,23	12,20	—	—	—	—
6a	—	—	—	1,35	7,59	12,70	14,33	12,90	8,37	—	—	—
7a	—	—	−3,78	2,17	8,74	13,96	15,58	14,07	9,08	3,89	—	—
8a	−5,01	−5,98	−3,23	3,19	9,97	15,25	16,75	15,34	10,36	4,31	−0,61	−4,03
9a	−4,95	−5,58	−2,18	4,35	11,34	16,64	18,01	16,55	11,72	5,17	−0,43	−3,97
10a	−4,69	−4,86	−1,07	5,43	12,42	17,75	19,20	17,73	12,95	6,11	+0,02	−3,80
11a	−4,26	−3,95	−0,08	6,37	13,26	18,71	20,06	18,65	13,88	6,88	+0,58	−3,53
Mittag	−3,78	−3,09	+0,75	7,06	13,93	19,28	20,69	19,25	14,60	7,51	+1,11	−3,20
1p	−3,48	−2,48	+1,31	7,58	14,33	19,72	21,10	19,68	15,18	7,90	+1,43	−2,96
2p	−3,34	−2,13	+1,69	7,93	14,46	19,77	21,24	19,79	15,42	8,02	+1,48	−2,87
3p	−3,47	−2,23	+1,61	7,96	14,45	19,71	21,03	19,59	15,31	7,77	+1,23	−3,00
4p	−3,75	−2,60	+1,32	7,77	14,18	19,45	20,77	19,30	14,75	7,32	+0,86	−3,13
5p	—	—	+0,80	7,17	13,64	18,90	20,12	18,57	13,94	6,66	—	—
6p	—	—	—	6,59	13,08	18,21	19,36	17,91	12,94	—	—	—
7p	—	—	—	5,69	12,27	17,37	18,54	16,98	—	—	—	—
8p	—	—	—	—	—	16,12	17,33	—	—	—	—	—

Für die Berechnung habe ich die Formel (16) ersetzt durch die ihr äquivalente

$$\vartheta = u + p \,.\, \cos\frac{\pi t}{12} + q \,.\, \sin\frac{\pi t}{12} + K \,.\, c^t, \tag{17}$$

aus welcher sich die Form (16) ableiten läßt, wenn man $p = b \,.\, \cos a$ und $q = b \,.\, \sin a$ setzt. Hierin soll $t = 0$ Mittag bedeuten und die Zeit zum Abend hin positiv, zum Morgen hin negativ gerechnet werden. Dann sind die Differenzen je zweier aufeinanderfolgender Tagesstunden gebildet worden.

$$\vartheta_t - \vartheta_{t+1} = p \, . \left(\cos \frac{\pi t}{12} - \cos \frac{\pi(t+1)}{12}\right) + q \, . \left(\sin \frac{\pi t}{12} - \sin \frac{\pi(t+1)}{12}\right) + K\left(c^t - c^{t+1}\right)$$

. . . .

In diesen Gleichungen sind die Differenzen des Cosinus und Sinus für jeden Wert von t bekannt.

Da sich bei der Untersuchung des nächtlichen Temperaturganges herausgestellt hatte, daß die Basis der Exponentialfunktion nahezu als konstant angesehen werden kann, so habe ich für die folgende Berechnung dieselbe Basis benutzt und einheitlich für alle Monate $c = 0{,}869$ gesetzt, ohne eventuelle die Rechnung verbessernde Abweichungen anzubringen. Dann ist auch die Differenz $c^t - c^{t+1}$ für jeden Wert von t bekannt. In den Differenzengleichungen sind also die Koeffizienten von p, q und K bekannt. Die Unbekannten von p, q und K sind nun nach der Methode der kleinsten Quadrate berechnet worden. Daraus ergab sich für jeden Monat eine Formel von dem Typus (17), welche durch die angegebene Transformation in (16) übergeführt wurde. Das Resultat der Berechnungen ist die folgende Tabelle:

Gleichungen des Temperaturganges am Tage in Kristiania.

$$\begin{array}{ll}
\text{Januar} & \vartheta = -\ 11{,}57 + 4{,}962 \, . \cos\left(\frac{\pi t}{12} - 56{,}85^0\right) + 5{,}014 \, . \, 0{,}869^t \\
\text{Februar} & \vartheta = -\ 13{,}82 + 7{,}627 \, . \cos\left(\frac{\pi t}{12} - 55{,}43^0\right) + 6{,}336 \, . \, 0{,}869^t \\
\text{März} & \vartheta = -\ 5{,}10 + 5{,}429 \, . \cos\left(\frac{\pi t}{12} - 47{,}83^0\right) + 2{,}111 \, . \, 0{,}869^t \\
\text{April} & \vartheta = 3{,}25 + 4{,}378 \, . \cos\left(\frac{\pi t}{12} - 43{,}80^0\right) + 0{,}585 \, . \, 0{,}869 \\
\text{Mai} & \vartheta = 11{,}89 + 3{,}500 \, . \cos\left(\frac{\pi t}{12} - 27{,}55^0\right) - 1{,}121 \, . \, 0{,}869^t \\
\text{Juni} & \vartheta = 16{,}53 + 4{,}060 \, . \cos\left(\frac{\pi t}{12} - 28{,}12^0\right) - 0{,}803 \, . \, 0{,}869^t \\
\text{Juli} & \vartheta = 17{,}42 + 4{,}181 \, . \cos\left(\frac{\pi t}{12} - 29{,}79^0\right) - 0{,}388 \, . \, 0{,}869^t \\
\text{August} & \vartheta = 15{,}87 + 4{,}139 \, . \cos\left(\frac{\pi t}{12} - 30{,}67^0\right) - 0{,}262 \, . \, 0{,}869^t \\
\text{September} & \vartheta = 9{,}22 + 5{,}454 \, . \cos\left(\frac{\pi t}{12} - 36{,}40^0\right) + 1{,}027 \, . \, 0{,}869^t \\
\text{Oktober} & \vartheta = 0{,}99 + 5{,}167 \, . \cos\left(\frac{\pi t}{12} - 42{,}33^0\right) + 2{,}610 \, . \, 0{,}869^t \\
\text{November} & \vartheta = -\ 7{,}56 + 5{,}558 \, . \cos\left(\frac{\pi t}{12} - 51{,}31^0\right) + 5{,}109 \, . \, 0{,}869^t \\
\text{Dezember} & \vartheta = -\ 8{,}03 + 3129 \, . \cos\left(\frac{\pi t}{12} - 57{,}08^0\right) + 3{,}084 \, . \, 0{,}869^t
\end{array} \qquad \text{(V.)}$$

Das erste Glied dieser Formeln ist nach 12) $u = \vartheta_0 + \frac{M}{m}$; ϑ_0 bedeutet die Temperatur der Schicht, gegen welche die Ausstrahlung stattfindet; der Ausdruck $\frac{M}{m}$ würde unter Verwendung der Bezeichnungen von (9) und (10) etwa die Form $\frac{C}{c \cdot m} \sin \varphi \cdot \sin \delta$ annehmen. Mag dieser Ausdruck auch den Zusammenhang zwischen den darin enthaltenen Größen nur annähernd richtig wiedergeben, sicher ist jedenfalls, daß dieser Ausdruck eine direkte Funktion von $\sin \delta$ ist. Um eine annähernde Vorstellung der Bedeutung des Gliedes u zu gewinnen, habe ich die Annahme gemacht, die Temperatur ϑ_0 sei am Tage dieselbe wie in der Nacht. Eine ungefähre Berechnung des Temperaturganges ergibt für Kristiania die in Reihe 2 der folgenden Tabelle enthaltenen Werte von ϑ_0. Daraus läßt sich dann für die einzelnen Monate der angenäherte Wert von $\frac{M}{m}$ berechnen.

$$u = \vartheta_0 + \frac{M}{m}$$

(VI.)

	Jan.	Febr.	März	April	Mai	Juni	Juli	Aug.	Sept.	Okt.	Nov.	Dez.
u	–11,57	–13,82	–5,10	3,25	11,89	16,53	17,42	15,87	9,22	0,99	–7,56	–8,03
ϑ_0 (Nacht)	–5,23	–6,58	–4,72	–0,48	3,20	7,03	9,84	10,19	6,95	3,38	–0,95	–4,27
$\frac{M}{m}$	–6,34	–7,24	–0,38	3,73	8,69	9,50	7,58	5,68	2,27	–2,39	–6,61	–3,76

Die in der letzten Zeile enthaltenen Zahlen sollen eine direkte Funktion von $\sin \delta$ sein. Sie entsprechen insoweit der Theorie, als sie im Winter, wo die Sonnendeklination negativ ist, negativ werden, während sie im Sommer positiv sind. Ungefähr ist auch an den absoluten Werten ein jährlicher Gang erkennbar, in welchen sich allerdings einige Werte nicht hineinfügen, besonders der Wert für den Dezember.

Das zweite Glied der Formeln (V) ist periodisch. Die Phasenzeiten lassen einen deutlichen jährlichen Gang erkennen. Das Maximum des periodischen Gliedes verschiebt sich im Sommer mehr auf den Nachmittag als im Winter. Im Dezember wird das Maximum des periodischen Gliedes erst vor 4 Uhr, im Juni schon kurz vor 2 Uhr erreicht. Die Amplitude des periodischen Gliedes ist der Theorie nach eine direkte Funktion von $\cos \delta$. Sie müßte demnach ihre größten Werte an den Aequinoktien erreichen, wo die Deklination null ist, und nach den Solstitien zu abnehmen.

Das letzte Glied ist dasjenige, welches den Temperaturgang am Tage unsymmetrisch macht. Der Koeffizient K zeigt einen ausgesprochenen jährlichen Gang, der von negativen Werten im Sommer zu positiven im Winter führt. Die Gleichungen zeigen also, daß die Temperatur im Winter langsamer ansteigt, als sie wieder fällt, während sie im Sommer steiler steigt, als sie am Nachmittag fällt. Eine weitere Folge des Exponentialgliedes ist es, daß es das Maximum der Tagestemperatur etwas gegen das Maximum des periodischen Gliedes verschiebt.

Es soll hier noch einmal betont werden, daß es nicht verwunderlich ist, wenn die Koeffizienten der Gleichungen nicht überall der in der theoretischen Entwicklung gewonnenen Gestalt entsprechen, da ihr Zusammenhang mit den physikalischen Größen sicher viel verwickelter ist. Dagegen ist die Untersuchuug wesentlich, mit welcher Genauigkeit die Gleichungen (V) den Temperaturgang wiedergeben. Zum Vergleich mit den Werten (IV) sind aus den Gleichungen die Stundenwerte der Temperatur berechnet und in der folgenden Tabelle zusammengestellt worden.

Temperaturgang am Tage in Kristiania.
(Berechnete Werte.)

(VII.)

	Jan.	Febr.	März	April	Mai	Juni	Juli	Aug.	Sept.	Okt.	Nov.	Dez.
4^{a}	—	—	—	—	—	10,61	12,62	—	—	—	—	—
5^{a}	—	—	—	1,06	6,52	11,60	13,43	12,21	—	—	—	—
6^{a}	—	—	—	1,58	7,67	12,76	14,44	13,15	8,36	—	—	—
7^{a}	—	—	–3,78	2,32	8,87	13,99	15,57	14,22	9,30	3,89	—	—
8^{a}	–5,02	–5,99	–3,06	3,24	10,07	15,25	16,75	15,36	10,41	4,47	–0,62	–4,04
9^{a}	–4,95	–5,54	–2,15	4,23	11,23	16,49	17,93	16,49	11,60	5,21	–0,38	–3,98
10^{a}	–4,66	–4,82	–1,16	5,24	12,29	17,61	19,01	17,55	12,76	6,02	0,05	–3,79
11^{a}	–4,25	–3,98	–0,19	6,19	13,18	18,57	19,94	18,46	13,80	6,78	0,55	–3,52
Mittag	–3,85	–3,15	+0,65	6,99	13,87	19,31	20,66	19,17	14,64	7,42	1,02	–3,25
1^{p}	–3,51	–2,50	+1,29	7,60	14,34	19,78	21,12	19,63	15,19	7,85	1,36	–2,96
2^{p}	–3,35	–2,15	+1,66	7,94	14,54	19,98	21,31	19,81	15,42	8,01	1,49	–2,87
3^{p}	–3,42	–2,16	+1,71	8,01	14,49	19,89	21,20	19,71	15,28	7,86	1,31	–2,93
4^{p}	–3,75	–2,61	+1,40	7,78	14,20	19,52	20,81	19,33	14,81	7,40	0,84	–3,15
5^{p}	—	—	+0,78	7,29	13,70	18,91	20,18	18,70	13,99	6,63	—	—
6^{p}	—	—	—	6,53	13,03	18,09	19,33	17,87	12,90	—	—	—
7^{p}	—	—	—	5,58	12,23	17,15	18,34	16,89	—	—	—	—
8^{p}	—	—	—	—	—	16,14	17,28	—	—	—	—	—

Durch Vergleichen der Tabellen (IV) und (VII) findet man die Fehler der Darstellung für die einzelnen Stundenwerte. Zur Beurteilung der Genauigkeit sind daraus in der folgenden Tabelle die mittleren Fehler nach der Formel $\pm\sqrt{\frac{\Sigma v^2}{n}}$ berechnet worden, wo Σv^2 die Summe der Fehlerquadrate, n die Anzahl der berechneten Stunden bedeutet. Die zweite Reihe enthält die Temperaturdifferenz D zwischen der wärmsten und der kältesten Tagesstunde, also meistens zwischen 2 Uhr nachmittags und der ersten Morgenstunde. In der letzten Reihe ist der mittlere Fehler in Prozenten dieser Temperaturdifferenz ausgedrückt worden.

Mittlerer Fehler der Formeln (V).

(VIII.)

	Jan.	Febr.	März	April	Mai	Juni	Juli	Aug.	Sept.	Okt.	Nov.	Dez.
$\sqrt{\frac{\Sigma v^2}{n}}$ in h^0	$\pm 3,3$	$\pm 3,9$	$\pm 8,4$	$\pm 11,5$	$\pm 7,7$	$\pm 11,6$	$\pm 10,7$	$\pm 11,8$	$\pm 9,5$	$\pm 8,1$	$\pm 5,2$	$\pm 2,8$
D	1,67	3,85	5,47	6,92	7,94	9,17	8,64	7,59	7,05	4,13	2,09	1,16
Mittlerer Fehler in % von D	2,0%	1,0%	1,5%	1,7%	1,0%	1,3%	1,2%	1,6%	1,3%	2,0%	2,5%	2,4%

Die mittleren Fehler erreichen hier viel höhere absolute Werte als bei der Darstellung des nächtlichen Temperaturganges, deren mittlere Fehler in Tabelle (III) angegeben waren. Der höchste mittlere Fehler im August ist fast 12 Hundertstelgrad (also doppelt so groß wie der größte mittlere Fehler in Tabelle (III)); da aber die mittlere Temperaturschwankung am Tage in diesem Monat $7,59^0$ beträgt, so ist der Fehler nur 1,6% dieser Schwankung. Die schlechtesten Darstellungen liefern hier November und Dezember mit 2,5% bezw. 2,4% mittlerem Fehler. Die größten mittleren Fehler in Tabelle (III) gehen über 3% hinaus, die kleinsten mittleren Fehler liegen dagegen unter 1%, welches der geringste Fehler in Tabelle (VIII) ist. Wenn man noch bedenkt, daß die Formeln (II) dadurch rechnerisch verbessert sind, daß die Basis der Exponentialfunktion für die einzelnen Monate besonders bestimmt worden ist, während in den Formeln (V) überall $c = 0,869$ gesetzt worden ist, so kann man behaupten, daß die Gleichung (16) die Temperatur bei Tage ebenso gut darstellt, wie die Gleichung (8) die Temperatur während der Nacht.

Endlich sollen die Darstellungen (V) noch mit den Darstellungen nach der Besselschen Formel verglichen werden, welche Birkeland a. a. O. für die einzelnen Monate berechnet hat. Ich wähle zum Vergleich einige Monate aus und zwar den Mai, welcher durch Formel (V) gut dargestellt wird (mittlerer Fehler = 1%), August und September, deren Darstellungen der Genanigkeit nach in der Mitte stehen (1,6% bezw. 1,3%), und November, der durch Gleichung (V) weniger gut dargestellt wird (2,5%).

Die Besselschen Formeln für diese Monate sind:

Mai $\vartheta = 10,50 + 4,167 \cdot \sin(\tau + 231^0\,31') + 0,285 \cdot \sin(2\tau + 119^0\,36') + 0,235 \cdot \sin(3\tau + 28^0\,21')$

August $\vartheta = 15,88 + 3,788 \cdot \sin(\tau + 233^0\,38') + 0,467 \cdot \sin(2\tau + 80^0\,19') + 0,231 \cdot \sin(3\tau + 24^0\,55')$

September $\vartheta = 11,47 + 3,389 \cdot \sin(\tau + 231^0\,41') + 0,779 \cdot \sin(2\tau + 56^0\,51') + 0,135 \cdot \sin(3\tau + 5^0\,44')$

November $\vartheta = 0,07 + 0,897 \cdot \sin(\tau + 224^0\,46') + 0,397 \cdot \sin(2\tau + 44^0\,6') + 0,158 \cdot \sin(3\tau + 221^0\,9')$

wobei $\tau = 0$ Mitternacht bedeutet, $\tau = 15^0 = 1^a$ usw.

Nach diesen Formeln sind die Temperaturen der Tagesstunden berechnet worden und die mittleren Fehler in derselben Weise wie vorher gebildet worden. Diese Berechnung ist zuerst nur für zwei periodische Glieder angestellt worden, also mit Fortlassung der dritteltägigen Welle, dann aber für die vollen Formeln mit drei periodischen Gliedern wiederholt worden. Die letzten Kolonnen der folgenden Tabelle enthalten zum Vergleich die entsprechenden Zahlen aus (VIII).

Mittlere Fehler

	D	nach der Besselschen Formel mit 2 periodischen Gliedern		nach der Besselschen Formel mit 3 periodischen Gliedern		nach der Formel (V)	
		in h°	in % von D	in h°	in % von D	in h°	in % von D
Mai	7,94	± 16,0	2,0%	± 9,3	1,2%	± 7,7	1,0%
August	7,59	± 18,2	2,4%	± 7,2	0,9%	± 11,8	1,6%
September	7,05	± 18,6	2,6%	± 12,8	1,8%	± 9,5	1,3%
November	2,09	± 14,6	6,8%	± 5,0	2,4%	± 5,2	2,5%

(IX.)

Wenn nur zwei periodische Glieder genommen werden, ist die durch die Besselsche Formel erreichte Genauigkeit stets viel geringer als die Genauigkeit der Formel (V). Die mittleren Fehler betragen meist sogar das Doppelte. Wenn man die dritteltägige Welle hinzunimmt, sind die Fehler ungefähr von derselben Größe wie die Fehler der Formel (V). Die Abnahme der Fehler mit Hinzunahme eines neuen periodischen Gliedes, wie sie durch die zweite und vierte Kolonne deutlich gemacht wird, ist eine Folge der Konvergenz der Fourierschen Reihen. Bei Verwendung eines vierten und fünften periodischen Gliedes würden die Fehler immer weiter herabgedrückt werden können. Doch hat eine solche Darstellung nur rechnerische Bedeutung ohne irgendwelche Beziehung zum physikalischen Charakter der Erscheinung. Dagegen hat die Gleichung (16), wenigstens ihrer allgemeinen Form nach, einen deutlichen Zusammenhang mit den physikalischen Ursachen des Temperaturganges am Tage.

Die in dem letzten Abschnitt mitgeteilten Berechnungen haben also das folgende Resultat:

Die Gleichung $\vartheta = u + b \cdot \cos\left(\frac{\pi t}{12} - a\right) + K \cdot c^t$, welche ein periodisches Glied und ein Exponentialglied enthält, stellt den Temperaturgang am Tage ebenso gut dar wie die Besselsche Formel mit drei periodischen Gliedern.

Mittlerer Fehler der Formeln (V).

(VIII.)

	Jan.	Fe[illegible]	[illegible]	[illegible]g.	Sept.	Okt.	Nov.	Dez.
$\sqrt{\frac{\Sigma v^2}{n}}$ in h^0	$\pm 3{,}3$	$\pm$ [illegible]	[illegible]	[illegible],8	$\pm 9{,}5$	$\pm 8{,}1$	$\pm 5{,}2$	$\pm 2{,}8$
D	1,67	3,[illegible]	[illegible]	[illegible]9	7,05	4,13	2,09	1,16
Mittlerer Fehler in $^0/_0$ von D	2,0 %	1,[illegible]	[illegible]	[illegible] %	1,3 %	2,0 %	2,5 %	2,4 %

Die mittleren Fehler [illegible] Werte als bei der Darstellung des nächtlichen [illegible] Fehler in Tabelle (III) angegeben waren. Der [illegible] fast 12 Hundertstelgrad (also doppelt so groß [illegible]abelle (III)); da aber die mittlere Temperaturschwa[illegible]7,59° beträgt, so ist der Fehler nur 1,6 $^0/_0$ dieser [illegible]Darstellungen liefern hier November und Dezember [illegible]er. Die größten mittleren Fehler in Tabelle (III) ge[illegible] mittleren Fehler liegen dagegen unter 1 $^0/_0$, welc[illegible]e (VIII) ist. Wenn man noch bedenkt, daß die Fo[illegible]ssert sind, daß die Basis der Exponentialfunktion [illegible]s bestimmt worden ist, während in den Formeln [illegible]orden ist, so kann man behaupten, daß die Gl[illegible]ei Tage ebenso gut darstellt, wie die Glei[illegible]end der Nacht.

Endlich sollen die [illegible] Darstellungen nach der Besselschen Formel ver[illegible]a. a. O. für die einzelnen Monate berechnet hat. I[illegible]nate aus und zwar den Mai, welcher durch Form[illegible] Fehler = 1 $^0/_0$), August und September, deren Da[illegible] der Mitte stehen (1,6 $^0/_0$ bezw. 1,3 $^0/_0$), und Novemb[illegible]ut dargestellt wird (2,5 $^0/_0$).

Die Besselschen F[illegible]

Mai $\vartheta = 10{,}50 +$ [illegible] . sin $(2\tau + 119^0\ 36')$
[illegible]5 . sin $(3\tau + 28^0\ 21')$

August $\vartheta = 15{,}88 +$ [illegible]7 . sin $(2\tau + 80^0\ 19')$
[illegible]1 . sin $(3\tau + 24^0\ 55')$

September $\vartheta = 11{,}47 +$ [illegible]9 . sin $(2\tau + 56^0\ 51')$
[illegible]5 . sin $(3\tau + 5^0\ 44')$

November $\vartheta = 0{,}07 +$ [illegible]7 . sin $(2\tau + 44^0\ 6')$
[illegible]8 . sin $(3\tau + 221^0\ 9')$

wobei $\tau = 0$ Mitternacht [illegible]