eine Folge der Ausstrahlung und Leitung. Das Exponentialglied bewirkt, daß die Temperaturkurve vor und nach dem Maximum unsymmetrisch ist und verschiebt außerdem das Maximum noch etwas. Wenn K positiv ist, steigt die Temperatur langsamer, als sie zum Abend fällt; wenn K negativ ist, ist der Anstieg bis zum Maximum steiler als der Abfall am Nachmittag.

Numerische Berechnung des Temperaturganges während der Nacht.

Die in den vorigen Abschnitten entwickelten Formeln erhalten ihre Bedeutung erst durch die Anwendung zur numerischen Berechnung. Da an einem einzelnen Tage der Temperaturgang zu sehr durch anderweitige Umstände wie wechselnde Bewölkung und Winde mitbestimmt wird, sind für die Berechnung einer Formel nur mittlere Werte verwendbar, bei welchen sich die Nebeneinflüsse möglichst ausgeglichen haben. Weilenmann und Angot, welche in den zu Anfang genannten Arbeiten numerische Berechnungen für den nächtlichen Gang nach der Formel

$$\vartheta = \vartheta_0' + A \, . \, b^t \tag{8}$$

geliefert haben, legen mehrjährige mittlere Stundenwerte der einzelnen Monate zu Grunde. Dabei hat sich gezeigt, daß der Wert von b in den verschiedenen Monaten, bei verschiedenen Bewölkungsgraden und an verschiedenen Orten nahezu konstant ist. Angot findet $b = 0{,}869$. Trabert hat a. a. O. ebenfalls Berechnungen angestellt; doch hat er nicht den Temperaturgang bestimmt, sondern nur die Größe von b für 42 europäische und asiatische Stationen berechnet, um daraus den Strahlungskoeffizienten σ herzuleiten. Auch er findet, daß die verschiedenen Werte von b einander sehr nahe liegen und daß ihre kleinen Schwankungen kein bestimmtes Gesetz, etwa eine Abhängigkeit von der Temperatur oder der Dichte der Luft, erkennen lassen. Für die folgenden Berechnungen lege ich den von Angot gefundenen Wert $b = 0{,}869$ zu Grunde.

Meine erste Berechnung hat den Zweck, zu erfahren, mit welchem Grade der Genauigkeit die Formel (8) den Temperaturgang während der Nacht wiedergibt, um daran einen Maßstab für die Beurteilung der Tagesformel zu gewinnen. Ich benutze die zehnjährigen mittleren Stundenwerte der Monate nach den Beobachtungen am meteorologischen Observatorium in Potsdam. Aus den in den ersten zehn Jahrgängen der Veröffentlichungen[9]) des Observatoriums mitgeteilten Werten habe ich die Mittel gebildet und den jährlichen Gang während der einzelnen Monate durch lineare Interpolation eliminiert. Die so erhaltenen Werte für die Temperatur der Nachtstunden in den einzelnen Monaten sind in der folgenden Tabelle zusammengestellt:

[9]) Ergebnisse der meteorologischen Beobachtungen in Potsdam. 1893—1902.

Nächtlicher Temperaturgang in Potsdam (1893—1902) (Celsiusgrade).

(I.)

	Jan.	Febr.	März	April	Mai	Juni	Juli	Aug.	Sept.	Okt.	Nov.	Dez.
5p	–0,91	—	—	—	—	—	—	—	—	—	4,11	0,49
6p	–1,13	0,34	—	—	—	—	—	—	—	8,96	3,77	0,29
7p	–1,34	0,00	4,04	—	—	—	—	—	13,34	8,55	3,52	0,17
8p	–1,50	–0,31	3,54	7,96	12,08	—	—	16,48	12,70	8,24	3,29	0,09
9p	–1,57	–0,57	3,16	7,31	11,17	15,13	16,64	15,83	12,30	8,01	3,12	0,01
10p	–1,78	–0,84	2,72	6,63	10,38	14,29	15,93	15,24	11,83	7,67	2,94	–0,13
11p	–1,93	–1,04	2,43	6,11	9,79	13,68	15,46	14,73	11,41	7,41	2,76	–0,29
Mitternacht	–2,06	–1,22	2,14	5,67	9,24	13,17	15,00	14,33	11,10	7,18	2,61	–0,33
1a	–2,18	–1,34	1,94	5,30	8,80	12,73	14,55	13,94	10,77	6,97	2,52	–0,37
2a	–2,26	–1,46	1,70	4,94	8,37	12,26	14,17	13,60	10,49	6,82	2,42	–0,47
3a	–2,33	–1,53	1,47	4,66	8,03	11,87	13,84	13,25	10,31	6,64	2,35	–0,57
4a	–2,36	–1,61	1,27	4,40	7,74	11,62	13,54	13,01	10,12	6,52	2,26	–0,62
5a	–2,38	–1,67	1,10	4,14	—	—	—	—	9,92	6,39	2,15	–0,69
6a	–2,44	–1,75	0,97	—	—	—	—	—	—	6,28	2,08	–0,73
7a	(–2,39)	–1,79	—	—	—	—	—	—	—	—	2,03	–0,73

In der Formel (8) soll t = 0 Mitternacht bedeuten und die Zeit zum Morgen hin positiv, zum Abend hin negativ gerechnet werden. Zur Berechnung habe ich die Differenzen je zweier aufeinander folgender Nachtstunden gebildet.

$$\vartheta_t - \vartheta_{t+1} = A \,.\, (b^t - b^{t+1})$$
$$\vartheta_{t+1} - \vartheta_{t+2} = A \,.\, (b^{t+1} - b^{t+2})$$
$$\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots$$

Da b = 0,869 gesetzt werden sollte, ist in diesen Gleichungen nur A unbestimmt. A habe ich bestimmt, indem ich das arithmetische Mittel der aus den einzelnen Gleichungen berechneten Werte genommen habe. Diesen Mittelwert von A und den Wert b = 0,869 habe ich als Annäherungswerte betrachtet. Indem ich dann A durch A + x und b durch b + y ersetzte, habe ich nach der Methode der kleinsten Quadrate die Zuschläge x und y berechnet. Auf diese Weise habe ich die folgenden Formeln erhalten.

Nächtlicher Temperaturgang in Potsdam.

(II.)

Januar	$\vartheta = -\,2{,}83 + 0{,}81 \,.\, 0{,}886^t$
Februar	$\vartheta = -\,2{,}10 + 0{,}93 \,.\, 0{,}852^t$
März	$\vartheta = -\,0{,}05 + 2{,}20 \,.\, 0{,}884^t$
April	$\vartheta = 2{,}59 + 3{,}10 \,.\, 0{,}872^t$
Mai	$\vartheta = 6{,}21 + 3{,}03 \,.\, 0{,}851^t$
Juni	$\vartheta = 10{,}18 + 2{,}95 \,.\, 0{,}846^t$
Juli	$\vartheta = 11{,}61 + 3{,}35 \,.\, 0{,}874^t$
August	$\vartheta = 11{,}11 + 3{,}20 \,.\, 0{,}879^t$
September	$\vartheta = 8{,}74 + 2{,}34 \,.\, 0{,}874^t$
Oktober	$\vartheta = 5{,}36 + 1{,}84 \,.\, 0{,}896^t$
November	$\vartheta = 1{,}68 + 0{,}94 \,.\, 0{,}873^t$
Dezember	$\vartheta = -\,1{,}02 + 0{,}68 \,.\, 0{,}896^t$

In diesen Gleichungen bedeutet das erste Glied die Temperatur ϑ_0 der Schicht, gegen welche die Ausstrahlnng stattfindet, also die Temperatur, welcher sich die nächtliche Temperaturkurve gegen Morgen asymptotisch nähert. ϑ_0 erreicht im Januar mit — 2,83° ein Minimum und im Juli mit 11,61° ein Maximum. Aus der Gleichung (8) folgt für Mitternacht ($t = 0$) $\vartheta_{12} = \vartheta_0 + A$; d. h. A ist der Ueberschuß der Lufttemperatur um Mitternacht über die asymptotische Temperatur. Dieser Ueberschuß erreicht den höchsten Wert im Juli mit 3,35° und den tiefsten Wert im Dezember mit 0,68°; der Dezember ist der Monat des geringsten nächtlichen Temperaturfalles. Der Faktor b schwankt zwischen 0,846 im Juni und 0,896 im Oktober und Dezember. Ein reeller jährlicher Gang ist nicht erkennbar. Es bleibt also wahrscheinlich, daß die kleinen Abweichungen von dem mittleren Wert $b = 0{,}869$ rechnerische Zufälligkeiten sind, die in unregelmäßigen sekundären Einflüssen ihre Ursache haben.

Bei Weilenmann und Angot ist als Nullpunkt der Zeit die erste Nachtstunde gewählt. Dasselbe läßt sich bei den obigen Formeln durch eine leichte Koordinatentransformation erreichen.

Die durch die Formeln erreichte Genauigkeit der Darstellung läßt sich aus der folgenden Tabelle ersehen. Zuerst habe ich die sich aus den Formeln ergebenden Stundenwerte berechnet nnd die einzelnen Fehler (v = beobachteter Wert minus berechneter Wert) gebildet. Als mittlerer Fehler ist dann der Ausdruck $\pm \sqrt{\frac{\Sigma v^2}{n}}$ berechnet worden, wobei Σv^2 die Summe der einzelnen Fehlerquadrate, n die Anzahl der für den Monat berechneten Nachtstunden bedeutet. Diese Fehler sind in Einheiten der zweiten Dezimalen, also in Hundertstelgrad (h^0), angegeben. Da die Fehler naturgemäß im Sommer größer werden, wo der Temperaturfall vom Abend zum Morgen steiler ist, habe ich in der zweiten Reihe den Temperaturfall, also die Differenz D der ersten und letzten Nachtstunde hinzugefügt. Die letzte Reihe enthält den mittleren Fehler in Prozenten der Temperaturdifferenz, ein Maß, das mir für den Vergleich der Genauigkeit besonders geeignet erscheint.

Mittlerer Fehler der Formeln (II).

	Jan.	Febr.	März	April	Mai	Juni	Juli	Aug.	Sept.	Okt.	Nov.	Dez.
$\sqrt{\frac{\Sigma v^2}{n}}$ in h°	±4,8	±2,4	±2,9	±2,5	±4,4	±5,8	±3,1	±1,8	±3,0	±3,7	±2,1	±4,2
D in°	1,53	2,13	3,07	3,82	4,34	3,51	3,10	3,47	3,42	2,68	2,08	1,22
Mittlerer Fehler in % von D	3,1%	1,1%	1,0%	0,7%	1,0%	1,6%	1,0%	0,6%	0,9%	1,4%	1,0%	3,4%

(III.)

Der absolute mittlere Fehler erreicht im Juni fast 6 Hundertstelgrad; doch ist dieser Fehler bei dem starken Temperaturfall der Sommermonate nur 1,6% der Temperaturschwankung vom Abend zum Morgen. Dagegen ist im Dezember, wo die

Temperaturdifferenz vom Abend zum Morgen 1,22° beträgt, der Fehler ± 4,2 Hundertstelgrad 3,4 % der nächtlichen Temperaturschwankung. Demnach stellt die Formel für den Dezember den nächtlichen Temperaturgang weniger befriedigend dar als die Formel für den Juni. Die Tabelle zeigt, daß die Genauigkeit der Formeln für Januar und Dezember am wenigsten befriedigt.

Numerische Berechnung des Temperaturganges am Tage.

Die früheren theoretischen Ueberlegungen haben als Resultat die Vermutung ergeben, daß sich der Temperaturgang durch eine Formel von dem Typus

(16) $$\vartheta = u + b \, . \cos \left(\frac{\pi t}{12} - a \right) + K \, . \, c^t$$

darstellen läßt. Zur Berechnung nach dieser Formel benutze ich die von Birkeland in der Meteorol. Zeitschrift 1906 mitgeteilten mittleren Stundenwerte der Temperatur in Kristiania. Da Birkeland dort auch den Temperaturgang in den einzelnen Monaten nach der Besselschen Formel berechnet hat, so läßt sich an diesem Beispiel die Genauigkeit der Darstellungen nach Formel (2) und Formel (16) leicht vergleichen. Die folgende Tabelle gibt die für die Berechnung zu Grunde gelegten Stundenwerte an.

Temperaturgang am Tage in Kristiania. (1884—1903) (Celsiusgrade).
(Mittlere beobachtete Werte.)

(IV.)

	Jan.	Febr.	März	April	Mai	Juni	Juli	Aug.	Sept.	Okt.	Nov.	Dez.
4a	—	—	—	—	—	10,60	12,60	—	—	—	—	—
5a	—	—	—	1,04	6,52	11,48	13,23	12,20	—	—	—	—
6a	—	—	—	1,35	7,59	12,70	14,33	12,90	8,37	—	—	—
7a	—	—	−3,78	2,17	8,74	13,96	15,58	14,07	9,08	3,89	—	—
8a	−5,01	−5,98	−3,23	3,19	9,97	15,25	16,75	15,34	10,36	4,31	−0,61	−4,03
9a	−4,95	−5,58	−2,18	4,35	11,34	16,64	18,01	16,55	11,72	5,17	−0,43	−3,97
10a	−4,69	−4,86	−1,07	5,43	12,42	17,75	19,20	17,73	12,95	6,11	+0,02	−3,80
11a	−4,26	−3,95	−0,08	6,37	13,26	18,71	20,06	18,65	13,88	6,88	+0,58	−3,53
Mittag	−3,78	−3,09	+0,75	7,06	13,93	19,28	20,69	19,25	14,60	7,51	+1,11	−3,20
1p	−3,48	−2,48	+1,31	7,58	14,33	19,72	21,10	19,68	15,18	7,90	+1,43	−2,96
2p	−3,34	−2,13	+1,69	7,93	14,46	19,77	21,24	19,79	15,42	8,02	+1,48	−2,87
3p	−3,47	−2,23	+1,61	7,96	14,45	19,71	21,03	19,59	15,31	7,77	+1,23	−3,00
4p	−3,75	−2,60	+1,32	7,77	14,18	19,45	20,77	19,30	14,75	7,32	+0,86	−3,13
5p	—	—	+0,80	7,17	13,64	18,90	20,12	18,57	13,94	6,66	—	—
6p	—	—	—	6,59	13,08	18,21	19,36	17,91	12,94	—	—	—
7p	—	—	—	5,69	12,27	17,37	18,54	16,98	—	—	—	—
8p	—	—	—	—	—	16,12	17,33	—	—	—	—	—

Für die Berechnung habe ich die Formel (16) ersetzt durch die ihr äquivalente

(17) $$\vartheta = u + p \, . \cos \frac{\pi t}{12} + q \, . \sin \frac{\pi t}{12} + K \, . \, c^t ,$$

aus welcher sich die Form (16) ableiten läßt, wenn man $p = b \, . \cos a$ und $q = b \, . \sin a$ setzt. Hierin soll $t = 0$ Mittag bedeuten und die Zeit zum Abend hin positiv,