

Man kann die Rechnung sofort mit der Ausstrahlung des betrachteten Luftteilchens beginnen, wenn man annimmt, die gesamte Strahlung dieses Luftteilchens sowohl gegen die höhere Atmosphäre als auch gegen den erkalteten Erdboden lasse sich ersetzen durch die Strahlung dieses Luftteilchens gegen eine einzige Hülle von der konstanten Temperatur ϑ_0 . Dann entsteht die Gleichung

$$\frac{d\vartheta_1}{dt} = -m (\vartheta_1 - \vartheta_0) \quad (7)$$

und daraus durch Integration

$$\vartheta_1 = \vartheta_0 + A \cdot e^{-m t} = \vartheta_0 + A \cdot b^t \quad (8)$$

Diese Formel ist bisher stets für die zahlenmäßige Berechnung zu Grunde gelegt worden und stellt den beobachteten Gang mit ausreichender Genauigkeit dar. Maurer und Trabert benutzen diese Gleichung, um daraus die Strahlungsgröße der atmosphärischen Luft zu berechnen. σ bedeute den Strahlungskoeffizienten der Masseneinheit der Luft, c die spezifische Wärme der Luft; dann setzt Trabert

$$m = \frac{\sigma}{c}, \text{ also } b = e^{-\frac{\sigma}{c}}$$

und berechnet aus dem durch den nächtlichen Gang gefundenen Wert von b die Größe von σ . Es ist in der Einleitung schon gesagt worden, daß die Ergebnisse dieser Berechnung noch nicht in Einklang gebracht sind mit experimentellen Berechnungen. Sicher ist, daß diese Berechnungen nur erste Annäherungen sein können, da ja die Formeln (7) und (8) den Verlauf auch nur näherungsweise wiedergeben können. Außerdem ist m voraussichtlich eine kompliziertere Funktion von ϑ als für die Berechnung zu Grunde gelegt worden ist.

Wesentlich für das Ziel dieser Arbeit ist es, zu konstatieren, daß unter den einfachsten Annahmen ein brauchbarer Typus der nächtlichen Gleichung erhalten werden kann, daß aber über den Zusammenhang der Koeffizienten mit den physikalischen Eigenschaften der Luft Zweifel bestehen bleiben.

Die Form der Temperaturgleichung am Tage.

Die Temperaturzunahme während des Tages ist eine Folge der Wärmestrahlung durch die Sonne. Die Größe dieser Insolation ist nach physikalischen Gesetzen proportional mit dem Sinus der Sonnenhöhe über dem Horizont, wenn von der Absorption der Sonnenstrahlen in der Atmosphäre abgesehen wird. Die Sonnenhöhe h ist der Komplementwinkel zur Zenitdistanz z , und diese liegt in dem astronomischen Dreieck der sphärischen Trigonometrie. Also läßt sich die Sonnenhöhe durch die geographische Breite φ und die Sonnendeklination δ ausdrücken. Es ist

$$\sin h = \cos z = \sin \varphi \cdot \sin \delta + \cos \varphi \cdot \cos \delta \cdot \cos \tau,$$

wo τ den Stundenwinkel des Sonnenstandes in Graden bedeutet, gerechnet vom Meridian des Ortes. ($\tau = \frac{\pi t}{12}$; $\tau = 0$ bedeutet Mittag; 1 Stunde = 15°). Die der

Flächeneinheit des Erdbodens in dem Zeiteilchen dt zugestrahlte Wärmemenge ist also

$$dQ = C \cdot \sin h \cdot dt = C (\sin \varphi \sin \delta + \cos \varphi \cdot \cos \delta \cdot \cos \frac{\pi t}{12}) dt.$$

Diese Wärmemenge wird zur Temperaturerhöhung des Bodens benutzt. Also ist

$$(9) \quad c \cdot d\vartheta_b = C (\sin \varphi \cdot \sin \delta + \cos \varphi \cdot \cos \delta \cdot \cos \frac{\pi}{12} t) dt$$

$$\frac{d\vartheta_b}{dt} = \frac{C}{c} (\sin \varphi \cdot \sin \delta + \cos \varphi \cdot \cos \delta \cdot \cos \frac{\pi}{12} t)$$

Da die geographische Breite φ für den Beobachtungsort konstant ist und die Sonnen-deklination δ innerhalb eines Tages als konstant angesehen werden kann, so ersetzen wir die Gleichung (9) durch

$$(10) \quad \frac{d\vartheta_b}{dt} = M + N \cdot \cos \frac{\pi}{12} \cdot t$$

wo M und N Konstanten bedeuten.

Die rechte Seite der Gleichung (10) ist stets positiv, so lange die Sonne über dem Horizont steht. Also würde unter dem Einfluß der Insolation allein die Temperatur vom Sonnenaufgang bis zum Sonnenuntergang steigen, zuerst langsam, am Mittag am schnellsten, gegen Abend wieder langsamer.

Diesem fortdauernden Temperaturzuwachs stellt sich die Wärmeabgabe durch Leitung und Strahlung entgegen. Die Temperaturabgabe durch Leitung vollzieht sich gemäß der Differentialgleichung der Wärmeleitung

$$\frac{\delta\vartheta}{\delta t} = \alpha \cdot \frac{\delta^2\vartheta}{\delta x^2},$$

worin x die Länge in der Richtung des Temperaturflusses, also in unserm Fall vertikal zur Erdoberfläche bezeichnet; die Temperaturänderung ist also proportional zum zweiten Differentialquotienten der jeweiligen Temperaturverteilung, d. h. proportional zur örtlichen Aenderung des Temperaturgefälles in vertikaler Richtung.

Die Ausstrahlung können wir wieder proportional zur Differenz der Bodentemperatur gegen eine höhere Luftschicht konstanter Temperatur setzen. Denn die täglichen Aenderungen der Temperatur reichen ja nur bis zu einer verhältnismäßig geringen Höhe.

Berücksichtigen wir zunächst nur die Ausstrahlung als die Ursache, welche der dauernden Temperaturerhöhung während des Tages entgegenwirkt, dann geht die Gleichung (10) über in

$$(11) \quad \frac{d\vartheta_b}{dt} = M + N \cdot \cos \frac{\pi}{12} \cdot t - m (\vartheta_b - \vartheta_0)$$

Zur Integration setzen wir $\vartheta_b - \vartheta_0 = z$; $d\vartheta_b = dz$.

Dann ist

$$\frac{dz}{dt} = M + N \cdot \cos \frac{\pi}{12} t - m \cdot z.$$

Nach bekannter Methode wird gesetzt

$$z = y \cdot e^{-mt}$$

$$\frac{dz}{dt} = -my \cdot e^{-mt} + \frac{dy}{dt} \cdot e^{-mt}.$$

Also

$$\frac{dy}{dt} \cdot e^{-mt} - my \cdot e^{-mt} = M + N \cdot \cos \frac{\pi}{12} t - m \cdot y \cdot e^{-mt}$$

Daraus folgt

$$\frac{dy}{dt} \cdot e^{-mt} = M + N \cdot \cos \frac{\pi}{12} \cdot t.$$

$$\frac{dy}{dt} = M \cdot e^{mt} + N \cdot e^{mt} \cdot \cos \frac{\pi}{12} \cdot t.$$

Da bekanntlich

$$\int e^{mt} \cdot \cos \frac{\pi}{12} t dt = e^{mt} \cdot \frac{\frac{\pi}{12} \sin \frac{\pi}{12} t + m \cdot \cos \frac{\pi}{12} \cdot t}{\left(\frac{\pi}{12}\right)^2 + m^2}$$

ist, so folgt

$$y = \frac{M}{m} \cdot e^{mt} + \frac{N \cdot e^{mt}}{\left(\frac{\pi}{12}\right)^2 + m^2} \cdot \left(\frac{\pi}{12} \sin \frac{\pi}{12} t + m \cdot \cos \frac{\pi}{12} \cdot t\right) + K,$$

wo K eine Konstante ist. Also ist

$$z = y \cdot e^{-mt} = \frac{M}{m} + \frac{N}{\left(\frac{\pi}{12}\right)^2 + m^2} \cdot \left(\frac{\pi}{12} \cdot \sin \frac{\pi}{12} t + m \cdot \cos \frac{\pi}{12} t\right) + K \cdot e^{-mt}$$

und, da $z = \vartheta_b - \vartheta_0$ gesetzt war,

$$\vartheta_b = \vartheta_0 + \frac{M}{m} + \frac{N}{\left(\frac{\pi}{12}\right)^2 + m^2} \cdot \left(\frac{\pi}{12} \cdot \sin \frac{\pi}{12} t + m \cdot \cos \frac{\pi}{12} t\right) + K \cdot e^{-mt}$$

Hierin setzen wir

$$\vartheta_0 + \frac{M}{m} = u$$

$$\frac{N \cdot \frac{\pi}{12}}{\left(\frac{\pi}{12}\right)^2 + m^2} = b \cdot \sin a \tag{12}$$

$$\frac{N \cdot m}{\left(\frac{\pi}{12}\right)^2 + m^2} = b \cdot \cos a$$

Dann folgt

$$\vartheta_b = u + b \cdot \left(\sin a \cdot \sin \frac{\pi t}{12} + \cos a \cdot \cos \frac{\pi}{12} t\right) + K e^{-mt} \tag{13}$$
$$\vartheta_b = u + b \cdot \cos \left(\frac{\pi t}{12} - a\right) + K \cdot e^{-mt}$$

als Gleichung für die Temperatur des Erdbodens.

Es ist bisher noch die Wärmeleitung unberücksichtigt geblieben. Es findet hier eine Leitung sowohl in den Boden als auch nach oben hin statt. Ich berücksichtige nur die Wärmeleitung nach außen, welche bestimmt ist durch die Gleichung

$$(14) \quad \frac{\partial \vartheta}{\partial t} = a \cdot \frac{\partial^2 \vartheta}{\partial x^2}$$

wo ϑ die Temperatur in irgend einer Höhe x über dem Boden bedeutet. Die partielle Differentialgleichung (14) soll als Lösung eine Funktion $\vartheta = f(x, t)$ zulassen, welche für $x = 0$ die Temperaturgleichung des Erdbodens ergibt, die wieder der Bedingung (11) entsprechen soll. Da periodische und Exponentialfunktionen einzeln bekannte Lösungen der Gleichung (14) sind, so läßt sich daraus auch eine Lösung zusammensetzen, die für $x = 0$ die Form (13) annimmt. Die Funktion

$$(15) \quad \vartheta = u + b \cdot e^{-x \cdot \sqrt{\frac{1}{2a}}} \cdot \cos\left(\frac{\pi t}{12} - a - x \sqrt{\frac{1}{2a}}\right) + K \cdot e^{-mt} \left(K_1 \sin x \sqrt{\frac{m}{a}} + \cos x \sqrt{\frac{m}{a}} \right)$$

nimmt für $x = 0$ die Form (13) an und befriedigt die Gleichung (14), wie sich durch Bildung der Ableitungen leicht bestätigen läßt. Die Gleichung (15) zeigt, daß unter den gemachten Voraussetzungen in allen Höhen $x = x_0$ über dem Boden der Typus der Temperaturgleichung derselbe bleibt. Die Unterschiede in verschiedenen Höhen liegen nur in Änderungen der Koeffizienten der Gleichung (13). Nach (15) bedeuten diese Koeffizientenänderungen mit der Höhe für das periodische Glied eine Abnahme der Amplitude und eine Phasenverschiebung, für das Exponentialglied eine wellenförmige Bewegung des Wärmeflusses in vertikaler Richtung.

Es ist schon genügend betont worden, daß es unmöglich sein wird, bei Zugrundelegung so einfacher Verhältnisse ein zutreffendes Gesetz der Koeffizientenänderungen zu erhalten. Dagegen wird die Frage berechtigt sein, ob eine Gleichung vom Typus (13) imstande ist, die Beobachtungen annähernd wiederzugeben. Das Ziel der vorherigen Betrachtungen kann als erreicht gelten, wenn es gelingt, zahlenmäßige Beobachtungen der Temperatur während des Tages durch eine Gleichung von der Form

$$(16) \quad \begin{aligned} \vartheta &= u + b \cdot \cos\left(\frac{\pi t}{12} - a\right) + K \cdot e^{-mt} \\ &= u + b \cdot \cos\left(\frac{\pi t}{12} - a\right) + K \cdot c^t \end{aligned}$$

darzustellen. Der Versuch dazu soll weiter unten gemacht werden.

Die Bedeutung der Gleichung (16) ist einleuchtend. u ist konstant; das periodische Glied $b \cdot \cos\left(\frac{\pi t}{12} - a\right)$ bedeutet eine Temperaturwelle, die für $t = \frac{12}{\pi} a$ ihr Maximum erreicht. Ohne Ausstrahlung und Leitung würde das Maximum der Temperatur erst am Abend erreicht. Daß das Maximum des periodischen Gliedes sich schon auf die Zeit $t = \frac{12}{\pi} a$ verlegt, die in den Nachmittagsstunden liegt, ist

eine Folge der Ausstrahlung und Leitung. Das Exponentialglied bewirkt, daß die Temperaturkurve vor und nach dem Maximum unsymmetrisch ist und verschiebt außerdem das Maximum noch etwas. Wenn K positiv ist, steigt die Temperatur langsamer, als sie zum Abend fällt; wenn K negativ ist, ist der Anstieg bis zum Maximum steiler als der Abfall am Nachmittag.

Numerische Berechnung des Temperaturganges während der Nacht.

Die in den vorigen Abschnitten entwickelten Formeln erhalten ihre Bedeutung erst durch die Anwendung zur numerischen Berechnung. Da an einem einzelnen Tage der Temperaturgang zu sehr durch anderweitige Umstände wie wechselnde Bewölkung und Winde mitbestimmt wird, sind für die Berechnung einer Formel nur mittlere Werte verwendbar, bei welchen sich die Nebeneinflüsse möglichst ausgeglichen haben. Weilenmann und Angot, welche in den zu Anfang genannten Arbeiten numerische Berechnungen für den nächtlichen Gang nach der Formel

$$\vartheta = \vartheta_0 + A \cdot b^t \tag{8}$$

geliefert haben, legen mehrjährige mittlere Stundenwerte der einzelnen Monate zu Grunde. Dabei hat sich gezeigt, daß der Wert von b in den verschiedenen Monaten, bei verschiedenen Bewölkungsgraden und an verschiedenen Orten nahezu konstant ist. Angot findet $b = 0,869$. Trabert hat a. a. O. ebenfalls Berechnungen angestellt; doch hat er nicht den Temperaturgang bestimmt, sondern nur die Größe von b für 42 europäische und asiatische Stationen berechnet, um daraus den Strahlungskoeffizienten σ herzuleiten. Auch er findet, daß die verschiedenen Werte von b einander sehr nahe liegen und daß ihre kleinen Schwankungen kein bestimmtes Gesetz, etwa eine Abhängigkeit von der Temperatur oder der Dichte der Luft, erkennen lassen. Für die folgenden Berechnungen lege ich den von Angot gefundenen Wert $b = 0,869$ zu Grunde.

Meine erste Berechnung hat den Zweck, zu erfahren, mit welchem Grade der Genauigkeit die Formel (8) den Temperaturgang während der Nacht wiedergibt, um daran einen Maßstab für die Beurteilung der Tagesformel zu gewinnen. Ich benutze die zehnjährigen mittleren Stundenwerte der Monate nach den Beobachtungen am meteorologischen Observatorium in Potsdam. Aus den in den ersten zehn Jahrgängen der Veröffentlichungen⁹⁾ des Observatoriums mitgeteilten Werten habe ich die Mittel gebildet und den jährlichen Gang während der einzelnen Monate durch lineare Interpolation eliminiert. Die so erhaltenen Werte für die Temperatur der Nachtstunden in den einzelnen Monaten sind in der folgenden Tabelle zusammengestellt:

⁹⁾ Ergebnisse der meteorologischen Beobachtungen in Potsdam. 1893—1902.