

Einleitung.

Die Darstellung periodischer Erscheinungen durch die Besselsche Form wird in der Meteorologie häufig auch auf den täglichen Gang der Lufttemperatur angewandt. ϑ bedeute die Temperatur, ϑ_0 die mittlere Tagestemperatur, t die Tageszeit ausgedrückt durch Winkelmaß (24 Stunden = 2π). Dann pflegt man die Temperatur darzustellen durch die Formel

$$\vartheta = \vartheta_0 + p_1 \cdot \sin t + p_2 \cdot \sin 2t + p_3 \cdot \sin 3t + \dots + q_1 \cdot \cos t + q_2 \cdot \cos 2t + q_3 \cdot \cos 3t + \dots, \quad (1)$$

in der sich die Konstanten $\vartheta_0, p_1, p_2, \dots, q_1, q_2, \dots$ in bekannter Weise einfach berechnen lassen. Diese Gleichung wird durch eine leichte Umformung auf die Form gebracht

$$\vartheta = \vartheta_0 + A_1 \cdot \sin(t + a_1) + A_2 \cdot \sin(2t + a_2) + A_3 \cdot \sin(3t + a_3) + \dots \quad (2)$$

Die trigonometrischen Glieder dieser Reihe bedeuten Temperaturwellen mit den Amplituden A_1, A_2, A_3, \dots und den Phasenzeiten a_1, a_2, a_3, \dots . Das erste Glied ist eine ganztägige Welle, das zweite Glied eine halbtägige Welle, die Schwingungsdauer der dritten Welle ist $\frac{1}{3}$ Tag usw. Der tägliche Gang der Temperatur stellt sich also dar als eine Ueberlagerung mehrerer Wellenbewegungen von verschiedener Amplitude und Phase.

Die erste Welle gibt in großen Zügen den allgemeinen Charakter der Erscheinung wieder und hat dementsprechend die größte Amplitude. Die folgenden Wellen bringen die kleineren Abweichungen von dieser Hauptschwingung zum Ausdruck. Bei der praktischen Verwendung berechnet man bis zu drei oder vier trigonometrischen Gliedern ¹⁾ und erzielt dadurch eine ausreichende Genauigkeit der Darstellung.

Diese Darstellung hat aber den Fehler, daß sie ein irrtümliches Bild von dem Vorgang gibt. Die Uebereinstimmung der aus der Formel berechneten Werte mit den beobachteten Temperaturwerten erweckt den Anschein, als ob wirklich mehrfache tägliche Temperaturwellen beständen. Die Uebereinstimmung ist aber kein Beweis für die letztere Annahme. Denn bei jeder beliebigen periodischen Funktion, die nicht unendlich wird, nicht unendlich viele Maxima und Minima besitzt und nicht unendlich oft durch Sprung unstetig wird, ist es möglich, sie durch eine konvergente unendliche trigonometrische Reihe der Form (1) darzustellen. (Fouriersche Reihe). Also wird

¹⁾ Neuere Beispiele aus der meteorologischen Zeitschrift:

B. J. Birkeland berechnet für den täglichen Gang der Lufttemperatur in Kristiania und einigen anderen norwegischen Stationen drei trigonometrische Glieder. (Met. Zeitschr. 1906 S. 540).

W. Brückmann berechnet desgl. für Potsdam vier Glieder. (Met. Zeit. 1907).

es bei jeder den obigen sog. Dirichletschen Bedingungen genügenden Funktion möglich sein, sie bei Anwendung einer genügenden Anzahl von Gliedern durch die Besselsche Formel darzustellen. Das Gelingen dieser Darstellung hat dann aber nur eine rechnerische Bedeutung und beweist nichts über das Wesen des durch die Funktion wiedergegebenen Vorganges.

Tatsächlich kann es sich bei dem täglichen Temperaturgang gar nicht um eine Ueberlagerung mehrerer Wellenbewegungen handeln. Denn der tägliche Temperaturgang setzt sich aus zwei ihrem Wesen nach verschiedenen Teilen zusammen, dem Temperaturgang während der Nacht und am Tage. Während der Nacht, wo die erkaltenden Luftmassen auf dem Boden lagern, ist der Temperaturverlauf wesentlich dadurch bedingt, daß durch Ausstrahlung Wärme abgegeben wird. Daher muß die Temperatur vom Abend bis zum Morgen dauernd fallen; ihr geometrisches Bild wird eine sich bis zum Morgen senkende Linie sein; die mathematische Untersuchung läßt den Verlauf einer Exponentialkurve erkennen. Am Tage ist die Erscheinung viel zusammengesetzter. Der am stärksten erwärmte Boden ruft dynamische Bewegungen der Luftmassen in vertikaler Richtung hervor; außerdem nimmt die Wärmeleitung einen größeren Anteil als während der Nacht. Aber auch abgesehen von diesen komplizierten Verhältnissen bleiben noch zwei Ursachen für den Wärme- gang übrig, nämlich erstens die Wärmestrahlung der Sonne, die Insolation, welche eine Temperatursteigerung bedingt, und zweitens die Ausstrahlung, welche eine Temperaturverminderung zur Folge hat. Die Wärmestrahlung der Sonne hängt vom Sonnenstande ab, ist also eine während des Tages periodische Funktion; die Ausstrahlung ist eine unperiodische Erscheinung. Wenn man versuchen will, den Temperaturgang durch eine Formel darzustellen, die seinen periodischen und unperiodischen Elementen Rechnung trägt, wird man den Temperaturgang bei Nacht und am Tage gesondert betrachten müssen.

Der Temperaturgang bei Nacht ist oft untersucht worden. Zuerst ist er von Lambert²⁾ durch die Exponentialgleichung

$$(3) \quad \vartheta = \vartheta_0 + A \cdot b^t$$

dargestellt worden, welche mit ausreichender Genauigkeit die Stundenwerte der Temperatur liefert. Eine Reihe späterer Arbeiten z. B. von Weilenmann³⁾, Angot⁴⁾, Maurer⁵⁾, Tamura⁶⁾ beschäftigen sich mit dem Problem, aus theoretischen Ueberlegungen über die nächtliche Ausstrahlung die Form der Temperaturgleichung herzuleiten. Für die praktische Verwendung kommen sie durch Vereinfachungen stets

²⁾ Lambert: Pyrometrie. Berlin 1779.

³⁾ A. Weilenmann: Ueber den täglichen Gang der Temperatur in Bern. (Schweizerische meteorologische Beobachtungen. 1872).

⁴⁾ A. Angot: Influence de la nébulosité sur la variation diurne de la temperature de Paris. (Annales du Bureau Central meteorologique de France. 1888).

⁵⁾ Maurer: Temperaturleitung und Strahlung in der ruhenden Atmosphäre. (Meteorol. Zeitschr. 1886. S. 208).

— Theoretische Darstellung des Temperaturganges während der Nachtstunden und die Wärmestrahlung der Atmosphäre. (Meteorol. Zeitschr. 1887. S. 189.)

Außerdem: Meteorol. Beobachtungen in der Schweiz. 1885.

⁶⁾ Tetsu Tamura: Mathematical theory of the nocturnal cooling of the atmosphere. (Monthly Weather Review. 1905). — Dort findet sich auch eine Zusammenstellung mehrerer anderer Arbeiten, die Teile des vorliegenden Problems behandeln.

wieder auf eine Gleichung von dem Typus (3). Durch die theoretische Herleitung gewinnen aber die Konstanten der Gleichung (3) eine physikalische Bedeutung, welche Maurer und Trabert dazu benutzen, um den Strahlungskoeffizienten der atmosphärischen Luft zu bestimmen.⁷⁾ Doch stimmt der von ihnen errechnete Wert des Strahlungskoeffizienten noch nicht überein mit den Ergebnissen der experimentellen Messungen von Hutchins und Very. Das kann seinen Grund darin haben, daß das Gesetz des Zusammenhangs der Konstanten der Gleichung mit dem Strahlungskoeffizienten der Luft komplizierter ist als Maurer angenommen hatte. Tatsächlich erhält Tamura unter andern Voraussetzungen ein anderes Gesetz für diesen Zusammenhang wie Maurer. Man kann also über die Größe des Strahlungskoeffizienten noch in Zweifel sein; aber die Möglichkeit der Darstellung des Temperaturverlaufes durch die Gleichung (3) bleibt unbestreitbar.

Den Temperaturgang während des Tages für sich gesondert zu betrachten, ist der Endzweck dieser Arbeit. Theoretische Untersuchungen sind darüber von J. Halm⁸⁾ angestellt worden. Auf anderer Grundlage soll hier versucht werden, eine Gleichung für den Temperaturgang am Tage aufzustellen, welche der periodischen und unperiodischen Ursache Rechnung trägt. Die Konstanten einer solchen Gleichung werden von der Sonnenwirkung abhängen und außerdem Funktionen der physikalischen Eigenschaften der Luft und des Erdbodens, also des Strahlungs- und Leitungsvermögens und der spezifischen Wärme sein. Der Zusammenhang der Konstanten der Gleichung mit diesen physikalischen Größen wird aber ein sehr komplizierter sein. Es kann daher hier nicht das Ziel sein, ein festes Gesetz für diesen Zusammenhang zu finden; sondern es soll nur erstrebt werden, für den Verlauf am Tage eine typische Form der Gleichung aufzustellen, wie es für den nächtlichen Verlauf durch Gleichung (3) gelungen ist. Da es bei den theoretischen Ueberlegungen also nur auf den Typus der Gleichung ankommt, wird es zulässig sein, die einfachsten Annahmen für die Herleitung der Gleichung zu machen. Die so erhaltene Gleichung wird dann an einem beobachteten mittleren täglichen Temperaturgang darauf geprüft werden, ob sie den Verlauf bei Tage ebenso genau wiedergeben kann, wie die Gleichung (3) den Verlauf während der Nacht.

Die Form der Temperaturgleichung während der Nacht.

Die nächtliche Abkühlung ist eine Folge der Ausstrahlung von Wärme an kältere Luftschichten in größerer Höhe. Die angestellten Messungen zeigen, daß der Erdboden selbst an dieser Ausstrahlung stärker beteiligt ist, als die auflagernden Luftschichten. Denn der Boden kühlt sich schneller ab und hat während der Nacht eine niedrigere Temperatur als die Luft. Dieser Umstand kann bei der theoretischen Herleitung der Formel berücksichtigt werden, wenn man annimmt, daß der Boden gegen eine höhere Luftschicht von konstanter Temperatur ausstrahlt und

⁷⁾ Maurer a. a. O.; Trabert: Die Wärmestrahlung der atmosphärischen Luft. (Meteorol. Zeitschr. 1892. S. 41.)

⁸⁾ J. Halm: Versuch einer theoretischen Darstellung des täglichen Ganges der Lufttemperatur. Halle. 1895.