Untersuchung der Bewegung eines schweren Rotationskörpers, besonders unter der Voraussetzung, daß ein Punkt der Achse gezwungen ist, sich auf einer festen horizontalen Ebene zu bewegen, und daß die Rotationsgeschwindigkeit sehr groß ist.

Die Bewegung des Körpers werde bezogen auf ein festes rechtwinkliges Koordinatensystem. Die horizontale Ebene sei die xy-Ebene desselben, z die Vertikale. Den Anfangspunkt eines zweiten rechtwinkligen Koordinatensystems (ξ, η, ζ) legen wir in den Schwerpunkt, der, da der Körper ein Rotationskörper ist, auf der Achse des Körpers liegen muß. Diese Achse wählen wir zur ζ-Achse. X, Y, Z sollen die Koordinaten des Schwerpunktes und s das Stück der Achse bezeichnen, welches zwischen dem Schwerpunkt und dem auf der Ebene bleibenden Punkt liegt, den wir die Spitze nennen wollen. Es gelten dann die Gleichungen:

$$x = X + a_1\xi + b_1\eta + c_1\zeta,$$
$$y = Y + a_2\xi + b_2\eta + c_2\zeta,$$
$$z = Z + a_3\xi + b_3\eta + c_3\zeta,$$

in denen die neun Größen $a_1, b_1, c_1, a_2 \cdots$ die Richtungsdeterminanten der einzelnen Achsen zu einander bezeichnen. Zwischen diesen neun Kosinus lassen sich sechs unabhängige Gleichungen aufstellen. Alle neun Kosinus können also durch drei derselben oder durch drei unabhängige andere Variable ausgedrückt werden. Dazu wählen wir nach Euler erstens den Winkel ψ, welchen der Durchschnitt der xy- und der $\xi\eta$-Ebene mit der ξ-Achse bildet, zweitens den Winkel φ, der zwischen demselben Durchschnitt und der x-Achse liegt, drittens den von der z- und der ζ-Achse eingeschlossenen Winkel ϑ. Für diese Größen und die Kosinus $a_1, b_1, \cdots$ gelten die Formeln:

$$1)\quad \begin{aligned} a_1 &= \cos\varphi\cos\psi + \sin\varphi\sin\psi\cos\vartheta, \\ b_1 &= \cos\varphi\sin\psi - \sin\varphi\cos\psi\cos\vartheta, \\ c_1 &= \sin\varphi\sin\vartheta, \end{aligned} \qquad 2)\quad \begin{aligned} a_2 &= \sin\varphi\cos\psi - \cos\varphi\sin\psi\cos\vartheta, \\ b_2 &= \sin\varphi\sin\psi + \cos\varphi\cos\psi\cos\vartheta, \\ c_2 &= -\cos\varphi\sin\vartheta, \end{aligned}$$

$$3)\quad \begin{aligned} a_3 &= -\sin\psi\sin\vartheta, \\ b_3 &= \cos\psi\sin\vartheta, \\ c_3 &= \cos\vartheta, \\ Z &= s\cos\vartheta. \end{aligned}$$

Die Gleichung $Z = s\cos\vartheta$ enthält die Bedingung, daß ein und derselbe Punkt des Körpers stets auf der Ebene bleibt.

Zur Kenntnis der Bewegung dieser Spitze ist nur die Angabe der Werte von X, Y, φ und ϑ erforderlich, wie aus den Gleichungen:

$$x = X - c_1 s = X - s \sin\varphi \sin\vartheta,$$
$$y = Y - c_2 s = Y + s \cos\varphi \sin\vartheta,$$
$$z = Z - c_3 s = Z - s \cos\vartheta = 0 \quad \text{hervorgeht.}$$

M bedeute die Masse des Körpers, g die Schwere. Die Kräftefunktion nimmt daher den Ausdruck an: $U = -Mgs\cos\vartheta$.

Derselbe enthält die Zeit nicht explizite. Daher gilt der Satz von der lebendigen Kraft $T - U = h$, worin T die lebendige Kraft, h eine Konstante bedeutet. Nun setzen wir

$$\frac{\partial T}{\partial \vartheta'} = \vartheta_1, \quad \frac{\partial T}{\partial \varphi'} = \varphi_1, \quad \frac{\partial T}{\partial \psi'} = \psi_1, \quad \frac{\partial T}{\partial X'} = X_1, \quad \frac{d T}{\partial Y'} = Y_1$$

und drücken T durch diese Größen, sowie die Variablen φ, ψ, ϑ, X und Y aus. Darauf substituieren wir in $T - U = h$ für

X_1 die Größe $\frac{\partial W}{\partial X}$,

Y_1 „ „ $\frac{\partial W}{\partial Y}$,

ϑ_1 „ „ $\frac{\partial W}{\partial \vartheta}$ usw.

und erhalten dadurch eine partielle Differentialgleichung für W. Die Integralgleichungen der Differentialgleichungen der Bewegung in der Hamiltonschen Form sind dann: $\frac{\partial W}{\partial \alpha_i} = \beta_i$, worin jedes α eine der in W enthaltenen Konstanten und die β_i neue Konstante bedeuten. Zu einer vollständigen Lösung W sind fünf Konstante erforderlich. Nach diesem angedeuteten Verfahren führen wir unsere Betrachtung durch. Es ist:

$$x' = X' + a_1'\xi + b_1'\eta + c_1'\zeta,$$
$$y' = Y' + a_2'\xi + b_2'\eta + c_2'\zeta,$$
$$z' = Z' + a_3'\xi + b_3'\eta + c_3'\zeta.$$

A, B, C seien die Hauptträgheitsmomente des Körpers, von denen die beiden A und B gleich sein sollen. Dann ist

$$2T = \sum m(x'^2 + y'^2 + z'^2) = M(X'^2 + Y'^2 + Z'^2) + A(p^2 + q^2) + Cr^2,$$

worin die Winkelgeschwindigkeiten p, q, r die Werte haben:

$$p = \sin\psi \sin\vartheta \cdot \varphi' - \cos\psi \cdot \vartheta',$$
$$q = -\cos\psi \sin\vartheta \cdot \varphi' - \sin\psi \cdot \vartheta',$$
$$r = -\cos\vartheta \cdot \varphi' + \psi' \quad \text{und} \quad Z' = -s \cdot \sin\vartheta \cdot \vartheta' \quad \text{zu setzen ist.}$$

Dadurch erhalten wir:

$$2T = M(X'^2 + Y'^2) + Ms^2 \sin^2\vartheta \cdot \vartheta'^2 + A(\sin^2\vartheta \cdot \varphi'^2 + \vartheta'^2) + C(\cos\vartheta \cdot \varphi' - \psi')^2.$$

Hieraus folgt:

$$\frac{\partial T}{\partial X'} = X_1 = MX', \qquad \frac{\partial T}{\partial \vartheta'} = \vartheta_1 = (A + Ms^2 \sin^2\vartheta)\vartheta',$$
$$\frac{\partial T}{\partial Y'} = Y_1 = MY', \qquad \frac{\partial T}{\partial \varphi'} = \varphi_1 = A \sin^2\vartheta \cdot \varphi' + C\cos\vartheta\,(\cos\vartheta \cdot \varphi' - \psi'),$$
$$\frac{\partial T}{\partial \psi'} = \psi_1 = -C(\cos\vartheta \cdot \varphi' - \psi').$$

Bei Aufstellung der Hamiltonschen Gleichung $T - U = h$ wird vorausgesetzt, daß alles durch die ursprünglichen Variablen $X, Y, \vartheta, \varphi, \psi$ und durch die von T nach den Größen $X', Y', \vartheta', \varphi', \psi'$ genommenen Differentialquotienten ausgedrückt werde.

Wie die für T soeben transformierte Gleichung zeigt, ist T eine homogene Funktion zweiten Grades der Variablen $X', Y', \varphi', \psi', \vartheta'$. Ein Satz über homogene Funktionen liefert uns daher die Gleichung:

$$2T = X_1 X' + Y_1 Y' + \varphi_1 \varphi' + \psi_1 \psi' + \vartheta_1 \vartheta',$$

in der wir nun $X' \cdots \varphi'$ auszudrücken haben durch $X_1 \cdots \varphi_1$ und die Variablen $X \cdots \varphi$.

Mit Beobachtung der aus den Gleichungen für φ_1 und ψ_1 folgenden Relation $\varphi_1 + \cos\vartheta \cdot \psi_1 = A \sin^2\vartheta \cdot \varphi'$ nimmt $2T$ die Form an:

$$2T = \frac{1}{M}(X_1^2 + Y_1^2) + \frac{\vartheta_1^2}{A + Ms^2 \sin^2\vartheta} + \frac{(\varphi_1 + \cos\vartheta \cdot \psi_1)^2}{A \sin^2\vartheta} + \frac{\psi_1^2}{C}.$$

Zur Bildung der Gleichung $T - U = h$, worin U die Kräftefunktion $= -Mgs\cos\vartheta$ ist, haben wir noch

$$X_1 = \frac{\partial W}{\partial X}; \cdots \psi_1 = \frac{\partial W}{\partial \psi} \cdots$$

zu setzen. Dieselbe lautet also:

$$\frac{1}{2M}\left[\left(\frac{\partial W}{\partial X}\right)^2 + \left(\frac{\partial W}{\partial Y}\right)^2\right] + \frac{\left(\frac{\partial W}{\partial \vartheta}\right)^2}{2(A + Ms^2\sin^2\vartheta)} + \frac{1}{2A\sin^2\vartheta}\left(\frac{\partial W}{\partial\varphi} + \cos\vartheta \cdot \frac{\partial W}{\partial \psi}\right)^2$$
$$+ \frac{1}{2C}\left(\frac{\partial W}{\partial\psi}\right)^2 + Mgs\cos\vartheta = h.$$

W wird daher die Form haben:

$$W = \alpha X + \beta Y + a\varphi + b\psi + V(\vartheta),$$

worin α, β, a und b konstante Größen sind. Daher geht obige Gleichung in folgende über:

$$\frac{\alpha^2 + \beta^2}{2M} + \frac{\left(\frac{\partial V}{\partial\vartheta}\right)^2}{2(A + Ms^2\sin^2\vartheta)} + \frac{(a + b\cos\vartheta)^2}{2A\sin^2\vartheta} + \frac{b^2}{2C} + Mgs\cos\vartheta = h.$$

Aus dieser Gleichung folgt:

$$\frac{\partial V}{\partial\vartheta} = \sqrt{2(A + Ms^2\sin^2\vartheta)\left(h - \frac{\alpha^2 + \beta^2}{2M} - \frac{b^2}{2C} - Mgs\cos\vartheta - \frac{(a + b\cos\vartheta)^2}{2A\sin^2\vartheta}\right)},$$

oder, wenn wir die zweite große Klammer unter der Wurzel $= R$ setzen,

$$\frac{\partial V}{\partial\vartheta} = \sqrt{2(A + Ms^2\sin^2\vartheta)} \cdot \sqrt{R}$$

und

$$V = \int \sqrt{2(A + Ms^2\sin^2\vartheta)} \cdot \sqrt{R} \cdot d\vartheta.$$

Es ist daher:

$$W = \alpha X + \beta Y + a\varphi + b\psi + \int \sqrt{2(A + Ms^2\sin^2\vartheta)} \cdot \sqrt{R} \cdot d\vartheta.$$

Nach der erwähnten Theorie werden die Integralgleichungen erhalten, indem die Funktion W nach den in ihr vorkommenden Konstanten differenziert wird und die so entstehenden Differenzialausdrücke gleich neuen Konstanten gesetzt werden. Die Zeit wird erhalten, indem man nach der Konstanten h differenziert.

Man erhält:

$$X - X_0 = \frac{\alpha}{M}\int \frac{\sqrt{2(A + Ms^2 \sin^2 \vartheta)}}{2\sqrt{R}} \cdot d\vartheta, \qquad X_0 = \frac{\partial W}{\partial \alpha}; \qquad Y_0 = \frac{\partial W}{\partial \beta} \text{ usw.}$$

$$Y - Y_0 = \frac{\beta}{M}\int \frac{\sqrt{2(A + Ms^2 \sin^2 \vartheta)}}{2\sqrt{R}} \cdot d\vartheta,$$

$$\varphi - \varphi_0 = \int \frac{\sqrt{2(A + Ms^2 \sin^2 \vartheta)} \cdot (a + b \cos \vartheta)}{2A \sin^2 \vartheta \sqrt{R}} \cdot d\vartheta,$$

$$\psi - \psi_0 = \int \frac{\sqrt{2(A + Ms^2 \sin^2 \vartheta)}\, d\vartheta}{2\sqrt{R}} \left(\frac{b}{c} + \frac{(a + b \cos \vartheta) \cos \vartheta}{A \sin^2 \vartheta}\right),$$

$$t - t_0 = \int \frac{\sqrt{2(A + Ms^2 \sin^2 \vartheta)}}{2\sqrt{R}} \cdot d\vartheta.$$

R muß eine gewisse Zeit über einen positiven Wert haben, weil sonst $\sqrt{R}$ und daher auch die Zeit imaginär würde, was nicht angeht. $R = 0$ hat also mindestens zwei reelle Wurzeln, die beide reelle Werte für ϑ liefern. Um die willkürlichen Konstanten aus R fortzuschaffen, führen wir die Winkelgeschwindigkeiten ein, die sich aus den letzten Gleichungen ergeben:

$$\varphi' = \frac{a + b \cos \vartheta}{A \sin^2 \vartheta}; \quad \psi' = \frac{b}{c} + \frac{\cos \vartheta}{A \sin^2 \vartheta}(a + b \cos \vartheta); \quad \vartheta' = \frac{2\sqrt{R}}{\sqrt{2(A + Ms^2 \sin^2 \vartheta)}}.$$

Eine der oben erwähnten Wurzeln für R sei $\cos \vartheta_0$, also $R(\cos \vartheta_0) = 0$. Dann ist:

$$\varphi_0' = \frac{a + b \cos \vartheta_0}{A \sin^2 \vartheta_0}; \qquad \psi_0' = \frac{b}{c} + \frac{\cos \vartheta_0 (a + b \cos \vartheta_0)}{A \sin^2 \vartheta_0}$$

und

$$R = h - Mgs \cos \vartheta - \frac{b^2}{2C} - \frac{(a + b \cos \vartheta)^2}{2A \sin^2 \vartheta} - \frac{\alpha^2 + \beta^2}{2M}, \tag{I}$$

$$O = h - Mgs \cos \vartheta_0 - \frac{b^2}{2C} - \frac{(a + b \cos \vartheta_0)}{2A \sin^2 \vartheta_0} - \frac{\alpha^2 + \beta^2}{2M}, \quad \text{daher} \tag{II}$$

aus (I) — (II): $$R = Mgs(\cos \vartheta_0 - \cos \vartheta) + \frac{(a + b \cos \vartheta_0)^2}{2A \sin^2 \vartheta_0} - \frac{(a + b \cos \vartheta)^2}{2A \sin^2 \vartheta}.$$

Aus den Gleichungen für φ_0' und ψ_0' folgt:

$$a + b \cos \vartheta_0 = A\varphi_0' \sin^2 \vartheta_0,$$

$$a + b \cos \vartheta = a + b \cos \vartheta_0 + b(\cos \vartheta - \cos \vartheta_0) = \varphi_0' A \sin^2 \vartheta_0 + (\cos \vartheta - \cos \vartheta_0) b,$$

$$b = C(\psi_0' - \varphi_0' \cos \vartheta_0) = -N \quad \text{gesetzt,}$$

$$a + b \cos \vartheta = \varphi_0' A \sin^2 \vartheta_0 + (\cos \vartheta_0 - \cos \vartheta) N = L + N(\cos \vartheta_0 - \cos \vartheta),$$

worin $L = \varphi_0' A \sin^2 \vartheta_0$ gesetzt ist.

Es folgt weiter:

$$R = Mgs(\cos \vartheta_0 - \cos \vartheta) + \varphi_0' \frac{2A \sin^2 \vartheta_0}{2} - \frac{L^2}{2A \sin^2 \vartheta} - \frac{2LN(\cos \vartheta_0 - \cos \vartheta)}{2A \sin^2 \vartheta} - \frac{N^2 (\cos \vartheta_0 - \cos \vartheta)^2}{2A \sin^2 \vartheta}.$$

Es ist aber:

$$\varphi_0' \frac{2A \sin^2 \vartheta_0}{2} - \frac{L^2}{2A \sin^2 \vartheta} = A^2 \varphi_0'^2 \frac{(\cos \vartheta_0 - \cos \vartheta)(\cos \vartheta_0 + \cos \vartheta)}{2A \sin^2 \vartheta} \sin^2 \vartheta_0,$$

also

$$R = \frac{(\cos \vartheta_0 - \cos \vartheta)}{2A \sin^2 \vartheta}\{2AMgs \sin^2 \vartheta - N^2(\cos \vartheta_0 - \cos \vartheta) + \varphi_0'^2 A^2 \sin^2 \vartheta_0 (\cos \vartheta_0 + \cos \vartheta) - 2LN\}.$$

Weil R noch mindestens eine reelle Wurzel haben muß, die einen reellen Wert für ϑ liefert, so wollen wir eine zweite Wurzel mit $\cos \vartheta_1$ einführen und untersuchen, wie die dritte

Wurzel der Gleichung $R = 0$ beschaffen ist unter der Voraussetzung, daß $\cos\vartheta_0$ und $\cos\vartheta_1$ zwei reelle Wurzeln sind, welche reelle Werte von ϑ liefern, deren Existenz bereits nachgewiesen ist. Es sei

$$R = \frac{\cos\vartheta_0 - \cos\vartheta}{2A\sin^2\vartheta}\cdot K,$$

1) $\quad K = 2AMgs\sin^2\vartheta - N^2(\cos\vartheta_0 - \cos\vartheta) + \varphi_0'^2A^2\sin^2\vartheta_0(\cos\vartheta_0 + \cos\vartheta) - 2LN.$

Da $\cos\vartheta_1$ eine Wurzel sein soll:

2) $\quad 0 = 2AMgs\sin^2\vartheta_1 - N^2(\cos\vartheta_0 - \cos\vartheta_1) + \varphi_0'^2A^2\sin^2\vartheta_0(\cos\vartheta_0 + \cos\vartheta_1) - 2LN,$

(1) — (2): $K = 2AMgs(\sin^2\vartheta - \sin^2\vartheta_1) + N^2(\cos\vartheta - \cos\vartheta_1) + \varphi_0'^2A^2\sin^2\vartheta_0(\cos\vartheta - \cos\vartheta_1),$

$$K = (\cos\vartheta_1 - \cos\vartheta)\{2AMgs(\cos\vartheta + \cos\vartheta_1) - (N^2 + \varphi_0'^2A^2\sin^2\vartheta_0)\}$$

$$= (N^2 + \varphi_0'^2A^2\sin^2\vartheta_0)(\cos\vartheta - \cos\vartheta_1)\left(1 - \frac{2AMgs(\cos\vartheta_1 + \cos\vartheta)}{N^2 + \varphi_0'^2A^2\sin^2\vartheta_0}\right);$$

oder wird für N sein Wert eingesetzt, so erhält man:

$$K = \left(C^2(\varphi_0'\cos\vartheta_0 - \psi_0')^2 + \varphi_0'^2A^2\sin^2\vartheta_0\right)(\cos\vartheta - \cos\vartheta_1)\left(1 - \frac{2AMgs(\cos\vartheta_1 + \cos\vartheta)}{C^2(\varphi_0'\cos\vartheta_0 - \psi_0')^2 + \varphi_0'^2A^2\sin^2\vartheta_0}\right).$$

Die dritte Klammer liefert uns die dritte Wurzel von R. Nehmen wir an, daß die Rotationsgeschwindigkeit im Anfange, wo die Achse den Winkel ϑ_0 mit der Vertikalen einschließen möge, sehr groß, also ψ_0' sehr groß sei, so ersehen wir hieraus, daß die dritte Wurzel größer als 1 sein muß. Wir können unter jener Annahme auch in der dritten Klammer das zweite Glied gegen die Einheit vernachlässigen und erhalten somit für R, wenn

$$C^2(\varphi_0'\cos\vartheta_0 - \psi_0')^2 + \varphi_0'^2A^2\sin^2\vartheta_0 = P$$

gesetzt wird, den Wert

$$R = \frac{P}{2A\sin^2\vartheta}(\cos\vartheta_0 - \cos\vartheta)(\cos\vartheta - \cos\vartheta_1).$$

Damit R positiv bleibe, muß also ϑ zwischen ϑ_0 und ϑ_1 liegen. Ferner nehmen wir an, $\cos\vartheta_1$ sei die kleinere und $\cos\vartheta_0$ die größere Wurzel. Diesen Wert für R setzen wir in die Gleichung für $t - t_0$ ein:

$$t - t_0 = \int\frac{\sqrt{2(A + Ms^2\sin^2\vartheta)}\cdot d\vartheta}{2\sqrt{\frac{P}{2A\sin^2\vartheta}(\cos\vartheta_0 - \cos\vartheta)(\cos\vartheta - \cos\vartheta_1)}} = \sqrt{\frac{A}{P}}\int\frac{\sqrt{(A + Ms^2\sin^2\vartheta)}\sin\vartheta\cdot d\vartheta}{\sqrt{(\cos\vartheta_0 - \cos\vartheta)(\cos\vartheta - \cos\vartheta_1)}}.$$

Es sei $x = \cos\vartheta$, also

$$d\vartheta = -\frac{dx}{\sin\vartheta},$$

so hat man:

$$t - t_0 = -\sqrt{\frac{A}{P}}\int\frac{dx\sqrt{A + Ms^2 - Ms^2x^2}}{\sqrt{(x_0 - x)(x - x_1)}} = -\sqrt{\frac{AMs^2}{P}}\int\frac{dx\sqrt{r^2 - x^2}}{\sqrt{(x_0 - x)(x - x_1)}},$$

worin $\frac{A + Ms^2}{Ms^2} = r^2$ gesetzt ist und $\sqrt{\frac{AMs^2}{P}} = f$ eingeführt werden möge. Der absolute Wert r ist also > 1:

$$t - t_0 = -f\int\frac{(r^2 - x^2)\cdot dx}{\sqrt{(x_0 - x)(x - x_1)(r - x)(r + x)}} = f\int\frac{(x^2 - r^2)\cdot dx}{\sqrt{(x + r)(x - x_1)(x - x_0)(x - r)}}.$$

Die Wurzeln des Nenners sind der Größe nach geordnet

$$-r,\quad +x_1,\quad x_0,\quad +r,\quad (r > 1).$$

Die Grenzen des Integrals müssen x_1 und x_0 sein. Unsere Aufgabe geht zunächst dahin, das Integral

$$\int \frac{dx}{\sqrt{(x+r)(x-x_1)(x-x_0)(x-r)}}$$

auf die Form

$$\int \frac{dz}{\sqrt{(1-z^2)(1-\varkappa^2 z^2)}}$$

zu bringen. Zu diesem Zwecke machen wir die Substitution:

$$x = \frac{a+bz^2}{c+dz^2} \text{ und } z^2 = y.$$

z bedeute die positive Wurzel von y. Dann ist

$$\left(dz = \frac{1}{2}\frac{dy}{\sqrt{y}}\right),$$

$$\frac{dz}{\sqrt{(1-z^2)(1-\varkappa^2 z^2)}} = \frac{1}{2}\frac{dy}{\sqrt{y(1-y)(1-\varkappa^2 y)}}.$$

Der Ausdruck $y(1-y)(1-\varkappa^2 y)$ hat die Wurzeln:

$$0, \ +1, \ +\frac{1}{\varkappa^2}, \ \infty.$$

Damit z^2 ein echter Bruch oder y ein echter Bruch werde, müssen wir die beiden Wurzeln x_1 und x_0, zwischen welchen das Integral liegt, den Werten 0 und 1 entsprechen lassen. Der Bedingung, daß $\varkappa^2$ ein echter Bruch werde, wird durch die Annahme, daß $\frac{1}{\varkappa^2}$ zwischen 1 und ∞ liegt, genügt. Nehmen wir ferner an, daß x und y gleichzeitig wachsen sollen, so entsprechen folgende Wurzeln einander:

$x = -r$	$+x_1$	$+x_0$	$+r$
$y = \infty$	0	1	$\frac{1}{\varkappa^2}$.

Durch dieselben lassen sich die Größen a, b, c, d und $\varkappa^2$ bestimmen, indem in die Gleichung $x = \frac{a+by}{c+dy}$ für jeden der vier Werte von x das zugehörige y gesetzt wird.

$$-r = \frac{b}{d}; \qquad x_1 = \frac{a}{c}; \qquad x_0 = \frac{a+b}{c+d}; \qquad +r = \frac{\varkappa^2 a + b}{\varkappa^2 c + d};$$

daher:

$$\begin{matrix} b = -rd \\ a = x_1 c \end{matrix}; \qquad x_0 = \frac{x_1 c - rd}{c+d} = \frac{x_1 - r\cdot\frac{d}{c}}{1+\frac{d}{c}}; \qquad \frac{d}{c} = \frac{x_1 - x_0}{x_0 + r};$$

$$r = \frac{\varkappa^2 x_1 - r\cdot\frac{d}{c}}{\varkappa^2 + \frac{d}{c}} = \frac{x_1\varkappa^2 - r\cdot\frac{x_1 - x_0}{x_0 + r}}{\varkappa^2 + \frac{x_1 - x_0}{x_0 + r}}; \qquad \varkappa^2 = \frac{(x_1 - x_0)\cdot 2r}{(x_0 + r)(x_1 - r)}.$$

Weiterhin ist:

$$x = \frac{x_1 c - r d y}{c + dy} = \frac{x_1 - ry\cdot\frac{d}{c}}{1 + y\cdot\frac{d}{c}} = \frac{x_1(x_0 + r) - ry(x_1 - x_0)}{x_0 + r + y(x_1 - x_0)}$$

Es werde gesetzt:

$$x_0 + r + y(x_1 - x_0) = N;$$

also ist:

$$x + r = \frac{(x_1 + r)(x_0 + r)}{N}, \qquad x - x_0 = \frac{(x_1 - x_0)(x_0 + r)(1 - y)}{N},$$

$$x - x_1 = -\frac{(x_1 - x_0)(r + x_1)y}{N}, \qquad x - r = \frac{(x_1 - r)(x_0 + r)(1 - y\varkappa^2)}{N},$$

und wir erhalten:

$$(x + r)(x - x_1)(x - x_0)(x - r) = -\frac{(x_0 + r)^3(x_1 + r)^2(x_1 - x_0)^2(x_1 - r)y(1 - y)(1 - \varkappa^2 y)}{N^4}.$$

Aus

$$x = \frac{x_1(x_0 + r) - ry(x_1 - x_0)}{x_0 + r + y(x_1 - x_0)}$$

folgt:

$$dx = -\frac{(x_1 - x_0)(x_0 + r)(x_1 + r)}{N^2} \cdot dy,$$

$$\frac{(dx)^2}{(x + r)(x - x_1)(x - x_0)(x - r)} = -\frac{(dy)^2}{(x_0 + r)(x_1 - r)y(1 - y)(1 - \varkappa^2 y)} = \frac{4(dz)^2}{(x_0 + r)(r - x_1)(1 - z^2)(1 - \varkappa^2 z^2)}.$$

Da x und y zu gleicher Zeit wachsen, so ist:

$$\frac{dx}{\sqrt{(x + r)(x - x_1)(x - x_0)(x - r)}} = \frac{2dz}{\sqrt{(x_0 + r)(r - x_1)(1 - z^2)(1 - \varkappa^2 z^2)}}.$$

Zunächst muß der Bruch

$$x^2 = \left(\frac{a + by}{c + dy}\right)^2 = \left(\frac{x_1(x_0 + r) - yr(x_1 - x_0)}{x_0 + r + y(x_1 - x_0)}\right)^2$$

in Partialbrüche zerlegt werden, da das Integral für die Zeit

$$t - t_0 = f\int \frac{(x^2 - r^2)\,dx}{\sqrt{(x + r)(x - x_1)(x - x_0)(x - r)}} = 2f\int \frac{\left(\frac{a + bz^2}{c + dz^2}\right)^2 - r^2}{\sqrt{(x_0 + r)(r - x_1)(1 - z^2)(1 - \varkappa^2 z^2)}} \cdot dz \quad \text{war.}$$

Zu dem Zwecke entwickeln wir nach der Reihe von Taylor:

$$\frac{\varphi(x)}{(x - a)^n} = \frac{\varphi(a)}{(x - a)^n} + \frac{\varphi'(a)}{(x - a)^{n-1}} + \frac{1}{2}\,\frac{\varphi''(a)}{(x - a)^{n-2}} \ldots$$

den Bruch:

$$\frac{\varphi(y)}{d^2\left(y - \left(-\frac{c}{d}\right)\right)^2}.$$

Man hat:

$$\varphi\left(-\frac{c}{d}\right) = \frac{a^2d^2 - 2abcd + b^2c^2}{d^2},$$

$$\varphi'\left(-\frac{c}{d}\right) = \frac{2abd - 2b^2c}{d},$$

$$\varphi''\left(-\frac{c}{d}\right) = 2b^2,$$

und da

$$a = x_1(x_0 + r),$$
$$b = r(x_0 - x_1),$$
$$c = (x_0 + r),$$
$$d = -(x_0 - x_1) \text{ ist,}$$

$$\left(\frac{a+by}{c+dy}\right)^2 = \frac{1}{d^2}\left\{\frac{a^2d^2 - 2abcd + b^2c^2}{(c+dy)^2} + \frac{2b(ad-bc)}{c+dy} + b^2\right\},$$

$$a^2d^2 - 2abcd + b^2c^2 = (x_0+r)^2(x_0-x_1)^2(x_1+r)^2,$$

$$2b(ad-bc) = -2r(x_0-x_1)^2(x_0+r)(x_1+r),$$

$$\frac{b^2}{d^2} - r^2 = 0.$$

Mit Einführung von $m = \frac{c}{d} = -\frac{x_0+r}{x_0-x_1}$ erhalten wir:

$$t - t_0 = \alpha\int\frac{d\varphi}{(m+\sin^2\varphi)^2\varDelta\varphi} + \beta\int\frac{d\varphi}{(m+\sin^2\varphi)\varDelta\varphi}, \qquad (z = \sin\varphi),$$

worin

$$\alpha = \frac{2f(x_0+r)^2(x_1+r)^2}{(x_0-x_1)^2\sqrt{(x_0+r)(r-x_1)}}$$

und

$$\beta = \frac{4f(x_0+r)(x_1+r)}{(x_0-x_1)\sqrt{(x_0+r)(r-x_1)}} \text{ ist.}$$

Wird nun $\int\frac{d\varphi(m+\sin^2\varphi)^\mu}{\varDelta\varphi}$ mit V_μ bezeichnet, wo μ irgend eine negative oder positive ganze Zahl bezeichnet, so gilt die Reduktionsformel:

$$(m+\sin^2\varphi)^\mu\sin\varphi\cos\varphi\varDelta\varphi = -2\mu A V_{\mu-1} + (2\mu+1)BV_\mu - (2\mu+2)CV_{\mu+1} + (2\mu+3)\varkappa^2 V_{\mu+2},$$

worin

$$A = m(1+m)(1+\varkappa^2 m),$$

$$B = 1 + 2m + 2\varkappa^2 m + 3\varkappa^2 m^2,$$

$$C = 1 + \varkappa^2 + 3\varkappa^2 m$$

zu setzen ist. Nach derselben erhalten wir für $\mu = -1$:

$$V_{-2} = \frac{(m+\sin^2\varphi)^{-1}\cdot\sin\varphi\cos\varphi\varDelta\varphi + BV_{-1} - \varkappa^2 V_1}{2A},$$

mithin:

$$t - t_0 = V_{-1}\left(\beta + \frac{\alpha B}{2A}\right) - \frac{\varkappa^2\alpha V_1}{2A} + \frac{\alpha\sin\varphi\cos\varphi\varDelta\varphi}{(m+\sin^2\varphi)2A}.$$

Bei Anwendung der von Legendre aufgestellten Bezeichnung für die drei Gattungen der elliptischen Integrale lassen sich V_1 und V_{-1} so ausdrücken:

$$\int\frac{(m+\sin^2\varphi)d\varphi}{\varDelta\varphi} = \frac{1+m\varkappa^2}{\varkappa^2}\cdot F(\varphi) - \frac{1}{\varkappa^2}E_1(\varphi),$$

$$\int\frac{d\varphi}{(m+\sin^2\varphi)\varDelta\varphi} = \frac{1}{m}\Pi_1\left(\varphi, \frac{1}{m}\right).$$

Führen wir $\int_0^\varphi\frac{d\varphi}{\varDelta\varphi} = F(\varphi) = u$ als variablen Parameter nach Jacobi ein, so gehen unsere Integrale in folgende Ausdrücke über:

$$V_1 = \frac{1+m\varkappa^2}{\varkappa^2}u - \frac{1}{\varkappa^2}E(u) = \frac{1+m\varkappa^2}{\varkappa^2}u - \frac{1}{\varkappa^2}\frac{Eu}{K} - \frac{1}{\varkappa^2}Z(u),$$

oder

$$V_1 = u\left(\frac{1+m\varkappa^2}{\varkappa^2}\right) - \frac{1}{\varkappa^2}\left(\frac{E}{K}u + \frac{\Theta'(u)}{\Theta(u)}\right).$$

$\Pi_1(\varphi, n)$ steht mit der von Jacobi eingeführten Transzendenten $\Pi(u, a)$ durch die Gleichung

$$\Pi_1(\varphi, n) = u + \frac{\operatorname{tg} \operatorname{am} a}{\Delta \operatorname{am} a} \Pi(u, a)$$

in Verbindung unter der Bedingung, daß $n = -\varkappa^2 \sin^2 \operatorname{am} a$ und hier n ein negativer echter Bruch ist, dessen absoluter Wert kleiner als $\varkappa^2$ ist. Der obige Ausdruck ist dann reell.

Nun haben wir:

$$n = \frac{1}{m} = \frac{d}{c} = -\frac{(x_0 - x_1)}{(x_0 + r)}; \qquad \varkappa^2 = \frac{(x_0 - x_1) 2r}{(x_0 + r)(r - x_1)} = \frac{2rn}{x_1 - r},$$

wo $2r > x_1 - r$ ist. n ist also, wie aus obigen Formeln hervorgeht, ein negativer echter Bruch, dessen absoluter Wert kleiner als $\varkappa^2$ ist. Daher haben wir

$$V_{-1} = \frac{1}{m}\left\{u + \frac{\operatorname{tg} \operatorname{am} a}{\Delta \operatorname{am} a}\left(u \cdot Za + \frac{1}{2} \log \frac{\Theta(u-a)}{\Theta(u+a)}\right)\right\}.$$

Wir berechnen weiterhin $\frac{\operatorname{tg} \operatorname{am} a}{\Delta \operatorname{am} a}$. Es war

$$\varkappa^2 \sin^2 \operatorname{am} a = \frac{x_0 - x_1}{x_0 + r},$$

folglich ist:

$$\sin^2 \operatorname{am} a = \frac{r - x_1}{2r},$$

$$\cos^2 \operatorname{am} a = \frac{r + x_1}{2r},$$

$$\operatorname{tg}^2 \operatorname{am} a = \frac{r - x_1}{r + x_1},$$

$$\Delta^2 \operatorname{am} a = \frac{x_1 + r}{x_0 + r},$$

$$\frac{\operatorname{tg} \operatorname{am} a}{\Delta \operatorname{am} a} = \frac{\sqrt{(r - x_1)(x_0 + r)}}{r + x_1}.$$

Da ferner:

$$\sin \varphi = \sin \operatorname{am} u = \frac{1}{\varkappa} \frac{H(u)}{\Theta(u)},$$

$$\cos \varphi = \cos \operatorname{am} u = \sqrt{\frac{\varkappa'}{\varkappa}} \cdot \frac{H(u+K)}{\Theta(u)},$$

$$\Delta \varphi = \sqrt{\varkappa'} \cdot \frac{\Theta(u+K)}{\Theta(u)}$$

ist, so geht $\frac{\sin \varphi \cdot \cos \varphi \cdot \Delta \varphi}{m + \sin^2 \varphi}$ über in:

$$\frac{\varkappa' H(u) \cdot H(u+K) \cdot \Theta(u+K)}{\Theta(u)\{\varkappa m \Theta^2(u) + H^2(u)\}}.$$

Es war

$$t - t_0 = \left(\beta + \frac{\alpha B}{2A}\right) \cdot V_{-1} - \frac{\varkappa^2 \alpha \cdot V_1}{2A} + \frac{\alpha \sin \varphi \cdot \cos \varphi \cdot \Delta \varphi}{(m + \sin^2 \varphi) 2A}.$$

Führen wir die oben aufgestellten Werte statt V_{-1} und V_1 und $\frac{\sin \varphi \cdot \cos \varphi \cdot \Delta \varphi}{(m + \sin^2 \varphi)}$ ein, so erhalten wir für $t - t_0$ folgende Gleichung:

$$t - t_0 = u\left\{\frac{1}{m}\left(\beta + \frac{\alpha B}{2A}\right)\left(1 + \frac{\operatorname{tg} \operatorname{am} a \cdot Z(a)}{\Delta \operatorname{am} a}\right) - \frac{\varkappa^2 \alpha}{2A}\left(\frac{1 + m\varkappa^2}{\varkappa^2} - \frac{E}{\varkappa^2 K}\right)\right\}$$

$$+ \log \frac{\Theta(u-a)}{\Theta(u+a)}\left(\beta + \frac{\alpha B}{2A}\right) \frac{\operatorname{tg} \operatorname{am} a}{2 \Delta \operatorname{am} a \cdot m} + \frac{\alpha \varkappa' \cdot \Theta(u+K) H(u) \cdot H(u+K)}{\Theta(u)\{\varkappa m \Theta^2(u) + H^2(u)\}} + \frac{\alpha Z(u)}{2A}.$$

Abkürzend können wir also schreiben:

$$t - t_0 = \mathfrak{p} \cdot u + \mathfrak{q} \cdot Z(u) + \mathfrak{r} \log\left(\frac{\Theta(u-a)}{\Theta(u+a)}\right) + \mathfrak{f} \cdot \frac{H(u) \cdot H(u+K) \cdot \Theta(u+K)}{\Theta(u)\{\varkappa m \Theta^2 u + H^2(u)\}};$$

$\mathfrak{p}$, $\mathfrak{q}$, $\mathfrak{r}$, $\mathfrak{f}$ sind bekannte Funktionen der Wurzeln x_0, x_1 und r, welche aus unseren früheren Zusammenstellungen leicht berechnet werden können. Wir stehen von der Ausführung der Rechnung ab, da die Resultate für $\mathfrak{p}$, $\mathfrak{q}$, $\mathfrak{r}$ und $\mathfrak{f}$ sich in sehr schwülstiger Form darstellen würden und es daher empfehlenswerter erscheint, für jeden speziellen Fall die einzelnen Elemente der Ausdrücke $\mathfrak{p}$, $\mathfrak{q}$, $\mathfrak{r}$ und $\mathfrak{f}$ besonders zu berechnen. Für jedes ϑ wird durch früher entwickelte, hier zusammengestellte Formeln u berechnet:

$$\int_0^\varphi \frac{d\varphi}{\Delta\varphi} = u; \qquad \sin\varphi = z; \qquad y = z^2; \qquad x = \cos\vartheta = \frac{x_1(x_0+r) + y r (x_0 - x_1)}{(x_0+r) - y(x_0 - x_1)}.$$

z war als die positive Wurzel von y eingeführt worden:

$$z = \sin\varphi = \sqrt{\frac{(x_0+r)(x-x_1)}{(x+r)(x_0-x_1)}}.$$

Für jedes ϑ liefert also die Gleichung $t - t_0 = \mathfrak{A}(u)$ in Verbindung mit dem System folgender Formeln die Zeit:

$$x = \cos\vartheta,$$

$$z = \sin\varphi = \sqrt{\frac{(x_0+r)(x-x_1)}{(x+r)(x_0-x_1)}}, \qquad \varkappa^2 = \frac{2(x_0-x_1)r}{(x_0+r)(r-x_1)},$$

$$\int_0^\varphi \frac{d\varphi}{\Delta\varphi} = u(\mathrm{mod}.\varkappa).$$

In der Gleichung:

$$t - t_0 = \mathfrak{p} \cdot u + \mathfrak{q} \cdot Z(u) + \mathfrak{r} \cdot \log\frac{\Theta(u-a)}{\Theta(u+a)} + \mathfrak{f} \cdot \frac{H(u) \cdot H(u+K) \cdot \Theta(u+K)}{\Theta(u)\{\varkappa m \Theta^2(u) + H^2(u)\}}$$

bestimmen wir die Konstante t_0 so, daß für $\vartheta = \vartheta_1$ $t = 0$ sei.

Wir nennen nun T die Zeit, welche verstreicht, während die Achse den Weg von ϑ_1 bis ϑ_0 hin- und zurücklegt. ϑ_1 entspricht dem Werte 0 und ϑ_0 dem Werte 1 von $z = \sin\varphi$. Für diesen Wert ist aber $u = K$. Bewegt sich die Achse in der Höhe ϑ_0 angekommen wieder bis ϑ_1, so nimmt u den Wert $-\int_{\frac{\pi}{2}}^{0} \frac{d\varphi}{\Delta\varphi} = K$ an. Weil nun in der Gleichung für $t - t_0$ jedes Glied der rechten Seite mit Ausnahme des ersten periodisch um $2K$ ist, so entspricht den Werten von t folgendes System der Werte von u:

$$t = 0, \qquad u = 0,$$
$$t = T, \qquad u = 2K,$$
$$t = 2T, \qquad u = 4K,$$

T selbst ist $= \mathfrak{p} \cdot 2K$.

Zur Berechnung von t wird uns, wie aus Obigem hervorgeht, stets die Anzahl der Hin- und Hergänge der Achse zwischen ϑ_1 und ϑ_0 gegeben sein müssen.

Wir wenden uns nun zur Berechnung des Integrals:

$$\varphi - \varphi_0 = \int \frac{\sqrt{2(A + Ms^2 \sin^2\vartheta)}(a + b\cos\vartheta)\cdot d\vartheta}{2A\sin^2\vartheta\cdot\sqrt{R}}$$

und

$$\psi - \psi_0 = \int \frac{\sqrt{2(A + Ms^2\sin^2\vartheta)}}{2\sqrt{R}}\cdot\left(\frac{b}{C} + \frac{(a + b\cos\vartheta)}{A\sin^2\vartheta}\cos\vartheta\right)\cdot d\vartheta.$$

Hier haben wir:

I) $$\frac{a + b\cos\vartheta}{\sin^2\vartheta}$$

und

II) $$\left(\frac{a + b\cos\vartheta}{\sin^2\vartheta}\right)\cdot\cos\vartheta$$

umzuformen. a und b sind bereits früher durch die bekannten Größen ausgedrückt worden:

$$b = C(\psi_0' - \varphi_0'\cos\vartheta_0),$$
$$a = A\cdot\varphi_0'\sin^2\vartheta_0 - C\cos\vartheta_0(\psi_0' - \varphi_0'\cos\vartheta_0),$$
$$\frac{a + b\cos\vartheta}{\sin^2\vartheta} = \frac{a + bx}{1 - x^2},$$
$$\frac{(a + b\cos\vartheta)}{\sin^2\vartheta}\cos\vartheta = \frac{ax + bx^2}{1 - x^2} = \frac{b + ax}{1 - x^2} - b.$$

Wir brauchen daher vorläufig unsere Betrachtung nur der Größe $\frac{a + bx}{1 - x^2}$ zuzuwenden und dann, um die entsprechenden Ausdrücke für $\frac{b + ax}{1 - x^2}$ zu erhalten, b und a mit einander zu vertauschen. Wir setzen $\mathfrak{v} = \frac{x_0 + r}{x_0 - x_1}$, also

$$x = \frac{x_1(x_0 + r) + ry(x_0 - x_1)}{x_0 + r + y(x_1 - x_0)} = \frac{x_1\mathfrak{v} + yr}{\mathfrak{v} - y},$$

$$\frac{a + bx}{1 - x^2} = \frac{a + b\cdot\dfrac{x_1\mathfrak{v} + yr}{\mathfrak{v} - y}}{1 - \dfrac{x_1\mathfrak{v} + yr}{\mathfrak{v} - y}} = (\mathfrak{v} - y)\left\{\frac{a(\mathfrak{v} - y) + b(\mathfrak{v}x_1 + yr)}{(\mathfrak{v} - y)^2 - (x_1\mathfrak{v} + yr)^2}\right\}.$$

Es stellt sich also $\frac{a + bx}{1 - x^2}$ dar in der Form:

$$\frac{\varepsilon y_1^2 + f_1 y + g_1}{(y + \mu)(y - \nu)} = \varepsilon + \frac{\varrho}{y + \mu} + \frac{\lambda}{y - \nu},$$

worin ε, f_1, g_1, ϱ, λ, μ und ν konstante Größen sind und die letzteren die Werte haben:

$$\mu = \frac{(x_0 + r)(1 + x_1)}{(x_0 - x_1)(r - 1)},\quad \nu = \frac{(x_0 + r)(1 - x_1)}{(x_0 - x_1)(1 + r)}.$$

Es ist

$$\frac{a + b\cos\vartheta}{\sin^2\vartheta} = \varepsilon + \frac{\varrho}{y + \mu} + \frac{\lambda}{y - \nu} = \varepsilon + \frac{\varrho}{\sin^2\varphi + \mu} + \frac{\lambda}{\sin^2\varphi - \nu}.$$

Früher hatten wir erhalten:

$$\frac{\sqrt{2(A + Ms^2\sin^2\vartheta)}\cdot d\vartheta}{2\sqrt{R}} = \alpha\,\frac{(m + \sin^2\varphi)^{-2}\,d\varphi}{\Delta\varphi} + \beta\,\frac{(m + \sin^2\varphi)^{-1}\,d\varphi}{\Delta\varphi},$$

$$\varphi - \varphi_0 = \int \frac{\sqrt{2(A + Ms^2\sin^2\vartheta)}(a + b\cos\vartheta)\cdot d\vartheta}{2\sqrt{R}\cdot A\sin^2\vartheta}.$$

Daher ist:

$$\varphi - \varphi_0 = \frac{1}{A}\int \frac{\left(\alpha(m+\sin^2\varphi)^{-2} + \beta(m+\sin^2\varphi)^{-1}\right)\left(\varepsilon + \varrho(\sin^2\varphi+\mu)^{-1} + \lambda(\sin^2\varphi-\nu)^{-1}\right)\cdot d\varphi}{\varDelta\varphi},$$

oder:

$$\varphi - \varphi_0 = \frac{1}{A}\int \{\varepsilon\alpha(m+\sin^2\varphi)^{-2} + \varepsilon\beta(m+\sin^2\varphi)^{-1} + \alpha\varrho(m+\sin^2\varphi)^{-2}(\sin^2\varphi+\mu)^{-1}$$
$$+ \alpha\lambda(m+\sin^2\varphi)^{-2}(\sin^2\varphi-\nu)^{-1} + \varrho\beta(m+\sin^2\varphi)^{-1}(\sin^2\varphi+\mu)^{-1}$$
$$+ \beta\lambda(m+\sin^2\varphi)^{-1}(\sin^2\varphi-\nu)^{-1}\}\frac{d\varphi}{\varDelta\varphi}.$$

Jedes der unter dem Integralzeichen stehenden Glieder zerlegen wir in Partialbrüche und erhalten dieselben in der Form:

$$\frac{1}{(m+\sin^2\varphi)^2(\sin^2\varphi-\nu)} = \frac{\mathfrak{e}}{(m+\sin^2\varphi)^2} + \frac{\mathfrak{f}}{m+\sin^2\varphi} + \frac{\mathfrak{g}}{\sin^2\varphi-\nu},$$

$$\frac{1}{(m+\sin^2\varphi)^2(\sin^2\varphi+\mu)} = \frac{\mathfrak{h}}{m+\sin^2\varphi} + \frac{\mathfrak{i}}{m+\sin^2\varphi} + \frac{\mathfrak{k}}{\sin^2\varphi+\mu} \quad \text{usw.}$$

Die Nenner der Partialbrüche heißen:

$$(m+\sin^2\varphi)^2, \quad m+\sin^2\varphi, \quad \mu+\sin^2\varphi, \quad \sin^2\varphi-\nu.$$

Somit ergibt sich für $\varphi - \varphi_0$ der Wert:

$$\varphi-\varphi_0 = \int \frac{d\varphi}{\sqrt{1-\varkappa^2\sin^2\varphi}}\left\{\frac{Q}{(m+\sin^2\varphi)^2} + \frac{P}{m+\sin^2\varphi} + \frac{S}{\mu+\sin^2\varphi} + \frac{T}{\sin^2\varphi-\nu}\right\}$$

mit den Konstanten Q, P, S und T.

Es war erhalten worden:

$$\int \frac{(m+\sin^2\varphi)^{-2}\cdot d\varphi}{\varDelta\varphi} = \frac{1}{2A}\,\frac{\sin\varphi\cdot\cos\varphi\cdot\varDelta\varphi}{m+\sin^2\varphi} + \frac{B}{2A}\int\frac{d\varphi}{\varDelta\varphi(m+\sin^2\varphi)} - \frac{\varkappa^2}{2A}\int\frac{(m+\sin^2\varphi)d\varphi}{\varDelta\varphi},$$

worin abkürzend gesetzt war:

$$A = m(1+m)(1+\varkappa^2 m),$$
$$B = 1 + 2m + 2\varkappa^2 m + 3\varkappa^2 m^2,$$
$$C = 1 + \varkappa^2 + 3\varkappa^2 m.$$

Durch diese Substitution geht $\varphi - \varphi_0$ über in:

$$\varphi-\varphi_0 = \int\frac{\left(P+\frac{B}{2A}\right)}{(m+\sin^2\varphi)}\cdot\frac{d\varphi}{\varDelta\varphi} - \frac{Q\varkappa^2}{2A}\int\frac{d\varphi(m+\sin^2\varphi)}{\varDelta\varphi} + S\int\frac{d\varphi}{(\mu+\sin^2\varphi)\varDelta\varphi}$$
$$+ T\int\frac{d\varphi}{(\sin^2\varphi-\nu)\varDelta\varphi} + \frac{Q}{2A}\cdot\frac{\sin\varphi\cdot\cos\varphi\cdot\varDelta\varphi}{(m+\sin^2\varphi)}.$$

Hier sind die beiden Integrale

$$\int\frac{d\varphi}{(\sin^2\varphi-\nu)\varDelta\varphi} = -\frac{1}{\nu}\int\frac{d\varphi}{(1+n_1\sin^2\varphi)\varDelta\varphi}$$

und

$$\int\frac{d\varphi}{(\mu+\sin^2\varphi)\varDelta\varphi} = \frac{1}{\mu}\int\frac{d\varphi}{\varDelta\varphi(1+n_2\sin^2\varphi)} \quad \text{neu.}$$

Um die richtigen Substitutionen für diese Integrale in Anwendung zu bringen, müssen wir die Parameter n_1 und n_2 noch genauer betrachten.

$$n_1 = -\frac{1}{\nu} = -\frac{(1+r)(x_0-x_1)}{(1-x_1)(x_0+r)},$$

$$n_2 = -\frac{1}{\mu} = \frac{(x_0-x_1)(r-1)}{(x_0+r)(1+x_1)},$$

$$\varkappa^2 = \frac{2r}{\alpha(r-x_1)},$$

wo

$$\frac{x_0+r}{x_0-x_1} = \alpha$$

gesetzt ist.

n_2 wird durch das Produkt der beiden positiven echten Brüche $\frac{x_0-x_1}{1+x_1}$ und $\frac{r-1}{r+1}$ ausgedrückt und ist daher selbst ein positiver echter Bruch.

In dem mit dem Minuszeichen behafteten Produkt für n_1 ist jeder Faktor positiv, n_1 selbst also negativ. Um zu entscheiden, ob sein absoluter Wert kleiner oder größer als $\varkappa^2$ ist, bilden wir $\varkappa^2 + n_1$:

$$\varkappa^2 + n_1 = \frac{1}{\alpha}\left\{\frac{2r}{r-x_1} - \frac{1+r}{1-x_1}\right\} = \frac{1}{\alpha}\,\frac{(r+x_1)(1-r)}{(r-x_1)(1-x_1)}.$$

$\alpha = \frac{x_0+r}{x_0-x_1}$ ist positiv und > 1, also $\frac{1}{\alpha}$ ein positiver echter Bruch und da in $\varkappa^2 + n_1$ der Faktor $1-r$ allein negativ, also $\varkappa^2 + n_1$ selbst negativ ist, so muß der absolute Wert von n_1 größer als $\varkappa^2$ sein. Da außerdem

$$1 + n_1 = \frac{(r+x_1)(1-x_0)}{(1-x_1)(x_0+r_1)}$$

positiv ist, so ist der absolute Wert von $n_1 < 1$.

Es liegt daher $-n_1$ zwischen 1 und $\varkappa^2$ oder

$$n_1 \quad \text{zwischen} \quad -\varkappa^2 \quad \text{und} \quad -1.$$

n_2 liegt, da es ein positiver echter Bruch ist, zwischen 0 und $+\infty$.

Um die Legendresche Form des Integrals dritter Gattung mit der Jacobischen Transzendenten Π in Verbindung zu bringen, haben wir für die Parameter n_1 und n_2 zu setzen:

$$n_1 = -\varkappa^2 \sin^2 \operatorname{am}(ia + K),$$

$$n_2 = -\varkappa^2 \sin^2 \operatorname{am}(ia),$$

daher:

$$\int_0^\varphi \frac{d\varphi}{(1+n_1\sin^2\varphi)\Delta\varphi} = u + \frac{\Delta \operatorname{am}(a\varkappa')\, i\Pi(u, ia+K)}{\varkappa'^2 \sin\operatorname{am}(a\varkappa')\cdot\cos\operatorname{am}(a\varkappa')},$$

$$\int_0^\varphi \frac{d\varphi}{(1+n_2\sin^2\varphi)\Delta\varphi} = u + \frac{\sin\operatorname{am}(a\varkappa)\cdot\cos\operatorname{am}(a\varkappa')\, i\Pi(u, ia)}{\Delta am(a\varkappa')},$$

worin

$$\Pi(u, ia) = uZ(ia) + \frac{1}{2} \log \frac{\Theta(u - ia)}{\Theta(u + ia)},$$

$$i\Pi(u, ia + K) = i\Pi(u, ia) + Lu - \operatorname{arctg} \frac{L \sin \operatorname{am} u \cos \operatorname{am} u}{\varDelta \operatorname{am} u}$$

ist und

$$L = \frac{\varkappa^2 \operatorname{tg} \operatorname{am} (a\varkappa')}{\varDelta \operatorname{am} (a\varkappa')}.$$

Die beiden anderen in der Gleichung für $\varphi - \varphi_0$ vorkommenden Integrale sind

$$\int \frac{d\varphi}{(m + \sin^2\varphi)\varDelta\varphi} = \frac{1}{m} \left\{ u + \frac{\operatorname{tg} \operatorname{am} a}{\varDelta \operatorname{am} a} \left(uZ(a) + \frac{1}{2} \log \frac{\Theta(u - a)}{\Theta(u + a)} \right) \right\}.$$

$$\int \frac{d\varphi(m + \sin^2\varphi)}{\varDelta\varphi} = \frac{1 + m\varkappa^2}{\varkappa^2} u - \frac{1}{\varkappa^2} \left\{ \frac{E}{K} u + Z(u) \right\}.$$

Wir verwandeln noch:

$$\operatorname{arctg} \frac{L \sin \operatorname{am} u \cdot \cos \operatorname{am} u}{\varDelta \operatorname{am} u} \quad \text{in} \quad \operatorname{arctg} \frac{L}{K} \cdot \frac{H(u) \cdot H(u + K)}{\Theta u \cdot \Theta(u + K)},$$

und erhalten schließlich:

$$\begin{aligned}
\varphi - \varphi_0 = {} & \frac{1}{m} \left(P + \frac{B}{2A} \right) \left\{ u + \frac{\operatorname{tg} \operatorname{am} a}{\varDelta \operatorname{am} a} \cdot Z(a) \cdot u + \frac{1}{2} \frac{\operatorname{tg} \operatorname{am} a}{\varDelta \operatorname{am} a} \log \frac{\Theta(u - a)}{\Theta(u + a)} \right\} \\
& - \frac{Q\varkappa^2}{2A} \left\{ \frac{1 + m\varkappa^2}{\varkappa^2} u - \frac{1}{\varkappa^2} \left(\frac{Eu}{K} + Z(u) \right) \right\} \\
& + \frac{S}{\mu} \left\{ u + \frac{i \sin \operatorname{am} (a\varkappa') \cdot \cos \operatorname{am} a\varkappa'}{\varDelta \operatorname{am} a\varkappa'} \left(u \cdot Z(ia) + \frac{1}{2} \log \frac{\Theta(u - ia)}{\Theta(u + ia)} \right) \right\} \\
& - \frac{T}{\nu} \left\{ u + \frac{\varDelta \operatorname{am} (a\varkappa')}{\varkappa'^2 \sin \operatorname{am} (a\varkappa') \cos \operatorname{am} (a\varkappa')} \left(Lu - \operatorname{arctg} \frac{L}{K} \cdot \frac{H(u)H(u + K)}{\Theta(u)\Theta(u + K)} \right) \right. \\
& \left. + iuZ(ia) + \frac{i}{2} \log \frac{\Theta(u - ia)}{\Theta(u + ia)} \right\} + \frac{Q}{2A} \varkappa' \frac{H(u)H(u + K) \cdot \Theta(u + K)}{\Theta(u) \{ \varkappa m \Theta^2(u) + H^2 u \}}.
\end{aligned}$$

Es stellt sich also $\varphi - \varphi_0$ in folgender Form dar:

$$\begin{aligned}
\varphi - \varphi_0 = {} & \mathfrak{p}_1 \cdot u + q_1 \cdot Z(u) + \mathfrak{r}_1 \log \frac{\Theta(u - a)}{\Theta(u + a)} + \mathfrak{f}_1 \cdot \log \frac{\Theta(u - ia)}{\Theta(u + ia)} \\
& + \mathfrak{w} \cdot \operatorname{arctg} \frac{L}{K} \cdot \frac{H(u) \cdot H(u + K)}{\Theta(u) \cdot \Theta(u + K)} + \mathfrak{v} \cdot \frac{H(u) \cdot H(u + K) \Theta(u + K)}{\Theta u \{ \varkappa m \Theta(u)^2 + H^2(u) \}}.
\end{aligned}$$

Hier sei φ_0 so bestimmt, daß für $u = 0$ auch $\varphi = 0$ sei.

Alle Glieder dieser Gleichung sind periodisch um $2K$ mit Ausnahme der ersten. Wie wir gesehen haben, entsprach der Zeit T die Größe $2K$. Der in dieser Zeit zurückgelegte Winkel φ ist also $\varphi = \mathfrak{p} \cdot 2K$.

Die Änderungen dieses Winkels φ müssen innerhalb der Zeiträume von T bis $2T$, von $2T$ bis $3T$ usw. der Periode $2K$ wegen gleich sein.

$\psi - \psi_0$ war

$$= \int \frac{d\vartheta \sqrt{2(A + Ms^2 \sin^2 \vartheta)}}{2\sqrt{R}} \left\{ \frac{b}{C} + \frac{(a + b\cos\vartheta)}{A \sin^2 \vartheta} \cos\vartheta \right\}$$

$$= \int \frac{d\vartheta \sqrt{2(A + Ms^2 \sin^2 \vartheta)}}{2\sqrt{R}} \left\{ b\left(\frac{1}{C} - \frac{1}{A}\right) + \frac{b + a\cos\vartheta}{A \sin^2 \vartheta} \right\}.$$

Es wird daher sich $\psi - \psi_0$ darstellen durch:

$$\psi - \psi_0 = b\left(\frac{1}{C} - \frac{1}{A}\right)(t - t_0) + \chi(u).$$

Die Funktion $\chi(u)$ soll hier nicht weiter entwickelt werden. Zu ihrer Aufstellung bedarf es nur ähnlicher Überlegungen, wie sie zur Herleitung des Werts für das Integral

$$\varphi - \varphi_0 = \int \frac{d\vartheta \sqrt{2(A + Ms^2 \sin^2 \vartheta)}}{2\sqrt{R}} \cdot \frac{(a + b\cos\vartheta)}{A \sin^2 \vartheta}$$

erforderlich waren.

Für $X - X_0$ und $Y - Y_0$ ergibt sich unmittelbar aus Vergleich der für diese Größen und $t - t_0$ aufgestellten Integrale

$$X - X_0 = \alpha(t - t_0),$$
$$Y - Y_0 = \beta(t - t_0),$$

also:

$$\frac{X - X_0}{Y - Y_0} = \frac{\alpha}{\beta} = \text{const.}$$

Diese Gleichungen zeigen, daß die Projektion des Schwerpunkts auf die xy-Ebene sich mit konstanter Geschwindigkeit in gerader Linie fortbewegt.

Druck von B. G. Teubner in Leipzig.