Wissenschaftliche Beilage zum Jahresbericht der Städtischen Ober-Realschule
zu Charlottenburg. Ostern 1899.

Die Herstellung der Raumgebilde

als Ausgangspunkt, Entwicklungsprinzip und Endziel des geometrischen Unterrichts.

Von

Alfred Seiffert.

Bibliothek des Städt. Gymnasiums * Düsseldorf

9ch
2 (1899)

Charlottenburg 1899.
Druck von Adolf Gertz, Wilmersdorfer Str. 32.

899. Programm No. 130.

1366

Universitäts- und
Landesbibliothek Düsseldorf

Meinem lieben Vater gewidmet.

UNIVERSITÄTS- UND LANDESBIBLIOTHEK DÜSSELDORF

Universitäts- und
Landesbibliothek Düsseldorf

Einleitung.

Die Litteratur über den geometrischen Anfangsunterricht ist eine so reichhaltige und dabei bisweilen so schwer zugängliche, dass man sich über häufige Wiederholungen oder gar vereinzelte Rückschritte nicht wundern darf. Die Anzahl der überhaupt möglichen Gedanken über diesen verhältnismässig so einfachen Gegenstand ist eben bedeutend kleiner, als die Anzahl der seit Jahrzehnten und Jahrhunderten berufenen Pfleger desselben. Im Interesse des sicheren Fortschreitens wäre daher schon längst eine erschöpfende Zusammenstellung des bisher Geleisteten wünschenswert gewesen. Aber die ungeheure Mühe des Sammelns hat es bis zum Anfang dieses Jahrzehntes doch nicht dazu kommen lassen. Darum darf man das Erscheinen des Schottenschen Buches[1]) über „Inhalt und Methode des planimetrischen Unterrichts" als den lange ersehnten Abschluss der bisherigen Bestrebungen freudig begrüssen. Hier ist die einschlägige Litteratur in einer bisher unerreichten Vollständigkeit zusammengestellt und dabei mit solcher Klarheit verarbeitet, dass man in der That, wie Schotten beabsichtigt,[2]) nicht nur alle Verbesserungsvorschläge kennen zu lernen, sondern sich auch über ihren Wert oder Unwert ein sicheres Urteil zu bilden vermag. Die den einzelnen Kapiteln beigefügten eigenen Vorschläge Schottens zur Reform des geometrischen Unterrichts dürften dabei im allgemeinen der Mehrzahl der Fachgenossen so aus der Seele gesprochen sein, dass sie eine geeignete Grundlage für alle weiteren Reformbestrebungen abgeben. Demnach erscheint die Möglichkeit einer allgemeineren und umfassenderen Reform jetzt näher gerückt, als je zuvor, zumal wenn der Appell Schottens[3]) an die Verpflichtung der mathematischen Lehrer, „daran zu arbeiten, dass der geometrische Unterricht immer mehr zu einem fruchtbringenden sich gestalte", und seine Mahnung, vor der Hand auf die Abfassung von Lehrbüchern zu verzichten,[2]) bis erst in den Hauptpunkten eine gewisse Uebereinstimmung der Fachgenossen erzielt sei, überall beherzigt werden.

Die vorliegende Arbeit soll ganz in diesem Sinne, wenn auch in Einzelheiten von Schotten abweichend, den Versuch machen, die vorhandenen Differenzen zu beseitigen. Und da naturgemäss eine endgültige Lösung erst von dem Zusammenarbeiten Vieler zu erwarten ist, so wird sie ihren Zweck vollständig erreichen, wenn sie durch den Widerspruch, den einzelne der hier vorgetragenen Anschauungen und Forderungen zweifellos finden werden, zur Klärung des Gegenstandes beiträgt.

---

[1]) Schotten. Inhalt und Methode des planimetrischen Unterrichts. Leipzig. Teubner. I 1890, II 1893. In der Folge kurz mit Sch. I und II bezeichnet.

[2]) Sch. I Vorrede.

[3]) Sch. I S. 10.

Universitäts- und
Landesbibliothek Düsseldorf

§ 1. Ubersicht über die bisherigen Reformbestrebungen.

Die Reformbedürftigkeit des Euklidischen Systems für den Unterricht ist längst anerkannt worden. Schotten widmet diesem Gegenstande das ganze Einleitungskapitel. Für unsere Zwecke wird es zunächst nötig sein, die bisherigen Vorschläge übersichtlich zusammenzustellen, und es dürfte genügen, dabei ein für allemal auf das eben genannte Kapitel des Schottenschen Buches zu verweisen.

Danach sind im Laufe der Jahre folgende 12 Thesen aufgestellt worden:

1. Mathematik ist ohne besondere Anlage erlernbar[4]).
2. Der Zweck des mathematischen Schulunterrichts ist nicht nur mathematisches Wissen, sondern vorzugsweise auch logische Schulung und Förderung der freien Selbstthätigkeit[5]).
3. Der geometrische Unterricht ist pädagogisch wertvoller als der arithmetische[6]).
4. Die Euklidische dogmatische Methode muss durch die genetische ersetzt werden, nicht nur hinsichtlich der Beweise, sondern auch in dem gesamten Aufbau der Geometrie[7]).
5. Die Betrachtungsweise und die wichtigsten Resultate der „neueren Geometrie“ sollen in den Lehrplan aufgenommen werden[8]).
6. Dem streng wissenschaftlichen Unterricht muss ein propädeutischer Unterricht vorangehen, der, von der Stereometrie ausgehend, die Anschauung mittelst des Zeichnens übt[9]).
7. Der propädeutische Unterricht soll die Anfangsgründe der Geometrie der Lage umfassen und die Entstehung der Figuren durch Bewegung verdeutlichen[10]).
8. Weglassung der unklaren Definitionen, Anknüpfung an die sinnliche Anschauung und den damit unbewusst verbundenen Begriff ist ohne Einbusse an wissenschaftlicher Strenge möglich[11]).
9. Die Euklidischen Grundsätze reichen nicht aus. Mehr Grundsätze können den Aufbau klarer gestalten[12]).
10. Die Sucht, alles streng zu beweisen, ist zu verwerfen. Nur die notwendigen Beweise sind beizubehalten[13]).
11. Die Reihenfolge der Sätze soll derartig sein, dass Zusammengehöriges nicht getrennt wird und dass die Beweise möglichst einfach werden[14]).
12. Das praktische Zeichnen muss stärker betont werden, und zwar soll nur geometrisches Zeichnen[15]) auf der Schule gelehrt werden, in enger Verbindung mit dem geometrischen Unterricht.

Soweit reicht die Zusammenstellung Schottens. Ausserdem scheinen mir aber noch einige andere Vorschläge, die Schotten wohl erst einem späteren Kapitel (über Beweise und Konstruktionen) vorbehalten hat oder die einer späteren Zeit angehören, recht bemerkenswert zu sein:

13. Die Analyse des Beweises von Fenkner[16]) und Müller[17]).

---

[4]) Sch. I S. 2. [5]) I S. 4—6. [6]) I S. 6ff. [7]) I S. 11ff. [8]) I S. 15. [9]) I S. 14 u. 25. [10]) I S. 26. [11]) I S. 28. [12]) I S. 29. [13]) I S. 30. [14]) I S. 31. [15]) I S. 32.

[16]) Fenkner, Lehrbuch der Geometrie. Berlin. Salle. 1887.

[17]) H. Müller, Die Elementar-Planimetrie. Berlin. Springer 1891.

Universitäts- und
Landesbibliothek Düsseldorf

14. Die Methode der geometrischen Analysis, z. B. von Schindler[18]).
15. Der methodische Aufbau von Holzmüller[19]).
16. Die besondere Betonung der praktischen Verwendbarkeit des geometrischen Wissens gegenüber der bisweilen allzu grossen Wertschätzung des logischen Nutzens[19]) [20]).

Die meisten dieser Vorschläge treffen nur immer einen Teil des gesamten Unterrichts. Gewiss ist dies eine notwendige Vorstufe für eine allgemeine Reform, aber immerhin nur eine Vorstufe. Es wird an der Zeit sein, zu untersuchen, ob hiermit alle Punkte des Unterrichtes berührt worden sind, die einer Reform fähig oder bedürftig sind, und ob sich schon jetzt aus den vielleicht noch divergierenden und zum Teil unvereinbaren Einzelforderungen ein Strahlungspunkt gewinnen lässt, ein logisches Prinzip, das sie alle umfasst und streng begründet. Zu dem Zwecke wollen wir zunächst die obigen Vorschläge in anderer Weise ordnen, indem wir sie in ein System einfügen, welches durch die Art seiner Aufstellung eine gewisse Vollständigkeit garantiert.

Jede Reform auf pädagogischem Gebiet muss bestehen entweder in einer anderweitigen Bestimmung des Unterrichtszweckes oder in einer Erweiterung bezw. Einschränkung des Lehrzieles oder in methodischen Veränderungen des Entwicklungsganges

a) zur Beseitigung der objektiven Schwierigkeiten des Lehrstoffes,
b) zur Verringerung der subjektiven Schwierigkeiten bei den Schülern
    α) hinsichtlich des Verständnisses,
    β) hinsichtlich der praktischen Anwendung.

Vergleichen wir hiermit die obige Zusammenstellung, so ist zunächst ersichtlich, dass als Zweck des geometrischen Unterrichts im Laufe der Zeit etwas sehr Verschiedenes bezeichnet worden ist. Ursprünglich war die Erlernung eines gewissen Teiles der geometrischen Wissenschaft wohl der einzige Zweck. Später wurde die durch mathematischen Unterricht bewirkte logische Schulung und Förderung der freien Selbstthätigkeit ganz besonders hervorgehoben (These 2). Die jüngste Zeit erst beachtete den bedeutenden praktischen Nutzen mathematischen Wissens (16), der ja auch in den neuen Lehrplänen starke Betonung gefunden hat.

Das Lehrziel ist zwar im Ganzen und für die einzelnen Klassenstufen durch die jeweiligen Lehrpläne festgesetzt. Aber jede Veränderung des Unterrichtszweckes, jede Verbesserung der Lehrmethode, jede Verlängerung der disponiblen Zeit muss eine einschränkende oder erweiternde Wirkung auf dasselbe ausüben. Dahin zielen die Vorschläge 3, 5 und 12, welche zum Teil auch schon in den neuen Lehrplänen Berücksichtigung gefunden haben.

Die objektiven Schwierigkeiten des Lehrgegenstandes werden von den Forderungen 4, 9, 10, 11 getroffen, welche das ganze System einfacher und übersichtlicher zu gestalten suchen, und zwar durch Beachtung des logischen Zusammenhanges der einzelnen Sätze und dementsprechende Umstellung derselben, durch übersichtliche Zusammenstellung analoger Erscheinungen und durch Bevorzugung einfacherer Beweismittel.

Damit wird aber auch zugleich die Verringerung der subjektiven Schwierigkeiten des Verständnisses berührt, die in den Thesen 1 und 8 vorbereitet, in 6, 7, 13 und 14 weitergeführt und in 15 zu einem eigenartigen Abschluss gebracht wird. Die praktische Verwendung des Wissens wird endlich ausser in 15 auch in 12 und 16 berücksichtigt.

Diese Zusammenstellung lehrt demnach, dass die bisherigen Reformbestrebungen in der That in allen wichtigen Punkten des geometrischen Unterrichts den Hebel angesetzt haben. Doch erscheinen sie noch ohne inneren Zusammenhang und ohne die Evidenz der Vollständigkeit, ja es ist nicht zu leugnen, dass zwischen einigen eine, wie es scheint, unüberbrückbare Kluft vorhanden ist. Der krasse Gegensatz zwischen dem bisherigen logischen Aufbau, auf dessen Verfeinerung die meisten Reformvorschläge abzielen, und dem methodischen Aufbau Holzmüllers, der die Möglichkeit eines den logischen Anforderungen völlig genügenden Anfangsunterrichts überhaupt bezweifelt[21]) und daher für die unterste Stufe eine

---

[18]) Schindler, Die Elemente der Planimetrie. Berlin. Springer 1883.
[19]) Holzmüller, Methodisches Lehrbuch der Elementar-Mathematik. Leipzig. Teubner 1894. Dazu Begleitwort von Holzmüller. (In der Folge kurz H. Bglw.)
[20]) Bork, Crantz, Haentzschel, Mathem. Leitfaden für Realschulen. Leipzig. Dürr 1897.
[21]) H. Bglw. S. 5.

Universitäts- und
Landesbibliothek Düsseldorf

schnelle, mehr empirisch zu begründende Einführung in die wichtigsten Beziehungen zwischen der geometrischen Wissenschaft und dem praktischen Leben verlangt, ist denn in der That der Ausdruck einer scharfen Spaltung der Fachgenossen in zwei getrennte Lager, die man ziemlich genau als Gymnasial- und Realschulmathematiker bezeichnen kann. Aber gerade die Schärfe dieses anscheinenden Gegensatzes muss dazu drängen, eine baldige Verständigung zu wünschen.

Wenn man, ganz abgesehen von der Zweckmässigkeit im Einzelnen, nur die begeisterte Zustimmung beachtet, welche dieses Buch in weiten Kreisen und nicht nur bei den Fachgenossen gefunden hat[22]), so wird man sich dem Gedanken nicht verschliessen können, dass es für den Unterricht hervorragend brauchbar sein muss. Es fragt sich nur, ob diese Brauchbarkeit eine Folge des obigen Grundgedankens ist, oder ob sie etwa durch die gleich von vornherein auf ein umfassenderes und vor allem praktisches Ziel gerichtete Veränderung des Lehrganges bewirkt wird. Ich möchte das letztere behaupten und glaube im Verlaufe dieser Arbeit auch den Beleg dafür zu erbringen. Jedenfalls bedarf es noch eines Nachweises dafür, ob es nicht doch möglich sei, streng logische Entwicklung mit beständiger Betonung praktischer Verwendbarkeit und mit sofortiger Heranziehung des ganzen Lehrgebietes zu verbinden. Und wenn sich dabei herausstellt, dass eine konsequente Weiterführung und eine geeignete Ausgestaltung der bisherigen Reformvorschläge nicht nur eine mindestens gleiche Strenge des logischen Aufbaues ermöglichen, sondern auch unmittelbar zu beständiger praktischer Bethätigung drängen und dabei die subjektiven Schwierigkeiten noch mehr verringern, so ist der ganze Gegensatz auf einmal verschwunden. Selbst die Möglichkeit, dass ein Lehrer je nach seiner persönlichen Wertschätzung oder nach den Bedürfnissen seiner Schüler die logische oder technische Seite des Unterrichts mehr begünstigt, würde im Rahmen eines solchen Systems vollauf Platz finden. Und diese Verbindung der beiderseitigen Forderungen scheint mir in der That möglich zu sein.

---

§ 2. Verschmelzung der bisherigen Vorschläge.

Der eben genannte dreifache Zweck des mathematischen Unterrichts wird vollständig erreicht, wenn man das Unterrichtsziel über die sichere und klare Erkenntnis hinaus allgemein bis zur praktischen Verwendung hinausschiebt. Die logische Schulung ist eben eine notwendige sekundäre Wirkung jeder lückenlosen Entwicklung, und die Gelegenheit zu umfassender Selbstbethätigung ist durch eine überall geforderte praktische Verwendung des Wissens reichlich geboten.

Inwiefern dabei die besonderen Lehrziele in den einzelnen Gebieten der mathematischen Wissenschaft eine Veränderung zulassen oder verlangen, wird sich erst später angeben lassen. Jedenfalls würde ein sicheres Fortschreiten auf dem Gebiet der Geometrie eine Bevorzugung dieser Disciplin vor der Arithmetik rechtfertigen.

Die methodischen Verbesserungen haben zum Teil den Zweck, die Selbstthätigkeit des Schülers zu erleichtern. Diese sollen erst an späterer Stelle Berücksichtigung finden, da sie auf die Verteilung des Lehrstoffs keinen bestimmenden Einfluss ausüben. Alle übrigen Vorschläge lassen sich in folgende drei Thesen zusammenfassen:

1. Ausgangspunkt des geometrischen Unterrichts sei die Körperwelt;
2. Die Entwicklung des geometrischen Lehrstoffs sei eine genetische;
3. Endpunkt des geometrischen Unterrichts sei die praktische Verwendung des Wissens beim Zeichnen und Berechnen.

Diese drei Thesen fallen in eine einzige zusammen, wenn man die geometrische Wissenschaft definiert als

„Die Lehre von der Ausmessung und Herstellung der räumlichen Gebilde."

Dann ist es erstens natürlich, dass man von der Betrachtung, Zergliederung und Beschreibung derjenigen Dinge ausgeht, deren Herstellung erstrebt werden soll. Dann ist es

[22]) H. Bglw. S. 39 ff.

Universitäts- und Landesbibliothek Düsseldorf

ferner möglich und aus pädagogischen Gründen erforderlich, dass sich erst an die Herstellung eines Gebildes die Definition und die Frage nach weiteren Eigenschaften oder weiteren Herstellungsmöglichkeiten anschliesst und dass durch weitere Ausgestaltung der Gebilde stufenweise immer neue und kompliziertere Gebilde gewonnen werden. Dann endlich wird auch die praktische Verwendbarkeit des Wissens in so vollkommener Weise erreicht, wie es überhaupt möglich ist, zweifellos in höherem Masse, als durch blosses Zeichnen und Berechnen der Gebilde.

Man erkennt sofort, dass durch diese Definition der geometrischen Wissenschaft ihr bisheriger Charakter als „Verstandeswissenschaft" umgewandelt wird in den einer „Erfahrungswissenschaft". Diese Auffassung ist keineswegs neu. Seit langer Zeit hat sie vereinzelte Vertreter gehabt[23]), und gerade unter den Zeitgenossen ist sie immer stärker hervorgetreten. So sagt z. B. Dobriner[24]): „Es wird . . . in unserem Schulunterricht zu sehr verkannt, dass die Geometrie die erste unter den Naturwissenschaften ist etc." Schotten steht freilich auf dem entgegengesetzten Standpunkt der „Wissenschaft a priori" [25]). Wir werden zu zeigen haben, dass seine Behauptung von der rein begrifflichen Existenz der Gebilde nicht zutrifft, sobald man die Wirklichkeit der Körperwelt zugiebt.

In den Naturwissenschaften ist das Vorangehen der Anschauung und das Nachfolgen der Zergliederung und Beschreibung bereits zur prinzipiellen Annahme gelangt. Alle Versuche zur Klärung der geometrischen Grundbegriffe haben sich diesem Prinzip nähern müssen. Die Geometrie ist aber in der That die hervorragendste unter den Naturwissenschaften, da sie etwas vermag, was den Schwesterwissenschaften bisher nur zum Teil gelungen ist, was aber von ihnen als das Ideal einer vollständigen Beschreibung (im Kirchhoffschen Sinne) angesehen wird: die Herstellung der Gebilde auf Grund der Beschreibung.

Die rein begriffliche Entwicklung der geometrischen Wahrheiten ist daher nur eine mögliche Art ihrer Mitteilung, die unter Umständen, z. B. bei Wiederholungen und Vergleichungen, wegen ihrer besonderen Beweglichkeit und Schnelligkeit ihre grossen Vorzüge hat, die aber auch erfahrungsgemäss bisweilen, und für den Anfänger immer, recht schwierig ist und erst zu allerletzt unbedenklich wird, wenn die Begriffe mit den Realgebilden in richtiger Weise verknüpft sind.

Gegen diese Auffassung der geometrischen Gebilde als „Realgebilde" werden grosse Bedenken erhoben werden, zumal da sie den Ansichten Schottens durchaus entgegengesetzt ist. Es ist an dieser Stelle nicht möglich und auch nicht nötig, diesen Gegensatz zum Austrag zu bringen. Darum will ich nur bemerken, dass mich die Argumente Schottens in diesem Punkte (er hat sich ja auch vorbehalten, an späterer Stelle ausführlicher darauf zurückzukommen) nicht überzeugt haben.

Für die Resultate der Geometrie ist es völlig gleichgiltig, ob man die Idealgebilde Fläche, Linie und Punkt als ausschliessliche Produkte unserer Phantasie betrachtet und die realen Gebilde als durchaus unvollkommene Bilder derselben ansieht, oder ob man umgekehrt diese fehlerhaften Realgebilde als einzige thatsächliche Grundlage für die durch abstrahierendes Denken daraus gewonnenen Idealvorstellungen auffasst.

Darum könnte man schon den Standpunkt Holzmüllers gelten lassen, der diese philosophischen Erörterungen vom Unterricht ausschliesst und lediglich den pädagogischen Vorteil der leichteren Verständlichkeit im Auge behält. Diese Erwägung spricht unzweifelhaft zu unseren Gunsten, sobald es möglich erscheint, die Realgebilde in ausreichender wissenschaftlicher Genauigkeit wirklich herzustellen, was wir im nächsten Abschnitt nachweisen werden. Aber diese Herstellbarkeit scheint mir auch gleichzeitig ein ausreichender philosophischer Grund zu sein für die Behauptung, dass die oben genannten Grenzgebilde dieselbe Realität besitzen, wie die Körperwelt selbst, an der sie sich stets befinden. Freilich für sich betrachtet, lassen sie sich nicht herstellen, existieren nur in unserem Geiste, wenn man sie nicht mit Schindler[26]) direkt als Raumelemente definieren will. Aber wir brauchen sie uns niemals für sich darzustellen, alle räumlichen und ebenen Gebilde lassen sich unmittelbar an Körpern ver-

[23]) Schotten nennt: Thibaut 1822, Ulrich 1836, Seeger 1887, Fenkner 1888. (I S. 165—169.)
[24]) Dobriner, Leitfaden der Geometrie. Leipzig. Voigtländer 1898. Geleitwort. S. VI.
[25]) Sch. I S. 178 und II S. 3.
[26]) Elem. d. Planim. I. Stufe S. 3—5.

Universitäts- und
Landesbibliothek Düsseldorf

anschaulichen, mit Hülfe der Körper bewegen und festlegen. Die Herstellung ist sogar ein Vorgang, der sich in viel klarerer Weise idealisieren lässt, als qualitative Unterschiede der Gebilde, und der daher durch Abstraktion von den menschlichen Schwächen und irdischen Zufälligkeiten die Idealgebilde viel schärfer in unserer Vorstellung herausarbeitet, als es das Betonen der aprioristischen Natur gewisser Gebilde und Eigenschaften zulässt.

Demnach lässt sich gegen die Verwendung der inkorrekten Realgebilde an Stelle der Idealvorstellungen nichts einwenden, wenn man überall möglichst genaue Anfertigung derselben nach Massgabe der Definition verlangt. Die Unvollkommenheit unserer sinnlichen Wahrnehmungen gleicht den Nachteil der geringeren Genauigkeit vollkommen aus, und die beständige Betonung der verschiedenen Lagen- und Grössenmöglichkeiten ist völlig ausreichend, um die Zufälligkeiten der konkreten Gebilde zu eliminieren.

Ferner müssen aber auch sämtliche Definitionen genetisch werden, damit die Vorstellungen der Schüler von vornherein klar und eindeutig sein können. Unsere bisherigen Definitionen sind danach abzuändern, zum Teil auch die von Schotten vorgeschlagenen. Und doch ist es auch vom psychologischen Standpunkte aus einleuchtend, dass nicht die Aufzählung gewisser Haupteigenschaften, durch die sich eine Figur von anderen unterscheidet, auch nicht die Betrachtung und Beschreibung eines schon fertigen Gebildes, sondern erst die wirkliche Herstellung des Gebildes mit den Händen oder auch später ihre blosse Beschreibung eine unbedingt genaue und zuverlässige Vorstellung aller seiner Eigenschaften zu erzeugen vermag. Schon Kiessling[27]) entwickelte für den planimetrischen Anfangsunterricht einen ähnlichen Gedanken, der auch von Schotten als annehmbar befunden wird, und Holzmüller verlangt die genetische Einführung der Gebilde in der Stereometrie[28]) mit Hülfe genauer perspektivischer Zeichnungen. Doch da sich diese fraglos leichter anfertigen lassen, wenn dem Schüler die Herstellung des räumlichen Gebildes schon gelungen war, so dürften seine Gründe auch mehr für diese Herstellung sprechen, solange sie dem Schüler überhaupt möglich ist. Erst wenn dies nicht mehr der Fall ist, dürfen wir uns mit der blossen Zeichnung begnügen. Für die planimetrischen Gebilde ist Herstellung und Zeichnung identisch.

Auch die bisherigen Grundsätze erfahren eine eigentümliche Beleuchtung durch den Übergang zur Herstellung der Realgebilde. Die rein begriffliche Ableitung der geometrischen Wahrheiten musste überall da einen Grundsatz einführen, wo der logische Faden von einer Wahrheit bis zu einer andern nicht ohne anderweitige Hülfe gezogen werden konnte. Das wird jetzt durchaus anders werden. Die Herstellung der Gebilde setzt nichts weiter voraus, als die Möglichkeit eines eindeutigen Ergebnisses. Und darüber hat nicht der Verstand zu entscheiden, sondern lediglich die Erfahrung oder, wenn wir so sagen wollen, die eigentümliche Beschaffenheit unseres Raumes. Die Erfahrung lehrt nun, dass es zunächst gewisse Grundgebilde giebt, die sich eindeutig auf bestimmte Weise herstellen lassen, und dass auch alle weiteren Gebilde, die auf genau bestimmte Art aus diesen Grundgebilden hergestellt werden können, eindeutig sind. Hieraus lassen sich alle bisherigen Grundsätze ableiten. Da gleiche Herstellungsart natürlich gleiche Grundgebilde und gleiche Reihenfolge der Operationen voraussetzt, so werden wir Messungs- und Operations-Grundsätze zu unterscheiden haben.

Endlich muss auch die Form und Anzahl der Lehrsätze eine beachtenswerte Änderung erfahren. Lehrsätze entwickeln neue Eigenschaften der auf bestimmte Weise hergestellten Gebilde. Es wird zunächst eine Reihe von Umkehrungssätzen, die logisch berechtigt waren, in Wegfall kommen dürfen, da die Herstellung der Voraussetzung entweder unmöglich ist oder die behaupteten Eigenschaften schon benutzt. Dann aber wird die Unterscheidung zwischen ausführlicher Form (wenn ich das und das Gebilde zeichne, so . . . .) und kürzester Form, und die Unterscheidung zwischen Einführungsdefinition, späteren oder sekundären Definitionen und vollständigen Beschreibungen der Gebilde dringend notwendig[29]). Damit würde allerdings ein nach diesen Gesichtspunkten ausgearbeitetes neues Lehrbuch ein völlig verändertes Gepräge erhalten.

---

[27]) Kiessling. Das geometrische Zeichnen als Grundlage für den mathematischen Unterricht. Hoffmannsche Zeitschrift Bd. 1. vergl. dazu auch Bartholomäi. Sch. II S. 65. Fussnote.

[28]) H. Bglw. S. 15.

[29]) Hierin stimme ich völlig überein mit Wernicke. Siehe Sch. I 236 und 237, auch Note 1 daselbst.

Universitäts- und
Landesbibliothek Düsseldorf

§ 3. Die Herstellung der Grundgebilde.

Die Frage nach der Herstellbarkeit der Raumgebilde oder, was dasselbe ist, nach den genau herzustellenden Gebilden ist für die geometrische Wissenschaft von fundamentaler Bedeutung. Mit ihrer Beantwortung steht oder fällt diese Wissenschaft. Die Erfahrung lehrt, wie schon im vorigen Abschnitt bemerkt, dass es in der That gleiche Gebilde giebt und dass diese Gleichheit bedingt wird durch ein gleiches Herstellungsverfahren. Idealisiert man diese Erkenntnis, so erhält man den schon oben erwähnten Grundsatz von der völligen Übereinstimmung aller der Gebilde (unabhängig von Ort und Zeit), welche auf genau gleiche Weise hergestellt sind. Unter völliger Gleichheit ist dabei nur die Möglichkeit zu verstehen, das eine Gebilde räumlich durch das andere zu ersetzen. So ist also die Möglichkeit der Kongruenz Grundbedingung für die Geometrie.

Eine solche Kongruenz ist auf mechanischem Wege wirklich zu erreichen durch das Abguss- oder Abdruckverfahren, für welches dem Schüler ohne weiteres eine grosse Zahl von Beispielen geläufig ist. Der Unterschied zwischen dem ursprünglichen Körper oder Vorbild, der Matrize oder dem Abdruck und der Kopie oder dem Abbild lässt sich in völliger Schärfe auffassen, und bildet das wichtigste Hülfsmittel zur späteren Definition der Flächen.

Aber dieses Verfahren ist nur in sehr beschränktem Masse zur Anwendung zu bringen. Darum bedarf es einer Lehre von der allmählichen Herstellung kongruenter Körper. Eine solche kann entweder in einer Veränderung der Körpergrenzen bestehen, d. h. in einer Erzeugung von Flächen, Linien und Punkten, oder in einer Zusammenfügung mehrerer Körper zu einem Ganzen, woraus umgekehrt die Möglichkeit folgt, die unendliche Fülle der vorhandenen Körperformen durch Zerlegung auf eine geringe Zahl einfachster Formen zurückzuführen. Diese einfachsten Formen sind: Rechteckskörper, Prismen, Pyramiden, Cylinder, Kegel und Kugel[30]).

Die Abänderung einer schon vorhandenen Fläche hat stets eine rein mechanische Ursache, z. B. Überwindung der Kohäsion eines Körpers durch einen festeren Körper, wie dies bei gegenseitiger Reibung zweier Körper der Fall ist. Die dabei stattfindende Verdrängung von Massenteilchen hat den Effekt, ein Flächenstück des einen Körpers zum Abdruck eines entsprechenden Flächenstücks des anderen Körpers zu machen.

Es hat praktisch keine Schwierigkeit, diese gegenseitige Abschleifung zweier Körper so weit zu bringen, dass ein kleineres Flächenstück des einen sich ohne bemerkbaren Zwischenraum auf einem grösseren des anderen verschieben lässt. Die begriffliche Verallgemeinerung und Idealisierung dieses Vorganges führt daher zunächst zur Absonderung der gleichartigen Flächen von den ungleichartigen (Veranschaulichung an den vorgezeigten Körpern). Gleichartige Flächen sind solche, deren Teilabdruck sich auf der ganzen Fläche lückenlos verschieben lässt. Es giebt nur drei Arten: völlig geschlossene, zweiseitig unbegrenzte (röhrenförmige) und allseitig unbegrenzte.

Aber untereinander kongruent brauchen alle diese Flächen noch nicht zu sein. Erst wenn man sich mit Hülfe eines solchen Abdruckes ein Abbild herstellt, so sind Vorbild und Abbild kongruent. Diese beiden Körper kann ich aber wiederum durch gegenseitiges Abschleifen dahin bringen, dass zwei Stücke ihrer Oberfläche in der Beziehung von Vorbild und Abdruck stehen. Fährt man in dieser Weise fort, so ist ersichtlich, dass es möglich sein muss, zwei Flächen allmählich derartig abzuschleifen, dass sie einander kongruent und gleichzeitig aufeinander verschiebbar sind. Nennt man diese Fläche eine Ebene, so erhält man die Definition:

Eine Ebene ist diejenige gleichartige Fläche, welche ihrem Abdruck kongruent ist.

Daraus folgt

1. die Kongruenz aller Ebenen,
2. die Verschiebbarkeit einer Ebene auf jeder anderen oder in sich selbst,
3. die unendliche Ausdehnung oder Erweiterungsfähigkeit jedes Ebenenstückes nach allen Seiten hin.

---

[30]) Schotten will zuerst nur Würfel, Walze und Kugel. Sch. I S. 43 Note 1). Aber diese Änderuug ist ganz unwesentlich. Die der höheren Geometrie angehörigen Formen dürfen hier unberücksichtigt bleiben.

Universitäts- und
Landesbibliothek Düsseldorf

Da es nur eine einzige gleichartige und allseitig unbegrenzte Fläche giebt, so darf man schon aus dem Vorhandensein der unter 2 und 3 genannten Eigenschaften auf das Vorhandensein einer Ebene schliessen, während die Verschiebbarkeit in sich selbst allen gleichartigen Flächen gemeinsam ist.

Die hier gegebene Definition ist eine wohlbekannte; aus den Litteraturangaben Schottens ersieht man, dass sie dem Sinne nach von zahlreichen Fachgenossen[31]) aufgestellt worden ist. Neu ist jedoch meines Wissens der Weg ihrer Entwicklung und die dadurch bedingte klare Vorstellung von der Erzeugung der Ebene, die in der That, wie nicht anders zu erwarten war, der hauptsächlichsten Art und Weise entspricht, wie man im praktischen Leben Ebenen herstellt. Jeder Abdruck einer Ebene ist wieder eine Ebene.

Die genaue und kongruente Erzeugung anderer Flächen ohne das Abdruckverfahren gelingt zunächst noch nicht. Die Ebene ist daher das Fundament für die gesamte Geometrie. Nur durch mehrfache Herstellung von Ebenen an einem Körper kann man neue Grundgebilde erhalten. So ergeben schon zwei aneinander stossende Ebenen ein Grenzgebilde, das wir als Gerade bezeichnen. Der Umstand, dass sie zwei Ebenen angehört, beweist ihre Verschiebbarkeit in sich selbst, ihre unbegrenzte Ausdehnungsfähigkeit nach zwei Seiten hin und die Kongruenz aller Geraden untereinander, d. h. die Eindeutigkeit ihrer Gestalt. Man könnte auch die obigen bei den Grenzflächen der Körper eingeführten Begriffe von Vorbild, Abdruck und Abbild in analoger Weise auf die Begrenzungslinien von Ebenenstücken anwenden und dürfte dann als gleichartige (ebene) Linien solche definieren, die in sich verschiebbar sind (oder deren Abdruck sich auf dem Vorbild lückenlos verschieben lässt), und als gerade Linie diejenige gleichartige ebene Linie, welche ihrem Abdruck kongruent ist. Daraus würde auch hier folgen, dass schon Verschiebbarkeit in sich und Unbegrenztheit genügen, um eine ebene Linie als gerade zu kennzeichnen.

Andere Linien als gerade lassen sich zunächst nicht mit Sicherheit herstellen. Daher ist die Gerade das zweite Raumgebilde, welches einer wissenschaftlichen Behandlung fähig ist.

Die Betrachtungen Schottens über Ebene und Gerade führen zwar zu anderen Ergebnissen, scheinen mir aber mit den hier vorgetragenen wohl vereinbar. Denn auch der Lichtstrahl[32]) ist nur deswegen gerade, weil die Fortpflanzung der Schwingung gleichzeitig in mehreren Ebenen erfolgt. Auch das Prinzip des kleinsten Zwanges oder der grössten Kraftersparnis[33]) ist bei der vorliegenden Definition unmittelbar erfüllt, sogar in viel einfacherer Weise, als bei der Schottenschen Erklärung.

Die Herstellung der von lauter Ebenen begrenzten Körper, z. B. eines Lineals, ihrer Art nach, d. h. unter Beachtung der Anzahl der Grenzgebilde, hat jetzt keine Schwierigkeiten mehr, wohl aber ihre Herstellung nach Form und Grösse. Wir werden hier als Grundforderung aufstellen müssen, dass sich auch die gegenseitige Lage dieser beiden Grundgebilde und ihre Grösse in eindeutiger Weise herstellen lasse, unabhängig von Ort und Zeit.

§ 4. Die Zusammenfügung der Grundgebilde.

Die Frage nach der eindeutigen Zusammensetzung zweier Grundgebilde fällt zusammen mit derjenigen nach der Festlegung dieser Gebilde. Hierüber hat wiederum die Erfahrung zu entscheiden, und diese lehrt, dass die Ebene durch drei nicht in einer Geraden liegende Punkte (z. B. durch Auflegen auf drei Körperecken), die Gerade durch zwei Punkte festgelegt, mithin, infolge der Kongruenz dieser Gebilde, eindeutig bestimmt ist. Diese Erfahrung

[31]) Nach Beez, Euklidische und Nicht-Euklidische Geometrie, Plauen 1888, ist Leibniz der erste, welcher die Ebene durch das Prinzip der Umkehrbarkeit definierte (freilich ohne die notwendige Ergänzung: die Verschiebbarkeit). Weiterhin sind Crelle 1816, Bretschneider, E. Müller 1869, J. Müller 1870, Fabian 1876 und H. Müller 1891 Vertreter dieser Anschauung. Die bisher zu diesem Zwecke eingeführte „Zweiseitigkeit" der Grenzgebilde hat mit Recht Bedenken erregt. Durch Einführung der obigen Begriffe Vorbild, Abdruck und Nachbild glaube ich diese Schwierigkeit beseitigt zu haben.

[32]) vgl. Sch. II S. 5 Note 2.

[33]) vgl. Sch. II S. 10, auch Note 1.

Universitäts- und Landesbibliothek Düsseldorf

lässt sich zunächst an jedem beliebigen Körper machen und dann auch auf die abstrakten Gebilde übertragen[34]).

Die Festlegung zweier Punkte einer Ebene gestattet noch eine Drehung der Ebene aus sich heraus. Greift man zwei beliebige Lagen derselben heraus (indem man sie durch einen dritten Punkt festlegt), so müssen sie sich gegenseitig durch eine Gerade begrenzen. Da es durch diese Punkte nur eine solche in jeder Ebene giebt, so müssen sich alle diese Ebenen in derselben Geraden schneiden, was man auch dahin ausdrücken kann:

Eine Ebene lässt sich um jede beliebige in ihr liegende Gerade räumlich herumdrehen (rotieren).

Auch im Raume giebt es daher durch zwei Punkte nur eine Gerade.

Soll nun die bestimmte Lage dieser beiden Ebenen im Raum nachgebildet werden, so kann man entweder wiederum das Prinzip der mechanischen Abbildung anwenden und die Form des von beiden „Halbebenen" eingeschlossenen Raumstückes, den Raumwinkel, durch einen bildsamen oder scharnierartigen Körper abdrücken und auf einen anderen Körper übertragen, oder man muss nach einem konstruktiven Verfahren der Festlegung beider Ebenen suchen. Diese Überlegung muss dazu führen, zwei in eindeutiger Weise herstellbare Linien in jeder Ebene, die im einfachsten Falle einen Punkt der Schnittkante gemeinsam haben, gegeneinander festzulegen. Da durch diese beiden Geraden eine Ebene bestimmt ist, von der durch dieselben ein gewisses Ebenenstück herausgeschnitten wird, dessen Form man als ebenen Winkel bezeichnen kann; so führt die weitere Lösung der Hauptaufgabe auf die Betrachtung der ebenen Winkel. Ihre Nachbildung ist wiederum in einfachster Weise möglich vermittelst eines scharnierartig zusammengefügten Doppellineals, dessen Fehlen unter dem bisher gebräuchlichen Zeichenmaterial höchst merkwürdig und bedauerlich ist.

Verzichtet man auf diese mechanische Abbildung, so müsste man wiederum nach anderen Mitteln suchen, wie man die Lage zweier Strahlen in einer Ebene eindeutig bestimmen könnte. Ein solches ergiebt sich durch die Heranziehung aller Lagenmöglichkeiten und Lagenveränderungen, die daher einer besonderen Untersuchung bedürfen.

Die Definition des Winkels in der hier gebrauchten (häufigsten) Fassung bedarf den überaus umfangreichen Untersuchungen Schottens gegenüber[35]) einer Rechtfertigung.

Zunächst scheinen mir die Bedenken Schottens gegen die „Unendlichkeit" des Winkels[36]) hinfällig. Sind doch auch Ebene und Gerade unendlich gross! Es genügt eben die klare Erkenntnis von der unbegrenzten Erweiterungsfähigkeit dieser beiden Gebilde, um den Schüler sofort davon zu überzeugen, dass dieses neue „Winkelgebilde" durch ein kleines Anfangsstückchen am Scheitelpunkt eindeutig bestimmt ist. Nicht auf Grösse, sondern auf Eindeutigkeit kommt es an.

Sodann muss ich auf die obige prinzipielle Forderung genetischer Definitionen verweisen. Die Drehung, durch welche Schotten und mit ihm eine grössere Zahl von Fachgenossen den Winkel definieren wollen[37]), ist kein Gebilde, sondern nur die Bezeichnung für eine Bewegungsart. Der Umstand, dass man durch Drehung eines Strahles „in einer Ebene" einen Winkel, d. h. eben ein durch zwei Strahlen begrenztes Stück der Ebene, herstellen kann, nötigt keineswegs dazu, den Winkel als „Grösse der ebenen Drehung" zu definieren. Vielmehr wird umgekehrt diese Drehung zurückgeführt auf das „Ebenenstück". Die Unmöglichkeit, die Grösse der Drehung unabhängig vom Begriff des Ebenenstückes zu

---

[34]) Für die Lage einer Geraden, genauer eines Strahles im Raume, giebt es das (entbehrliche) Wort „Richtung". Eine analoge Bezeichnung für die Lage einer Ebene giebt es nicht. Diese schon häufig aufgestellte Definition der Richtung genügt vollständig unseren Anforderuugen, da sofort eine Richtung vorhanden ist, sobald man irgend einen Strahl hergestellt hat. Ihre Richtigkeit lässt sich wohl schon daraus erkennen, dass man überall das Wort „Richtung" durch „Lage" (eines Strahles) ersetzen kann, ohne dadurch unklar zu werden. Da eine Gerade aus zwei Strahlen besteht, so besitzt sie auch zwei Richtungen, d. h. zwei Strahlen von verschiedener Lage. Richtung oder Lage werden erst dadurch subjektiv, dass man für sie eine unterscheidende Bezeichnung einführt, die im Anfang nur auf das betrachtende Subjekt bezogen werden kann. Vgl. Sch. II § 1.

[35]) Sch. II Kap. II S. 94 ff.

[36]) Sch. II S. 111.

[37]) Sch. II S. 114.

Universitäts- und
Landesbibliothek Düsseldorf

definieren, und die Möglichkeit, einen Winkel zu zerschneiden und Winkel aufeinander zu legen, führt notgedrungen dazu, den Winkel in der obigen Weise als eindeutig herstellbares Gebilde zu definieren. Nur eine solche Definition genügt den Pascalschen Regeln[38].

Die oben verlangte Betrachtung aller Lagenmöglichkeiten und Lagenveränderungen ist von Schotten bereits in vorzüglicher Weise geliefert worden[39]. Nur in ihrer ersten Entwicklung würden bei Beachtung unseres Grundprinzips (der Herstellbarkeit) einige Veränderungen notwendig erscheinen.

Infolge der oben angegebenen Haupteigenschaften der Ebene und der Geraden werden alle Lagenmöglichkeiten erhalten

1. durch Insichselbstdrehung einer Ebene um einen in ihr liegenden festen Punkt,
2. durch Insichselbstverschiebung einer Halbebene längs ihrer Begrenzungsgeraden,
3. durch Aussichherausdrehung einer Halbebene um ihre Grenzgerade.

Nennt man diese Bewegungsarten kurz Drehung, Verschiebung und Rotation, so ergeben sich hier bei der Betrachtung zweier ebenen Gebilde (Punkte oder Geraden)

aus 1. Winkel und Kreis,
aus 2. parallele Gerade,
aus 3. a) bei Betrachtung des erzeugten Raumgebildes Kegelfläche und Cylinderfläche,
b) bei Betrachtung der zugehörigen zweiten Halbebene (blosses Zusammenfalten) symmetrische Gebilde.

Freilich sind diese Untersuchungen gar nicht möglich ohne die gleichzeitige Untersuchung der Grösse. Nehmen wir deren eindeutige Bestimmbarkeit, die erst im nächsten Abschnitt behandelt werden soll, hier schon als erwiesen an, setzen wir also voraus, dass sich Strecken und Winkel in ganz bestimmter Weise messen und in gleicher Grösse eindeutig herstellen lassen, so liefert die Erfahrung zunächst den Begriff der Strecke als des Abstandes zweier Punkte (der sich vielleicht auch schon aus der Herstellungsart der Geraden ableiten liesse), sodann ergiebt 3b) den Abstand eines Punktes von einer Geraden, 2. die Parallele als Gerade gleichen Abstandes (völlig in dem Schottenschen Sinne[40]) und zugleich auch als Gerade gleicher Neigung gegen eine dritte, und 3a) den Begriff der Normalebene zu einer Geraden und des Abstandes eines Punktes von einer Ebene. Es hat keine Schwierigkeiten, durch ähnliche Betrachtung im Raume auch hier schon senkrechte und parallele Ebenen herzustellen. Bemerkenswert ist dabei, dass die Erkenntnis der Parallelen als Gerader und der Normalebene und Parallelebene als Ebenen sich auf die Folgerungen des vorigen Abschnittes[41]) stützt.

Dass sich an diese Definition der Parallelen die Lehre vom Parallelogramm vor der Lehre von den Dreiecken anschliessen lässt, ist schon von anderer Seite[42] richtig erkannt worden. Ich habe kein Bedenken, diese Anordnung mit Holzmüller thatsächlich zu fordern, da sie auch hinsichtlich der Flächenberechnung notwendig ist.

Nach diesen grundlegenden Definitionen wird die Betrachtung der verschiedenen Lagenmöglichkeiten ihren guten Platz finden. Der von Schotten eingeführte Begriff des „Nachbarpunktes“[43], der bei Gelegenheit von 3b) schon korrekt eingeführt werden kann, muss natürlich für alle weiteren Gebilde erst genetisch definiert werden, damit er zur eindeutigen Vorstellung erhoben wird.

Unterwirft man schliesslich auch den Kreis allen obigen Lagenveränderungen, so ergeben sich aus 1. der Satz von gleichen Sehnen und Zentriwinkeln, aus 2. Lagensätze, aus 3a) die Herstellbarkeit der Kugel als Rotationsgebilde und aus 3b) die Beweise einiger wichtiger Lagensätze, die unmittelbar zur Lösung der Fundamentalaufgaben über die Teilung einer Strecke und eines Winkels führen.

Somit unterliegt es keinem Zweifel, dass die verlangte eindeutige Herstellung der oben betrachteten einfachsten Körperarten möglich ist, vorausgesetzt, dass es unter gewissen Annahmen gelingt, Strecken, ebene und damit auch räumliche Winkel in eindeutiger Weise abzubilden.

---

38) Sch. I S. 62: In allen Definitionen nur völlig bekannte oder bereits erklärte Ausdrücke gebrauchen!
39) Sch. II S. 60ff. Lagen- und Massuntersuchungen.
40) Sch. II S. 208.
41) s. o. Seite 10. Erster und dritter Abschnitt.
42) Bork, Crantz, Haentzschel. Begleitschreiben zum Leitfaden S. 4.
43) Sch. II S. 69.

Universitäts- und
Landesbibliothek Düsseldorf

§ 5. Die Grösse der Gebilde.

Die eindeutige Messbarkeit und Herstellbarkeit der Strecken und Winkel setzt viererlei voraus:

1. Die Grundgebilde, von denen sie abhängig sind, müssen selbst eindeutig herstellbare Gebilde sein.
2. Die Art ihrer Herstellung aus den Grundgebilden muss eine ganz bestimmte sein.
3. Bei der Unmöglichkeit einer direkten Vergleichung muss die Vergleichung durch ein drittes Gebilde zulässig sein.
4. Es muss möglich sein, Masseinheiten aufzufinden, die sich an allen Orten und zu allen Zeiten mit gleicher Sicherheit immer wieder erzeugen lassen.

Die erste Bedingung ist erfüllt, wenn Strecke und Winkel von vornherein richtig definiert werden als Teile von Geraden und Teile von Ebenen. Jedenfalls wird dadurch ihre Definition als „kürzester Abstand" und „Grösse der Drehung" ausgeschlossen, wie in Bezug auf den Winkel schon oben bemerkt wurde.

Der zweiten Bedingung wird genügt, wenn wir überall die Anwendung des einzigen Kriteriums vorschreiben, welches wir für die völlige Gleichheit der Gebilde besitzen, nämlich die Ersetzung eines Gebildes durch ein anderes. Erst das Aufeinanderlegen oder Ineinanderlegen der Gebilde giebt ein zuverlässiges Urteil über ihre Gleichheit oder Ungleichheit, nicht z. B. der Gesichtswinkel, unter dem sie uns erscheinen, oder das blosse Augenmass. Im Anschluss an diese Betrachtungen ist es auch am Platze, den Unterschied zwischen physischen und mathematischen Körpern eingehender zu besprechen[44]).

Die dritte Bedingung liefert uns den so vielfach angewendeten Grundsatz, dass zwei Gebilde ihrer Grösse nach untereinander gleich sind, wenn sie ein und demselben dritten Gebilde gleich sind. Die Erfahrung hat es tausendfach bestätigt, dass dies wirklich der Fall ist, und wir brauchen diesen Satz, weil es sonst schlechterdings unmöglich wäre, die Herstellbarkeit der Gebilde unabhängig zu machen von Raum und Zeit.

Die geforderten Masseinheiten endlich und ihre weitere Einteilung werden nur dann möglich, wenn sich irgend eine Strecke und irgend ein Winkel immer wieder mit Sicherheit auffinden lassen, und wenn es gelingt, durch ein zuverlässiges Teilungsverfahren dieses Ganze in so viele kleine Teile zu zerlegen, wie es für die Zwecke des genauen Messens notwendig erscheint. Beides ist in der That erfüllt. Die Längeneinheit lässt sich mit grosser und der ganze Winkel mit unbedingter Genauigkeit immer wieder auffinden. Demnach braucht nur noch für ein korrektes Teilungsverfahren gesorgt zu werden, und das ist Sache des Unterrichtes. Es ergiebt sich hieraus die Notwendigkeit, die arithmetischen Operationen des Addierens, Subtrahierens, Vervielfältigens und Teilens auch geometrisch auszuführen und durch vielfache Übung geläufig zu machen. Nur so kann der Massstab als Teilung eines Meters, der Transporteur als Teilung des rechten Winkels mit Hülfe der vorher zu erlernenden Teilung eines Kreises das volle Verständnis des Schülers finden[45]).

Aber nicht nur Strecken und Winkel sind einer Teilung und Ausmessung zugänglich, sondern auch Flächen und Körper, sobald man eine den obigen Bedingungen entsprechende Einheit für diese Gebilde gefunden hat. Solche Einheiten sind in der That das Quadrat und der Würfel. Die wirkliche Herstellung dieser Gebilde aus den verschiedenen Längeneinheiten und die Zerlegung der einfachsten Flächen und Körper in solche Flächen- und Körpereinheiten ist die Grundbedingung für ein klares Verständnis des Schülers von der „Grösse" dieser Gebilde. Und daraus ergiebt sich dreierlei:

Erstens vermag der Begriff der Dimension auf diese Weise zur völligen Klarheit erhoben zu werden, wenn man denselben auf die zur Ausmessung erforderlichen Abmessungen gründet. Die bisherige Art ihrer Begriffsbestimmung auf Grund der Bewegung oder des Zusammenschrumpfens der Gebilde kann nach unseren Anforderungen nicht als ausreichend angesehen werden, da die Einschränkung auf drei zu einander senkrechte Bewegungen

---

[44]) Vgl. hiermit auch die Äusserungen Schottens in II S. 68.

[45]) Sch. II S. 67. Betonen möchte ich an dieser Stelle noch besonders die grosse Übereinstimmung mit Schotten in der praktischen Behandlung dieser ganzen Untersuchungen.

Universitäts- und
Landesbibliothek Düsseldorf

ohne weiteres nicht erklärlich ist. Damit scheinen auch die Ausführungen Schottens gut übereinzustimmen[46]).

Zweitens erscheint es von vornherein als notwendig, die betrachteten Gebilde auch in verschiedener Grösse oder in verschiedenem Massstabe herzustellen. Dadurch wird der Begriff der Ähnlichkeit vorbereitet und von vornherein dem Schüler in einfacher Weise veranschaulicht. Auch die Möglichkeit einer blossen Übereinstimmung in der Flächen- oder Raumgrösse, d. h. der Gleichheit des Inhaltes trotz der Verschiedenheit der Formen, lässt sich schon gelegentlich nachweisen. Hierher würde auch die Abwickelung der Cylinder- und Kegelflächen auf eine Ebene gehören.

Drittens führt die Zerlegung der Gebilde und ihre dadurch ermöglichte Inhaltsberechnung überhaupt zu einer allgemeineren Beobachtung, dass nämlich schon eine beschränkte Anzahl von Abmessungen das ganze Gebilde eindeutig bestimmt und dass dann eine Ausmessung der übrigen Gebilde durch das Vorhandensein einfacher Beziehungen zu den gegebenen überflüssig wird. So erscheint es von vornherein möglich, die Konstruktion der Gebilde durch ihre Berechnung zu ersetzen oder zu ergänzen, wenn es nicht auf die Beschaffung der ganzen Gebilde selber ankommt, sondern nur auf die Kenntnis ihrer messbaren Grössen. Daher erwächst dem Unterrichtenden die Pflicht, bei jeder Gelegenheit auf diese messbaren Beziehungen und ihre Konsequenzen aufmerksam zu machen und dadurch die innige Beziehung zwischen Geometrie und Arithmetik in das rechte Licht zu setzen. Ich bin nicht der Ansicht, dass man diese metrischen Relationen gewissermassen als Einführung in die Elemente der Algebra benutzen solle, aber ich finde es mit Schotten[47]) unbedenklich, sie auch auf der Quartastufe schon zu einem präzisen algebraischen Ausdruck zu bringen und diejenigen Schlüsse daraus zu ziehen, die dem Verständnis des Quartaners zugänglich sind.

---

§ 6. Die Vollständigkeit des geometrischen Unterrichts.

Nachdem wir im Vorstehenden den Nachweis geliefert haben, dass die Frage nach der eindeutigen Herstellung der Gebilde nicht nur die Definitionen und Grundsätze der Geometrie zu liefern vermag, sondern auch eine ganz bestimmte Reihenfolge der zu untersuchenden Gebilde ergiebt, würde es keine besonderen Schwierigkeiten mehr bereiten, den gesamten Aufbau nach dem Prinzip der jedesmaligen Herstellbarkeit der vorausgesetzten Gebilde vorzunehmen. Es ist hier nicht der Ort, die einzelnen Details, die nach den früheren Angaben zum Teil recht sehr von dem Hergebrachten abweichen, genauer auszuführen, wenngleich einzelne Teile, wie der Anfangsabschnitt über die Herstellung, Aneinanderfügung und Messung der Grundgebilde, ferner die Lehre von den Parallelen und Parallelogrammen und namentlich die Entwicklung der Stereometrie besonderes Interesse haben dürften. Aber wir haben oben[48]) noch einige Forderungen rein pädagogischer Natur ausser acht gelassen, die es auf die Erleichterung der Selbstthätigkeit des Schülers abgesehen hatten. Diese Fäden will ich hier wieder aufnehmen und gleich zu den drei Forderungen der Vollständigkeit, Konzentration und Steigerung des Unterrichts zusammenziehen. Und da auch in pädagogischen Lehrbüchern gar wenig über ihre praktische Durchführung im mathematischen Unterricht gesagt ist, so wird es nicht überflüssig erscheinen, im Anschluss an die hier vertretenen Prinzipien die Notwendigkeit und die praktischen Konsequenzen dieser Forderungen zu entwickeln.

Eine alte pädagogische Regel verlangt, dass der Lehrer in jeder einzelnen Lehrstunde von irgend einem Standpunkte aus ein Bild des gesamten Klassenpensums entwerfe. Um wieviel mehr muss man da verlangen, dass jedes Klassenpensum von irgend einem Gesichtspunkte aus ein Bild des ganzen Lehrgebietes sei, in unserem Falle, dass jedes geometrische

---

[46]) Sch. II S. 176.
[47]) Sch. I. S. 86. Note 2).
[48]) Seite 6.

Universitäts- und
Landesbibliothek Düsseldorf

Klassenpensum alle die mannigfaltigen Beziehungen der Geometrie zum praktischen Leben erkennen lasse. Diese Eigenschaft will ich als äussere Vollständigkeit der Pensen bezeichnen.

Ausserdem kann man aber noch von einer inneren Vollständigkeit oder Vollständigkeit in sich sprechen, wenn man einen Schritt weiter geht als Schotten[49]) und von dem genetischen Aufbau auch den Nachweis verlangt, dass es ausser den aufgefundenen Grundwahrheiten keine weiteren mehr giebt. Nur so würde die Wissenschaft[50]) vor den Augen der Schüler entstehen, nicht bloss eine Reihe von Lehrsätzen.

Nach den vorstehenden Untersuchungen ergeben sich daher folgende Forderungen:

1. Es müssen alle möglichen Grundgebilde und alle möglichen Kombinationen derselben untersucht werden (schematischer Aufbau).
2. Mit jedem Gebilde sind alle möglichen räumlichen Operationen vorzunehmen: Drehung, Verschiebung, Zusammenfaltung und Rotation.
3. Jedes Gebilde soll in allen möglichen Lagen betrachtet werden, nicht nur in Bezug auf den Beschauer (subjektive Lagenbezeichnung), sondern auch in Bezug auf andere Gebilde (objektive Lagenbezeichnung). (Lagensätze.)
4. Mit jedem Gebilde sind alle möglichen typischen Ausgestaltungen vorzunehmen: Verbindungslinien, Verlängerungen, Kreise, Parallele, Lote etc. (Charakteristische Linien.)
5. Jedes Gebilde soll nicht nur betrachtet, sondern wirklich hergestellt, gemessen und berechnet werden, soweit es auf jeder Stufe möglich ist. (Metrische Relationen, Beziehung zur Arithmetik.)
6. Die Herstellung der Gebilde soll auf alle möglichen Arten geschehen (Gruppenaufgaben), und zwar nicht nur in einer einzigen Grösse, sondern in verschiedenem Massstab, oder bei gleicher Grösse in verschiedener Form.
7. Auch die logische Schärfe der Definitionen, Beweise und Konstruktionen sei von vornherein eine vollständige.

Hierbei scheint die schon von Schwering[51]) aufgestellte Forderung eines stereometrischen Pensums für jede Stufe am wichtigsten zu sein, da sie viel rationeller ist, als die Verlegung eines geringen Teiles der Stereometrie nach Quarta, welche Holzmüller vorgenommen hat. Die Möglichkeit einer solchen Verteilung ist wohl durch die obigen Untersuchungen bewiesen, ihre pädagogische Zweckmässigkeit folgt aber nicht nur aus dem Prinzip der Vollständigkeit, sondern auch aus dem ungeheuren praktischen Nutzen, den eine solche beständige Beschäftigung mit den Raumgebilden im engeren Sinne gewährt. Gegen die in 6. verlangten Gruppenaufgaben scheint Holzmüller grosse Bedenken zu haben[52]), namentlich mit Rücksicht auf die Verpflichtung des Lehrers, von diesem so überaus nützlichen Teil des geometrischen Unterrichts die Langeweile fernzuhalten. Doch scheint mir diese Langeweile durchaus nicht eine notwendige Folge der gründlichen Behandlung des Gegenstandes zu sein — denn dem Schüler macht alles Freude, was er wirklich begreift und ausführen kann —, sondern sie ist vielleicht eine Folge allzu willkürlichen Herausgreifens einzelner Aufgaben aus der ganzen Fülle der möglichen, ohne dass der Schüler vorher die nötige Schulung zu ihrer sicheren Lösung erfahren hat. Die einzelnen Schritte bei einer solchen Lösung geometrischer Konstruktionsaufgaben sind in neuerer Zeit mit einer solchen Vertiefung in den psychologischen Vorgang durchgearbeitet worden[53]), dass es bei genügendem gleichartigem Bildungsstoff, wozu diese Gruppenaufgaben das beste Material[54]) liefern, auch jedem unbegabten Schüler gelingt, diese Methode zu begreifen und selbständig anzuwenden. Es ist dabei sehr wohl möglich, mit der Bearbeitung der Gruppe aufzuhören oder dieselbe abzukürzen, wenn dies ohne Gefährdung des gründlichen Verständnisses geschehen kann.

---

[49]) Sch. I S. 24.
[50]) Sch. I S. 52.
[51]) Schwering, Aufgabe und Anschauung. Sch. I S. 105.
[52]) H. Bglw. S 20.
[53]) z. B. von Schindler in seinem oben genannten Lehrbuch. Vergl. auch Sch. I S. 8.
[54]) S. die Bemerkung Lichtenbergs in Sch. I S. 50, auch Note 1.

Universitäts- und
Landesbibliothek Düsseldorf

Die hierin liegende stärkere Betonung der Konstruktionsaufgaben ist bei dem angewendeten Entwicklungsprinzip so durchaus gerechtfertigt und selbstverständlich, dass ich zu ihrer weiteren Begründuug nichts hinzuzufügen brauche, zumal da in dieser Hinsicht zur Zeit keine wesentliche Meinungsverschiedenheit mehr unter den Fachgenossen besteht.

Aber der letzte Punkt scheint den Ansichten Schottens und Holzmüllers[55]) durchaus zu widersprechen. In Wirklichkeit werden wir ungefähr zu demselben Resultat gelangen, wenn wir die Notwendigkeit einer allmählichen Steigerung der Selbstbethätigung des Schülers berücksichtigen. Freilich bleibt dann immer noch der Unterschied bestehen, dass ich von dem Lehrer auch im Anfangsunterricht vollständige Schärfe der Definitionen und Entwicklungen als ein beständig dem Schüler vorzuhaltendes, wenn auch für ihn vorläufig noch unerreichbares Ideal verlange, und ich halte einen Aufbau für bedenklich, bei dem der reifere Schüler später die volle logische Strenge vermissen könnte.

---

§ 7. Konzentration und Steigerung der Selbstbethätigung.

Die soeben zum Zweck der Vollständigkeit des Unterrichts aufgestellten Forderungen legen die Gefahr einer Zersplitterung und Überbürdung nahe.

Zunächst könnte man von der Untersuchung aller Kombinationen, aller räumlichen Operationen und aller Lagenmöglichkeiten eine ins Unendliche gehende Weitschweifigkeit befürchten. Diese Furcht ist indessen völlig unbegründet, da sich die Anzahl der wirklich neuen Gebilde und Lagenbeziehungen sehr bald erschöpft und somit die Abgeschlossenheit des Aufbaues der Elemente um so deutlicher zur Erkenntnis kommt. Die möglichen Ausgestaltungen freilich wären an sich geeignet, vom Hundersten ins Tausendste zu kommen, wenn man nicht für jede Stufe gewisse Arten der Ausgestaltung ausschliesslich oder vorzugsweise vorschreibt. Bedenkt man endlich die ungeheure Fülle aller möglichen praktischen Anwendungen, so ist es evident, dass durch das Lernen der Definitionen und Lehrsätze, durch das Einprägen der Beweise, d. h. der inneren Beziehungen zwischen den einzelnen Erscheinungen, durch das Zeichnen, Modellieren und Berechnen leicht eine solche Überbürdung eintreten kann, dass man die obigen Forderungen als unerschwingliche bezeichnen müsste.

Dieser Gefahr gegenüber bedarf es für jede Stufe zunächst einer gewissen Konzentration, einer Vereinbarung der Grenzen, bis zu denen hin auf jeder Stufe die freie Bewegung erlaubt und notwendig ist. Es ist wohl selbstverständlich, dass dieses Zentrum für die untersten Stufen unbedingt die Herstellung gewisser zusammengesetzter Gebilde sein muss. Die Verschiedenheit der Stufen wird sich erst offenbaren in der Auswahl der planimetrischen und stereometrischen Gebilde, die für eine jede neu hinzutreten, in der Abgrenzung der zu behandelnden Ausgestaltungen und vielleicht noch in der Bezeichnung derjenigen Eigenschaften, die vorzugsweise bei der Herstellung und Berechnung Berücksichtigung finden sollen.

Freilich soll damit nicht die oben verlangte Vollständigkeit ganz aufgegeben werden, sondern nur in eine möglichste Vollständigkeit abgeändert werden.

Besonders in den höheren Unterrichtsstufen wird die Frage nach allen möglichen Fortsetzungen häufig unmittelbar zu Bereicherungen der Wissenschaft führen, die nicht zum Gegenstand des Schulunterrichts gemacht werden können. Wenn daher auch die Beantwortung dieser Frage dem künftigen Fachmann reiche wissenschaftliche Anregung geben dürfte, so würde sie doch häufig den Rahmen des Elementarunterrichts überschreiten. Auf dieser Stufe wird es in der That nur möglich sein, die wichtigsten bisher vorhandenen Ausläufer aufzuweisen und eine vollständige Behandlung dem späteren Studium vorzubehalten[56]).

---

[55]) H. Bglw. S. 5.

[56]) Hier vermag sich auch die von Herbart verlangte „Begeisterung" und Schottens „Arbeit um der Arbeit willen" in reichem Masse zu entfalten.

Universitäts- und
Landesbibliothek Düsseldorf

Aber noch in einer anderen Beziehung ist eine Konzentration zu erstreben, nämlich bei den sogenannten Übungsaufgaben. Die meisten Lehrbücher und Aufgabensammlungen bieten eine Überfülle, die ja durch die Möglichkeit eines beständigen Wechsels von Generation zu Generation sehr nützlich ist, aber in den meisten Fällen den Nachteil hat, dass die Schüler überhaupt nicht oder nur sehr schwer zu einem klaren Erfassen der Lösungsmethode kommen. Diese Beobachtung ist eine so allgemeine, dass die selbständige Lösung neuer geometrischer Aufgaben bekanntlich überhaupt von den Kriterien der Versetzungsreife vielfach ausgeschlossen wurde. Diesem offenbaren Übelstande, der bei dem hervorragenden Bildungswert solcher Aufgaben doppelt fühlbar wird, kann nur dadurch wirklich abgeholfen werden, dass jede Unterrichtsstufe ihr bestimmtes obligatorisches Aufgabenpensum zugewiesen bekommt, und dass alle weiteren Anwendungen als fakultative bezeichnet werden, abhängig von der Besonderheit der Lehranstalt, des Lehrers und des Schülermaterials. Die obligatorischen Pensen bilden dann gleichzeitig den oben verlangten Konzentrationspunkt, um den sich der Lehrstoff gruppiert und durch den sich der Grad geometrischer Ausbildung am deutlichsten bezeichnen lässt.

Doch noch ein dritter Gesichtspunkt muss grösseren Einfluss auf die Gestaltung des Unterrichts gewinnen, wenn der Zersplitterung und Überbürdung erfolgreich entgegengearbeitet werden soll. Die mathematische Ausbildung erstrebt ausser einem gewissen Verständnis und einer gewissen Herstellungsfertigkeit auch die sprachliche Wiedergabe der Erkenntnis und der Herstellungsart. Und diese macht erfahrungsgemäss gerade die meisten Schwierigkeiten. Schotten[57]) betont mit Recht den grossen sprachlichen Nutzen, den ein guter mathematischer, und besonders geometrischer Unterricht gewährt. Aber es ist unmöglich, diese sprachliche Wiedergabe des logischen Zusammenhanges der Erscheinungen gleich von vornherein in voller Schärfe zu verlangen. Erst ganz allmählich entwickelt sich bei den Schülern aus dem anfänglichen Gefühl der Richtigkeit die Fähigkeit, dasselbe zu zergliedern und in lückenlose Reihen zu ordnen. Dies ist der oben angedeutete Gesichtspunkt, durch den der Unterricht thatsächlich in der von Holzmüller[58]) verlangten Weise beeinflusst wird, und der auch Schotten[59]) zu der Mahnung bewog, im Anfangsunterricht nicht gleich alles streng beweisen zu wollen. Aber wohlverstanden: nur von dem Schüler soll man nicht gleich die volle begriffliche Präzision wiederverlangen, von seiten des Lehrers muss die sprachliche Formulierung auch der Grundbegriffe, wie schon bemerkt, eine durchaus einwandfreie und wissenschaftlich korrekte sein. Dies gilt nicht bloss für die Beweise der Lehrsätze und für die Art ihrer Verknüpfung, sondern namentlich auch für die Behandlung der Konstruktionsaufgaben. Die vollständige Lösung derselben muss gleich von vornherein, d. h. schon bei den ersten Fundamentalaufgaben, zur Anwendung gelangen, wo sie sich ja überdies so einfach gestaltet, dass auch der unbegabteste Schüler sie zu begreifen vermag. Es ist durchaus verkehrt, diesen Teil des Unterrichts erst einer späteren Stufe zu überweisen, wo er dann erfahrungsgemäss die grössten Schwierigkeiten bereitet und zu den bekannten Misserfolgen führt. Die Konstruktionsaufgabe ist nach unserer Meinung der Mittelpunkt des Unterrichts und darf daher von vornherein mindestens dasselbe Recht beanspruchen, wie bisher die Lehrsätze.

Wenn also zugestandenermassen die volle begriffliche Schärfe der sprachlichen Wiedergabe von seiten des Schülers nicht gleich verlangt werden kann, so bleibt nichts weiter übrig, als eine allmähliche Steigerung der Ausdrucksfähigkeit des Schülers herbeizuführen. Eine solche ist sehr wohl denkbar, wenn man die breite Skala der verschiedenen Arten bedenkt, wie man sich von dem Verständnis der Schüler überführen kann. Das untrüglichste Zeichen dafür ist die Fähigkeit der Herstellung. Diese muss daher unter allen Umständen verlangt werden. Ein blosses Zeigen an fertigen Gebilden ist nur ein zweifelhafter Ersatz dafür. Die sprachliche Verarbeitung muss stets ausgehen von der Beantwortung einzelner Fragen durch den Schüler. Alles Auswendiglernen der Beweise ist mit Recht verpönt, wenn es nicht zur freien Selbstbethätigung des Schülers geführt hat. Es bleibt durchaus dem Geschick des Lehrers überlassen, zu beurteilen, in welchem Tempo er allmählich die Zügel

[57]) Sch. I S. 4.
[58]) An der unter [55]) angezogenen Stelle.
[59]) Sch. I S. 29.

Universitäts- und
Landesbibliothek Düsseldorf

straffer anzuziehen habe, um endlich das erstrebte Ziel korrekter Wiedergabe der korrekten Erkenntnis zu erreichen. Aber soviel wird man von vornherein zugestehen dürfen, dass es vor der Obertertia nur ausnahmsweise bei besonders begabten Schülern und in besonders einfachen Fällen erreichbar sein dürfte. Damit würden wir auf den Standpunkt Beckers[60]) gelangen, der vor dieser Klasse überhaupt noch keinen wissenschaftlichen Unterricht haben will, aber natürlich für uns wieder nur in dem obigen Sinne, hinsichtlich der Selbstbethätigung des Schülers.

Auch für die Konstruktionsaufgaben ist eine solche Steigerung wohl möglich, wenn man auf jeder Stufe neben der vollständigen mündlichen Behandlung nicht gleich die volle schriftliche Lösung verlangt, sondern allmählich zu den blossen Zeichnungen die Beschreibung, die zur Auffindung des Herstellungsverfahrens nötige Überlegung, den strengen Nachweis der Richtigkeit und die Untersuchung der möglichen Fälle (qualitativ und quantitativ) hinzunimmt. Dadurch würde die Aufmerksamkeit des Schülers auf jeder Stufe stets auf einen Hauptpunkt hingelenkt, ohne dass die wissenschaftliche Vollständigkeit darunter zu leiden hätte.

Nachdem auf diese Weise dahin gearbeitet worden ist, die sprachliche Wiedergabe einer Gedankenreihe völlig lückenlos zu gestalten, wird es bei der immer mehr zunehmenden Fülle des Stoffes unumgänglich notwendig, nicht auf dieser Stufe „grösster Breite" zu verweilen, sondern weiterhin dafür zu sorgen, dass eine immer grössere Knappheit des Ausdrucks möglich wird, ohne dass die volle Schärfe darunter leidet. Dies kann naturgemäss erst in den oberen Klassen geschehen. Hier müssen die Zügel gewissermassen wieder lockerer gelassen werden, um einen allmählichen Übergang zu völliger Freiheit des Ausdrucks zu ermöglichen. Die zulässigen Sprünge der Gedanken müssen immer grösser, die räumliche Ausdehnung der Wiedergabe einer Gedankenreihe immer kleiner werden, damit Zeit gespart wird zu ausgedehnterer praktischer Verarbeitung. Wenn das Prinzip der Vollständigkeit alle möglichen Beweisarten und Lösungen verlangt, so fordert das Prinzip der Steigerung schon eine Auswahl nach den Gesichtspunkten der Leichtigkeit oder der Eleganz. Und wenn die Untersekunda sich im Vollbesitz der Fähigkeit vollständiger Lösung der Aufgaben befindet, so müssen die oberen Klassen danach trachten, den sprachlichen Ausdruck für Überlegung, Herstellung, Beweis und Einschränkung immer mehr zu kürzen. Was wäre die mathematische Wissenschaft ohne dieses Prinzip möglichster Knappheit in der Darstellung!

§ 8. Pensenentwurf bis zur Untersekunda.

Nach den vorstehenden Bemerkungen lässt sich der gesamte Lehrstoff bis Untersekunda in grossen Zügen vielleicht in folgender Weise festsetzen: (siehe Beilage).

Hierzu möchte ich folgende Bemerkungen hinzufügen:

1 Der Entwurf zeigt fünf Stufen, die sich ohne Überbürdung einer Klasse bei der bisherigen Stundenzahl nicht gut in vier zusammenziehen lassen. Demnach müsste entweder die Anzahl der Lehrstunden in Quarta um eine oder zwei erhöht werden, oder es müsste die erste Stufe wieder nach Quinta verlegt werden, wie es ja mit dem sogenannten „propädeutischen Unterricht" früher der Fall war und zum Teil noch jetzt geschieht. Dies ist ohne weiteres überall möglich, wenn die beiden Stunden Freihandzeichnen in Quinta dazu verwendet, d. h. gewissermassen in Linearzeichenstunden verwandelt werden. Über die Zweckmässigkeit einer derartigen Umwandlung hat sich schon Schotten[61]) ausführlich geäussert. Ich möchte nur noch eine psychologische Bemerkung hinzufügen. Das erste Freihandzeichnen ist doch nur eine mehr oder weniger gelungene Wiedergabe von Linien verschiedener Form, Länge und Lage, d. h. es stützt sich auf die Idealvorstellungen der

[60]) Becker. Zur Reform des geometrischen Unterrichts. Sch. I S. 83.
[61]) Sch. I S. 32, 33 und 34.

Schüler von diesen Gebilden. Daher wird die Schnelligkeit und Sicherheit seiner Weiterentwicklung von dem Grade der Zuverlässigkeit abhängen, den diese Idealvorstellungen und ihre möglichst genaue praktische Herstellung bei dem Schüler schon besitzen. Aber erst durch möglichst korrektes Zeichnen werden auch diese Vorstellungen korrekt, durch möglichst vieles Zeichnen ihre Herstellung geläufig. Wenn man daher auch noch davon absehen wollte, dass das Linearzeichnen die Schüler von vornherein zu grösserer Sauberkeit erzieht, so müsste doch schon diese grössere Zuverlässigkeit des Anschauungs- und Herstellungsfundamentes auch vom Standpunkte des Zeichenlehrers aus die Zweckmässigkeit eines ausschliesslichen Linearzeichnens auf der Anfangsstufe unzweifelhaft erscheinen lassen. Berücksichtigt man also dazu noch die oben entwickelte Notwendigkeit, in dem geometrischen Anfangsunterricht beständig mit Lineal und Zirkel zu operieren, so ist die vorgeschlagene Umänderung doppelt wünschenswert.

2. Die gleichmässige Verteilung des bisherigen stereometrischen Pensums der Untersekunda auf alle Unterrichtsstufen ist in der Weise erfolgt, dass überall das für das Verständnis Erreichbare auch wirklich zur Behandlung kommt. Der vollständigen Untersuchung auch des schiefen Prismas in der Obertertia steht nichts im Wege. Wohl aber muss der schiefe Cylinder und schiefe Kegel als vorläufig noch nicht herstellbar ausgeschlossen werden, was für die Praxis durchaus kein Schade ist, da diese Gebilde hier eine höchst untergeordnete Rolle spielen.

3. Die allmähliche Steigerung der Selbstthätigkeit des Schülers ist, wie schon oben bemerkt, durchaus dem Ermessen des Lehrers zu überlassen. Nur um einen vielleicht gangbaren Weg vorzuschlagen, der auch gleichzeitig dem Lehrer auf jeder Stufe einen festeren Anhalt und dadurch auch eine grössere Ruhe und Sicherheit gewährt, habe ich eine bestimmte Eintragung vorgenommen, die nach den obigen Betrachtungen ungefähr die richtige sein dürfte. Ich bin mir dabei wohl bewusst, dass erst eine grössere Erfahrung, als sie mir zu Gebote steht, und als sie bei den bestehenden Vorschriften zu erwarten ist, definitiv darüber zu entscheiden vermag, welche Erleichterungen auf jeder Stufe zulässig sind, ohne das Ziel vollständiger logischer Schärfe in der Untersekunda zu gefährden.

4. Die hier erreichten Lehrziele stimmen bis auf den Abschnitt aus der neueren Geometrie, dessen Verlust dem sehr stark belasteten Obersekundapensum nur zum Vorteil gereichen könnte, im allgemeinen mit denjenigen der Ober-Realschule überein. Für die Gymnasien müsste daher entweder eine gewisse Verschiebung eintreten, was seine grossen Schwierigkeiten haben dürfte, oder es müsste eine derartige gleichmässige Kürzung der einzelnen Pensen möglich sein, dass der Entwurf an sich keine Änderung zu erfahren brauchte. Dies scheint in der That möglich zu sein, wenn man das fakultative Aufgabenpensum einschränkt und die Zeichenfertigkeit nur in geringerem Masse verlangt.

Jedenfalls dürfte sich der Versuch, ob der vorstehende Entwurf in der zur Verfügung stehenden Zeit unter den genannten Einschränkungen durchführbar sei oder nicht, recht wohl lohnen, wenn man bedenkt, dass es auf diese Weise ermöglicht werden könnte, allen höheren Lehranstalten den gleichen Unterbau für den geometrischen Unterricht zu beschaffen und den ganzen Unterschied zwischen ihnen lediglich dahin zu verlegen, wo er hingehört: in die grössere oder geringere Betonung der praktischen Anwendungen.

Schlussbemerkung.

Die hier vorgeschlagene methodische Entwicklung des geometrischen Unterrichts nach den Prinzipien der Herstellbarkeit der Gebilde, der möglichsten Vollständigkeit und Konzentration auf jeder Stufe und der allmählichen Steigerung der Selbstthätigkeit des Schülers von Stufe zu Stufe hat nicht nur die schon genannten pädagogischen Vorteile grösserer Verständlichkeit, leichterer Anwendbarkeit und grösserer Schaffensfreudigkeit bei Lehrern und Schülern, ohne den Zweck der logischen Schulung aus dem Auge zu verlieren; sondern sie gewährt auch sonst noch sowohl in wissenschaftlicher, als auch in technisch-künstlerischer Beziehung wesentlichen Nutzen.

Universitäts- und
Landesbibliothek Düsseldorf

Es sprechen nämlich gewichtige Gründe für die Annahme, dass die Geometrie in ihrer geschichtlichen Entwicklung von praktischen Bestrebungen ausgegangen ist. Die Verlegung des Schwerpunkts in die logische Entwickelbarkeit ihrer Lehren, wie sie sich im Euklidischen System verkörpert, erscheint demnach fast wie ein Schritt abseits von dem rechten Wege. Diese Ansicht hat schon Mager[62]) 1837 ausgesprochen. Es wäre daher nicht unmöglich, dass sich die geometrische Wissenschaft nach Einlenkung in die rechte Bahn in fruchtbarerer Weise weiterzuentwickeln vermöchte, als dies nach dem allgemeinen Urteil in den letzten beiden Jahrtausenden geschehen ist.

Die bessere Vorbereitung der Schüler für die technische Verwendung erhellt ohne weiteres. Aber auch eine grössere Leichtigkeit in der Beurteilung der Formen und namentlich eine grössere Gestaltungsfähigkeit und Gestaltungsfreudigkeit werden sicherlich die Folge eines derartigen Aufbaues sein. Und damit treffen wir die Grundlagen jeder künstlerischen Bethätigung.

Zum Schluss sei es mir noch verstattet, die Hauptergebnisse der Arbeit in Gestalt von Thesen übersichtlich zusammenzustellen:

1. Die Geometrie ist die Lehre von der Herstellung der räumlichen Gebilde.
2. Alle Definitionen müssen genetisch sein, auch die der Ebene und Geraden.
3. Der Anfangsunterricht ist kein propädeutischer, sondern ein wissenschaftlicher und behandelt
   a) die Herstellung der Grundgebilde,
   b) die Zusammenfügung der Grundgebilde,
   c) die Lagen- und Bewegungsmöglichkeiten,
   d) die Ableitung der Grundsätze aus der Erfahrung,
   e) die Herstellung der Zeichengeräte und die Fundamentalaufgaben der Zusammenfügung und Teilung.
4. Der Unterricht soll auf jeder Stufe möglichst vollständig, konzentriert und stufenweise fortschreitend sein.
5. Der Schwerpunkt des Unterrichts liegt, jedenfalls für die Anfangsstufen, in der Konstruktionsaufgabe (Zeichnen und Modellieren).
6. Der erste Zeichenunterricht in Quinta sei ausschliesslich ein Linearzeichnen im geometrischen Anfangsunterricht.
7. Für jede Klasse ist auch ein bestimmtes obligatorisches Aufgabenpensum aufzustellen und bei der Beurteilung der Versetzungsreife zu benutzen.
8. Das stereometrische Pensum der Untersekunda ist über die ganze Elementarstufe zu verteilen, und dafür sind in dieser Klasse zur Entlastung der Obersekunda die Elemente der neueren Geometrie einzuführen.

---

[62]) Mager, Wissenschaft der Mathematik. Siehe Sch. I S. 80.

Universitäts- und
Landesbibliothek Düsseldorf

Beilage.

Pensenentwurf für die fünf Elementarstufen.

Stufe	Herzustellende Gebilde		Arten der	Eigenschaften der Gebilde		Art des Beweises nach		Obligatorische Aufgaben der	
	in der Ebene	im Raum	Ausgestaltung	in der Ebene	im Raum	Hülfsmitteln	Wiedergabe	Konstruktion	Berechnung
I (Quinta.)	Grundgebilde einzeln und zu je zweien.	Ebenen und Gerade an Körpern.	Verschiebung, Drehung, Zusammenfaltung, Rotation.	Grösse. Lagensätze, Abstand, Neigung, Parallelität.	Die Gebilde als Grenzen anderer Gebilde.	Anschauung, Herstellung, Ausgestaltung.	Aufweisen und Messen an fertig. Gebilden.	Strecken, Winkel und Kreise in verschied. Lage. Zusammenfüg. und Teilung. Nur Zeichnung.	Die vier ersten Rechnungsarten mit Strecken und Winkeln.
II (Quarta.)	Parallelogramme, Dreiecke (Trapez).	Senkrechte und parallele Gerade und Ebenen. Rechtecker.	Verbindungslinien, Lote, Parallele.	Kongruenz. Seiten und Winkel. Diagonalen. Flächeninhalt.	Lagensätze, Abstand, Parallelität, Rauminhalt.	Kongruenz, Einfache arithmetische Operationen, Grundsätze.	Prüfung durch Messen. Mündl. Wiedergabe unter Einhilfe.	Konstruktionen aus Seiten und Winkeln. (Hauptkonstr.) Schriftl. Konstrukt.	Berechnung des Flächen- und Rauminhaltes.
III (Untertertia.)	Vierecke, Vielecke, namentlich reguläre.	Raumwinkel, geneigte Gerade und Ebenen. Prisma.	Kreise. Verwandlung. Zerlegung in endliche Stücke.	Gleichheit. Charakterist. Linien im Dreieck, h, t, w, r, ϱ, ϱ_a etc.	Neigung. Satz des Cavalieri.	Gleichheit, Gleichungen mit den vier ersten Rechnungsarten.	Schriftliche Entwicklung in ausführlicher Form.	Konstruktionen aus abgeleiteten Bestimmungsstücken. Kreisaufgaben. Schriftl. Analysis.	Berechnung von Strecken aus anderen Strecken, Flächen- und Rauminhalt.
IV (Obertertia.)	Strahlengebilde mit parallelen Strahlen.	Pyramide, Cylinder, Kegel.	Zerlegung in unendl. kleine Stücke. Abrollung.	Aehnlichkeit. Summen, Differenzen, Produkte, Quotienten von Strecken.	Prisma und Pyramide. Mantel und Oberfläche.	Ähnlichkeit, Proportionen, Potenzen und Wurzeln.	Schriftliche Entwicklung in kurzer Form.	Konstruktion aus zusammengesetzten Bestimmungsstücken. Schriftl. Beweis.	Berechnung aus Proportionen u. durch Wurzelausziehen (Rechtwinkl. Dreieck). Kreisberechng. Mantel u. Oberfläche.
V (Untersekunda.)	Strahlenbüschel	Körperstumpfe. Kugel.	Transversalen.	Harmonische Strahlen. Beziehung zwischen Seiten und Winkeln (Trigonom.).	Kappe, Segment, Sektor, Zone.	Logarithmen, goniometr. Funktionen.	Selbständige scharfe Beweise.	Mehrere abgeleitete oder zusammengesetzte Bestimmungsstücke. Schriftl. Determination.	Trigonometrische Berechnung der Hauptkonstruktionen des Dreiecks und Parallelogramms. Kugelberechnung.

Universitäts- und Landesbibliothek Düsseldorf

Universitäts- und
Landesbibliothek Düsseldorf

Universitäts- und
Landesbibliothek Düsseldorf