Wie man im 17. Jahrhundert das Problem von der Quadratur des Zirkels zu lösen versuchte.

An einigen Beispielen erläutert von P. Viktorin Panhölzl.

(Schluß).

§ 4. Versuch einer Quadratur des Zirkels, vom Herausgeber der „römische" genannt.

Unter dem schriftlichen Nachlasse des P. Christophorus Grünberger, der im Kolleg der Jesuiten zu Rom als Mathematiker einen Ruf hatte, fand Schott während seines Aufenthaltes daselbst ein auf die Quadratur des Kreises sich beziehendes Problem, das sich auf die Quadratur der sogenannten lunula des Hippokrates aus Chios stützt. Weil ihm die Abhandlung geistreich dünkte, beschloß er sie zu veröffentlichen und dem Urteile der mathematischen Leser zu übergeben. Hippokrates bemühte sich bekanntlich vergebens auf Grund der Quadratur der lunula die des Kreises zu finden. Um nun zu zeigen, worin der Irrtum des Hippokrates gelegen und wie Grünberger denselben vermieden, wird das Problem des Hippokrates vorausgeschickt.

A. Die wirkliche Quadratur der lunula des Hippokrates aus Chios, und die falsche des Kreises. Die Quadratur der lunula und dann die des ganzen Kreises führte Hippokrates in folgender Weise aus:

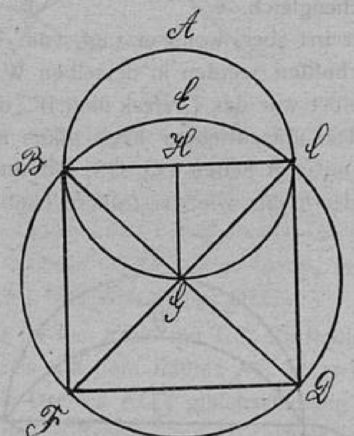


Fig. 5.

I. Gegeben ist der Kreis ABCG Fig. 5. Man errichte über den Durchmesser BC das Quadrat BCDF und ziehe die Diagonale BD und dann HG normal auf BC. Vom Schnittpunkte G als Mittelpunkt beschreibe man mit dem Radius GB einen zweiten Kreis BCDF und verbinde G mit C.

II. Im rechtwinkligen Dreiecke BCD liegt BD dem rechten Winkel gegenüber; daher ist das Quadrat über BD zweimal so groß wie das über BC. Der Kreis BACG ist die Hälfte des Kreises BCDF, der Halbkreis BAC die Hälfte von BCD und gleich dem Quadranten BECG. Beides um das gemeinsame Segment BECH vermindert bleibt die lunula BACE gleich dem Dreiecke BCG. Damit ist die Quadratur der lunula vollzogen.

III. Um auch den übrigen Teil des gegebenen Kreises zu quadrieren, schlägt Hippokrates folgenden weiteren Weg ein: Die Gerade LM = 2 BC, Fig. 6. Ueber ihr errichte man den Halbkreis LOM, schreibe ihm die Hälfte des regelmäßigen Sechseckes LQSM ein und über die 3 Sechseckseiten beschreibe man Halbkreise.

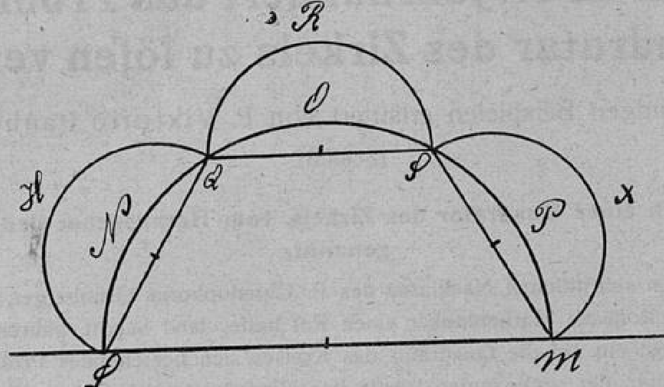


Fig. 6.

Weil der Durchmesser LM gleich 2 BC, 2 LQ, 2 QS und 2 SM ist, so ist der Halbkreis LOM gleich den 4 Halbkreisen. Zieht man die 3 gemeinsamen Segmente LNQ, QOS, SPM ab, so erhält man das Trapez LMQS, und dieses ist flächengleich dem Halbkreise BAC und den 3 Lunulen LHQN, QRSO, SXMP. Wird daher das Trapez um drei Dreiecke, welche den 3 Lunulen gleich sind, vermindert, so ist der Rest dem Halbkreise BAC flächengleich. Wird dieser geradlinig begrenzte Rest in ein Quadrat verwandelt, so erhält man ein dem Halbkreise BAC gleiches Quadrat. Der ganze Kreis BACG ist dann dem doppelten Quadrate flächengleich.

Soweit Hippokrates. Er irrt aber, wenn er sagt, vom Trapez sollen die 3 Dreiecke, gleich den Menisken, abgeschnitten werden in derselben Weise, wie in Fig. 5, weil dies nicht möglich ist. Denn daselbst war das Dreieck über BC, der Seite des eingeschriebenen Quadrates BCDF, errichtet. Der umschriebene Kreis bildet mit BC ein größeres Segment als es der Halbkreis LOM mit den Seiten LQ, QS, SM tut. Deshalb hat der Halbkreis ein anderes Verhältnis zu jeder lunula wie der frühere Halbkreis BCD zur lunula BACE.

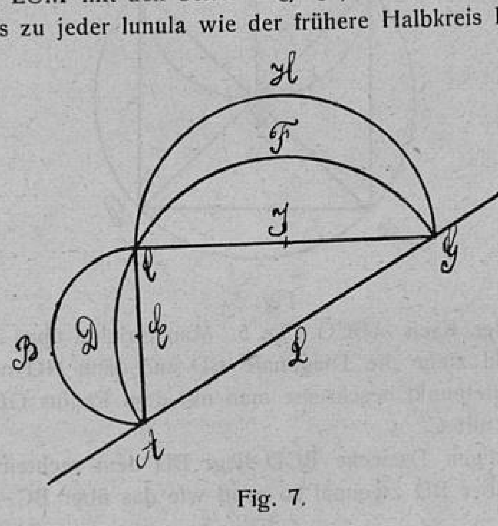


Fig. 7.

Hippokrates selbst scheint, wie Blancanus in den locis mathematicis des Aristoteles sagt, diesen Trugschluß erkannt zu haben, habe ihn aber wegen der Einfachheit des Resultates verschwiegen.

B. Durchführung der Quadratur einer lunula, deren Basis ein Drittel des Halbkreisumfanges ist, durch den römischen Mathematiker.

I. In Figur 7 bilde die lunula ABCD einen Teil des Halbkreises ABCE und ruhe auf dem Halbkreise ACFG, dessen Durchmesser AG gleich 2 AC ist. Ueber GC beschreibe man den Halbkreis CHGJ.

II. Der Winkel ACG ist als Winkel im Halbkreise ein rechter; daher ist das Quadrat über AG gleich der Summe der Quadrate über AC und CG. Weil die Kreise sich wie die Quadrate der Durchmesser verhalten, ist der Kreis mit dem Durchmesser AG gleich der Summe der Kreise mit den Durchmessern AC und CG.

Der Halbkreis ACFG ist dann gleich den Halbkreisen ABCE und CHGJ. Die Teile ADCE und CFGJ haben beide gemeinsam; also sind die beiden lunulen ABCD und CHGF zusammen gleich dem Dreiecke ACG.

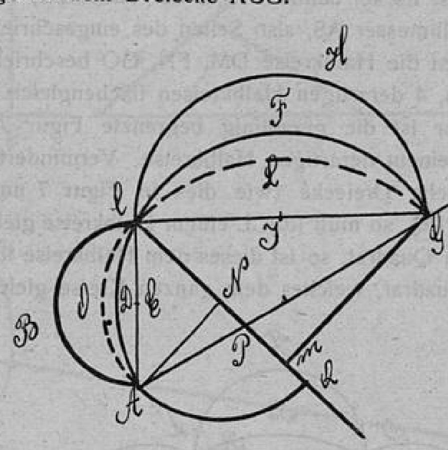


Fig. 8.

III. In Figur 8 sind wie früher die Halbkreise AFG, BE, HJ konstruiert. Halbiert man den Winkel bei C durch CN und macht den Winkel CAN gleich ACN und zieht AN gleich CN, so ist das Dreieck CAN gleichschenklig rechtwinklig. Um N als Mittelpunkt beschreibe man mit dem Radius NC den Halbkreis COAQ und verlängere CN bis Q. Schließlich mache man den Winkel CGM gleich GCM, ziehe GM gleich CM und beschreibe um M mit dem Radius MG den Bogen GLC.

IV. CQ = 2 CN; daher ist der Kreis mit CQ als Radius das vierfache des Kreises mit dem Radius CN. Der Kreis mit dem Radius AC ist zweimal so groß wie der Kreis mit CN als Radius, weil das Dreieck ACN gleichschenklig rechtwinklig ist. Der Kreis über CQ ist gleich dem doppelten Kreise über AC, daher ist der Halbkreis CAQ gleich dem doppelten Halbkreise ABCE und der Sektor AOCN gleich dem Halbkreise BE. Das Segment AOCE ist beiden gemeinsam. Also ist die lunula ABCO gleich dem Dreiecke ACN.

V. Auf dieselbe Weise beweist man, daß die lunula CHGL dem Dreiecke CGM gleich ist.

Bemerkung: Wenn auch die Quadratur der lunula ABCD vollkommen richtig ist, so ist die von ABCO doch falsch. Der Autor verquickt beide, als ob sie eins wären. Diese ist nach seiner Meinung quadriert, weil er zu jener ein flächengleiches Quadrat gefunden. Daß dies falsch ist, ist leicht zu ersehen. Die lunula BD übertrifft die lunula BO um das Stück DO. Dieser Unterschied rührt von der Verschiedenheit der Basis her.

Die lunula BO hat als Basis oder als innere Peripherie den Bogen AOC, der die Hälfte des Halbkreisumfanges QOC ist. BD hat als Basis den Bogen ADC, also den 3. Teil des Halbkreisumfanges AFG. Es sind nämlich die Umfänge QOC, ADFG, CLG, die sich in C schneiden, wohl zu unterscheiden.

VI. Um zu den noch übrigen Teile des Beweises überzugehen, so behauptet der Autor, daß das Dreieck ANP der lunula ADCO gleich ist und daher ACP gleich der ganzen lunula BD. Die lunulen BO und HF sind dem Dreiecke ACG gleich, wie früher bewiesen wurde. Ebenso wurde bewiesen, daß die lunula BO und das Dreieck ACN gleich sind. Daher sind die beiden lunulen OD und HF gleich ANCGA oder den beiden Dreiecken ANP und CPG. Die lunula HL ist gleich dem Dreiecke CMG. Daher sind die beiden Dreiecke ANP und CMG gleich OD und HL. Das Dreieck CMG ist gleich HL, daher ist DO gleich dem Dreiecke ANP. Fügt man OB = ACN hinzu, so erhält man BD gleich ACP. Wird nun das Dreieck ACP in ein Quadrat verwandelt, so ist dieses der lunula BD flächengleich, was zu beweisen war. Daraus ergibt sich leicht der Tetragonismus des übrigen Kreises. Es sei nämlich ABC der Halbkreis, Fig. 9. Die Geraden AJ, JL, LC gleich dem Halbmesser AS, also Seiten des eingeschriebenen regelmäßigen Sechseckes. Ueber ihnen seien die Halbkreise DM, FN, GO beschrieben. Der Halbkreis ABC ist wie früher bewiesen, 4 derartigen Halbkreisen flächengleich. Die Teile EM, BN, HO sind gemeinsam. Daher ist die geradlinig begrenzte Figur AMNOC gleich den 3 lunulen DE, FB, GH und einem derartigen Halbkreise. Vermindert man nun AMNOC um die 3 den lunulen gleiche Dreiecke (wie dies in Figur 7 und 8 gezeigt wurde), nämlich um AJP, JPR und PRQ, so muß RQCL einem Halbkreise gleich sein. Verwandelt man schließlich RQCL in ein Quadrat, so ist dieses dem Halbkreise flächengleich. Daraus ergibt sich dann auch das Quadrat, welches dem ganzen Kreise gleich ist.

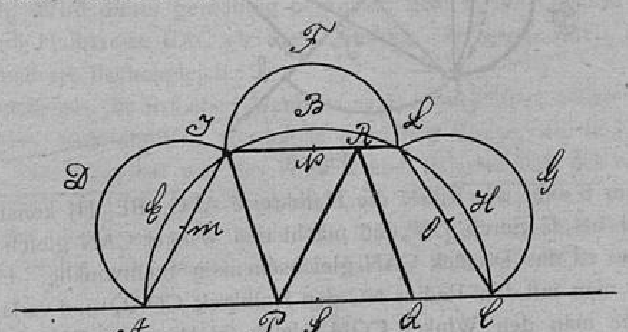
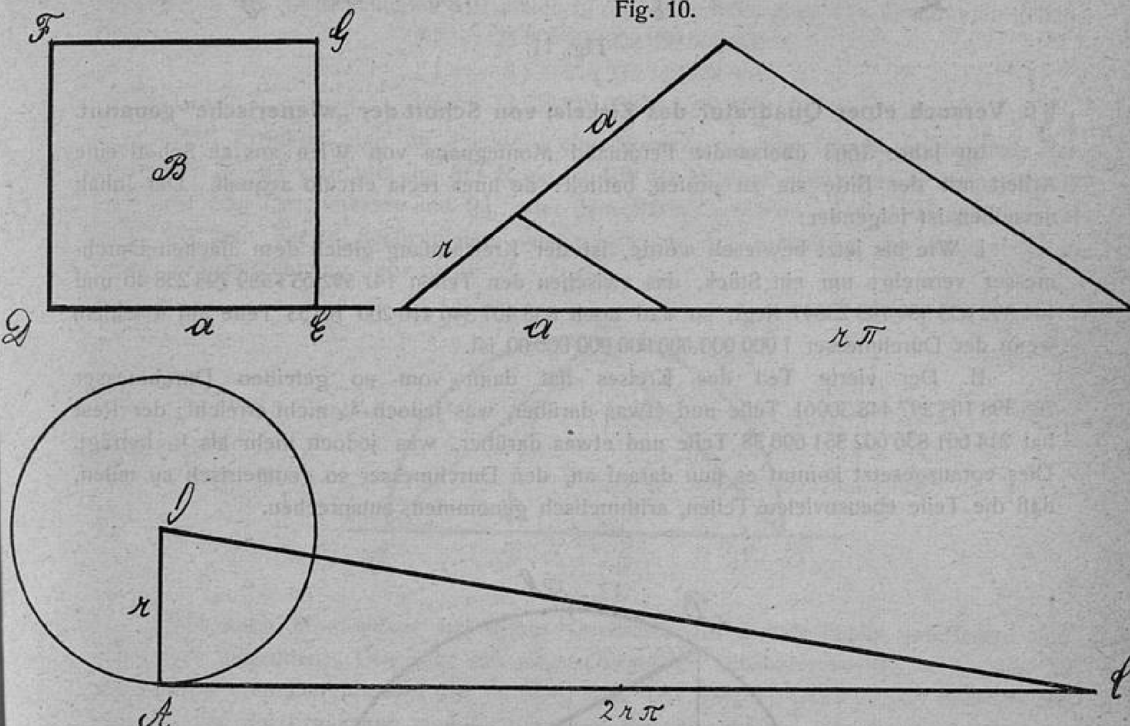


Fig. 9.

§ 5.

Im Jahre 1660 veröffentlichte Georg Behm, Professor der Mathematik an der Universität in Olmütz die Schrift: Theses seu propositiones geometricae de quadratura circuli. Diese Thesen ließ er im genannten Jahre bei einer öffentlichen Disputation durch einen seiner Schüler verteidigen, wie es damals üblich war. Sie bestanden aus 4 Teilen. Der erste und zweite behandelte die Quadratur des Kreises von P. Gregorius a. s. Vincentio, die er als gelungen und als rein geometrisch bezeichnet, im 3. Teile bringt er seine eigene Quadratur, während er im 4. verschiedene auf die Quadratur des Kreises bezügliche Lehrsätze und Paradoxa anführt. Wie schon erwähnt, war Behm der Ueberzeugung, daß die Quadratur des Kreises nach Gregorius a. s. Vincentio vollständig gelungen sei, obwohl sie sich nicht nach dem Vorbilde des Archimedes darauf zurückführen läßt, eine dem Kreisumfange gleiche, gerade Linie gefunden zu haben. Er beschäftigte sich nun mit der Aufgabe, bei gegebener Quadratur des Kreises eine Gerade zu finden, die dem Umfange des Kreises gleich ist. Er löste die Aufgabe in folgender Weise: Es sei das Quadrat B mit der Seite a dem Kreise O mit dem Radius r flächengleich (Fig. 10). Zu r und der Seite a als der mittleren geometrischen Proportionalen suche man die dritte stetige Proportionale. Ihre doppelte Länge ist dann dem Kreisumfange gleich. Das Dreieck ACO ist bekanntlich dem Quadrate B flächengleich, dieses nach der Voraussetzung dem Kreise A. Nun is aber nach Archimedes ein Kreis einem Dreicke flächengleich, das zur Grundlinie den Umfang und als Höhe den Radius des Kreises hat. Also ist im rechtwinkligen Dreiecke ACO mit der einen Kathete r, die zweite Kathete AC gleich dem Kreisumfange.

Fig. 10.



Eine weitere Aufgabe, deren Lösung Behm unternahm, war die, zu einem gegebenen Kreise das flächengleiche Quadrat mit möglichster Genauigkeit zu finden. Er löste sie folgendermaßen: Gegeben sei der Kreis A (Fig. 11). Man halbiere den Sextanten BC in D und trage CD achtmal auf der Geraden EF auf. Diese sei die Strecke EG, während EH 4 solche Teile beträgt. Beschreibt man von H aus mit dem Radius HE den Halbkreis EJG, so ist GK gleich dem Halbmesser des gegebenen Kreises A und das Quadrat über der Normalen KJ ist der Fläche des gegebenen Kreises gleich. Die Gerade EK erreicht, wie aus der früher angeführten XI. Proposition Huyghens hervorgeht, eine solche Annäherung an den halben Umfang des Kreises, daß, wenn man zu EK den 2000. Teil des Halbmessers hinzufügt, EK bereits größer als der halbe Kreisumfang wird. Nach Archimedes ist bekannt, daß das Rechteck aus dem Radius und dem halben Kreisumfange dem Kreise flächengleich ist; also ist das Rechteck EKG dem Kreise A gleich. Das Rechteck ist aber auch dem Quadrate über KJ gleich; daher ist das Quadrat über KJ gleich dem Kreise A.

(Für $r = 1$ ist $BD = \sqrt{2 - \sqrt{3}} = 0{\cdot}517042$, $KG = 2\ BD = 1{\cdot}034084$. $KG - r = 0{\cdot}034084$. $EK = 6\,BD = 3{\cdot}102252$, $\frac{u}{2} = 3{\cdot}141592$. $\frac{u}{2} - EK = 0{\cdot}039340$. KG ist daher als Radius um $\frac{34}{1000}$ zu groß, EK als Umfang um $\frac{39}{1000}$ zu klein.)

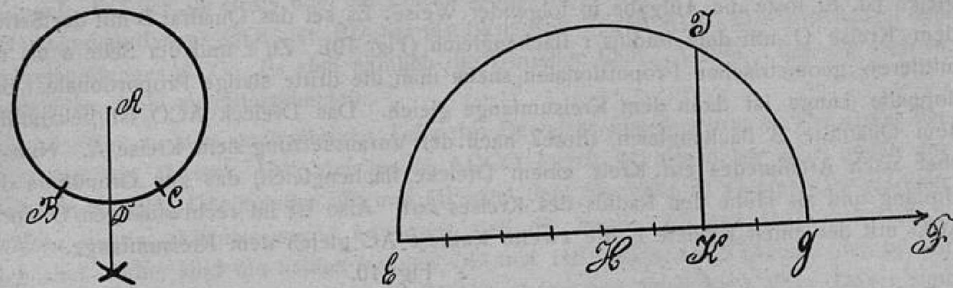


Fig. 11.

§ 6. Versuch einer Quadratur des Zirkels, von Schott der „wienerische" genannt.

Im Jahre 1663 übersandte Ferdinand Montegnana von Wien aus an Schott eine Arbeit mit der Bitte sie zu prüfen, betitelt: de linea recta circulo aequali. Der Inhalt derselben ist folgender:

I. Wie bis jetzt bewiesen wurde, ist der Kreisumfang gleich dem 3fachen Durchmesser vermehrt um ein Stück, das zwischen den Teilen 141 592 653 589 793 238 46 und 141 592 653 589 793 23847 liegt, so daß noch 858 407 346 410 206 76153 Teile auf 4 fehlen, wenn der Durchmesser 1 000 000 000 000 000 000 00 ist.

II. Der vierte Teil des Kreises hat dann vom so geteilten Durchmesser 785 398 163 397 448 30961 Teile und etwas darüber, was jedoch $^3/_4$ nicht erreicht; der Rest hat 214 601 836 602 551 690 38 Teile und etwas darüber, was jedoch mehr als $^1/_4$ beträgt. Dies vorausgesetzt kommt es nun darauf an, den Durchmesser so geometrisch zu teilen, daß die Teile ebensovielen Teilen, arithmetisch genommen, entsprechen.

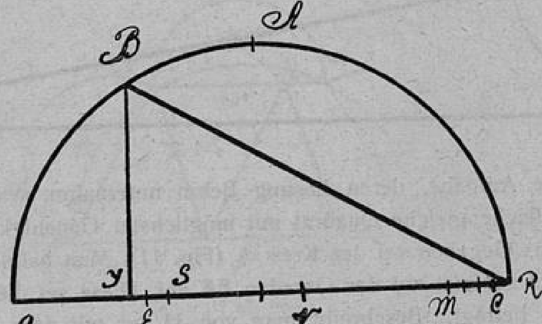


Fig. 12.

III. Ich nehme vom Durchmesser drei Viertel, in der Figur 12 gleich RE, trage dann die Seite des eingeschriebenen Quadrates RA auf RO gleich RS auf, den Rest SO von O aus 3 mal, OS, SV, VM. Den 4. Teil des Restes MR, nämlich RC, füge ich von E bis J an. Diese geometrische Teilung des Durchmessers entspricht vollständig jener in Nummer I. und II.

IV. Zum Beweise behaupte ich, daß der Teil RS des Durchmessers in den früher erwähnten Teilen des Durchmessers ausgedrückt gleich ist 713 864 217 863 264 412 82 und etwas mehr, was jedoch $^1/_8$ nicht erreicht. Inzwischen nehmen wir an, es sei $^2/_{21}$. Das Quadrat von RS ist nämlich gleich dem halben Quadrate des Durchmessers. Daß die angegebenen Grenzen nicht überschritten werden, ergibt sich aus dem folgenden:

V. SO ist dann gleich 286 135 782 136 735 587 17 $\frac{19}{21}$ Teilen des Durchmessers, OM aber 858 407 346 410 206 76153 $\frac{5}{7}$, und MR 141 592 653 589 793 238 46 $\frac{2}{7}$ Teilen, die eben zum dreifachen Durchmesser hinzuzufügen sind.

VI. Man hat also auf die Weise den Durchmesser geometrisch geteilt und diese Teile entsprechen vollkommen den Teilen des Durchmessers arithmetisch genommen. Außerdem hat man auch den Teil RM, um den man den 3fachen Durchmesser zu vermehren hat, um den Umfang des Kreises zu erhalten.

VII. Die Gerade RJ ist dem Quadranten gleich, da sie $^3/_4$ des Durchmessers enthält und $^1/_4$ des Ueberschusses MR gleich EJ, die zusammen eben den Quadranten geben.

RE = 75 000 000 000 000 000 000
EJ = 3 539 816 339 744 830 961
RJ = 78 539 816 339 744 830 961

VIII. Errichtet man im Punkte J eine Normale bis zum Durchschnittspunkte der Peripherie B und verbindet ihn mit R, so ist RB die mittlere geometrische Proportionale zwischen dem Durchmesser und RJ, oder dem Kreisquadranten. Daher ist das Quadrat über RB dem Kreise flächengleich, wie schon aus den Lehrsätzen des Archimedes in seiner Kreisberechnung hervorgeht.

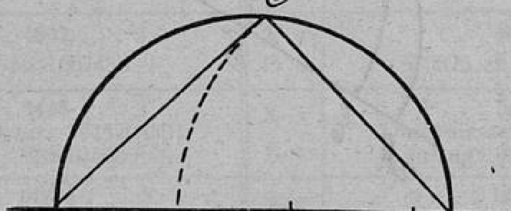


Fig. 13.

Daß auch Montegnana bei dieser Quadratur des Zirkels Fehler unterlaufen sind, erhellt aus folgenden: Die Seite des eingeschriebenen Quadrates sei BC, (Fig. 13). Ihr Unterschied vom Durchmesser BA ist dann DA. Das 3fache davon ist AF, nämlich AD, DE, EF, und die Ergänzung zum Durchmesser FB. Die Strecke FB wäre jener Teil, der zum 3fachen Durchmesser hinzuzufügen ist, um den Umfang zu erhalten.

Es ist nämlich nach Montegnana:

Der Durchmesser AB	=	100 000 000 000 000 000 000	=	a
Die Quadratseite BC	=	71 386 421 786 326 441 282	=	b
Die Differenz AD	=	28 613 578 213 673 558 717	=	c
Das 3fache AF	=	85 840 734 641 020 676 153	=	d
Der Rest FB	=	14 159 265 358 979 323 846	=	e

Nach Ludolph von Köln ist die letzte Zahl gerade diejenige, um die der 3fache Durchmesser zu vermehren ist, um mit großer Genauigkeit den Umfang zu erhalten; nach der Meinung Montegnanas ist daher FB jene gesuchte Größe, geometrisch ausgedrückt, obwohl man sie wegen ihrer Imkommensurabilität durch Zahlen nicht wiedergeben kann. Leider ist die durchgeführte Teilung fehlerhaft. Denn ist

der Durchmesser AB	100 000 000 000 000 000 000	=	f
so ist die Seite BC	70 710 678 118 654 752 440	=	g
und der Rest AD	29 289 321 881 345 247 550	=	h
das Dreifache AF	87 867 965 644 635 742 650	=	m
der Rest FB	12 132 034 355 964 257 349	=	n

daraus ergibt sich: 1. Wird der Durchmesser wie oben genommen, so ist die Seite des eingeschriebenen Quadrates nicht b sondern g, wie man sich leicht durch das Wurzelziehen überzeugen kann. Die Zahl d ist in der letzten Ziffer um 2 zu groß.

2. FB unterscheidet sich bedeutend von jenem Ueberschuß, um welchen der Kreisumfang den 3fachen Durchmesser übertrifft, wie man aus n ersehen kann.

Daher verlieren auch die übrigen Schlüsse des Autors ihre Beweiskraft. Die Fehlerquelle liegt eben in Bestimmung der Seite BC.

Eine leichtere Konstruktion und eine größere Genauigkeit liefert folgende Praxis: Um F als Mittelpunkt (Fig. 14) beschreibe man den Kreis ADCB usw. und teile mit derselben Zirkelöffnung den Umfang in C und D. Dann ist BD die Seite des dem Kreise eingeschriebenen gleichseitigen Dreieckes. Vermindert man den Durchmesser um BD,=BE, so erhält man EA. Wird dieses Stück zum 3fachen Durchmesser hinzugefügt, so erhält man den Umfang viel genauer.

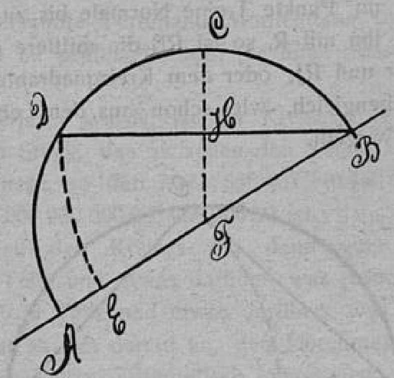


Fig. 14.

In Zahlen ausgedrückt ist nach der Praxis Montegnanas jenes Stück $\frac{121}{1000}+$, nach dieser $\frac{134}{1000}-$, nach Ludolph $\frac{141}{1000}$, der Durchmesser gleich 1000 genommen.

Nimmt man den Halbmesser gleich 10000000, so ist der Bogen BC gleich dem sinus 60° BH = 8660254, oder wird der Durchmesser gleich 10000000 gesetzt, so ist auch der doppelte sinus BH oder die Sehne BD gleich 8660254. Subtrahiert man BD von BA, erhält man 1339746 oder 134 für EA.

III. Observationes cyclometricae ad facilitandam praxin accommodatae.

Von Adam Adamandus Kochanski S. J., ehemals Professor der Mathematik an der Universität Krakau, Mathematiker und Bibliothekar des Königs von Polen zu Dobrinac.

(Acta Eruditorum 1685, pag. 394 ff.)

Aus dem Briefe an die Herausgeber der Acta Eruditorum. Es wird wohl nach meiner Meinung kaum einen ernsten Mathematiker gegeben haben, der nicht geglaubt hat, sich gerade an den schwierigsten und bisher noch ungelösten Problemen betätigen zu müssen. Ich leugne es wenigstens nicht, auch an derselben Krankheit gelitten zu haben und, um anderes zu übergehen, wenigstens auf die Quadratur des Zirkels oder auf die Prüfung diesbezüglicher Versuche anderer viel Mühe verwendet zu haben. Ich will hier nicht die Methoden aufzählen, die ich versucht habe, nur eine will ich erwähnen, die vielleicht ein anderer mit mehr Erfolg wird anwenden können. Ich hatte die Vermutung, daß gewisse Teilungen von Geraden möglich seien, deren Abschnitte gegenseitig und auch mit anderen Geraden ihrer Länge und Potenz nach inkommensurabel, mit Teilen der Kreisfläche oder des Umfanges jedoch der Länge oder Potenz nach kommensurabel sind. Ist eine derartige Teilung aufgefunden, so wäre es möglich, auf Grund derselben die Quadratur des Zirkels geometrisch zu bewerkstelligen oder wenigstens das Verhältnis des Durchmessers zum Umfange in beliebig vielen Stellen zu berechnen. Auf diesen Gedankengang führte mich die Quadratur des Dinostratus. Als ich aber von diesen Arbeiten durch anderweitige Studien abgelenkt wurde, richtete ich nach dem Beispiele großer Männer meine Aufmerksamkeit darauf, Näherungsmethoden aufzufinden, die sowohl in der Berechnung als auch in der Konstruktion für die Praxis von Vorteil sind. Von diesen sollen hier einige angeführt werden.

Das Verhältnis des Durchmessers zur Peripherie in Zahlen ausgedrückt.

	Das Verhältnis ist zu klein		zu groß.
A	1 zu 3 +	A a	1 zu 4 —
B	8 zu 25 +	B b	7 zu 22 —
Z C	1 . . . 15 . . . 3 106 zu 333	Z z C c	1 . . . 16 . . . 3 113 zu 355 —
Y D	1 . . . 4697 . . . 3 530762 zu 1667438 +	Y y D d	1 . . 4698 . . 3 530875 zu 1667793 —
X E	1 . . . 5448 . . . 3 Durchmesser: 2945294501 Umfang: 9252915567 +	X x E e	1 . . . 5449 . . . 3 Durchmesser: 2945825376 Umfang: 9254583360 —
V F	1 . . . 14774 . . . 3 Durchmesser: 43521624105025 Umfang: 136727214560643 +	V v F f	1 . . . 14775 . . . 3 Durchmesser: 43524569930401 Umfang: 136736469144003

In kleineren Zahlen lauten einige so:

cc	$22^{3}/_{5}$ zu 71
d	265381 zu 833719
e	30685681 zu 96401910.

Zum Verständnisse dieser Tabelle genügt es, folgendes zu erwähnen: Die Zahlen, die mit den einfachen oder doppelten Buchstaben Z, Y, X, V bezeichnet sind, sind die erzeugenden, aus welchen die darunter stehenden mit einfachen oder doppelten C, D, E, F bezeichneten Zahlen in folgender Weise hervorgehen: Wird das zu große Verhältnis 7 zu 22 auf die erzeugende Zahl Z 15 bezogen und zum Produkte des Durchmessers 1, zu dem der Peripherie aber 3 addiert, so erhält man das Verhältnis C 106 zu 333, das zu klein ist; wird aber die größere erzeugende Zahl Z z 16 auf dieselben Verhältniszahlen 7 zu 22 bezogen und zu den Produkten 1 beziehungsweise 3 addiert, so ergibt sich das Verhältnis C c 113 zu 355, das zu groß ist.

Auf ähnliche Weise geben die Verhältniszahlen 113 zu 355 mit den erzeugenden Zahlen Y, Yy, nämlich 4697 und 4698, multipliziert nach Addition der Zahlen 1 und 3 zum Produkte des Durchmessers und der Peripherie das Verhältnis D und Dd. Dieses nähert sich weit genauer dem Archimedischen Verhältnisse, das von Ludolph und Grünberger in so vielen Stellen ausgedrückt wurde.

Die übrigen Verhältnisse entstehen auf dieselbe Weise. Um die Genauigkeit der einzelnen Verhältnisse ersehen zu können, mögen dieselben auf das Archimedische, tamquam ad lapidem Lydium bezogen, in folgender Tabelle wieder gegeben werden.

Durchmesser Peripherie	100 000 314 159	00 000 26 535	00 000 89 793	00 000 23 846	00 000 26 433	Archimedisches Verhältnis
B	312500	00000				
	1659	26535	Fehler zu klein			
B b	314285	71428				
	126	44893	zu groß			
C	314150	94339	62264			
	8	32196	27529	zu klein		
C c	314159	29203	53982			
		2667	64189	zu groß		
D	314159	26535	81077	77120		
			8715	46725	zu klein	
D d	314159	26536	37862	02024		
			48068	78178	zu groß	
E	314159	26535	89787	82814		
			5	41031	zu klein	
E e	314159	26535	89796	49172		
			3	25326	zu groß	
F	314159	26535	89793	23833	89913	
				12	36520	zu klein
F f	314159	26535	89793	23855	91866	
				9	65432	zu groß

Aus dieser Tabelle sieht man 1. die Größe des Fehlers eines jeden Verhältnisses, ausgedrückt durch einen Bruch, dessen Nenner 1 mit sovielen Nullen ist, als man nehmen will. Der Zähler ist der, welcher in derselben Kolumne wie der Nenner steht, z. B. der Fehler von C beträgt $\frac{8}{100000}$. Er wird umso genauer, je größer der Nenner genommen wird.

2. Die ermittelten Verhältnisse enthalten soviele Stellen, daß einige von ihnen mit den bekannten Archimedischen bis zu 10 Stellen übereinstimmen, wenn auch Cc dieselben etwas übertrifft. Dieses Verhältnis, nämlich 113 zu 355 scheint in der Praxis, sowohl was Kürze als auch Genauigkeit betrifft, den anderen vorzuziehen sein.

Außer diesen gibt es noch viele andere Verhältnisse mit ähnlichen Eigenschaften. Von diesen möchte ich nur eines sozusagen eigentümliche Verhältnis erwähnen, nämlich 991 zu 3113 $\frac{991}{3113}$, welches mit dem Archimedischen in den ersten 8 Stellen übereinstimmt und dann erst sich von ihm um weniger als $^{23}/_{100}$ unterscheidet.

Cyclometrische Streckenverhältnisse

(Zum Gebrauche bei Näherungskonstruktionen).

Ich habe im Laufe der Zeit viele derartige gefunden; an dieser Stelle will ich nur eines anführen, welches mit dem laufenden Jahre (1685) in einer gewissen Beziehung steht.

Es soll der halbe Kreisumfang BCD durch eine Gerade möglichst genau wiedergegeben werden. (Fig. 15). Man ziehe die Tangenten BG und DH gleich dem Halbmesser AC und verbinde G und H durch GCH. Dann beschreibe man von C aus mit dem Radius beiderseits die gleichen Bogen CE und CF, von denen ein jeder 60° beträgt, während BE und DF 30° betragen. Durch E ziehe man die Sekante AJ bis J, dem Schnittpunkte mit der Tangente BG, verlängere DH um HL = BD und ziehe JL. JL ist angenähert dem halben Kreisumfange BCD gleich. Der Beweis geschieht auf trigonometrischem Wege. Man denke sich JK gezogen, welche die Tangenten BJ und DK verbindet. Nimmt man den Radius AB=1000000000000000, so ist die Tangente von 30° BJ=577350269189626 daher die Ergänzung zum Radius, JG = 422649730810373. KH + HL oder KL ist dann 2422649730810373. $\overline{JK}^2 + \overline{KL}^2 = 9869231718195572759955284399129$. Die Wurzel daraus ist JL = 3141533338705083. — Sie unterscheidet sich von der Archimedischen Zahl um Z = 59314884700 und ist in AB enthalten wechselnd X — 16859.

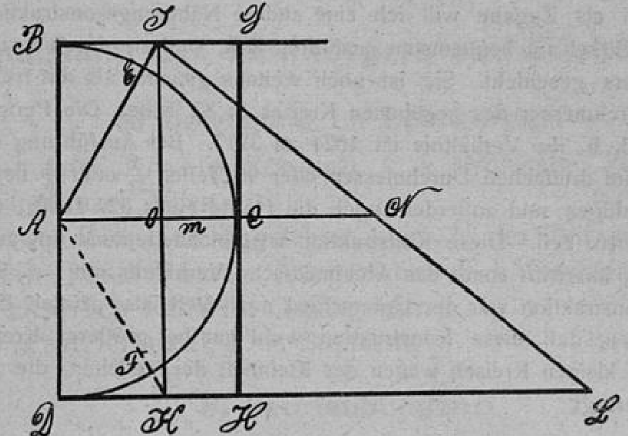


Fig. 15.

Die so gefundene Peripherie weicht von der Archimedischen als der der wirklichen am nächsten liegenden um einen Betrag ab, der im Verhältnis zu ihr kleiner ist, als 1 zur 10fachen laufenden Jahreszahl 1685, aber größer als 1 zur 10fachen Zahl 1686, der folgenden Jahreszahl. JL unterscheidet sich von der Archimedischen Zahl um Z. Z ist in dem durch die Zahl ausgedrückten Durchmesser X mal enthalten. Also ist das Verhältnis 1 : 16850 größer, 1 : 16860 aber kleiner als das angegebene, weil X = 16859 zwischen beiden Zahlen liegt.

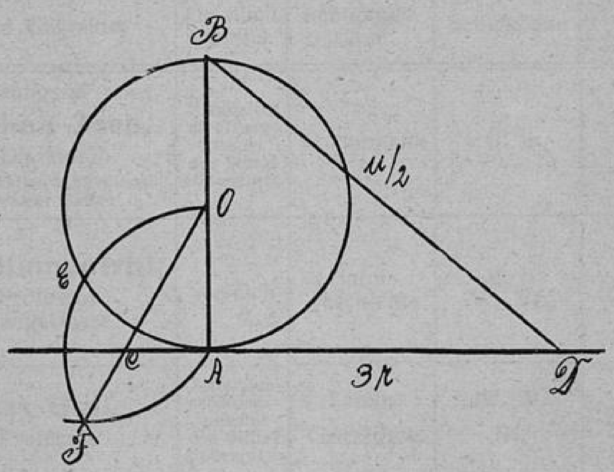


Fig. 16.

Anmerkung: Die ganze Konstruktion ist mit einer einzigen Zirkelöffnung ausführbar. Man ziehe einen beliebigen Durchmesser AB (Fig. 16) errichte in A die Tangente und schneide diese durch die Gerade OC, die mit AB einen Winkel von 30° bildet. Hierauf mache man CD = 3 r und verbinde D mit B. Die Strecke BD ist nahezu gleich dem halben Umfang des Kreises. Der Winkel von 30^0 wird dadurch erhalten, daß man mit dem Radius des gegebenen Kreises um A den Bogen OF und von E den Bogen AF und den Schnittpunkt F beider Bogen mit O verbindet. $CA = \frac{r}{3} \sqrt{3}$, $AD = r \left(3 - \frac{\sqrt{3}}{3}\right)$ $\overline{AD}^2 + \overline{AB}^2 = \overline{BD}^2$. Die Konstruktion gibt den Kreisumfang um nicht ganz $\frac{1}{50000}$ zu klein an. Es entspricht dies ungefähr einem Fehler von 1 mm bei einer Länge von 50 m oder der Länge eines Schrittes bei einer zehnstündigen Fußwegstrecke. (Mandl, Lehrbuch der Geometrie für Obergymnasien, pag. 152.)

Gleichsam als Zugabe will ich eine andere Näherungskonstruktion anführen, die sich mit dem Zirkel am bequemsten ausführen läßt, weil sie durch fortgesetzte Teilung des Durchmessers geschieht. Sie ist noch weitaus genauer als die frühere. Man teile nämlich den Durchmesser des gegebenen Kreises in 32 Teile. Die Peripherie hat $100 \frac{17}{32}$ solcher Teile, d. h. ihr Verhältnis ist 1024 zu 3217. Bei Ausführung der Konstruktion hat man also zum dreifachen Durchmesser oder 96 Teilen $\frac{4}{32}$ oder $\frac{1}{8}$ des ganzen Durchmessers hinzuzufügen und außerdem noch die Hälfte eines 32. Teiles, von der anderen Hälfte aber den 16. Teil. Diese Konstruktion ist gleichbedeutend mit der Annahme von $\pi = 3{\cdot}14160156$, übertrifft somit das Archimedische Verhältnis um . . . 891. Bei der vorausgehenden Konstruktion war der Unterschied noch 5931, also größer. Es darf aber nicht vergessen werden, daß diese Konstruktion wohl nur bei größeren Kreisen Anwendung finden kann, bei kleinen Kreisen wegen der Kleinheit der Teilchen, die am Schlusse anzufügen sind, versagt.