Wie man im 17. Jahrhundert das Problem von der Quadratur des Zirkels zu lösen versuchte.

An einigen Beispielen erläutert und mit einer kurzen Uebersicht über die Geschichte dieses Problems versehen von P. Viktorin Panhölzl, k. k. Professor.

Im Jahre 1687 erschien bei Wolfgang Mauriz Endter in Würzburg das Werk: «Technica curiosa sive Mirabilia artis, libris XII comprehensa» von Kaspar Schott S. J., damals Professor der Mathematik in Würzburg. Das 8. Buch, betitelt mirabilia cyclometrica, behandelt mehrere Versuche, die Quadratur des Zirkels zu lösen, deren Prüfung Schott einst übertragen worden war. Einige dieser Lösungsversuche sollen nun im folgenden wiedergegeben werden. Im Anschlusse daran wird auch die beste geometrische Näherungsmethode gebracht, die es überhaupt gibt, nämlich die von Adam Adamandus Kochanski S. J., veröffentlicht in den Actis Eruditorum anno 1685 publicatis unter dem Titel: Observationes cyclometricae ad facilitandam praxin accommodatae.

Zur besseren Würdigung und zum tieferen Verständnisse des Problems von der Quadratur des Zirkels ist eine kurze Uebersicht über seine Geschichte von den ältesten Zeiten bis zur vollständigen Lösung vorausgeschickt, wozu als Quellen hauptsächlich benützt wurden: Dr. F. Rudio, Archimedes, Huygens, Lambert, Legendre. 4 Abhandlungen über die Kreismessung. Leipzig 1892.

R. P. Claudii Francisci Milliet Dechales Camberensis Cursus seu mundus Mathematicus ed. II. opera et studio R. P. Amati Varcin. Lugduni 1690.

Saverien: Dictionnaire universel de Mathematique et de Physique. I.

Acta Eruditorum annis 1682—1685 publicata. Lipsiae.

Hanovius M. Chr. Impossibilitas Quadraturae circuli a priori adserta. Gedani 1741.

und andere, die gelegentlich angeführt werden sollen.

I. Uebersicht über die Geschichte des Problems von der Quadratur des Zirkels, von den ältesten Zeiten angefangen.

§ 1. Ueber die Ursachen der Berühmtheit dieses Problems.

Unter allen mathematischen Problemen, die im Laufe der Jahrhunderte die Menschheit beschäftigt haben, ist keines zu einer so großen Volkstümlichkeit gelangt, wie das Problem von der Quadratur des Zirkels. Um die Lösung dieses Problems bemühten sich seit jeher, seitdem die Geometrie gepflegt wurde, die hervorragendsten Geister und man kann sagen, seine Geschichte ist so alt wie die Geschichte der menschlichen Kultur. Neben der Verdopplung des Würfels (delisches Problem), der Dreiteilung des Winkels fand dieses Problem seit jeher das regste Interesse.

Bei den alten Griechen stand die Mathematik immer in hohem Ansehen, gewissermaßen als Vorschule der Philosophie, weil jene nach ihrer Meinung ob ihrer unanfechtbaren Sicherheit den Geist stärke und ihn zur Aneignung der übrigen Wissenschaften befähige. Wie spätere Schriftsteller erzählen, hat Plato den Spruch über die Pforten seines Hauses anbringen lassen: «μηδεὶς ἀγεωμέτρητος εἰσίτω». Mit größerer Wahrscheinlichkeit ist dieser jedoch den Pythagoräern zuzuschreiben. Er kennzeichnet treffend die Vorliebe beider für die Mathematik. Kein Wunder, wenn sich die Griechen frühzeitig mit diesem Problem beschäftigten und durch die Erfolglosigkeit ihrer Bemühungen immer wieder zu neuer Arbeit angeeifert wurden.

Zur späteren Volkstümlichkeit dieses Problems trug ohne Zweifel der Umstand bei, daß es zu den wenigen mathematischen Problemen gehört, die ausgesprochen auch von jedem verstanden werden. Jeder weiß, was ein Quadrat und ein Kreis ist; es erscheint daher jedem als einfache Aufgabe, ein Quadrat zu zeichnen, das so groß ist wie ein Kreis. Daß nun diese scheinbar so einfache Aufgabe den Anstrengungen der größten Geister den hartnäckigsten Widerstand leistete, mußte naturgemäß den größten Reiz auf die Mathematiker und noch mehr auf die Nichtmathematiker ausüben.

Es bildete sich ein gewisser Nimbus um dieses Problem, der mit der Zahl der mißglückten Versuche immer mehr zunahm. Natürlich wollte ein jeder, der sich mit der Quadratur des Kreises beschäftigte, durch die Lösung derselben sich berühmt machen. Außerdem war vielfach die Meinung verbreitet, daß von den großen Akademien der Wissenschaften große Preise für die Lösung des Problems von der Quadratur des Zirkels ausgesetzt seien. Die Akademien wurden durch «Quadratoren» so belästigt, daß zuerst die Pariser Akademie im Jahre 1775 erklärte, von nun an keine Arbeiten über die Verdopplung des Würfels, der Dreiteilung des Winkels, der Quadratur des Zirkels, und über das perpetuum mobile mehr anzunehmen. Obwohl die anderen Akademien diesem Schritte bald folgten, wurden die Quadratoren nicht weniger, und selbst jetzt, nachdem es 1882 Lindemann auf Grund der Untersuchungen von Hermite über die Exponentialfunktion gelungen ist, den strengen Nachweis von der Transscendenz der Zahl π zu liefern und somit das Problem von der Quadratur des Zirkels endgiltig zu erledigen, kann man noch immer hin und wieder von neuen Lösungen in den Zeitungen lesen.

§ 2. Worum handelt es sich bei der Lösung dieses Problems.

Allgemein heißt die Fläche einer Figur berechnen und ausmessen ihr Verhältnis zum Quadrat finden und die Figur quadrieren ist nichts anderes als ein ihr flächengleiches Quadrat finden. Dasselbe gilt auch für den Kreis. Unter der Quadratur des Zirkels hat man daher die Auffindung eines Quadrates zu verstehen, das dem Kreise flächengleich ist. Statt Quadratur des Zirkels sagt man auch Tetragonismus. Leibnitz spricht darüber in seiner Abhandlung: de vera proportione circuli ad quadratum circumscriptum in numeris rationalibus. (Acta Eruditorum anno 1682 pag. 41 sq.): Der Tetragonismus oder die Verwandlung des Kreises in ein gleich großes Quadrat oder in eine andere geradlinige Figur (welche vom Verhältnisse des Kreises zum Quadrate des Durchmessers, oder von dem des Umfanges zum Durchmesser abhängt), kann vierfach sein, entweder durch Rechnung oder durch Konstruktion mit Zirkel und Lineal, beide vollständig oder unvollständig. Die Quadratur durch genaue Berechnung nennt Leibnitz analytisch, die durch genaue Konstruktion geometrisch, die durch angenäherte Berechnung Annäherung (appropinquatio), die durch eine Näherungskonstruktion vollzogene, Mechanismus. Die geometrische Konstruktion kann auch dann als genau gelten, wenn man bei derselben nicht nur den ganzen Kreis, sondern auch jeden beliebigen Bogen oder Sektor durch eine exakte und geordnete Bewegung messen kann, wie es bei transscendenten Kurven der Fall ist. Einige halten sie irrtümlich für Mechanismen, obwohl sie genau so geometrisch sind wie die gewöhnlichen; freilich sind sie nicht algebraisch, noch können sie auf algebraische Gleichungen zurückgeführt werden. Sie haben ihre eigenen Gleichungen, die, wenn sie auch nicht algebraisch, doch analytisch sind. Die analytische Quadratur kann wieder dreifach sein, analytisch transscendent, algebraisch und arithmetisch. Die analytisch transscendente geschieht durch Gleichungen unbestimmten Grades, die algebraische durch Gleichungen bestimmten Grades oder durch Irrationalzahlen, die arithmetische durch Reihen, deren Glieder rational sind.

Beide Quadraturen, die analytische und die geometrische, zerfallen wieder in eine allgemeine und spezielle. Jene heißt auch unbestimmt und lehrt den Kreis sowie jeden beliebigen Teil desselben quadrieren, diese heißt auch bestimmt und gilt nur für einen bestimmten Teil oder für den ganzen Kreis allein. (Hanovius M. Chr. Impossibilitas Quadraturae circuli a priori adserta pag. 47.) Leibnitz gibt diese Einteilung in der Abhandlung: de dimensionibus figurarum inveniendis. (Acta Erud. a. 1684 pag. 235 sq. mit folgenden Worten: «Es kann geschehen, daß ein bestimmter Teil des Kreisquadranten, ja sogar der ganze Quadrant quadriert werden kann, obwohl es eine allgemeine Quadratur eines beliebigen Teiles nach einem einzigen gemeinsamen Gesetze oder nach einem bestimmten algebraischen Kalkül nicht gibt». Unter den geometrischen Konstruktionen kann als Beispiel die lunula des Hippokrates aus Chios gelten. Wenn es aber eine geometrische Quadratur einer Fläche nicht gibt, so bleibt als letztes Mittel, dieselbe durch eine unendliche Reihe mit abnehmenden Gliedern auszudrücken. (Tschirnhausen: Methodus datae figurae, rectis lineis et curva geometrica terminatae aut quadraturam aut impossibilitatem eiusdem quadraturae determinandi. Acta Erud. 1683 pag. 437).

§ 3. Charakteristik der verschiedenen Epochen, in welche sich die Geschichte des Problems von der Quadratur des Zirkels zerlegen läßt.

Die Geschichte des Problems von der Quadratur des Kreises von den ältesten Zeiten angefangen bis zu seiner im Jahre 1882 erfolgten endgiltigen Erledigung läßt sich in drei Abschnitte teilen. Der erste Zeitraum reicht von den ersten Anfängen mathematischer Spekulation bis zur Erfindung der Differential- und Integralrechnung, also bis zur zweiten Hälfte des 17. Jahrhundertes. In diesem Zeitraume bildet die näherungsweise Quadratur des Kreises mittelst geometrischer Betrachtungen — vorzugsweise ja fast ausschließlich mit Hilfe der dem Kreise eingeschriebenen und umgeschriebenen Polygone — den Mittelpunkt der auf unser Problem bezüglichen wissenschaftlichen Untersuchungen. Es ist also die von den griechischen Mathematikern begründete Exhaustionsmethode die vorherrschende.

Der zweite Zeitraum umfaßt dann die Zeit bis zum Jahre 1766 d. h. bis zum Entstehungsjahre der grundlegenden Abhandlung Lamberts «Vorläufige Kenntnisse für die, so die Quadratur und Rectifikation des Circuls suchen». (Beiträge zum Gebrauche der Mathematik und deren Anwendung. II. pag. 140—169.)

In diese Periode fallen die Arbeiten von Newton, Leibnitz, Bernoulli und Leonhard Euler. Handelte es sich im ersten Zeitraume vorzugsweise darum, die Zahl π so genau als irgendwie möglich numerisch zu berechnen, was auch selbst für die weitgehendsten Anforderungen der Wissenschaft wie der Praxis geschehen ist, so war der zweite Zeitraum durch das wesentlich theoretische Interesse beherrscht, die Zahl π durch analytische Ausdrücke, denen eine unendliche Reihe von Operationen zugrunde lag, darzustellen.

In der dritten Periode beschäftigte man sich in erster Linie damit, zu erforschen, welcher Natur diese merkwürdige Zahl π sei, ob rational oder irrational, ob algebraisch oder transscendent, bis schließlich durch die Arbeiten von Lionville, Hermite, Lindemann und Weierstraß die Irrationalität der Zahl π festgestellt wurde.

§ 4. Erster Zeitraum.

Die alten Babylonier berechneten den Umfang des Kreises, indem sie den Durchmesser mit 3 multiplizierten. Die gleiche Vorschrift findet sich in der hl. Schrift d. A. T. (III. Buch der Könige 7, 23 und II. Buch Paralipomenon 4, 2). Hier ist also $\pi = 3$ angenommen. Den Ägyptern dagegen war schon viel früher eine weit genauere Berechnung des Kreises bekannt. Im papyrus Rhind aus dem Jahre 2000 v. Chr. ist der Satz enthalten: Der Kreis ist flächengleich einem Quadrate, dessen Seite $\frac{8}{9}$ des Durchmessers ist, was der Annahme $\pi = \left(\frac{16}{9}\right)^2 = 3{\cdot}16$ gleichkommt.

Unter den Griechen sind als die ersten, welche die Quadratur des Kreises versuchten, Antiphon und Bryson, beide Zeitgenossen des Sokrates, zu erwähnen. Antiphon versuchte als erster den Kreis durch ein flächengleiches Vieleck, und damit schließlich durch ein gleich großes Quadrat zu ersetzen. Er betrat also als erster den völlig richtigen Weg, den Flächeninhalt einer krummlinig begrenzten Fläche durch eingeschriebene Vielecke von immer wachsender Seitenanzahl zu erschöpfen. Bryson fügte auch die umgeschriebenen Vielecke hinzu und führte dadurch den Begriff einer unteren und oberen Grenze in die Mathematik ein.

Hippokrates von Chios (um 450 v. Chr. in Athen) lieferte durch die Quadratur der Menisken, genannt lunulae Hippokratis, das erste Beispiel einer wirklichen Quadratur krummlinig begrenzter Flächen. Mit Hilfe solcher Menisken auch den Kreis zu quadrieren, bemühte sich aber Hippokrates vergeblich.

Der erste Mathematiker, dem das Problem der Kreismessung die erste gründliche wissenschaftliche Behandlung verdankt, ist Archimedes von Syrakus (287—212 v. Chr.) mit seinem Werke: Die Kreismessung (κύκλου μέτρησις), worin er beweist, daß der Kreis zum Quadrate des Durchmessers das Verhältnis 11:14 hat, und der Umfang eines jeden Kreises dreimal so groß ist als der Durchmesser und noch etwas größer, nämlich um weniger als $^1/_7$, aber um mehr als $^{10}/_{71}$ des Durchmessers.

Die von Archimedes für die Zahl π gegebene obere Grenze $3\frac{1}{7} = 3{\cdot}14285\ldots$ kommt zwar dem wahren Werte von $\pi = 3{\cdot}14159\ldots$ nicht so nahe als die von ihm gefundene untere Grenze $3\frac{10}{71} = 3{\cdot}14084\ldots$, wird aber der Einfachheit halber heute noch benützt, wo es sich um mittlere Genauigkeit handelt. Die von ihm geschaffene Methode der Kreismessung blieb bis zur Einführung der Differential- und Integralrechnung die herrschende.

In der folgenden Zeit des römischen und christlichen Altertums und Mittelalters machte die Kreismessung keine nennenswerten Fortschritte. Es beschäftigten sich damit Appolonius Pergäus, Ptolomäus, Nicomedes, Pappus von Alexandrien und Boetius. Der bekannte römische Baumeister Vitruvius kannte nicht einmal den archimedischen Näherungswert $3\frac{1}{7}$, da er sich des zwar bequemeren aber auch weit ungenaueren Wertes $3\frac{1}{8} = 3{\cdot}125$ bediente.

Das Verdienst, die Aufmerksamkeit weiterer Kreise wieder auf das Problem der Kreismessung gelenkt zu haben, gebührt dem Kardinal Nicolaus von Cusa (1401—1464). In seinem Werke de mathematicis complementis versucht er nach dem Muster des Archimedes die Quadratur des Kreises und behandelt auch die Verwandlung der Figuren, die Ausmessung gerader und krummer Linien.

Nach Nicolaus von Cusa ist vor allem Regiomontanus (Johannes Müller, geboren 1436 in dem fränkischen Städtchen Königsberg, gestorben 1476 zu Rom), wegen seiner Trigonometrie in 5 Büchern zu erwähnen. Dieses Werk gehört zu den besten seiner Zeit. 1536 erschien von Orontius Finaeus Delphinas, dem Mathematiker Franz I. von Frankreich, das Aufsehen erregende Werk «de rebus mathematicis hactenus desideratis», in welchem angeblich das Verhältnis des Kreisumfanges zum Durchmesser mit alleiniger Benutzung von Zirkel und Lineal bestimmt wurde. Er gibt für π die Grenzen $\frac{22}{7}$ und $\frac{245}{78}$ an.

Im Zeitalter der Renaissance hatten die mathematischen Studien einen allseitigen Aufschwung genommen, daher nimmt auch die Zahl der Arbeiten, die das Problem der Kreismessung betreffen, rasch zu. Der erste, dem es gelang, für die Zahl π einen Wert zu finden, der alle bisherigen an Genauigkeit übertraf, war der holländische Mathematiker Adrianus Metius. Er fand für π den Wert $\frac{355}{113} = 3{\cdot}1415929\ldots$ Er ist leicht zu merken, weil nur die ersten 3 ungeraden Zahlen 113/355 vorkommen. Adrianus Metius veröffentlichte diesen Wert in der geometria practica pars I. c. 10 § 3. Dieser wurde, wie Metius in der Schrift libellus adversus quadraturam circuli Simonis a Quercu 1584 erwähnt, von seinem Vater aufgefunden und bewiesen. Simon Duchesne, der in Holland unter dem Namen Van der Eycke lebte, behauptete, der Kreis sei einem Quadrate gleich, dessen Seite $\frac{39}{44}$ des Durchmessers betrage.

Franz Vieta (1540—1603) fand, wie Leibnitz hervorhebt, eine vortreffliche mechanische Quadratur des Kreises. Nach ihm hat ein Kreis mit dem Durchmesser eins einen Flächeninhalt $1 : (2\sqrt{1/2} \cdot \sqrt{1/2 + 1/2\sqrt{1/2}} \cdot \sqrt{1/2 + 1/2\sqrt{1/2 + 1/2\sqrt{1/2}}} \ldots)$

Die Zahl π gab er auf 9 Dezimalien richtig an.

Diese Genauigkeit wurde bald übertroffen durch den holländischen Mathematiker Adrianus Romanus (Adrian van Roomen, geboren zu Löwen, gestorben 1616 als Professor der Mathematik in Würzburg). 1593 erschien von ihm Ideae mathematicae pars I. sive methodus polygonorum et arearum una cum circuli quadratura, 1597 in Archimedis circuli dimensionem expositio et analysis. In diesem Werke verteidigt Adrianus Romanus, damals schon Professor in Würzburg, den Archimedes gegen Josef Scaliger, welcher Archimedes wegen der Benützung von Zahlen bei der Kreismessung getadelt hatte. Dann weist er nach, daß Josef Scaliger, Orontius Finaeus, Raymarus Ursus, die Quadratur des Zirkels nicht gelöst haben. 1594 war nämlich Josef Scaliger in seinen Cyclometrica elementa duo zum Resultat gekommen, daß der Umfang eines eingeschriebenen 12 Eckes größer sei als der Umfang des Kreises, dem es eingeschrieben ist. Weil Scaliger als Philolog an der Leydener Universität großes Ansehen hatte, schrieben gegen ihn die bedeutendsten damaligen Mathematiker, so unter anderen auch Franz Vieta in seiner Abhandlung munimen adversus novam Cyclometriam seu ἀντιπελεκη Scaligeri. Adrianus Romanus hatte mit Hilfe eines 2^{30} Eckes π auf 15 Dezimalen berechnet.

Viel Größeres in Bezug auf Geduld, Ausdauer und Geschicklichkeit im Rechnen leistete Ludolph von Köln, geboren zu Hildesheim 1539, gestorben als Professor der Mathematik und der Kriegswissenschaften in Leyden 1610. Die gewöhnliche Bezeichnung van Ceulen ist nur der niederdeutsche Ausdruck für: von Köln. In dem Buche de circulo et adscriptis hat er nach dem archimedischen Grenzverfahren die Zahl π auf 35 Dezimalstellen berechnet. Dies erforderte die Einschließung des Umfanges zwischen ein Sehnen- und Tangentenvieleck von mehr als 1000 Millionen Seiten ($60 \cdot 2^{29}$ Eck) Die so mühsam berechnete Zahl erregte bei Ludolph's Zeitgenossen großes Aufsehen. Sie bildete die Grabschrift ihres Finders und wurde namentlich seit Euler ganz allgemein die Ludolphische genannt. Für $d=1$ ist

$$3{\cdot}\,14159\ 26535\ 89793\ 23846\ 264338327950 < \pi <$$
$$3{\cdot}\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots 51.$$
(Zetematum Geometricorum epilogismus. Zetem. 2 pag. 91.)

Zu den schönsten und bedeutendsten elementargeometrischen Arbeiten, welche neben der Abhandlnng des Archimedes bleibenden Wert haben, gehört das 1654 erschienene Werk de circuli magnitudine von Christian Huygens (geb. im Haag 1629, gest. daselbst 1695). Es besteht aus 20 Propositionen, in welchen er unter anderen beweist: Der Umfang eines jeden Kreises ist kleiner als die kleinere der beiden mittleren Proportionalen zwischen den Umfängen zweier ähnlicher regulärer Polygone, von denen das eine dem Kreise eingeschrieben, das andere umgeschrieben ist. Die Kreisfläche aber ist kleiner als das zu jenen ähnliche Polygon, dessen Umfang der größeren der beiden mittleren Proportionalen gleich ist. (Prop. XI.) Mit Hilfe der Sätze, die er in diesen Propositionen aufstellt, gelingt es Huygens bei der Berechnung von π stets dreimal soviel Dezimalstellen zu erhalten als die gewöhnlichen Methoden geben. Um die Archimedischen Grenzen zu erhalten genügt ihm die Seite des eingeschriebenen gleichseitigen Dreieckes. Das 60 Eck liefert ihm $3{\cdot}1415926533 < \pi < 3{\cdot}1415926538$.

Im Jahre 1647 erschien in 2 Foliobänden das Werk: opus geometricum quadraturae circuli et sectionum coni 10 libris comprehensum von P. Gregorius a. Scto Vincentio. Im 10. Buche behandelt er die Quadratur des Kreises, die er mit Hilfe von Kegelschnitten versucht.

Dieses vortreffliche Werk, das der Geometrie neue Wege eröffnete, enthält sehr einfache und kurze Beweise, aber die Quadratur des Zirkels, wie es der Titel verheißt, enthält es nicht, obwohl es an neuen und interessanten Wahrheiten inbezug auf die Quadratur nicht fehlt.

Dieses Werk blieb nicht ohne Widerspruch. Einige schrieben gegen die Abhandlung «de proportionibus seu progressionibus geometricis», andere gegen die Quadratur selbst, unter andern Christian Huygens, Adrian Auzout, Alexius Sylvius u. Vincentius Leotaudus. Daraufhin ließ im Jahre 1656 P. Franciscus Aynscon S. J. aus Antwerpen ein Buch erscheinen, betitelt: expositio ac deductio geometrica quadraturarum circuli P. Gregorii a. s. Vincentio, cui praemittitur liber de rationibus ac proportionibus geometricis. Im ersten Teil behandelt er die Verhältnisse und Proportionen und weist die Richtigkeit der Lehrsätze von Gregorius de s. Vincentio nach, im zweiten zeigt er gegen Leotaudus, daß die Quadraturen geometrisch sind, freilich nur Näherungen.

§ 5. Zweiter Zeitraum.

Seitdem durch Newton und Leibnitz die Analysis des Unendlichen begründet und im Vereine mit den beiden Brüdern Jakob und Johann Bernoulli ausgearbeitet war, trat auch in der Kreismessung das Bestreben in den Vordergrund, für das Verhältnis des Kreisumfanges zum Durchmesser analytische durch eine unendliche Reihe von Operationen gebildete Ausdrücke zu gewinnen, wodurch allmählich die alten elementargeometrischen Methoden vollständig verdrängt wurden.

John Wallis (1616—1703) fand zur Darstellung der Zahl π das unendliche Produkt $\frac{\pi}{2}=\frac{2}{1}\cdot\frac{2}{3}\cdot\frac{4}{3}\cdot\frac{4}{5}\cdot\frac{6}{5}\cdot\frac{6}{7}\cdot\frac{8}{7}\cdot\frac{8}{9}\cdot\ldots\ldots$, während Lord Brounker für π die Kettenbruchformel gab:

$$\frac{\pi}{4}=1+\cfrac{1}{2+\cfrac{9}{2+\cfrac{25}{2+\cfrac{49}{2+\cfrac{81}{2+\cfrac{121}{2+\ldots}}}}}}$$

Die eigentliche Quelle der folgenden Untersuchungen über die Kreismessung bildete die sogenannte Leibnitz'sche Reihe:

$$\frac{\pi}{4}=1-\frac{1}{3}+\frac{1}{5}-\frac{1}{7}+\frac{1}{9}-\frac{1}{11}+\ldots.$$

Diese Reihe hat Leibnitz in der schon erwähnten Abhandlung „de vera proportione circuli ad quadratum circumscriptum in numeris rationalibus" 1682 veröffentlicht. Mit Hilfe solcher Relationen versuchten die Mathematiker seit dem Anfange des 18. Jahrhunderts die Zahl π zu berechnen. Durch geschicktes Disponieren wurden so Rechnungsmethoden hergestellt, die alle früher ausgeführten numerischen Bestimmungen von π weit hinter sich zurückliessen. So benützte im Jahre 1706 der englische Mathematiker

Machin die Relation $\frac{\pi}{4}=4\left(\frac{1}{5}-\frac{1}{3.5^3}+\frac{1}{5.5^5}-\frac{1}{7.5^7}+\dots\right)-\left(\frac{1}{239}-\frac{1}{3.239^3}+\frac{1}{5.239^5}-\frac{1}{7.239^7}+\dots\right)$, um die Zahl π auf 100 Dezimalen zu berechnen. Im Jahre 1719 veröffentlichte der Franzose Lagny sogar 127 Dezimalstellen von π. Diese hat auch Georg Vega in seinen 1782 herausgegebenen Logarithmentafeln aufgenommen. Als er später selbst π auf 140 Stellen berechnete und dadurch die Angaben von Lagny nachprüfte, ergab sich ihre Richtigkeit bis auf die 113te Stelle, welche nicht 7 sondern 8 lauten mußte.

Zacharias Dase aus Hamburg berechnete im Jahre 1844 200 Dezimalen von π, hierauf Richter 500 Stellen und schließlich wurden von Shanks sogar 700 Stellen von π berechnet. Dies ist eine Genauigkeit, die für jede wie immer geartete praktische Anwenduug vollkommen überflüssig ist, und es ist für die menschliche Fassungs- und Einbildungskraft ganz unmöglich, sich davon überhaupt eine Vorstellung zu bilden. Denn es genügt die Kenntnis von 10 Dezimalen, um einen Kreis von der Grösse des Erdäquators auf mm genau zu berechnen. Professor Schubert aus Hamburg bemerkt dazu in seiner Schrift „Die Quadratur des Zirkels in berufenen und unberufenen Köpfen“ Hamburg 1889, daß derartige Berechnungen nur insofern einen Wert haben, als dadurch die Güte der neueren Methoden gegenüber den älteren, mit denen derartige Resultate nie zu erreichen gewesen wären, gekennzeichnet würde.

Man war nun wohl imstande, die Zahl π auf Hunderte von Dezimalen zu berechnen, wozu man wissenschaftlich interessante und praktisch verwendbare Darstellungen z. B. in Form von stark konvergenten Reihen hatte, aber die Natur dieser wichtigen und merkwürdigen Zahl war insofern noch genau so unbekannt wie im Altertum, als man noch nicht einmal wußte, ob π eine rationale oder irrationale Zahl sei. Damit zusammenhängend war die Frage nach der Möglichkeit der Quadratur des Zirkels noch eine ebenso unentschiedene wie zur Zeit des Archimedes. Es hatte wohl zu allen Zeiten Leute gegeben, welche im Besitze einer Quadratur zu sein wähnten, aber diese Quadraturen hatten sich stets nur als mehr oder minder gute Annäherungen erwiesen, so selbstbewußt sie auch von ihren Urhebern als genaue Lösungen des Problems angekündigt waren. Manche solcher Arbeiten trugen indessen auch unbestritten zur Förderung des Problems bei, sei es, daß sie Anlaß zur Schärfung der Kritik gaben, oder neue, interessante Wahrheiten enthielten.

Den Anstoß, sich mit der Natur der Zahl π zu beschäftigen, hat Leonhard Euler (geb. zu Basel 1707, gest. zu Petersburg 1783) durch seine zahlreichen Arbeiten, besonders durch sein klassisches Werk: Introductio in analysin infinitorum. Lausannae 1748 gegeben. Von ihm rührt auch die Bezeichnung π für das Verhältnis des Kreisumfanges zum Durchmesser her. Früher hatte man immer nur vom «Verhältnis des Kreisumfanges zum Durchmesser» gesprochen. Euler selbst bediente sich anfangs des Symbols p, seit 1735 an aber ausschließlich der Bezeichnung π, die sich dann allgemein einbürgerte.

§ 6. **Dritter Zeitraum.**

Um die Natur der Zahl π festzustellen, drehten sich die Arbeiten Johann Heinrich Lambert's (1728—1777) und Josef Lionville's (1809—1882), die sich zu entscheiden bemühten, ob π eine algebraische oder transscendente Zahl ist.

Theoretisch ist die Frage so: Wenn π eine rationale Zahl wäre, etwa $\frac{355}{113}$ dann ist es klar, daß die Quadratur des Kreises sich mit Zirkel und Lineal durch Teilung und Vervielfältigung ausführen ließe.

Die Quadratur des Kreises wäre aber auch dann noch durch geometrische Konstruktion ausführbar, wenn π in einer der Formen $a+\sqrt{b}$, $a+\sqrt{b+\sqrt{c}}$, $a+\sqrt{b+\sqrt{c+\sqrt{d}}}$, usw. enthalten, oder auch aus der Summe solcher Größen zusammengesetzt wäre, wo a, b, c . . rationale Zahlen sind, d. h. wenn π durch eine quadratische Gleichung mit ganzzahligen Koefficienten oder durch eine Kette solcher Gleichungen gegeben sich bestimmen ließe. (Mandl, Lehrbuch der Geometrie § 185).

Lindemann hat nun auf Grund der Arbeiten Hermite's im Jahre 1882 bewiesen, daß π weder durch quadratische Gleichungen noch durch irgendwelche Gleichungen mit rationalen Koeffizienten von noch so hohem Grade bestimmt werden kann, und damit den Nachweis geliefert, daß die Zahl π eine transscendente Zahl ist. Im Jahre 1885 hat dann Weierstraß, ohne Voraussetzung der Hermite'schen Abhandlung, die Lindemann'schen Sätze auf einem verhältnismäßig einfachen Wege aufs neue abgeleitet und begründet. (Berichte der Berliner Akademie (1885): Zu Lindemann's Abhandlung: «Über die Ludolph'sche Zahl.)

Damit war die längst vermutete Unlösbarkeit des Problems von der Quadratur des Zirkels endgiltig und unanfechtbar bewiesen.

Dr. Rudio schließt die geschichtliche Einleitung seiner Schrift: Archimedes, Huygens, Lambert und Legendre also: Ein nicht nur durch sein hohes Alter ehrwürdiges, sondern auch, vom mathematisch historischen Standpunkte aus betrachtet, höchst merkwürdiges Problem hat durch die Lindemann'schen Untersuchungen seine endgiltige Erledigung gefunden. Ursprünglich eine rein geometrische Aufgabe von verhältnismäßig untergeordneter Bedeutung hat sich die Frage nach der Quadratur des Zirkels im Laufe der Jahrhunderte zu einem arithmetischen Probleme von höchstem Interesse ausgebildet. Es hat teilgenommen an allen wichtigeren Wandlungen, welche die mathematischen Anschauungen und Methoden allmählig erfahren haben, es ist mit ihnen und durch sie im Laufe der Zeit selbst umgestaltet worden, bis sich schließlich die Fragestellung so abklärte und präzisierte, daß eine bestimmte Antwort gegeben werden konnte.

Es hat aber nicht nur passiv an allen diesen Wandlungen teilgenommen, sondern es hat auch dadurch, daß es immer und immer wieder und zwar in wechselnder Gestalt den Mathematikern entgegentrat, selbst mächtig fördernd eingewirkt auf die Entwicklung der mathematischen Wissenschaften und insbesondere derjenigen Theorien, welche endlich zur Entscheidung geführt haben.

II. Mirabilia cyclometrica. Varia Tetragonismi conamina.

Dieses Buch stammt, wie der Verfasser selbst sagt, aus dem Jahre 1662. In diesem Jahre erhielt er von einem Mathematiker, dessen Namen er nicht angibt, einen Lösungsversuch der Quadratur des Zirkels, betitelt: Demonstratio geometrica novae circuli quadraturae zur Begutachtung. Daher setzt er diesen als conamen recentissimum an die Spitze des Buches.

§ 1. A. Ausführung der Quadratur.

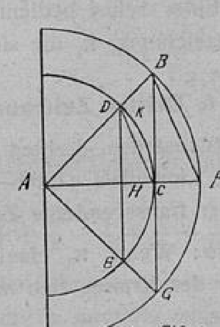

FIG. 1.

I. Man konstruiere zuerst, Fig. 1, ein gleichschenkliges, rechtwinkliges Dreieck ABC und beschreibe dann mit dem Radius AB einen Kreis, oder, was auch genügt, einen

Quadranten BFG. Weil der Winkel ACB nach der Konstruktion ein rechter ist, der Winkel A gleich B im gleichschenkligen Dreiecke, so ist ein jeder 45°. Da der rechte Winkel $^1/_4$ des Kreises ist, ist der halbe Rechte $^1/_8$ desselben.

II. Die Kreise verhalten sich wie die Quadrate der Durchmesser oder wie die Quadrate der Halbmesser. Es ist aber das Quadrat über AB doppelt so groß wie das Quadrat über AC, daher ist auch der Kreis ABFG doppelt so groß wie der Kreis ADCE. Daher ist die Zone BFGECD gleich dem Kreise ADCE.

III. Nun stehen ähnliche Teile in demselben Verhältnisse wie ähnliche Ganze. Ist also ADCE die Hälfte von ABFG, so ist gleichfalls die Hälfte dieses doppelt so groß wie die Hälfte jenes.

IV. Vermindert man Gleiches um Ungleiches, so unterscheiden sich die Reste um soviel, wie die Subtrahenden (nach dem 17. Axiom des Clavius zu Euklid). Wenn man daher von der Zone BFCD das Halbsegment BFC wegnimmt und auf gleiche Weise das halbe Segment DCH vom Sektor ADC, so unterscheiden sich die Reste, dort das gerad- und krummlinig-begrenzte BCD, hier das gleichschenklige Dreieck DHA, um soviel wie die weggenommenen Stücke. Das eine, was hinweggenommen wurde, nämlich das halbe Segment BFC ist noch einmal so groß wie DCH; daher ist auch der Rest DHA das zweifache von BCD.

V. Fügt man zu BCKD das Oktantensegment DKC hinzu, sodaß das geradlinig begrenzte Dreieck BCD entsteht und vermindert man dieses Dreieck um die Hälfte des gleichschenkligen Dreieckes DHA, so ist das geradlinig begrenzte übrige Stück gleich dem gemischtlinig begrenzten DKC.

VI. Wird schließlich zu diesem geradlinig begrenzten Stück das Dreieck ADC hinzugefügt, so ist die Summe gleich dem Sektor ADKC und das achtfache gleich dem ganzen Kreise ADCE usw., was zu beweisen war. Insoweit der Urheber des Tetragonismus.

B. Prüfung dieser Quadratur.

Beim Lesen dieses Versuches, die Quadratur des Kreises zu erzielen, fällt sofort der Fehlschluß in Nr. IV infolge schlechter Anwendung des daselbst zitierten Axioms auf. Denn es ist unwahr, daß, wenn man vom Gleichen Ungleiches abzieht, sich die Reste um soviel unterscheiden wie die Subtrahenden, in dem Sinne, daß auch die Reste um das zwei-, drei-, vierfache sich unterscheiden, wenn der Unterschied der Subtrahenden ein zwei-, drei-, vierfacher ist, wie es ersichtlich ist, wenn man die Größen $A = 100$ und $B = 100$ um C und D vermindert, wobei D die Hälfte von C ist, z. B. $C = 50$, $D = 25$; es bleibt $E = 50$ und $F = 75$, die sich aber nicht ums doppelte unterscheiden. Der Sinn des Axioms ist der, daß der Unterschied der Subtrahenden gleich dem der Reste ist, wie es aus dem angeführten Beispiel ersichtlich ist, wo C um 25 größer ist als D, ebenso F um 25 größer als E. Clavius formuliert sein Axiom daher folgendermaßen: «Wenn Gleiches um Ungleiches vermindert wird, so wird der Überschuß der Reste gleich dem Überschusse der Subtrahenden». Die Gleichheit ist im arithmetischen Sinne zu nehmen.

Anmerkung: Diese Pseudoquadratur scheint als Vorbild Thomas Gephyrander Salicetus aus Westphalen gehabt zu haben, der im Jahre 1608 folgende Schrift veröffentlichte: Quadratura circuli nova, perspicua, expedita, vereque tum naturalis, tum geometrica, cuius modi communibus tot saeculorum gentiumque votis Mathematicis expedita hactenus fuit; nunc demum hâc ultimâ Mundi senecta, divina ducente gratia, sub Felic., Seren., ac Rev. Principis Ernesti Bavari, Archiepiscopi Coloniensis, etc. Electoris etc. auspiciis tentata et inventa. Er beschreibt zuerst um den Kreis, dessen Quadratur zu suchen ist, einen Kreisring von demselben Inhalte wie der gegebene Kreis; dann teilt er von beiden den 8. Teil in verschiedene Teile; schließlich erbringt er nach seiner Meinung durch Addition und Subtraktion gleicher Teile den Beweis, indem er zeigt, daß die lunula der von ihm angegebenen geradlinigen Figur flächengleich ist. Sein größter Fehlschluß besteht darin, daß er glaubt und ohne Beweis annimmt, das Doppelte dessen, was er vom Kreisoktanten subtrahiert, vom Kreisringe abgezogen, gebe einen Rest des Oktanten, der zweimal so groß ist wie der Rest des Ringes. Er geht folgendermaßen vor:

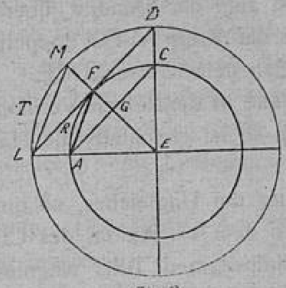

Fig. 2.

I. Der gegebene Kreisquadrant sei EAFC, Fig. 2. Errichtet man auf AE die Senkrechte EC, so ist AC die Hypotenuse. Das Quadrat über AC ist zweimal so groß wie das Quadrat über AE.

II. Vom Mittelpunkte E aus beschreibe man mit dem Radius EL = AC einen Kreis ELMB. Dieser Kreis ist doppelt so groß wie der gegebene, weil sich die Kreise so verhalten wie die Quadrate der Durchmesser oder der Halbmesser.

III. Vermindert man den größeren Kreis um den kleinern, so verbleibt der um den kleinern beschriebene Kreisring als Rest, der mit dem kleineren Kreise flächengleich ist. Subtrahiert man nämlich vom Doppelten die eine Hälfte, so erhält man die andere. Zwei Hälften ein und derselben Größe sind unter einander gleich. Außerdem ist der 4. Teil des Ringes dem Kreisquadranten gleich und der 8. Teil des Ringes LMFKA flächengleich dem Oktanten AKFE.

IV. Daher ist die größere lunula LTM zweimal so groß wie die kleinere AKF, und das größere Dreieck LMF das Doppelte des kleineren Dreieckes AFG. Vermindert man also den Ring um die beiden ersteren, den Oktanten um die beiden letzteren, so bleibt einerseits das gerad- und krummlinig begrenzte Stück LAKF, anderseits das Dreieck AGE und es ist das erstere die Hälfte vom letzteren.

Auf Grund dieser Voraussetzung vollzieht er seine Beweisführung. Er macht aber einen Fehlschluß. Denn es ist falsch, daß, wenn man von einer der zwei gleichen Größen zweimal das Doppelte und von der anderen zweimal das Einfache subtrahiert, der Rest der ersteren die Hälfte des Restes der zweiten ist. Sind nämlich, wie früher A und B gleich und subtrahiert man von A zweimal das doppelte C und D, von B zweimal das einfache E und F, so ist hier der Rest H, dort G, aber G ist nicht die Hälfte von H.

A = 100	B = 100
C = 30	E = 15
D = 30	F = 15
G = 40	H = 70

§ 2. Versuch des Tetragonismus oder der Quadratur des Kreises, genannt der sicilische.

Im Jahre 1648, in welchem Schott zu Palermo in Sizilien Professor der Mathematik war, trat in die Schule ein schon bejahrter Mann ein, mit runzligem Gesichte, struppigem Haupt- und Barthaar, überhaupt vom vernachlässigten Äußeren, Don Romaeus mit Namen.

Er zeigte sich in der Mathematik, besonders in den Elementen des Euklid sehr bewandert, beklagte sich aber sehr über die Mathematiker des Kollegiums in Rom. Ihnen hatte er nämlich seine neue Quadratur des Zirkels zur Begutachtung vorgelegt, aber keine Antwort erhalten. Das Schema dieser Quadratur war folgendes: Um A als Mittelpunkt, Fig. 3, hatte er den Kreis BC beschrieben, diesem das Quadrat D eingeschrieben und das Quadrat C umschrieben.

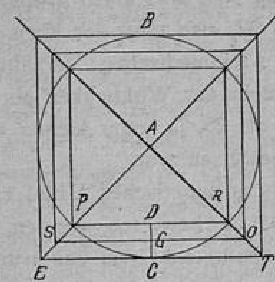

Fig. 3.

Dann hatte er zwischen beiden ein anderes Quadrat G beschrieben, das sich zum größeren wie 3:4, zum kleineren wie 3:2 verhielt. Von diesem Quadrate behauptete er, daß es dem Kreise flächengleich sei.

Prüfung dieser Quadratur.

Bei der Prüfung dieser Quadratur ergibt sich, daß der Autor in den Fehlschluß des Bryson verfallen ist, der behauptete, der Kreis sei flächengleich einem Quadrate, welches vom umschriebenen und eingeschriebenen Quadrate das Mittel ist. Der «Quadrator» sagt nämlich, wie auch Bryson, so: Der Kreis BC und das Quadrat G sind größer als das Quadrat D, weil es ein Teil von ihnen ist. Derselbe Kreis BC und das Quadrat G sind kleiner als das Quadrat C, von dem sie Teile sind. Daraus folgt: Der Kreis BC ist gleich dem Quadrate G. Was nämlich in Bezug auf ein und dieselbe Größe gleichzeitig größer und kleiner ist, ist unter einander gleich (nach der Behauptung des Quadrators).

Das ist aber keineswegs wahr. Wenn auch 8 und 9 kleiner sind als 10 und größer als 7, so ist doch nicht 8 gleich 9.

Daran ändert auch der Umstand nichts, daß das größere zum mittleren sich wie 4:3 und das kleinere zum mittleren wie 2:3 sich verhalten soll. Es ist nämlich etwas anderes, zwischen geraden Linien das Mittel anzugeben, wie es hier bei den 3 Quadratseiten der Fall ist, etwas anderes wiederum, von krummen Linien das Mittel zu finden, das dem Mittel der geraden Linien gleich ist. Während das erste sehr leicht ist, wurde das zweite von den bedeutendsten Geometern bisher versucht, von niemand vielleicht gefunden.

Ich leugne jedoch nicht, daß es in Wirklichkeit ein dem Kreise BC flächengleiches Quadrat gibt, wenn es auch noch nicht bekannt ist, wie ein solches richtig dargestellt werden kann. Obwohl eine derartige Begrenzung zwischen Größeren und Kleineren in gewisser Hinsicht zwar richtig ist, so ist sie doch immer unbestimmt, (das ist eben das Unwissenschaftliche) außer es liegt, wie es bei Archimedes der Fall ist, zwischen so engen Grenzen, daß es nicht jedermanns Sache ist, vom Näherungswerte den wahren Wert zu unterscheiden.

Daß es kein Quadrat als Mittel im früher erwähnten Sinne geben kann, welches dem Kreise BC flächengleich ist, beweise ich folgendermaßen: Weil die Seite des Quadrates C gleich der Diagonale des Quadrates D ist, so ist das Quadrat D selbst die Hälfte des Quadrates C. Angenommen, das Quadrat C sei gleich 32, dann ist D = 16; ebenso ist auch der Überschuß von C über D gleich 16. Das Trapez EPRT zwischen den Parallelen C und D ist als der 4. Teil des Überschusses gleich 4. Weil DG = GC und die Quadratseite C größer als die Seite des Quadrates D ist, so ist ESOT zwischen den Parallelen G und C größer als das halbe Trapez EPRT, nämlich größer als 2. Das übrige Stück

OPRS zwischen D und G ist dann kleiner als 2. Der ganze Überschuß des Quadrates G über D ist kleiner als 8. Das Quadrat G ist also kleiner als 25, weil es ja 24 nicht erreicht. Nach Archimedes aber steht es fest, daß das Verhältnis des Kreises zum Quadrate des Durchmessers größer ist als 223 zu 484, also umso größer als 25 zu 32. Nun ist nach der Annahme das Quadrat C gleich 32, also muß der Kreis BC größer als 25 sein, wie es sich beim Vergleiche mit dem Archimedischen Verhältnisse ergibt; denn das Archimedische Verhältnis nähert sich mehr der Wirklichkeit als 25 zu 32. Das Quadrat G ist, wie früher gezeigt wurde, kleiner als 25, ja sogar kleiner als 24; daher ist es dem Kreise BC nicht flächengleich; was zu beweisen war.

Wenn aber ein Quadrat als arithmetisches Mittel zwischen den Quadraten C und D angenommen wird, so kann auch bewiesen werden, daß ein solches Quadrat dem Kreise BC nicht gleich ist. Angenommen G sei das arithmetische Mittel zwischen den Quadraten C und D. Da das Quadrat C gleich 32 und D gleich 16 genommen wurde, so ist das Quadrat G gleich 24, also kleiner als 25. Nach Archimedes ist aber der Kreis BC größer als 25. Daher ist G dem Kreise BC nicht gleich.

Dies alles kann auch auf das Verhältnis übertragen werden, welches Don Romaeus zwischen den Quadraten annimmt, nämlich daß sich G zu C verhalte wie 3 zu 4 und G zu D wie 3 zu 2. Wenn auch 3 zwischen 2 und 4 das Mittel ist, so folgt noch nicht, daß auch der Kreis diesem Mittel entspreche, da der Kreis zu dem ihm umschriebenen Quadrate ein größeres Verhältnis hat als 3 zu 4. Es kann auch keine Zahl zwischen 3 und 4 gefunden werden, die ein vollständiges Quadrat gibt. Don Romaeus wird daher schwerlich die Gleichheit des mittleren Quadrates mit dem Kreise, sei es durch rationale oder irrationale Zahlen erklären können.

§ 3. Versuch, die Quadratur des Kreises zu finden, genannt der deutsche.

A. Darlegung der Quadratur.

P. Thomas Streit, ein hervorragender Mathematiker der Gesellschaft Jesu, hatte folgende Behauptung aufgestellt: Beschreibt man über den Durchmesser PM, Fig. 4, ein rechtwinkliges Dreieck POM, dessen 3 Seiten eine stetige Proportion bilden, so ist die mittlere Proportionale unter ihnen, MO, der 4. Teil des Kreisumfanges, dessen Durchmesser PM ist. Er nennt diese Quadratur des Zirkels eine indirekte, weil sie nur das Verhältnis zwischen dem Durchmesser und dem Umfange des Kreises erläutert. Diese Behauptung hatte Streit den in Rom lebenden Mathematikern der Gesellschaft Jesu zur Begutachtung zugesandt.

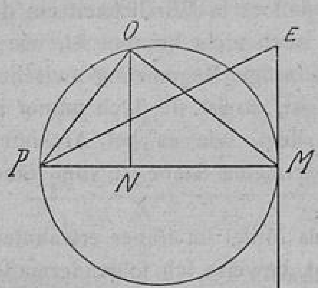

Fig. 4.

B. Prüfung des Tetragonismus.

Die römischen Begutachter gaben zur Antwort, daß diese Behauptung des genannten P. Streit dem Verhältnisse des Durchmessers zum Umfange widerspreche. Wenn dieses auch nicht bekannt ist, so ist es doch sicher, daß es innerhalb folgender Grenzen liege :

Ist der Durchmesser gleich 1000000000, so ist der Umfang kleiner als 3141592654, aber größer als 3141592653, der Kreisquadrant kleiner als 785398164 aber größer als 785398163. Nimmt man den Durchmesser gleich 100000, so liegt der Quadrant zwischen 78539 und 78540. Das Quadrat des Quadranten aber liegt zwischen den Grenzen $A = 6168374521$ und $B = 6168531600$. Mit diesem Quadrate muß MO übereinstimmen, wenn MO dem 4. Teil des Umfanges gleich sein soll.

Das Quadrat der Geraden MO (der Durchmesser $PM = 100\,000$ genommen) findet man auf folgende Weise: Vor allem ist bekannt, daß, wenn man in einem rechtwinkligen Dreiecke vom Scheitel des rechten Winkels die Höhe ON auf die Basis fällt, die Seiten stetige Proportionen bilden und PM in N so geteilt wird, daß das Quadrat von MO gleich dem Rechtecke PMN ist. Nimmt man also $PM = 100000$, so ist die Hälfte davon $ME = 50000$ und das Quadrat über PE oder EF ist dann gleich der Summe der Quadrate PM und ME. Jenes ist 10000000000, dieses 2500000000, daher ist das Quadrat von PE oder von EF 12500000000. EF liegt infolgedessen zwischen 111803 und 111804. EF vermindert um ME gibt MF oder MN zwischen den Grenzen 61803 und 61804. Multipliziert man MN mit $PM = 100000$, so erhält man für das Rechteck PMN einen Wert innerhalb der Grenzen 6180300000 und 6180400000. Dieses Rechteck ist aber dem Quadrate über MO flächengleich. Also liegt das Quadrat über MO innerhalb der Grenzen $C = 6180300000$ und $D = 6180400000$. Die Werte von C und D stimmen zwar in den ersten zwei Ziffern mit A und B überein, aber nicht mehr in der dritten, wo dort 8 hier 6 steht. Nun ist aber C, welches kleiner als das Quadrat von MO ist, schon größer als B, dessen Wert größer ist als der des Quadrates des Kreisquadranten, was unmöglich der Fall sein könnte, wenn MO in Bezug auf den Durchmesser PM gleich dem Quadranten wäre.

(Anmerkung: $d = 1$ also $r = 1/2$, ist $u = \pi$ und $\frac{u}{4} = \frac{\pi}{4}$; $MO = \sqrt{1/2\,(\sqrt{5} - 1)} = 0{\cdot}78615$ oder π wäre gleich 3·14460.)

Es liegt daher notwendigerweise in der Beweisführung ein Fehlschluß verborgen, den der Autor dieser Quadratur leicht entdecken kann, wenn er die Quadratur, die er bisher nur per partes durchgeführt, auf geometrischem Wege vollendet. Wenn er die Arithmetik hätte zur Geltung kommen lassen wollen, wäre er viel schneller von dieser Pseudoquadratur abgekommen. So lautete das römische Gutachten.

C. Erwiderung auf dieses Gutachten.

Auf dieses Gutachten antwortete P. Streit in folgender Weise: Im Gutachten heißt es, meine Behauptung widerspreche dem Verhältnis des Durchmessers zum Umfange. Man sucht dies aber durch einen offenkundigen Fehlschluß zu beweisen. Es heißt: EF ist größer als 111803. Wenn der Sinn der ist: Die Zahl 111803 ist kleiner als jene Linie, welche die Seite des der Summe der Quadrate über PM und ME flächengleichen Quadrates ist, so ist die Behauptung richtig; dasselbe gilt von MN und vom Rechtecke PMN. MN ist größer als 61803, das Rechteck größer als 6180300000, aber nur als Zahl betrachtet. Denn, werden diese Größen geometrisch genommen, so widerspricht meine Behauptung dem Verhältnisse des Umfanges zum Durchmesser nicht, in Zahlen aber ausgedrückt hat das Gutachten recht. P. Streit leugnet also die Identität einer Strecke mit der dieselbe ausdrückenden Zahl. Diejenigen, welche die Quadratur zu beurteilen hatten, standen auf dem Standpunkt: Wenn 2 Gerade gleich lang sind, so sind auch ihre Quadrate, in Zahlen ausgedrückt gleich. Wenn eine von beiden größer oder kleiner ist, so ist auch ihr Quadrat in Zahlen gegeben, größer oder kleiner als das der anderen Geraden.

(Der Schluß folgt im Programm des nächsten Schuljahres.)