Königliche Waisen- und Schulanstalt zu Bunzlau.

Gymnasium.

Jahresbericht

über das

Schuljahr Ostern 1893 bis Ostern 1894

erstattet vom Direktor

Regierungs- und Schulrat F. Sander.

Wissenschaftliche Beilage:

Über die pythagoreischen Zahlen. Von Prof. **Friedr. Gauss.**

Bunzlau 1894.

C. A. Voigt's Buchdruckerei (G. Wolf).

Progr. No. 181.

Die Königliche Waisen- und Schulanstalt.

Die Königliche Waisen- und Schulanstalt zu Bunzlau umfasst in ihrem jetzigen, durch das Staatshaushaltsgesetz von 1886 festgesetzten Bestande folgende Glieder:

1) **Das Waisenhaus** (Waisen- und Schulanstalt im engeren Sinne), 1754 vom Maurermeister Gottfried Zahn begründet, 1805 vom Staate übernommen, bestehend aus dem Alumnat (Waisen, Fundatisten, Alumnen, Extraalumnen, Pensionäre) und der Mittelschule (4 Klassen) nebst Präparandenanstalt (2 Klassen);

2) **Das Lehrerseminar**, 1816 von Liegnitz hierher verlegt und mit dem Waisenhause verbunden, nebst einer dreiklassigen und einer einklassigen Übungsschule;

3) **Das Gymnasium**, 1858 von der Stadt Bunzlau begründet und mit dem 1. April 1886 an den Staat abgetreten.

Jede der drei Anstalten steht vermögensrechtlich selbständig da und ist für sich unter einem besonderen Leiter verfasst, nämlich dem Prorektor des Gymnasiums, dem Inspektor des Waisenhauses und dem Seminaroberlehrer. Das Band, das sie zu einem Ganzen verknüpft, bildet die gemeinsame Oberleitung, welche in der Hand des Direktors der Waisen- und Schulanstalt liegt. Räumlich vereinigt sind Waisenhaus und Seminar, während das Gymnasium sein eigenes Gebäude besitzt, in das die Gymnasiasten des Waisenhauses zum Unterrichte täglich sich begeben.

Da Waisenhaus und Seminar gemeinsam jährlich eigene sog. Fortgesetzte Nachrichten herausgeben, beschränkt sich der folgende Jahresbericht auf Thätigkeit und Erlebnisse des Gymnasiums.

Schulnachrichten.

I. Allgemeine Lehrverfassung.

I. Übersicht über die einzelnen Lehrgegenstände.

<table>
<tr><th></th><th>VI.</th><th>V.</th><th>IV².</th><th>IV¹.</th><th>IIIb.</th><th>IIIa.</th><th>IIb.</th><th>IIa.</th><th>I.</th><th>Sa.</th></tr>
<tr><td>Christliche Religionslehre</td><td>3</td><td>2</td><td>2</td><td>2</td><td>2</td><td>2</td><td colspan="2">2</td><td>2</td><td>17</td></tr>
<tr><td>Deutsch</td><td>$\left.\begin{smallmatrix}3\\1\end{smallmatrix}\right\}4$</td><td>$\left.\begin{smallmatrix}2\\1\end{smallmatrix}\right\}3$</td><td>3</td><td>3</td><td>2</td><td>2</td><td>3</td><td>3</td><td>3</td><td>26</td></tr>
<tr><td>Lateinisch</td><td>8</td><td>8</td><td>7</td><td>7</td><td>7</td><td>7</td><td>7</td><td>6</td><td>6</td><td>63</td></tr>
<tr><td>Griechisch</td><td>—</td><td>—</td><td>—</td><td>—</td><td>6</td><td>6</td><td>6</td><td>6</td><td>6</td><td>30</td></tr>
<tr><td>Französisch</td><td>—</td><td>—</td><td>4</td><td>4</td><td>3</td><td>3</td><td>3</td><td>2</td><td>2</td><td>21</td></tr>
<tr><td>Englisch (fakultativ)</td><td>—</td><td>—</td><td>—</td><td>—</td><td>—</td><td>—</td><td>—</td><td>(2)</td><td>(2)</td><td>(4)</td></tr>
<tr><td>Hebräisch (fakultativ)</td><td>—</td><td>—</td><td>—</td><td>—</td><td>—</td><td>—</td><td>—</td><td>(2)</td><td>(2)</td><td>(4)</td></tr>
<tr><td>Geschichte und Erdkunde</td><td>2</td><td>2</td><td>$\left.\begin{smallmatrix}2\\2\end{smallmatrix}\right\}4$</td><td>$\left.\begin{smallmatrix}2\\2\end{smallmatrix}\right\}4$</td><td>$\left.\begin{smallmatrix}2\\1\end{smallmatrix}\right\}3$</td><td>$\left.\begin{smallmatrix}2\\1\end{smallmatrix}\right\}3$</td><td>$\left.\begin{smallmatrix}2\\1\end{smallmatrix}\right\}3$</td><td>3</td><td>3</td><td>27</td></tr>
<tr><td>Rechnen und Mathematik</td><td>4</td><td>4</td><td>M. 2</td><td>M. 2</td><td>3</td><td>3</td><td>4</td><td>4</td><td>4</td><td>32</td></tr>
<tr><td>Naturbeschreibung</td><td>2</td><td>2</td><td colspan="2">R. 2</td><td>2</td><td>—</td><td>—</td><td>—</td><td>—</td><td>8</td></tr>
<tr><td></td><td></td><td></td><td colspan="2">2</td><td></td><td></td><td colspan="2">S. 2</td><td>2</td><td></td></tr>
<tr><td>Physik, Chemie und Mineralogie</td><td>—</td><td>—</td><td>—</td><td>—</td><td>—</td><td>2</td><td>W. 2</td><td>2</td><td></td><td>6</td></tr>
<tr><td>Schreiben</td><td>2</td><td>2</td><td>—</td><td>—</td><td>—</td><td>—</td><td>—</td><td>—</td><td>—</td><td>4</td></tr>
<tr><td>Zeichnen (I u. II fakultativ)</td><td>—</td><td>2</td><td colspan="2">2</td><td>2</td><td>2</td><td colspan="3">2</td><td>10</td></tr>
<tr><td>Turnen</td><td colspan="2">3</td><td colspan="2">3</td><td colspan="2">3</td><td colspan="3">3</td><td>12</td></tr>
<tr><td>Singen</td><td>2</td><td>2</td><td colspan="4">2</td><td colspan="3">1</td><td>8</td></tr>
<tr><td></td><td colspan="9">1</td><td></td></tr>
<tr><td></td><td>25+5</td><td>25+5</td><td>28+5</td><td>28+5</td><td>30+5</td><td>30+5</td><td>30+5</td><td>28+5</td><td>28+5</td><td></td></tr>
</table>

Tabellarische Übersicht über die Stundenverteilung
im Schuljahr 1893/94.

S. oder W. bei den damit versehenen Angaben bezeichnen, dass diese sich nur auf den Sommer oder den Winter beziehen.

№	Lehrer.	I.	IIa.	IIb.	IIIa.	IIIb.	IV¹.	IV².	V.	VI.	Stunden-Zahl.
1.	**Sander,** Regierungs-u. Schulrat, Direktor der Kgl. Wais.- u. Schulanstalt.	3 Dtsch. 2 Hom. (Soph.)									5
2.	**Prof. Fährmann,** Prorektor.	2 Frz. S.	2 Frz. S.	3 Frz. S.	7 Lat. S. 3 Frz. S.						17
3.	**Prof. Gauss.**	4 Math. 2 Phys.	4 Math.		3 Math.	3 Math.	2 Math.	2 Math.			20
4.	Oberlehrer **Dr. Tegge,** Ordinarius von I u. IIb.	6 Lat. 4 Grch. 2 Engl. S.	2 Engl.	5 Lat.	5 Lat. W.						S. 19 W. 22
5.	Oberlehrer **Hering,** Ordinarius von IIIb.					2 Rel. 7 Lat. 3 Frz. 3 Gesch.	4 Frz.	4 Frz.			23
6.	Oberlehrer **Comnick,** Ordinarius von IIa.	3 Turnen.	4 Lat. 4 Grch. 2 Frz. W.		3 Turn. 3 Gesch. 2 Dtsch.	3 Turn.					S. 22 W. 24
7.	Oberlehrer **Dr. Haacke.**		2 Physik. S 2 Phs. W.	2 Phs. W. 4 Math.	2 Phys.	2 Ntrk.	2 Rechnen. S. 2 Naturkunde.		4 Rechn.	4 Rechn. 2 Ntrk.	24
8.	Oberlehrer **Umpfenbach,** Ordinarius von IIIa.			2 Verg. 4 Grch.	2 Rel. 6 Grch. 2 Lat. W.	2 Dtsch. 6 Grch.					S. 22 W. 24
9.	Oberlehrer **Dr. Blasius,** Ordinarius von IV¹.	3 Gesch.	3 Dtsch. 3 Gesch.	3 Dtsch. 2 Gesch. 1 Erdk.			7 Lat.				22
10.	**Rothe,** technischer Lehrer.	2 Gesang. 2 Zeichnen.			2 Gesang. 2 Zeichn.	2 Zeichn.	2 Zeichnen.		2 Ntrk. 2 Schrb. 2 Zeich. 2 Gesg. 3 Turnen.	2 Schrb. 2 Gesg.	27
11.	Oberlehrer **Dr. Karbaum,** Waisenhaus-Inspektor.		2 Verg. 2 Hom.	2 Hom.							6
12.	Kreisvikar **König,** kathol. Regilionslehrer.	2 kath. Religion.				2 kath. Religion.				+ 1 Rel.	5
13.	Wissensch. Hilfslehrer **Dr. Sattig,** Ordinarius von IV².	2 Rel. 2 Hebr.	2 Religion. 2 Hebr.				2 Rel. 3 Turnen.	2 Rel. S. 7 Lat.		3 Rel. W.	S. 22 W. 23
14.	Wissensch. Hilfslehrer **Dr. Greilich,** Ordinarius von V.						3 Dtsch. 4 Gesch. u. Erdk. 2 Rechnen. W.	3 Dtsch. 2 Rel. W.	2 Rel. 8 Lat.	3 Rel. S.	S. 23 W. 24
15.	Wissensch. Hilfslehrer **Müller,** Ordinarius von VI.							4 Gesch. u. Erdk.	3 Dtsch. 2 Erdk.	4 Dtsch. 8 Lat. 2 Erdk.	23
16.	Schulamtskandidat **Dr. Mayn.**	2 Frz. W. 2 Egl. W.		3 Frz. W.	3 Frz. W.						W. 10
	Prof. Luchterhand,	während des Sommerhalbjahres beurlaubt; vgl. Verfügungen No. 2.									

II. Übersicht der während des Schuljahres absolvierten Pensen.

Prima.

(Ordinarius: Oberlehrer Dr. Tegge.)

Evangelische Religionslehre, 2 Std. Die Hauptpunkte der evangelischen Glaubens- und Sittenlehre im Anschluss an die Lesung und eingehende Erklärung des Römerbriefes und der confessio Augustana. (Art. 1—16, 18 und 20). Einführung in das Verständnis der 3 alten (ökumenischen) Symbole. Sattig.

Katholische Religionslehre, 2 Std. In Prima befand sich kein Katholik.

Deutsch, 3 Std. Sommer. Herder: Über die Legende; Ossian; Schulreden. — Goethe: Wahrheit und Dichtung (Jugendzeit, meist privatim); Iphigenia auf Tauris; Laokoon; lyrisch-didaktische Gedichte.

Winter. Schiller: Naïve und sentimentalische Poesie; ästhetische Erziehung des menschlichen Geschlechtes (Auswahl); Gedankenlyrik. Shakespeare, Julius Cäsar (deutsch). Einiges über die Litteratur des XIX. Jahrhunderts. Während des ganzen Jahres freie Vorträge der Schüler (je 2), Elemente der Logik. Platonische Mythen (deutsch). Sander.

Themata der deutschen Aufsätze: 1. Schriftsprache und Mundarten. — 2. *Ἡσίοδος ὀρθότατα λέγει, ὡς τὸ ἥμισυ τοῦ παντὸς πολλάκις ἐστὶ πλέον (Πλάτ. Νόμοι).* — 3. a) Jedes Volk muss seine Epopöe besitzen (Goethe); b) Ut pictura poesis (Horat. d. arte poet). — 4. a) Der Aufbau des Dramas; b) *Οὔποτε χρὴ περὶ σμικροῦ ποιεῖσθαι τὸ δοκεῖν ἀγαθοὺς εἶναι τοῖς ἄλλοις ἢ μὴ δοκεῖν (Πλάτ. Νόμοι).* — 5. *Πλεῖν ἀνάγκη, ζῆν οὐκ ἀνάγκη* (Pompeius bei Plutarch). — 6. Naïve und sentimentalische Leser, Hörer, Schauer. — 7. Der Artikel. Eine sprachliche Betrachtung. — 8. *Ἑλλάδος Ἑλλὰς Ἀθῆναι (Θουκυδίδ. εἰς Εὐριπίδην).*

Bei der Reifeprüfung. Herbst 1893: Homers Götter als Mitkämpfer für und wider Ilios. — Frühjahr 1894: Preussens Staatsgebiet unter Friedrich Wilhelm III. nach seinem wechselnden Umfange.

Lateinisch, 6 Std. Lektüre. S. Tacitus, Annalen (Auswahl); Horaz, Carmina, Buch I und II. W. Cicero pro Sestio; Horaz, Satiren (Auswahl). Privatlektüre Livius. Übungen im unvorbereiteten Übersetzen. Auswendiglernen einzelner Gedichte des Horaz. Gelegentlich der Lektüre stilistische Regeln, synonymische Unterscheidungen und Wiederholung der Grammatik. (Zweiwöchentlich eine schriftliche Arbeit). Tegge.

Griechisch, 6 Std. Prosa-Lektüre: S. Plato Protagoras. W. Demosthenes, die drei olynthischen und die erste philippische Rede. Privat-Lektüre: Apollodor, Xenophons Kyrupaidie. Gelegentlich der Lektüre grammatische Wiederholungen. Monatlich eine schriftliche Arbeit. Tegge. — Dichterlektüre: S. Ilias I - VIII. W. Sophokles' Antigone. Ilias IX—XII (einschl.) Sander.

Französisch, 2 Std. Lektüre: L' Avare par Molière. Bonaparte en Egypte et en Syrie par Thiers. Sprechübungen; Synonymisches, Stilistisches, Metrisches nach Bedürfnis; gelegentliche grammatische Wiederholungen. Alle vierzehn Tage eine Übersetzung aus dem Französischen als Klassenarbeit. S.: Fährmann. W.: Mayn.

Englisch, 2 Std. Erweiterung der Formenlehre und Syntax. Lektüre: Fölsing-Koch, Lesebuch. Sprechübungen. S. Tegge; W. Mayn.

Hebräisch, 2 Std. Lektüre: Gen. Kap. 37, 39—50, teils analysierend erklärt, teils kursorisch gelesen. Ps. 1. 8. 14. 15. 23. 46. 90. 103. 114. — Vervollständigung und Befestigung der Formenlehre. Gelegentliche Besprechung wichtiger syntaktischer Regeln. Zehn schriftliche Arbeiten. Sattig.

Geschichte und Erdkunde, 3 Std. Die wichtigsten Begebenheiten der Neuzeit, insbesondere der brandenburgisch-preussischen Geschichte, vom Ende des dreissigjährigen Krieges, bis zur Gegenwart. — Wiederholungen aus der allgemeinen Erdkunde. — Herbst, historisches Hilfsbuch III. Blasius.

Mathematik, 4 Std. Wiederholung des arithmetischen Pensums der früheren Klassen. Lehre von den Gleichungen. § 19—22. Die imaginären Zahlen. § 23. Zins-, Zinseszins- und Rentenrechnung. Anhang III. Der binomische Lehrsatz. § 26 und 27. — Der Koordinatenbegriff und Grundlehre von den Kegelschnitten. Sechswöchentlich ein Exercitium. Gauss.

Mathematische Abiturienten-Aufgaben: Michaelis: 1. Eine Parabel und eine Gerade sind durch die Gleichungen $y^2 = 9x$ und $3x + 4y + 9 = 0$ gegeben. Es sollen die Koordinaten ihrer Schnittpunkte und die Länge der von diesen Punkten begrenzten Sehne berechnet werden. — 2. Den Bruch $\frac{409}{247}$ als Summen zweier Brüche mit den Nennern 13 und 19 darzustellen. — 3. Ein Dreieck aus $\varrho + \varrho_1$, $\varrho_2 + \varrho_3$, $\beta - \gamma$ zu berechnen. $\varrho + \varrho_1 = 2{,}6293$, $\varrho_2 + \varrho_3 = 2{,}8384$, $\beta - \gamma = 77^\circ 40' 40''$ — 4. Aus dem Volumen V eines geraden Cylinders, dessen Radius sich zur Höhe wie m:n verhält, den Mantel zu berechnen. $\overline{V} = 99$ L, m:n $= 6:7$, $\pi = \frac{22}{7}$.

Ostern: 1. Wie heissen die Gleichungen der vom Punkte $(+4, -2)$ an den Kreis $x^2 + y^2 = 10$ gezogenen Tangenten und die Gleichungen der Halbierungslinien der von diesen eingeschlossenen Winkel? und wie gross sind die Längen der Tangenten? — 2. Eine Anleihe wird durch eine am Ende eines jeden Jahres zahlbare konstante Rente verzinst und getilgt. Wie lange muss die Rente voll bezahlt werden, wenn nach 20 Jahren ein Drittel der Anleihe getilgt sein soll und $4^1/_6$ Prozent Zinsen berechnet werden? — 3. Ein Dreieck zu berechnen aus $b + c$, $h - \varrho$, β. $b + c = 0{,}28594$, $h - \varrho = 0{,}0214455$, $\beta = 73^\circ 44' 24''$. — 4. In einem geraden Kegelstumpf lässt sich eine Kugel beschreiben, die die Seite des Kegelstumpfs stetig teilt. Wie gross ist das Volumen des Kegelstumpfs, wenn seine Oberfläche O gegeben ist. $\overline{O} = 72$ qcm.

Physik, 2 Std. Mechanik flüssiger Körper. Akustik. Optik. Gauss.

Obersekunda.

(Ordinarius: Oberlehrer Comnick.)

Evangelische Religionslehre, 2 Std. (vereinigt mit Untersekunda). Überblick über die geschichtliche Entwicklung der Offenbarung Gottes im Alten Testamente unter besonderer Heranziehung der Propheten; die Vollendung der Gottesoffenbarung in Christo, im Anschluss an die Lesung und eingehende Erklärung des Evangeliums St. Matthaei, stellenweise erweitert und ergänzt durch die Berichte der beiden anderen synoptischen Evangelien. Besprechung einiger Abschnitte des Katechismus und Aufweisung seiner inneren Gliederung. — Wiederholung von 12 Kirchenliedern, Sprüchen und einigen Psalmen. Sattig.

Katholische Religionslehre. In dieser Klasse befand sich kein Katholik.

Deutsch, 3 Std. Einführung in das Nibelungenlied. Ausblicke auf nordische Sagen und die grossen germanischen Sagenkreise, auf die höfische Epik und die höfische Lyrik. — Sprachgeschichtliche Belehrungen. — Zusammenfassender Rückblick auf die Arten der Dichtung. — Lektüre von Götz, Egmont, Wallenstein. — Freie Vorträge. — 8 Aufsätze. — Hopf u. Paulsiek, Deutsches Lesebuch, Abteilung für Obersekunda. Blasius.

Themata der deutschen Aufsätze: 1. Weshalb ist das Erhalten oft schwerer als das Erringen? 2. Die Zustände Deutschlands nach Goethes „Götz von Berlichingen". 3. Welche Bedeutung hat die zweite Scene des ersten Aktes in Goethes „Egmont" für das Drama? 4. Warum vermochte Xerxes die Griechen nicht zu unterjochen? (Klassenaufsatz.) 5. Das Verhältnis der Soldaten Wallensteins zu Bauer, Bürger und Klerus. 6. Warum ist Afrika so lange der dunkle Erdteil geblieben? 7. Die Schuld Siegfrieds. (Klassenaufsatz.) 8. Wodurch weiss das Nibelungenlied unser besonderes Mitleid mit Siegfrieds Tod zu erregen?

Lateinisch, 6 Std. Prosa: 4 Std. Lektüre: S.: Sallust bellum Iugurth. W.: Livius I. Cicero pro Milone. Übungen im unvorbereiteten Übersetzen. Ableitung stilistischer Regeln und synonymischer Unterscheidungen. Grammatische Wiederholungen. Zweiwöchentlich eine schriftliche Arbeit, Exercitium oder Extemporale oder Übersetzung ins Deutsche, gelegentlich eine lateinische Inhaltsangabe. — Privat-Lektüre: Cornelius Nepos und Caesar de bell. Gall. Comnick. — S. u. W.: Vergil Buch V—VIII incl. Karbaum.

Griechisch, 6 Std. Prosa: 4 Std. Lektüre: S.: Herodot I—IV. Auswahl. W.: Aus Bruhn Griech. Lesebuch: Lysias contra Eratosth.; ausgewählte Stücke aus Plutarch und Xenophons Memorabilien. — Wiederholung und Erweiterung der Grammatik, insbesondere Infinitiv- und Participialkonstruktionen. Vierwöchentlich eine Übersersetzung aus dem Griechischen ins Deutsche. Comnick. — Homer, Odyssee Buch V—VII, IX, XII—XIV. Karbaum.

Französisch, 2 Std. Lektüre: Montesquieu's Considérations; chap. 1—20; Partie et revanche par Scribe; Béranger (memoriert), Übungen im mündlichen Gebrauch der Sprache. — Grammatik: Plötz Abschnitt VII, VIII, IX. Wiederholung aus Abschnitt III u. IV. — Zweiwöchentlich eine Übersetzung aus dem Französischen ins Deutsche. S.: Fährmann; W.: Comnick.

Englisch, 2 Std. Formenlehre mit Einübung der Aussprache. Die notwendigsten Regeln der Syntax (induktiv). Übungen im mündlichen und schriftlichen Gebrauch der englischen Sprache im Anschluss an die Durcharbeitung des Lehrbuches von Tendering. Tegge.

Hebräisch, 2 Std. Leseübungen. — Analysierende Erklärung von Gen. Kap. 1, 3, 12, 28; Iud. Kap. 13, 14. — Formenlehre des Nomens (mit Suffixen) und des Verbums (bis zu den Gutturalverben einschliesslich). Einprägung der Vokabeln im Anschluss an die Lektüre. 10 schriftliche Arbeiten. Sattig.

Geschichte und Erdkunde, 3 Std. Die Hauptereignisse der griechischen Geschichte bis zum Tode Alexanders des Grossen und der römischen Geschichte bis zum Untergange des weströmischen Kaisertumes. — Wiederholungen aus der allgemeinen Erdkunde. — Herbst, historisches Hilfsbuch I. Blasius.

Mathematik, 4 Std. Arithmetik. Die Lehre von den Potenzen, Wurzeln und Logarithmen. § 11—16. Anhang II. — Gleichungen einschliesslich der quadratischen mit mehreren Unbekannten. — Arithmetische und geometrische Progressionen. § 24 und 25. — Planimetrie. Abschluss der Aehnlichkeitslehre, § 37 und 38, § 39 mit Auswahl, § 45, 10—12. — Sechswöchentlich ein Exercitium. Gauss.

Physik, 2 Std. S.: (comb. mit IIb) Grundlehren der Mechanik flüssiger Körper, der Akustik und der Optik. W.: Wärmelehre. Haacke.

Untersekunda.

(Ordinarius: Oberlehrer Dr. Tegge.)

Evangelische Religionslehre, 2 Std. s. Obersekunda.

Katholische Religionslehre, 2 Std. Die besondere Glaubenslehre. Erklärung der wichtigsten kirchlichen Symbole. König.

Deutsch, 2 Std. Anleitung zur Aufsatzbildung durch Übungen in Invention und Disposition in der Klasse. — Alle vier Wochen ein Aufsatz. — Lektüre: Minna von Barnhelm, Jungfrau von Orleans, Hermann und Dorothea. — Auswendiglernen von Dichterstellen. Blasius.

Themata der deutschen Aufsätze: 1. Warum blieb Cäsar im Jahre 55 v. Chr. nur achtzehn Tage in Germanien? 2. Not entwickelt Kraft. 3. Just und sein Verhältnis zu Tellheim. 4. Tellheims Vorleben (Klassenaufsatz). 5. „Der Graf von Habsburg“ und „Des Sängers Fluch“ — ein Vergleich. 6. Was erfahren wir aus den vier ersten Gesängen von Goethes „Hermann und Dorothea“ über die Eltern Hermanns? 7. Der Rhein Deutschlands Strom, nicht Deutschlands Grenze. 8. Die französische Revolution in Goethes „Hermann und Dorothea“. (Klassenaufsatz). 9. Was hat Dorothea erlebt, bevor sie Hermann kennen lernt? (Abschluss-Examen).

Lateinisch, 7 Std. Lektüre. S.: Cicero pro Roscio Amerino; W.: Livius, Buch XXII. Übungen im unvorbereiteten Übersetzen und Rückübersetzen. Ableitung einfacher stilistischer Regeln und synonymischer Unterscheidungen. Wiederholung und Ergänzung der Grammatik. Wöchentlich eine schriftliche Arbeit. Tegge. — S. u. W.: Vergil mit Auswahl Umpfenbach.

Griechisch, 6 Std. Lektüre: S.: Xen. Anab. III u. IV. W.: Xen. Hell. III u. IV mit Auswahl. — Grammatik: Syntax des Nomens (Artikel, Pronomen, Kasuslehre), sowie die notwendigsten Hauptregeln der Tempus- und Moduslehre. — Wiederholung und Ergänzung der Formenlehre. Umpfenbach. — Homer, Odyssee Buch I—IV. Karbaum.

Französisch, 3 Std. Lektüre: Voltaire, Charles XII, l. 3, 4 und 1; einige Gedichte von Béranger Befestigung der Regeln über Konjunktiv (L. 50—55); Particip (L. 56 u. 57); Artikel (58—65); Adj. Adverb. (66—69); Kasusrektion (76 u. 77); Infinitiv (78); Wiederholung der Präpositionen und des Fürworts. Erweiterung des Wort- und Phrasenschatzes. Sprechübungen, schriftliche und mündliche Übersetzungen ins Französische; Diktate. Zweiwöchentlich abwechselnd Klassen- und häusliche Arbeiten. S.: Fährmann. W.: Mayn.

Geschichte, 2 Std. Deutsche und preussische Geschichte vom Regierungsantritt Friedrichs des Grossen bis zur Gegenwart. — Eckertz, Hilfsbuch. Blasius.

Erdkunde, 1 Std. Wiederholung der Länder Europas. Elementare mathematische Erdkunde. — Daniel, Leitfaden. Blasius.

Mathematik. Proportionen. Gleichungen einschliesslich leichter quadratischer mit einer Unbekannten. Definition der Potenz mit negativen und gebrochenen Exponenten. Der Logarithmus. Übungen im Rechnen mit Logarithmen. Die trigonometrischen Funktionen, trigonometrische Berechnung rechtwinkliger und gleichschenkliger Dreiecke. Die einfachen Körper nebst Berechnung von Kanten, Flächen, Inhalten. — Ausmessung gradliniger Figuren. Proportionalität von Strecken. Aehnlichkeit der Polygone. Berechnung des Inhaltes und Umfanges des Kreises. Haacke.

Physik, Chemie, 2 Std. S. (combin. mit IIa): Grundlehren der Mechanik flüssiger Körper, der Akustik und der Optik. W.: Magnetismus und Elektrizität. Grundbegriff der Chemie. Haacke.

Obertertia.

(Ordinarius: O.-L. Umpfenbach.)

Evangelische Religionslehre, 2 Std. Das Reich Gottes im N. T. Lesung entsprechender biblischer Abschnitte, besonders Bergpredigt und Gleichnisse. Erklärung ausgewählter Psalmen. Reformationsgeschichte im Anschlusse an ein Lebensbild Luthers. Wiederholung von Katechismus, Sprüchen und Liedern. Umpfenbach.

Katholische Religionslehre, 2 Std. (Kombiniert mit Untersekunda.)

Deutsch, 2 Std. Lektüre: Ausgewählte prosaische und poetische Lesestücke, insbesondere Schillers Glocke und Wilhelm Tell. Belehrungen aus der Poetik und Rhetorik. Auswendiglernen und Vortragen von Gedichten. Vierwöchentlich ein häuslicher Aufsatz. Comnick.

Lateinisch, 7 Std. Lektüre: 4 Std. Caes. bell. gall. Buch I. (von Kap. 30 an), V, VI, VII mit Auswahl. Grammatik: 3 Stunden. Wiederholung und Ergänzung der Kasuslehre. Tempus- und Moduslehre. Abschluss der Verbalsyntax in ihren Hauptregeln. Wöchentlich eine schriftliche Arbeit. S Faehrmann. W. Tegge.

W.-S. Ovid Metamorph. mit Auswahl. 2 Std. Umpfenbach.

Griechisch, 6 Std. Die Verba auf $\mu\iota$ und die unregelmässigen Verba des attischen Dialektes. Die Präpositionen (gedächtnismässig eingeprägt.) Wiederholung und Ergänzung des Pensums der IIIb. Ausgewählte Hauptregeln der Syntax im Anschlusse an die Lektüre (induktiv). Mündliche und schriftliche Übersetzungsübungen, letztere alle 14 Tage, teils Exercitien, teils Extemporalien. Lektüre, anfangs nach dem Lesebuch, bald Xenoph. Anab. I und II. Umpfenbach.

Französisch, 3 Std. Lektüre: Rollin, histoire de la seconde guerre punique. Die unregelmässigen Verba in logischer Gruppierung (Plötz, Lektion 7—23); die syntaktischen Hauptgesetze in Bezug auf Gebrauch der Hilfsverba avoir und être, reflexive Verba, unpersönliche Verba (Lektion 24—28); Ergänzung der Formenlehre (Lektion 29—36); Wortstellung, Tempora, Indikativ und Konjunktiv (Lektion 39—50), im Anschluss an Mustersätze. Schriftliche und mündliche Übersetzungen ins Französische, Diktate, Sprechübungen; einige Gedichte. Zweiwöchentlich abwechselnd Klassen- und häusliche Arbeiten. S. Faehrmann. W. Mayn.

Geschichte und Erdkunde, 3 Std. Deutsche Geschichte vom Ausgange des Mittelalters bis zum Regierungsantritte Friedrichs des Grossen, insbesondere brandenburgisch-preussische Geschichte bis ebendahin. 2 Std. — Erdkunde der deutschen Kolonien. Wiederholung der physischen Erdkunde Deutschlands; Kartenskizzen. 1 Std. Comnick.

Mathematik, 3 Std. Arithmetik. § 1—10. Lineare Gleichungen mit einer Unbekannten (zweite Stufe) und mit zwei Unbekannten. Anfangsgründe der Potenz-, Wurzel- und Proportionslehre. — Planimetrie. Kreislehre Teil 2. Flächengleichheit von Figuren. § 27 bis 33. — Berechnung der Flächen gradliniger Figuren. Anfangsgründe der Aehnlichkeitslehre. — Sechswöchentlich ein Exercitium. Gauss.

Physik, Chemie, 2 Std. S. Bau des menschlichen Körpers. W. Mechanische Erscheinungen. Wärmelehre. Haacke.

Untertertia.

(Ordinarius: O.-L. Hering.)

Evangelische Religionslehre, 2 Std. Das Reich Gottes im A. T. Lesung entsprechender biblischer Abschnitte, dazu Psalmen und Abschnitte aus Hiob. Wiederholung des in VI, V und IV gelernten Katechismus nebst dazu gelernten Sprüchen. – Wiederholung früher gelernter Kirchenlieder, dazu 4 neue Kirchenlieder und gelegentlich wertvolle Liederstrophen, Belehrung über das Kirchenjahr und die Bedeutung der gottesdienstlichen Ordnungen. Hering.

Katholische Religionslehre, 2 Std. (Kombiniert mit Untersekunda.)

Deutsch, 2 Std. Lektüre und Behandlung ausgewählter prosaischer und poetischer Lesestücke, insbesondere Schiller'scher Balladen. Belehrung über die vorkommenden poetischen Formen. Übung im Vortragen von Gedichten. Auswendiglernen von Gedichten. — Zusammenfassender Überblick über die wichtigsten grammatischen, der deutschen Sprache eigentümlichen Gesetze. Umpfenbach.

Lateinisch, 7 Std. Grammatik: Wiederholung und Erweiterung der Kasuslehre, Hauptregeln der Tempus- und Moduslehre. 3 Std. — Lektüre: Caesar, bell. gall. I, 1—29, II—IV. Anleitung zur Vorbereitung. Übung im Konstruieren, unvorbereiteten Übersetzen, Rückübersetzen. Auswendiglernen einzelner Kapitel. Wöchentlich ein Extemporale oder ein Exercitium im Anschluss an Caesar. Hering.

Griechisch, 6 Std. Die regelmässige Formenlehre des attischen Dialektes bis zum Verb. liquid. einschliesslich des Wichtigsten aus Laut- und Accentlehre in Verbindung mit der Flexionslehre. Einzelne syntaktische Regeln im Anschlusse an die Lektüre. Zweiwöchentlich eine schriftliche Arbeit. Umpfenbach.

Französisch, 3 Std. Ergänzung des Pensums von Quarta. Unregelmässige Verba nach Plötz, Schulgrammatik der französischen Sprache; benutzt wurden die Lektionen 1—23. Lektüre: Rollin, histoire de la seconde guerre punique. Alle 14 Tage eine schriftliche Arbeit. Hering.

Geschichte und Erdkunde, 3 Std. Kurzer Überblick über die weströmische Kaisergeschichte seit dem Tode des Augustus. Deutsche Geschichte bis zum Ausgange des Mittelalters. 2 Std. — Erdkunde: Physische und politische Erdkunde von Asien. Politische Erdkunde von Deutschland. Entwerfen von Kartenskizzen. 1 Std. Hering.

Mathematik, 3 Std. Arithmetik. Praktische Einübung der vier ersten Rechenoperationen mit allgemeinen Zahlzeichen § 1—10. Lineare Gleichungen mit einer Unbekannten (erste Stufe). — Planimetrie. Anwendung der Kongruenzsätze auf das gleichschenklige Dreieck. Das Viereck. Kreislehre Teil 1. § 14—26. Sechswöchentlich ein Exercitium. Gauss.

Naturbeschreibung, 2 Std. Beschreibung schwierigerer Pflanzenarten. Die wichtigsten ausländischen Kulturpflanzen. Anatomie und Physiologie der Pflanzen, Kryptogamen und Pflanzenkrankheiten. Überblick über das Tierreich. Grundbegriffe der Tiergeographie. Haacke.

Quarta I und II.

(Ordinarius von IV¹: O.-L. Dr. Blasius, von IV²: Dr. Sattig.)

Evangelische Religionslehre, 2 Std. Das Allgemeinste von der Einteilung der Bibel und der Reihenfolge der biblischen Bücher. Übungen im Aufschlagen von Sprüchen. Lesung wichtiger Abschnitte des A. und N. T. behufs Wiederholung der biblischen Geschichten. Aus dem Katechismus: Wiederholung der Aufgaben von VI und V, Erklärung und Einprägung des 3. Hauptstücks mit Luthers Auslegung und Bibelsprüchen. Auswendiglernen des 4. und 5. Hauptstücks. Katechimussprüche, wie in den vorhergehenden Klassen und Wiederholung der dort gelernten. Wiederholung der in VI und V gelernten Kirchenlieder und Einprägung von 4 neuen. IV¹. Sattig; IV² i. W. Greilich.

Katholische Religionslehre, 2 Std. In Quarta befand sich kein Katholik.

Deutsch, 3 Std. Der zusammengesetzte Satz. Das Wichtigste aus der Wortbildungslehre, an typische Beispiele angeschlossen. Abwechselnd Rechtschreibeübungen in der Klasse und schriftliches freieres Nacherzählen des in der Klasse Gehörten (häusliche Arbeit alle 4 Wochen). Lesen von Gedichten und Prosastücken. Nacherzählen. Auswendiglernen und verständnisvolles Vortragen von Gedichten. Greilich.

Lateinisch, 7 Std. Lektüre (im S. 3, im W. 4 Std.) Cornelius Nepos: IV¹ Miltiades, Aristides, Cimon, Alcibiades, Epaminondas, Pelopidas, Hannibal; IV² Miltiades, Themistocles, Aristides, Alcibiades, Epaminondas, Pelopidas, Hannibal. — Grammatik (im S. 4, im W. 3 Std.): Wiederholung der Formenlehre. Das Wesentliche aus der Kasuslehre. Einiges aus der Moduslehre, besonders indirekte Fragen. Mündliche und schriftliche Uebersetzungen in das Lateinische. Wöchentlich eine Übersetzung ins Lateinische im Anschlusse an die Lektüre als Klassenarbeit oder als häusliche Arbeit. — Sechs schriftliche Uebersetzungen ins Deutsche. IV¹ Blasius; IV² Sattig.

Französisch, 4 Std. Lektion 1—54. Das Verbum mit Benutzung der entsprechenden Lektionen aus Plötz, Elementarbuch der französischen Sprache. Alle 14 Tage eine schriftliche Arbeit Hering.

Geschichte und Erdkunde, 4 Std. Das Notwendigste über die wichtigsten orientalischen Kulturvölker. Griechische Geschichte von Solon bis zum Tode Alexanders des Grossen nebst Ausblick auf die Diadochenreiche. Römische Geschichte von Pyrrhus bis zum Tode des Augustus. Einprägung der unentbehrlichen Jahreszahlen und des geschichtlichen Schauplatzes. — Physische und politische Erdkunde von Europa ausser Deutschland, insbesondere der Mittelmeerländer. Kartenskizzen. IV¹ Greilich. IV² Müller.

Mathematik, 2 Std. Planimetrie. Die Lehre von den Graden, Winkeln und Dreiecken bis zu den Kongruenzsätzen einschliesslich. § 1—13. Gauss.

Rechnen, 2 Std. Decimalrechnung. Einfache und zusammengesetzte Regeldetri mit ganzen Zahlen und Brüchen. Aufgaben aus dem bürgerlichen Leben. S. Haacke. W. Greilich.

Naturbeschreibung, 2 Std. Beschreibung verwandter Blütenpflanzen. Uebersicht über das natürliche Pflanzensystem. Lebenserscheinungen der Pflanzen. Niedere Tiere, namentlich Insekten. Haacke.

Quinta.

(Ordinarius: Dr. Greilich.)

Evangelische Religionslehre, 2 Std. Biblische Geschichten des N. T. im Anschlusse an Zahns biblische Historien. Wiederholung des 1., Durchnahme und Erlernung des 2. Hauptstücks mit Luthers Erklärung und Katechismussprüchen. 4 neue Kirchenlieder gelernt, die in VI gelernten wiederholt. Greilich.

Katholische Religionslehre, 2 Std. Ausgewählte biblische Geschichten des N. T. bis zur Auferstehung Jesu. Das erste Hauptstück des Katechismus, die Lehre vom Glauben. Koenig.

Deutsch (bezh. Geschichtserzählungen), 3 Std. Lesen von Gedichten und Prosastücken. Mündliches und schriftliches Nacherzählen. Auswendiglernen von Gedichten. Der einfache und erweiterte Satz. Das Notwendigste vom zusammengesetzten Satze. Erzählungen aus der sagenhaften Vorgeschichte der Griechen und Römer. Müller.

Latein, 8 Std. Wiederholung der regelmässigen Formenlehre, die Deponentia, das Notwendigste aus der unregelmässigen Formenlehre. Aus der Syntax wurden behandelt der Acc. c. Inf., die Partizipial-Konstruktionen in ihren einfachsten Formen, Orts- und Zeitbestimmungen. Erweiterung des Wortschatzes, Übungen im Übersetzen, Konstruieren und Rückübersetzen. Wöchentlich ein halbstündiges Extemporale, Reinschrift desselben als Hausarbeit. Greilich.

Erdkunde, 2 Std. Weitere Einführung in das Verständnis des Globus und der Karten. Physische und politische Erdkunde Deutschlands. Müller.

Rechnen, 4 Std. Teilbarkeit der Zahlen. Gemeine Brüche. Einfache Aufgaben aus der Regeldetri. Kallius § 21—30. Haacke.

Naturbeschreibung, 2 Std. S. Aeussere Organe der Blütenpflanzen. Vergleichung verwandter Arten. W. Knochenbau des Menschen. Beschreibung von Reptilien, Amphibien und Fischen. Rothe.

Sexta.

(Ordinarius: Müller.)

Evangelische Religionslehre, 3 Std. Ausgewählte biblische Geschichten des A. T. im Anschluss an Zahns biblische Historien. Die Bedeutung der drei christlichen Hauptfeste und Besprechung der betreffenden Festgeschichten. – Durchnahme und Erlernung des 1. Hauptstückes mit Luthers Erklärung; Worterklärung des 2. und 3. Hauptstückes (ohne dieselbe); Katechismussprüche; 4 Kirchenlieder im Anschluss an die Festzeiten des Kirchenjahrs. Im S. Greilich, im W. Sattig.

Katholische Religionslehre, 3 Std. In 2 Stunden kombiniert mit Quinta, in der 3. Stunde die Lehre vom katholischen Kirchenjahre. Koenig.

Deutsch (bezh. Geschichtserzählungen), 4 Std. Lesen von Gedichten und Prosastücken aus Hopf und Paulsiek (Fabeln, Märchen, Erzählungen aus der vaterländischen Sage und Geschichte). Mündliches Nacherzählen von Vorerzähltem. Auswendiglernen und verständnisvolles Vortragen von Gedichten. Das Wichtigste aus der Formen- und Satzlehre. Einübung der Rechtschreibung durch wöchentliche Klassendiktate. Müller.

Lateinisch, 8 Std. Formenlehre mit strengster Beschränkung auf das Regelmässige. Die 5 Deklinationen, die 4 Konjugationen, Zahlwörter, Pronomina, Präpositionen, Komparation, Adverbia. Vokabellernen. Uebersetzen. Müller.

Erdkunde, 2 Std. Grundbegriffe der physischen und mathematischen Erdkunde. Anleitung zum Verständnis des Reliefs, des Globus und der Karten. Kreis Bunzlau und Schlesien. Müller.

Rechnen, 4 Std. Die 4 Grundrechnungen mit benannten und unbenannten ganzen Zahlen. Die deutschen Maasse, Gewichte und Münzen. Übungen in der Dezimal-Schreibweise und in den einfachsten Dezimal-Rechnungen. Kallius § 1—20. Haacke.

Naturbeschreibung, 2 Std. Beschreibung grossblumiger Phanerogamen. Beschreibung von Säugetieren und Vögeln. Haacke.

Von der Teilnahme am Religionsunterricht war kein Schüler befreit.

Technischer Unterricht.

a. Turnen.

Sexta und Quinta, 3 Std. S. und W. Frei- und Ordnungsübungen. Übungen im Gehen und Laufen. Stabübungen. Einfache Hang- und Stützübungen an Reck, Leiter und Barren. Frei- und Tiefsprung. Turnspiele. Rothe.

Quarta ¹ u. ², 3 Std. S. und W. Frei-, Ordnungs- und Eisenstabübungen; Übungen im Gehen und Laufen; Hang- und Stützübungen an Reck, Barren und Leiter; Klettern an Stange und Tau; Frei-, Tief- und Bocksprung; Turnspiele. Sattig.

Unter- und Obertertia, 3 Std. S. und W. wie IV. Ausserdem Übungen an den Schaukelringen, am Pferd und Sturmlauf. Hantelübungen. Comnick.

Sekunda und Prima, 3 Std. S. und W. wie III. Ausserdem Kastenspringen und Schaukelreck, im S. Stabspringen und Gerwerfen. Comnick.

b. Gesang.

(Techn. Lehrer Rothe.)

Sexta, 2 Std. Durtonleiter und Akkorde, 10 leichte Choräle, 10 Schullieder, einstimmig. Einübung der Noten. Drath, Choralmelodien und Schullieder, 1. und 2. Heft. Singtafeln von Kothe.

Quinta, 2 Std. Singen nach Noten. Versetzungszeichen, Intervalle. 10 Choräle. 10 Schullieder. Drath, Choralmelodien und Schullieder, 3. Heft. Singtafeln von Kothe. Einführung in den zweistimmigen Gesang.

Quarta [1] **u.** [2] **und Tertia a. u. b.** (kombiniert), 2 Std. Molltonleiter, Treffübungen, 6 schwere Choräle (besonders in Moll) und 6 Schullieder. (Hefte wie bei Quinta.)

Sekunda und Prima (kombiniert), 1 Std. 3- und vierstimmiger Männergesang. Vorübung zum Gesange im gemischten Chore.

Chor (aus allen Klassen kombiniert), 1 Std. Einübung vierstimmiger Choräle, Psalmen, Motetten. Chorwerke zur Aufführung bei Schulfeiern.

c. Zeichnen.

(Technischer Lehrer Rothe.)

Quinta, 2 Std. Die Elemente der Formenlehre: Gerade Linien in verschiedenen Richtungen, Maassen und Verbindungen als Freihandzeichnen. Später gebogene Linien, Kreise, Rosetten, Blätter.

Quarta [1] **u.** [2], 2 Std. Freihandzeichnen: Kreise, Ellipsen, Fünfeck, Rosetten, Ornamente u. s. w. nach Vorzeichnung an der Wandtafel oder nach Wandvorlagen und nach Besprechung.

Untertertia, 2 Std. Ornamente nach Vorzeichnung und Vorlagen (Hand- und Wandvorlagen). Unterweisung im Gebrauch von Reissschiene, Winkeldreieck und Zirkel.

Obertertia, 2 Std. Freihandzeichnen: Zeichnen und Schattieren nach Holzkörpern und Gipsmodellen; ferner Zeichnen nach Vorlagen (antike Ornamente).

Fakultatives Zeichnen (Sekunda und Prima). S. Zeichnen nach Gipsmodellen auf Tonpapier.

d. Schreiben.

(Technischer Lehrer Rothe.)

Sexta, 2 Std. S.: Die deutschen und lateinischen Kleinbuchstaben in genetischer Reihenfolge. Taktschreiben. — W.: Die deutschen und lateinischen Grossbuchstaben. Anwendung derselben in Wörtern und Sätzen.

Quinta, 2 Std. Das deutsche und lateinische Alphabet in Wörtern und Sätzen; Schreiben auf einfache Linien und ohne Linien. Geschäftsaufsätze. Im letzten Quartal: Einübung der griechischen Buchstaben.

III. Verfügungen der vorgesetzten Behörde.

1. K. P. S. C. Breslau, den 21. März 1893. Mitteilung des Ministerialerlasses, wonach den Oberlehrern Prorektor Faehrmann und Luchterhand das Prädikat Professor verliehen ist.

2. K. P. S. C. Breslau, den 14. April 1893. Genehmigung des beantragten Urlaubes für Professor Luchterhand während des Sommerhalbjahres 1893 und dessen weiterer Vertretung durch den wissenschaftlichen Hilfslehrer Müller.

3. K. P. S. C. Breslau, den 12. Mai 1893. Mitteilung der vom Finanzminister unter dem 28. März 1893 erlassenen neuen Bestimmungen über die Annahme, Ausbildung und Anstellung der Supernumerare bei der Verwaltung der indirekten Steuern.

Junge Leute, welche beabsichtigen, im Wege des Supernumerariats die Berechtigung zur Anstellung bei der Preussischen Verwaltung der indirekten Steuern zu erwerben, haben bei Einreichung des Gesuches (bis zum 10. April oder 10. Oktober) ausser einem vom Bewerber selbst verfassten und selbst geschriebenen Lebenslaufe nachzuweisen, dass sie 1. die erforderliche wissenschaftliche Vorbildung besitzen, d. h. das Schulzeugnis darüber, dass der Bewerber die erste Klasse eines Gymnasiums mindestens ein Jahr lang mit gutem Erfolg besucht hat; 2. den Dienst im stehenden Heere oder in der Flotte befriedigend abgeleistet haben; 3. einen gesunden, für den Grenz- und Steueraufsichtsdienst geeigneten Körper besitzen; 4. in der Lage sind, während der Ausbildungszeit ohne Beihülfe aus der Staatskasse ihrem Stande gemäss zu leben; 5. das 23. Lebensjahr noch nicht überschritten haben.

4. K. P. S. C. Breslau, den 16. Mai 1893. Se. Majestät der Kaiser und König hat geruht, den Prof. Prorektor Faehrmann, Gauss und Luchterhand den Rang der Räte vierter Klasse zu verleihen.

5. K. P. S. C. Breslau, den 18. September 1893. In die durch die Pensionierung des Prof. Luchterhand freiwerdende Stelle ist vom 1. April 1894 ab der Gymnasial-Oberlehrer Dr. Kühn zu Oels versetzt.

6. K. P. S. C. Breslau, den 25. September 1893. Der Herr Minister hat die Beurlaubung des Prorektors Prof. Faehrmann für Winter 1893/94 genehmigt.

7. K. P. S. C. Breslau, den 28. September 1893. Se. Majestät der Kaiser und König hat geruht, dem Prof. Luchterhand aus Anlass seines Übertrittes in den Ruhestand den Roten Adlerorden vierter Klasse zu verleihen.

8. K. P. S. C. Breslau, den 23. Oktober 1893. Mit der Verwaltung der Gymnasial-Bibliotheken wird der Oberlehrer Hering betraut.

9. K. P. S. C. Breslau, den 21. Oktober 1893. Der Herr Minister hat unterm 7. Oktober gestattet, die öffentlichen Prüfungen beim Schlusse des Schuljahres in Wegfall zu bringen.

10. K. P. S. C. Breslau, den 1. November 1893. Ferien für das Jahr 1894: Ostern: Schulschluss: Dienstag, den 20. März; Schulanfang: Mittwoch, den 4. April. Pfingsten: Schulschluss: Freitag, den 11. Mai; Schulanfang: Donnerstag, den 17. Mai. Sommerferien: Schulschluss: Freitag, den 13. Juli; Schulanfang: Mittwoch, den 15. August. Michaelis: Schulschluss: Freitag, den 28. September; Schulanfang: Mittwoch, den 10. Oktober. Weihnachten: Schulschluss: Donnerstag, den 20. Dezember; Schulanfang, Freitag, den 4. Januar 1895.

11. K. P. S. C. Breslau, den 7. November. Der Ministerialerlass vom 24. Oktober 1893 erläutert die Ordnung der Abschluss- und der Reife-Prüfung vom 6. Januar 1892.

§ 5. 1: Alle Schüler der Untersekunda sind zur Abschlussprüfung durch den Direktor zuzulassen. Die Zulassung zu der Abschlussprüfung am Ende des Schuljahres ist auch solchen Untersekundanern nicht zu versagen, welche dieser Klasse nicht ein volles Jahr angehört haben. Durch das Bestehen der Prüfung in diesem Fall erhält der Prüfling aber nicht das Zeugnis über die wissenschaftliche Befähigung für den einjährig-freiwilligen Dienst.

Ausnahmsweise wird gestattet, dass Untersekundaner, welche am Ende des Schuljahres aus einem triftigen Grunde in die Abschlussprüfung nicht eingetreten sind, oder diese nicht bestanden haben oder zurückgetreten sind, falls sie auf derselben Schule verbleiben, schon zu Ende des darauf folgenden Schulhalbjahres zur Wiederholung der Prüfung zugelassen werden. Die Aufnahme in die Obersekunda ist dann aber nur bei Anstalten mit Wechselabteilungen möglich.

§ 10. Absatz 4 (auch für die Reifeprüfung geltend): Die Bedingung tadelloses Betragens wird auch auf die Teilbefreiungen von der mündlichen Prüfung ausgedehnt.

15. K. P. S. C. Breslau, den 23. November 1893. Zur Regelung des Verfahrens bei der Prüfung solcher jungen Leute, die ohne Schüler eines Gymnasiums zu sein, ein Zeugnis der Reife für die Prima dieser Anstalten erwerben wollen, wird bestimmt:

Die betr. Prüflinge haben sich an dasjenige Königliche Provinzial-Schulkollegium zu wenden, dessen Amtsbereich sie durch den Wohnort ihrer Eltern oder durch den Ort ihrer letzten Schulbildung angehören. Der Meldung um Zulassung zur Prüfung sind beizufügen ein Nachweis über den bisherigen Bildungsgang und die bisherige Führung, sowie die letzten Schul- und Privatzeugnisse.

Es wird eine schriftliche und eine mündliche Prüfung abgehalten. Zu der ersteren gehören an Gymnasien: ein deutscher Aufsatz, eine Uebersetzung aus dem Deutschen in das Lateinische, je eine Uebersetzung aus dem Griechischen und Französischen ins Deutsche und 3 aus dem Lehrgebiete der Obersekunda entnommene mathematische Aufgaben. — Die mündliche Prüfung erstreckt sich an Gymnasien auf die lateinische und griechische Sprache, die Geschichte und Erdkunde, die Mathematik und Physik.

Befreiungen von der mündlichen Prüfung finden nicht statt. Bezüglich etwaiger Kompensationen gelten im allgemeinen die Vorschriften des § 12 der Ordnung der Reifeprüfung. Die Prüfung darf nur einmal wiederholt werden.

17. K. P. S. C. Breslau, den 8. Januar 1894. Die Einführung des Provinzial-Gesangbuches, des lateinischen Uebungsbuches von Ostermann-Müller (zunächst in Sexta), des griechischen Uebungsbuches von Wesener für Tertia zu Ostern 1894 wird genehmigt.

IV. Chronik der Anstalt.

Das neue Schuljahr wurde am 12. April von dem Prorektor Faehrmann durch eine Andacht im Anschlusse an den 103. Psalm eröffnet. Nachdem derselbe den dem Gymnasium vom Königlichen Provinzial-Schulkollegium (Verfügung vom 13 März) zur Vertretung einer Oberlehrerstelle der Anstalt zugewiesenen Kandidaten des höheren Schulamts Dr. Greilch*) willkommen geheissen und in die ihm übertragene Arbeit eingewiesen, wobei er dem vom hiesigen Gymnasium abberufenen Dr. Büchting freundliche Abschiedsworte widmete, wurden die neu eintretenden Schüler aufgenommen und auf die ihnen eingehändigten Schulgesetze verpflichtet.

Am 17. Juni fanden Klassenspaziergänge der Schüler des Gymnasiums statt; gleichzeitig unternahm das Waisenhaus (und mit ihm auch die Schüler der unteren und mittleren Gymnasialklassen, welche dem Verbande des Waisenhauses angehören) den üblichen Ausflug nach dem Gröditzberge.

Die Stipendien aus der Dr. Schmidt-Dr. Rhode-Stiftung von je 30 Mark erhielten auf Beschluss des Lehrerkollegiums der Untersekundaner K. Rochner und der Untertertianer E. Aeuer.

Bei der Donnerstag, den 14. September, unter dem Vorsitze des Berichterstatters abgehaltenen 56. Reifeprüfung erhielt der Abiturient Fritz Hering das Zeugnis der Reife.

Beim Schulschlusse zu Michaelis teilte der Berichterstatter den versammelten Schülern mit, dass Se. Majestät der Kaiser und König geruht habe, dem Oberlehrer Prof. Luchterhand aus Anlass seines Übertritts in den Ruhestand den Roten Adlerorden vierter Klasse zu verleihen und benutzte diesen Anlass, um mit dankbarem Rückblicke der langjährigen treuen Wirksamkeit des nunmehr scheidenden Kollegen für das Gymnasium und zur Förderung der unter seiner Verwaltung stattlich herangewachsenen Anstaltsbibliothek zu gedenken, sowie dem Emeritus die besten Wünsche für sein ferneres Wohlergehen nachzurufen.

Bei der Wiedereröffnung des Unterrichtes zu Anfang des Winterhalbjahres gedachte nach der Andacht der Berichterstatter ebenfalls mit teilnehmenden Wünschen des für den Winter mit Rücksicht auf seine erschütterte Gesundheit beurlaubten Prorektors Professors Faehrmann und machte bekannt, dass die Mitleitung des Gymnasiums dem Oberlehrer Dr. Tegge vertretungsweise übertragen worden ist. Zugleich wurde der zur Vertretung des beurlaubten Prorektors in dessen Unterricht, sowie zur Vollendung seines Probejahres der Anstalt vom Königlichen Provinzialschulkollegium überwiesene Kandidat des höheren Schulamtes Dr. Mayn**) begrüsst und vorgestellt.

Freitag, den 20. Oktober, fand die herbstliche Abendmahlsfeier der gesamten Waisen- und Schulanstalt statt.

Die Schillerprämie erhielten am 11. November die Oberprimaner P. Deckart und R. Wiedemann

Am 18. Januar 1894 erhielten Prämien aus der Kaiser-Wilhelm-Stiftung von je 30 Mark der Untersekundaner K. Rochner, der Untertertianer E. Aeuer und der Quartaner A. Seibt.

---

*) August Greilich, geb. den 3. August 1860 zu Leobschütz, evang., Michaelis 1879 mit dem Zeugnis der Reife vom Gymnasium zu Leobschütz entlassen, studierte von da ab klassische und germanische Philologie zu Breslau, bestand am 6. Dezember 1885 das Examen pro facultate docendi. Am 10. Oktober 1886 wurde er auf Grund seiner Inaugural-Dissertation: „Dionysius Halicarnasensis quibus potissimum vocabulis et artibus ductis metaphorice usus sit“ zum Doctor philos. promoviert. Ostern 1886 wurde er dem Gymnasium zu Schweidnitz zur Ableistung des Probejahres überwiesen und unterrichtete seit Ostern 1887 an den Gymnasien zu Breslau (St. Maria Magdalena) und Lauban und an den Real-Gymnasien zu Breslau (Heil. Geist), Reichenbach und Landeshut.

**) Georg Mayn. geboren am 5. Januar 1862 zu Sprottau, evangelisch, erhielt seine Vorbildung auf dem Realgymnasium zu Sprottau, studierte auf den Universitäten Berlin und Breslau romanische und englische Philologie, wurde von der philosophischen Fakultät der letzteren Universität am 27. Mai 1887 auf Grund seiner Dissertation über „Byrons Heaven and Earth“ zum Doktor promoviert, bestand die Prüfung für das höhere Lehramt am 12. Februar 1892, legte das Seminarjahr am pädagogischen Seminare zu Breslau und dem dortigen Gymnasium zu St. Elisabeth ab (Ostern 1892—1893) und wurde zur Ableistung seines Probejahres Ostern 1893 dem evangelischen Gymnasium zu Glogau, Michaelis dem hiesigen überwiesen.

Die Feier des Sedantages, sowie die des Geburtstages Sr. Majestät des Kaisers und Königs wurde von der gesamten Waisen- und Schulanstalt in der Aula des Gymnasiums begangen. Die Festrede hielt am 2. September der Waisenhausinspektor Oberlehrer Dr. Karbaum („Der Sedantag ein Gedächtnistag göttlicher Gnade.“), am 27. Januar der Leiter des Seminars Oberlehrer Heuer („Was ist Vaterlandsliebe, und wie erzieht die Schule zu ihr?“). Von den Gedächtnistagen wurde die Feier am 15. Juni in den einzelnen Klassen begangen; am 18. Oktober hielt die Gedächtnisrede Dr. Greilich („Kaiser Friedrich ein zweiter Siegfried an Charakter und Lebensschicksal“), am 9. März der wissenschaftliche Hilfslehrer Müller („Kaiser Wilhelm I. ein Vorbild treuester Pflichterfüllung“).

Bei der 57. Reifeprüfung, Donnerstag, 6. März, erhielten sämtliche 10 Abiturienten das Zeugnis der Reife, 7 ohne jede mündliche Prüfung. (Vgl. Statistische Mitteilungen 3.)

Am 7. März entriss uns zu Breslau im Hause der Mutter der Tod den Primaner Erich Pusch. In ihm starb ein in jeder Hinsicht vorbildlicher Schüler, der zu den besten Hoffnungen berechtigte. Wir gedenken des Frühvollendeten in treuer Liebe.

Die mündliche Abschlussprüfung fand am 14. März statt.

Der Unterricht wird am Montage, dem 19. März, geschlossen. Die Konfirmation der einzusegnenden Schüler wird am folgenden Tage unter gemeinsamer Abendmahlsfeier stattfinden.

V. Statistische Mitteilungen.

1. Frequenztabelle für das Schuljahr 1893/94.

	I.	II a.	II b.	III a.	III b.	IV¹.	IV².	V.	VI.	Sa.
1. Bestand am 1. Februar 1893	19	10	28	32	49	26	24	42	33	263
2. Abgang b. z. Schluss des Schuljahres 1892/93	8	9	22	26	35	19	18	35	28	200
3a. Zugang durch Versetzung zu Ostern . .	9	17	20	27	35	17	17	24	—	167
3b. Aufnahme zu Ostern	1	—	—	5	1	2	3	3	18	33
4. **Frequenz am Anfang des Schuljahres 1893/94**	21	18	26	38	50	26	26	34	23	262
5. Zugang im Sommer-Semester	—	—	—	—	—	—	1	—	2	3
6. Abgang im Sommer-Semester	2	—	1	3	—	2	—	1	3	12
7a. Zugang durch Versetzung zu Michaelis .	—	—	—	—	—	—	—	—	—	—
7b. Zugang durch Aufnahme zu Michaelis .	—	—	—	—	—	1	1	1	—	3
8. **Frequenz am Anfang des Winter-Semesters**	19	18	25	35	50	25	28	34	22	256
9. Zugang im Winter-Semester	—	—	—	—	—	—	—	—	1	1
10. Abgang im Winter-Semester	—	—	—	—	1	—	—	—	—	1
11. Frequenz am 1. Februar 1894	19	18	25	35	49	25	28	34	23	256
12. Durchschnittsalter im Februar 1894 (Jahre und Monate)	18,9	17	16.11	15.9	14.9	13.5	13.5	12.2	11.4	

2. Religions- und Heimats-Verhältnisse der Schüler.

	Evgl.	Kath.	Diss.	Juden.	Einh.	Ausw.	Ausl.
1. Am Anfang des Sommer-Semesters .	246	8	—	8	86	174	2
2. Am Anfang des Winter-Semesters .	240	8	—	8	86	168	2
3. Am 1. Februar 1894	240	8	—	8	85	169	2

Das Zeugnis über die wissenschaftliche Befähigung für den einjährig-freiwilligen Dienst erhielten Ostern 1893: 20 Schüler.

3. Übersicht der Abiturienten.

Herbst 1893 (56. Prüfung).

No.	Vor- und Zuname.	Geburtstag u. Jahr.	Geburtsort.	Konfession.	Stand und Wohnort des Vaters.	Auf dem Gymn. seit	In Prima seit	Studium oder Beruf.
221	Fritz Hering	26. März 1873	Bunzlau	evgl.	Kgl. Gymnasial-Oberlehrer, Bunzlau.	Ostern 1882	Ostern 1891	Medizin.

Ostern 1894 (57. Prüfung).

No.	Vor- und Zuname.	Geburtstag u. Jahr.	Geburtsort.	Konfession.	Stand und Wohnort des Vaters.	Auf dem Gymn. seit	In Prima seit	Studium oder Beruf.
222	Paul Deckart	8. Nov. 1875	Breslau	evgl.	Kgl. Waisenhaus-Rendant, Bunzlau.	Ostern 1886	Ostern 1892	Medizin.
223	Rich. Wiedemann	19. Sept. 1874	Thomaswaldau, Kreis Bunzlau	evgl.	Kantor, Thomaswaldau.	Ostern 1886	Ostern 1892	Postfach.
224	Ferd. Neithart	5. Juni 1873	Dumerfitz, Kr. Neustettin	evgl.	Rittergutsbesitzer, Dumerfitz.	Ostern 1888	Ostern 1892	Jura.
225	Georg Schwedler, Waisenhauszögling	29. Nov. 1875	Wüstegiersdorf, Kr. Waldenburg	evgl.	† Buchhalter, Wüstegiersdorf.	Ostern 1886	Ostern 1892	Jura.
226	Georg Simon, Waisenhauszögling	28. März 1873	Kreisau, Kr. Schweidnitz	evgl.	† Inspektor, Jauer.	Ostern 1886	Ostern 1892	Theologie.
227	Ernst Wentzel	5 Januar 1875	Guhrau, Kr. Guhrau	evgl.	Amtsgerichtsrat, Bunzlau.	Ostern 1883	Ostern 1892	Jura.
228	P. Kupfernagel, Waisenhauszögling	8. Okt. 1874	Berlin	evgl.	† Missionskolonist, Berlin.	Ostern 1886	Ostern 1892	Medizin.
229	Arthur Gutsche, Waisenhauszögling	6. Nov. 1873	Buschvorwerk, Kr. Hirschberg	evgl.	Lehrer, Borgsdorf, Kr. Bunzlau.	Ostern 1885	Ostern 1892	Postfach.
230	Eugen Friedrichs	13. April 1874	Soldin, Kr. Soldin	evgl.	† Landgerichtsrat, Oppeln.	Joh. 1883	Ostern 1892	Jura.
231	Gerhard Conrad	2. März 1873	Strehlitz, Kr. Oels	evgl.	Pastor, Strehlitz.	Ostern 1891	Ostern 1892	Theologie.

VI. Sammlungen von Lehrmitteln.

I. Bibliothek.

A. Für die Bibliothek wurden geschenkt:

Publikationen aus den K. Preussischen Staatsarchiven, Band 52—55. Vom Kultusministerium. — Zweck und Barnecker, Hilfsbuch für den Unterricht in der Geographie, 1. und 2. Teil. Von der Hahn'schen Buchhandlung in Hannover. Partsch, Die Schutzgebiete des deutschen Reiches. Von der Freitag'schen Verlagsbuchhandlung. — Ohlert, Deutsch-französisches Übungsbuch. Von Meyer in Hannover. — Schneider, Das sechste Gebot in der Schule. — Pfeil, Ist die Kant-Laplace'sche Weltbildungs-Hypothese mit der heutigen Wissenschaft vereinbar? — Harder, Thucydides. Ausgewählte Abschnitte. Text und Schülercommentar. Von Freytag in Leipzig. — Die Anstalt sagt den Gebern ihren besten Dank.

B. Anschaffungen für die Lehrerbibliothek.

Der letzte Jahrgang von: Neue Jahrbücher für Philol. und Pädagog. — Gymnasialwesen. — Centralblatt. — Jahresbericht über die Fortschritte der klassischen Altertumswissenschaft. — Archiv für das Studium der neueren Sprachen und Litteratur. — v. Sybel, Historische Zeitschrift. — Archiv für Geschichte der Philosophie. — Zeitschrift für mathem. und naturw. Unterricht. — Zeitschrift für physik. und chem. Unterricht. — Kehrbach, Mitteilungen der Gesellschaft für deutsche Erziehungs- und Schulgeschichte — Generalregister zum I.—XXXX. Jahrgange des Gymnasialwesens. – Ergänzungsheft zum Centralblatt. – Frick, Lehrproben und Lehrgänge, 33—37. — Verhandlungen der Direktoren-Versammlungen, Band 42. — Kolde, Martin Luther, 2 Bände. — Aristophanes Vespae von Blaydes. — Forcellini, Lexicon totius latinitatis, tom. IV. fasc. V und VI. — Roscher, Lexicon der griechischen und römischen Mythologie, Heft 24—27. — Grimm, Deutsches Wörterbuch, 6 Lief. — Goedeke, Grundriss zur Geschichte der deutschen Dichtung, 12. und 13. Heft. — Leimbach, Ausgewählte deutsche Dichtungen, 9. Band. — Allgemeine deutsche Biographie, Band 35 und 36. — Lehmann, deutscher Unterricht – Paul, Grundriss der germanischen Philologie, 3 Bände. — Wauer, Hohenzollern und die Bonapartes. — Lindner, deutsche Geschichte, 2. Teil. — Janssen, Geschichte des deutschen Volkes, 7. Band. — Wagner, Geographisches Jahrbuch, Band 16.

C. Anschaffungen für die Schülerbibliothek.

Ebers, Uarda, 3 Bände. — Ebers, Eine ägyptische Königstochter, 3 Bände. — Scott, Ivanhoe. — Scott, Quentin Durward. — Scott, Der Talismann. — Evers, Brandenb.-preuss. Gesch. — Heims, Seespuk. — 20 Erzählungen von Nieritz. — Zwei Erzählungen von Kühn und drei von Pflug. — Würdig, Reichsfreiherr von und zu Stein. — Diethe, Prinz Eugen. — Schmidt, Seeschlachten und Abenteuer. — Stein, Abenteuer in den deutschen Kolonien. — Kern, Unter schwarz-weiss-roter Flagge.

2. Lehrmittel für den erdkundlichen Unterricht.

Bamberg, (politische) Wandkarte von Deutschland für Mittel- und Oberklassen. 20. A. Weimar.

3. Naturalienkabinet.

Trockenpräparate von dem Pappelbockkäfer, der Schlupfwespe, der Hornisse, der Nonne, der Libelle, der Maulwurfsgrille. Spirituspräparate vom Wasserfrosch und Lachs, Igel, Wanderratte, Kuckuk, Star (ausgestopft).

4. Physikalisches Kabinet.

Apparat zum Nachweis des Kräfteparallelogrammes, 1 Akkumulator, 1 Apparat für den elektrischen Grundversuch, 1 Psychrometer, 1 Maximalthermometer, 1 Minimalthermometer, 1 Meterstab.

VII. Stiftungen.

Die am Gymnasium bestehenden Stiftungen wiesen am Schlusse des Schuljahres 1893/94 folgenden Kapitalbestand auf:

1. Stipendienfonds	1026,42 ℳ
2. Dr. Schmidt-Dr. Rhode-Stiftung . . .	2545,32 „
3. Beisert-Stiftung	2018,93 „
4. Schiller-Legat	855,36 „
5. Kaiser-Wilhelm-Stiftung	3367,14 „
Summa	9813,17 ℳ

VIII. Mitteilungen an die Schüler und an deren Eltern.

Die Osterferien, welche am 20. März beginnen, schliessen mit dem 3. April. Das neue Schuljahr wird am 4. April eröffnet.

Die Anmeldungen neu eintretender Schüler werden Mittwoch, den 4. April, von 9 Uhr vormittags ab, im Konferenzzimmer entgegengenommen. Zur Aufnahme ist Abgangszeugnis der bisherigen Anstalt und Impfschein erforderlich.

Die Wahl der Wohnung und der Pfleger für auswärtige Schüler bedarf der vorher einzuholenden Genehmigung des Direktors, wegen deren wie wegen etwa sonst erforderlicher besonderer Auskunft man sich an den Oberlehrer Dr. Tegge hierselbst (Löwenberger Strasse 32) wenden wolle.

Die am Gymnasi … m Schlusse des Schuljahres 1893/94 folgenden Kapital …

1. Stip … 26,42 ℳ
2. Dr. … 45,32 „
3. Beis … 18,93 „
4. Schil … 55,36 „
5. Kais … 67,14 „
… 13,17 ℳ

VIII. Mitt … deren Eltern.

Die Osterferien … essen mit dem 3. April. Das neue Schuljahr wird am 4 …

Die Anmeldung … Mittwoch, den 4. April, von 9 Uhr vormittags ab, im … Zur Aufnahme ist Abgangszeugnis der bisherigen …

Die Wahl der Wo … swärtige Schüler bedarf der vorher einzuholenden … deren wie wegen etwa sonst erforderlicher besonderer A … r. Tegge hierselbst (Löwenberger Strasse 32) wenden …

Königliche Waisen- und Schulanstalt zu Bunzlau.

Gymnasium.

Über die
pythagoreischen Zahlen.

Von

Professor **Friedr. Gauss.**

Beilage zum Jahresberichte des Gymnasiums der Königlichen Waisen- und Schulanstalt zu Bunzlau über das Schuljahr 1893/94.

Bunzlau 1894.

C. A. Voigt's Buchdruckerei (G. Wolf).

Progr. No. 181.

Über die pythagoreischen Zahlen.

Die Buchstaben bedeuten ganze Zahlen, m und n (m_1 und n_1, m_2 und n_2, m' und n', . . .) zwei relative Primzahlen, von denen n gerade ist, und a (a_1, a_2, a', . . .) und k positive Zahlen.

Eine Zahl heißt eine **Primzahl**, wenn sie nicht das Produkt zweier die Einheit übersteigenden Zahlen ist. Zwei Zahlen heißen **relative Primzahlen**, wenn sie keinen die Einheit übersteigenden Faktor gemein haben. Hiernach sind 1 und jede beliebige Zahl, auch 1 und 1, relative Primzahlen.

Zur Vermeidung von Wiederholungen seien folgende Sätze vorausgeschickt:

I. **Die Summe und die Differenz zweier relativen Primzahlen, von denen die eine gerade ist, sind ungerade relative Primzahlen.**

Denn hätten, wenn x und y relative Primzahlen sind, von denen die eine gerade ist, die **ungeraden** Zahlen $x + y$ und $x - y$ einen gemeinschaftlichen Faktor, der also ungerade sein müßte, so hätten auch ihre Summe und ihre Differenz, nämlich $2x$ und $2y$, folglich die Zahlen x und y diesen ungeraden Faktor gemein, was gegen die Voraussetzung verstößt.

II. **Wenn sowohl die Zahlen x_1 und y_1 als auch die Zahlen x_2 und y_2 relative Primzahlen sind, so giebt es keine von 1 verschiedene Zahl, die zugleich in den Produkten x_1x_2, y_1y_2, x_1y_2, x_2y_1 enthalten ist.**

Denn wäre die von 1 verschiedene Zahl γ, also auch irgend ein Grundfaktor δ von γ in jedem der vier Produkte als Faktor enthalten, so müßte der Grundfaktor δ, da er in x_1x_2 enthalten wäre, entweder in x_1 oder in x_2, etwa in x_1, enthalten sein. Alsdann müßte, da x_1 und y_1 relative Primzahlen sind, also δ kein Faktor von y_1 ist, wohl aber ein Faktor von y_1y_2 und x_2y_1 wäre, δ auch ein Grundfaktor von x_2 und y_2 sein, was gegen die Voraussetzung ist.

---

§ 1. **Die Zahlen a, b, c heißen pythagoreische Zahlen, wenn sie keinen gemeinschaftlichen Faktor haben und**

$$a^2 = b^2 + c^2$$

ist. a heißt die Hypotenuse, b und c heißen die Katheten.

§ 2. Aus der Definition geht hervor, daß je zwei von drei pythagoreischen Zahlen relative Primzahlen sind. Deshalb können nicht zwei gerade sein, also den gemeinschaftlichen Faktor 2 haben. Es können aber auch nicht alle drei Zahlen ungerade sein, weil dann auch ihre Quadrate ungerade wären, die Summe zweier ungeraden Zahlen aber gerade ist. Es müssen daher zwei Zahlen ungerade, die dritte gerade sein. Da sich jede ungerade Zahl unter der Form $2p - 1$, also ihr Quadrat unter der Form $4p^2 - 4p + 1$ darstellen läßt, so enthält der Summe der Quadrate zweier ungeraden Zahlen niemals den Faktor 4, woraus hervorgeht, daß die Hypotenuse niemals gerade ist.

Jede Hypotenuse ist ungerade; die Katheten sind relative Primzahlen, von denen die eine gerade ist.

§ 3. Nach der allgemeinen Voraussetzung sind m und n relative Primzahlen, von denen n gerade ist, also nach I. $m^2 + n^2$ und $m^2 - n^2$ ungerade relative Primzahlen. Folglich hat man wegen der Gleichung

$$(m^2 + n^2)^2 = (m^2 - n^2)^2 + (2mn)^2$$

den Satz:

Die Summe der Quadrate zweier relativen Primzahlen, von denen die eine gerade ist, ist eine Hypotenuse.

§ 4. Wenn b die ungerade Kathete ist, so kann man, da sowohl die Summe als auch die Differenz zweier ungeraden Zahlen gerade ist,

$$a + b = 2x, \quad a - b = 2y$$

setzen. Alsdann ist

$$a = x + y, \quad b = x - y.$$

Da hiernach jeder gemeinschaftliche Faktor von x und y auch ein Faktor von a und b ist, a und b aber nach der Voraussetzung relative Primzahlen sind, so sind auch x und y relative Primzahlen. Ferner ist

$$a^2 - b^2 = (x + y)^2 - (x - y)^2 = 4xy = c^2,$$

also

$$c = 2\sqrt{xy}.$$

Folglich ist xy ein Quadrat, was, weil x und y keinen gemeinschaftlichen Faktor haben, nur möglich ist, wenn sowohl x als auch y ein Quadrat ist. Setzt man

$$x = m^2, \quad y = n^2,$$

so ist

$$a = m^2 + n^2.$$

Da a ungerade ist, so ist eine der beiden relativen Primzahlen m^2 und n^2 gerade. Hieraus ergiebt sich der Satz:

Jede Hypotenuse ist die Summe der Quadrate zweier relativen Primzahlen, von denen die eine gerade ist.

§ 5. Aus der Gleichung

$$a = m^2 + n^2 = \tfrac{1}{2}[(m + n)^2 + (m - n)^2]$$

folgt nach I.:

Jede Hypotenuse ist gleich der halben Summe der Quadrate zweier ungeraden relativen Primzahlen.

§ 6. Wenn x und y ungerade relative Primzahlen sind, so sind die Zahlen $\frac{1}{2}(x + y)$ und $\frac{1}{2}(x - y)$, weil ihre Summe und ihre Differenz die relativen Primzahlen x und y sind, ebenfalls relative Primzahlen, von denen die eine ungerade und die andere gerade ist, weil ihre Summe ungerade ist. Daher folgt aus der Gleichung

$$\tfrac{1}{2}(x^2 + y^2) = [\tfrac{1}{2}(x + y)]^2 + [\tfrac{1}{2}(x - y)]^2$$

der Satz:

Die halbe Summe der Quadrate je zweier ungeraden relativen Primzahlen ist eine Hypotenuse.

§ 7. Die Darstellung einer Hypotenuse als die Summe der Quadrate zweier relativen Primzahlen, von denen die eine gerade ist, und ebenso die Summe der Quadrate selbst heißt eine Zerlegung, die relativen Primzahlen heißen die Bestandteile der Zerlegung.

Eine Hypotenuse heißt **einfach**, wenn sie eine Primzahl oder eine Potenz einer Primzahl ist, **zusammengesetzt**, wenn sie mindestens zwei verschiedene Grundfaktoren (Primfaktoren) enthält. Einfache Hypotenusen heißen **verschieden**, wenn sie verschiedene Primzahlen oder Potenzen verschiedener Primzahlen sind. (Hypotenusen, die verschiedene Potenzen einer und derselben Primzahl sind, sehe ich darum nicht als verschieden an, weil die Anzahl ihrer Zerlegungen dieselbe ist und es sich hier nur um diese Anzahl, niemals aber um die Größe der Hypotenusen handelt).

Beispiele.

$5 = 1^2 + 2^2$, $13 = 3^2 + 2^2$, $17 = 1^2 + 4^2$, $29 = 5^2 + 2^2$, $37 = 1^2 + 6^2$, $41 = 5^2 + 4^2$, $53 = 7^2 + 2^2$, $61 = 5^2 + 6^2$, $73 = 3^2 + 8^2$, $89 = 5^2 + 8^2$, $97 = 9^2 + 4^2$, $101 = 1^2 + 10^2$, $109 = 3^2 + 10^2$, $113 = 7^2 + 8^2$, $137 = 11^2 + 4^2$, $149 = 7^2 + 10^2$; $25 = 3^2 + 4^2$, $625 = 7^2 + 24^2$, $169 = 5^2 + 12^2$, $289 = 15^2 + 8^2$; $85 = 9^2 + 2^2 = 7^2 + 6^2$, $221 = 11^2 + 10^2 = 5^2 + 14^2$, $325 = 1^2 + 18^2 = 17^2 + 6^2$, $1105 = 33^2 + 4^2 = 9^2 + 32^2 = 31^2 + 12^2 = 23^2 + 24^2$.

Diese kleine Tabelle giebt Anlaß zu folgenden Bemerkungen:

Die ersten 16 Hypotenusen sind unter den Zahlen von 1 bis 156 die Primzahlen von der Form $4k + 1$ und lassen nur eine Zerlegung zu; alle übrigen Primzahlen sind von der Form $4k - 1$ und keine Hypotenusen. Die Hypotenusen 25, 625, 169, 289 sind Potenzen der primzahligen Hypotenusen 5, 13, 17 und haben ebenfalls nur eine Zerlegung. Die Hypotenusen 85, 221 mit je zwei und die Hypotenuse 1105 mit vier Zerlegungen sind Produkte primzahliger Hypotenusen, nämlich $5 \cdot 17$, $13 \cdot 17$, $5 \cdot 13 \cdot 17$. Die Hypotenuse 325 ist das Produkt der Hypotenusen 13 und 25, von denen die erste eine Primzahl, die zweite aber das Quadrat der Primzahl 5 ist; sie hat zwei Zerlegungen und läßt sich außerdem als die Quadratsumme $15^2 + 10^2$ darstellen, die aber keine Zerlegung im Sinne der Definition ist, da 15 und 10 keine relativen Primzahlen sind. Ebenso läßt sich $625 = 5^4$ als die Summe zweier Quadrate mit einem gemeinschaftlichen Faktor, nämlich als die Summe $15^2 + 20^2$, darstellen.

Die Anzahl der Paare von Katheten, die zu einer Hypotenuse gehören und relative Primzahlen sind, ist gleich der Anzahl der Zerlegungen, weil jede Zerlegung $m^2 + n^2$ die Katheten $m^2 - n^2$ und $2mn$ liefert. Außerdem gehören zu einer Hypotenuse, die nicht eine Primzahl ist, noch eine Anzahl von Kathetenpaaren, die einen gemeinschaftlichen Faktor haben. Es ist

$25^2 = 7^2 + 24^2 = 15^2 + 20^2$, $125^2 = 117^2 + 44^2 = 75^2 + 100^2 = 35^2 + 120^2$, $65^2 = 63^2 + 16^2 = 33^2 + 56^2 = 25^2 + 60^2 = 39^2 + 52^2$, $325^2 = 323^2 + 36^2 = 253^2 + 204^2 = 315^2 + 80^2 = 165^2 + 280^2 = 125^2 + 300^2 = 195^2 + 260^2 = 91^2 + 312^2$.

§ 8. **Jede Hypotenuse läßt sich unter der Form $4k + 1$ darstellen; und es giebt keine Primzahl von der Form $4k - 1$, die eine Hypotenuse ist.**

Denn da m ungerade, n gerade ist und alle ungeraden Zahlen sich unter der Form $4p \pm 1$ darstellen lassen, so kann man $m = 4p \pm 1$, $n = 2q$ setzen. Alsdann ist

$$a = m^2 + n^2 = 4(4p^2 \pm 2p + q^2) + 1.$$

Nun ist $4p^2 \pm 2p = 2p(2p \pm 1)$ gleich oder größer als Null, also $4p^2 \pm 2p + q^2$ positiv. Folglich ist für $4p^2 \pm 2p + q^2 = k$

$$a = 4k + 1.$$

§ 9. Jede durch 3 nicht teilbare Zahl läßt sich unter der Form $3p \pm 1$, ihr Quadrat also unter der Form $3(3p^2 \pm 2p) + 1$, also überhaupt unter Form $3k + 1$ darstellen. Folglich ist die Differenz zweier Quadrate, die nicht durch 3 teilbar sind, stets ein Vielfaches von 3. —

Jede Zahl, die nicht durch 5 teilbar ist, ist entweder von der Form $5p \pm 1$ oder von der Form $5p \pm 2$, ihr Quadrat also entweder von der Form $5(5p^2 \pm 2p) + 1$ oder von der Form $5(5p^2 \pm 4p) + 4 = 5(5p^2 \pm 4p + 1) - 1$, also allgemein von der Form $5k \pm 1$. Folglich ist stets entweder die Summe oder die Differenz zweier Quadrate, die nicht durch 5 teilbar sind, ein Vielfaches von 5.

Von den pythagoreischen Zahlen

$$a = m^2 + n^2,\ b = m^2 - n^2,\ c = 2mn$$

ist c stets durch 4 teilbar. Ist eine der Zahlen m und n durch 3 oder 5 teilbar, so ist auch c durch 3 oder 5 teilbar. Ist keine der Zahlen m und n durch 3 oder 5 teilbar, so ist stets $b = m^2 - n^2$ durch 3 und entweder $a = m^2 + n^2$ oder $b = m^2 - n^2$ durch 5 teilbar. Hiermit ist der Satz bewiesen:

Jede der drei Zahlen 3, 4, 5 ist ein Teiler einer von drei beliebigen pythagoreischen Zahlen und 60 ein Teiler des Produkts aller drei Zahlen. (Baltzer.)

§ 10. Es sei

$$a = m_1^2 + n_1^2 = m_2^2 + n_2^2.$$

Alsdann ist

$$\frac{m_1 + m_2}{n_2 - n_1} = \frac{n_2 + n_1}{m_1 - m_2},\quad \frac{m_1 + m_2}{n_2 + n_1} = \frac{n_2 - n_1}{m_1 - m_2}.$$

Setzt man

$$\frac{m_1 + m_2}{n_2 - n_1} = \frac{n_2 + n_1}{m_1 - m_2} = \frac{p_1}{q_1},\quad \frac{m_1 + m_2}{n_2 + n_1} = \frac{n_2 - n_1}{m_1 - m_2} = \frac{p_2}{q_2},$$

wo sowohl p_1 und q_1 als auch p_2 und q_2 **relative Primzahlen** sind, so ist

$$\frac{m_1 + m_2}{m_1 - m_2} = \frac{p_1 p_2}{q_1 q_2},\quad \frac{n_2 + n_1}{n_2 - n_1} = \frac{p_1 q_2}{p_2 q_1},$$

also

$$\frac{m_1}{m_2} = \frac{p_1 p_2 + q_1 q_2}{p_1 p_2 - q_1 q_2},\quad \frac{n_1}{n_2} = \frac{p_1 q_2 - p_2 q_1}{p_1 q_2 + p_2 q_1}.$$

Diese Gleichungen sind nur möglich, wenn

$$m_1 = \delta(p_1 p_2 + q_1 q_2),\quad m_2 = \delta(p_1 p_2 - q_1 q_2);$$
$$n_1 = \varepsilon(p_1 q_2 - p_2 q_1),\quad n_2 = \varepsilon(p_1 q_2 + p_2 q_1)$$

ist, wo δ und ε ganze Zahlen oder Stammbrüche sind oder die eine eine ganze Zahl und die andere ein Stammbruch ist. Nun ist

$$m_1 + m_2 = 2\delta p_1 p_2,\quad n_2 - n_1 = 2\varepsilon p_2 q_1,$$

also

$$\frac{m_1 + m_2}{n_2 - n_1} = \frac{\delta}{\varepsilon} \cdot \frac{p_1}{q_1} = \frac{p_1}{q_1}.$$

Folglich ist $\delta = \varepsilon$. Ist δ eine ganze Zahl, so ist diese, weil $m_1 = \delta(p_1 p_2 + q_1 q_2)$, $n_1 = \delta(p_1 p_2 - p_2 q_1)$ ist und m_1 und n_1 relative Primzahlen sind, gleich 1. Ist dagegen δ ein Stammbruch und gleich $\frac{1}{\delta_1}$, so ist

$$p_1 p_2 + q_1 q_2 = \delta_1 m_1,\quad p_1 p_2 - q_1 q_2 = \delta_1 m_2;$$
$$p_1 q_2 - p_2 q_1 = \delta_1 n_1,\quad p_1 q_2 + p_2 q_1 = \delta_1 n_2,$$

also

$$p_1 p_2 = \tfrac{1}{2}\delta_1(m_1 + m_2),\quad q_1 q_2 = \tfrac{1}{2}\delta_1(m_1 - m_2);$$
$$p_1 q_2 = \tfrac{1}{2}\delta_1(n_2 + n_1),\quad p_2 q_1 = \tfrac{1}{2}\delta_1(n_2 - n_1).$$

Da nun $m_1 + m_2$, $m_1 - m_2$, $n_2 + n_1$, $n_2 - n_1$ gerade Zahlen sind, so ist δ_1 ein Teiler der vier Zahlen $p_1 p_2$, $q_1 q_2$, $p_1 q_2$, $p_2 q_1$, was nach II. nur möglich ist, wenn auch $\delta_1 = 1$ ist. Folglich ist

$$m_1 = p_1 p_2 + q_1 q_2, \quad n_1 = p_1 q_2 - p_2 q_1,$$
$$a = m_1^2 + n_1^2 = p_1^2 p_2^2 + p_1^2 q_2^2 + p_2^2 q_1^2 + q_1^2 q_2^2,$$

also

$$a = (p_1^2 + q_1^2)(p_2^2 + q_2^2).$$

Aus dieser Gleichung zu folgern, daß jede Hypotenuse, die mehr als eine Zerlegung zuläßt, zusammengesetzt sei (vergl. § 28) wäre übereilt, da sehr wohl $p_1^2 + q_1^2$ und $p_2^2 + q_2^2$, wie $1^2 + 8^2$ und $7^2 + 4^2$, einander gleich oder, wie $11^2 + 2^2$ und $3^2 + 4^2$, Potenzen einer und derselben Primzahl sein können. Wohl aber berechtigt die Gleichung zu dem Schlusse, daß a keine Primzahl ist, woraus sich der Satz ergiebt:

Jede primzahlige Hypotenuse hat nur eine Zerlegung.

§ 11. Es ist allgemein

$$(x_1^2 + y_1^2)(x_2^2 + y_2^2) = x_1^2 x_2^2 \pm 2x_1 x_2 \cdot y_1 y_2 + y_1^2 y_2^2 + x_1^2 y_2^2 \mp 2x_1 y_2 \cdot x_2 y_1 + x_2^2 y_1^2,$$
$$= (x_1 x_2 + y_1 y_2)^2 + (x_1 y_2 - x_2 y_1)^2$$
$$= (x_1 x_2 - y_1 y_2)^2 + (x_1 y_2 + x_2 y_1)^2.$$

Hiernach ist

$$(m_1^2 + n_1^2)(m_2^2 + n_2^2) = (m_1 m_2 + n_1 n_2)^2 + (m_1 n_2 - m_2 n_1)^2$$
$$= (m_1 m_2 - n_1 n_2)^2 + (m_1 n_2 + m_2 n_1)^2.$$

Da m_1 und m_2 ungerade, n_1 und n_2 gerade sind, so sind auch $m_1 m_2 + n_1 n_2$ und $m_1 m_2 - n_1 n_2$ ungerade, $m_1 n_2 - m_2 n_1$ und $m_1 n_2 + m_2 n_1$ gerade. Hieraus ergiebt sich der Satz:

Das Produkt zweier Hypotenusen läßt sich auf mindestens zweifache Weise als die Summe der Quadrate zweier Zahlen, von denen die eine ungerade, die andere gerade ist, darstellen.

Anmerkung. Ob die Quadratsummen $(m_1 m_2 + n_1 n_2)^2 + (m_1 n_2 - m_2 n_1)^2$ und $(m_1 m_2 - n_1 n_2)^2 + (m_1 n_2 + m_2 n_1)^2$ Zerlegungen im Sinne der Definition sind, bedarf in jedem Falle einer besonderen Untersuchung; es ist möglich, daß keine, eine oder beide Summen Zerlegungen sind. Es ist z. B.

$$(1^2 + 18^2)(1^2 + 8^2) = 145^2 + 10^2 = 143^2 + 26^2$$
$$(1^2 + 18^2)(7^2 + 4^2) = 79^2 + 122^2 = 65^2 + 130^2$$
$$(11^2 + 2^2)(5^2 + 12^2) = 79^2 + 122^2 = 31^2 + 142^2.$$

Das erste Produkt giebt keine, das zweite eine, das dritte zwei Zerlegungen. In den beiden ersten Fällen haben die Hypotenusen, nämlich 325 und 65, zwei Grundfaktoren gemein, im dritten sind sie, nämlich 125 und 169, relative Primzahlen.

§ 12. Nach Euler*). Es sei die Hypotenuse $a_1 = p^2 + q^2$ eine Primzahl und

$$a = m^2 + n^2 = a_1 a_2.$$

Da p und q relative Primzahlen sind, so lassen sich durch Verwandlung des Bruches $\frac{p}{q}$ in einen Kettenbruch die Zahlen α und β so bestimmen, daß

$$p\alpha - q\beta = 1, \quad p(n\alpha) + q(-m\beta) = m$$

oder, wenn man $m\alpha = x$, $-m\beta = y$ setzt,

$$m = px + qy, \quad n = py - qx + z$$

*) Leonhardi Euleri commentationes arithmeticae collectae. Petropoli 1849. Tomus posterior. pag. 570, 571. (Opera arithmetica hucusque inedita.)

ist. Alsdann ist

$$m^2 + n^2 = (px + qy)^2 + (py - qx + z)^2$$
$$= (px + qy)^2 + (py - qx)^2 + 2(py - qx)z + z^2$$
$$= (p^2 + q^2)(x^2 + y^2) + [2(py - qx) + z]z.$$

Da $m^2 + n^2$ durch die Primzahl $p^2 + q^2$ teilbar ist, so ist entweder $2(py - qx) + z$ oder z ebenfalls durch $p^2 + q^2$ teilbar. Im ersten Falle setzt man

$$2(py - qx) + z = (p^2 + q^2)t, \quad z = (p^2 + q^2)t - 2(py - qx)$$

und erhält

$$m^2 + n^2 = (p^2 + q^2)a_2 = (p^2 + q^2)(x^2 + y^2) + (p^2 + q^2)t[(p^2 + q^2)t - 2(py - qx)],$$
$$a_2 = x^2 + y^2 + (p^2 + q^2)t^2 - 2(py - qx)t$$
$$= (x + qt)^2 + (y - pt)^2.$$

Im zweiten Falle setzt man

$$z = (p^2 + q^2)u, \; 2(py - qx) + z = 2(py - qx) + (p^2 + q^2)u$$

und findet

$$a_2 = x^2 + y^2 + [2(py - qx) + (p^2 + q^2)u]u$$
$$= x^2 + y^2 + 2(py - qx)u + (p^2 + q^2)u^2$$
$$= (x - qu)^2 + (y + pu)^2.$$

Folglich ist in jedem Falle a_2 eine Summe zweier Quadrate.

Wenn ein Grundfaktor einer zusammengesetzten Hypotenuse eine Hypotenuse ist, so ist das Produkt der übrigen Grundfaktoren eine Summe zweier Quadrate.

§ 13. Nach Legendre*). Es seien x und y relative Primzahlen und A ein Faktor von $x^2 + y^2$. Setzt man

$$p = x - vA, \quad q = y - wA,$$

so ist auch $p^2 + q^2$ durch A teilbar, also

$$AA_1 = p^2 + q^2.$$

Die Zahlen v und w lassen sich so bestimmen, daß die absoluten Werte von p und q kleiner als $\frac{1}{2}A$ sind. Ist nämlich $z < \frac{x}{A} < z + 1$, so ist $zA < x < (z + 1)A$, $o < x - zA < A$. Ist $x - zA < \frac{1}{2}A$, so ist $v = z$. Ist $x - zA > \frac{1}{2}A$, so ist $A - (x - zA) < \frac{1}{2}A$, also $-[x - (z + 1)A] < \frac{1}{2}A$. Ebenso läßt sich w derart bestimmen, daß der absolute Wert von q kleiner als $\frac{1}{2}A$ ist. Hiernach ist $p^2 < \frac{1}{4}A^2$, $q^2 < \frac{1}{4}A^2$, also

$$AA_1 < \tfrac{1}{2}A^2, \quad A_1 < \tfrac{1}{2}A.$$

Ist $A_1 > 1$, so bestimmt man r und s so, daß die absoluten Werte von $p - rA_1$ und $q - sA_1$ kleiner als $\frac{1}{2}A_1$ sind. Da A_1 ein Teiler von $p^2 + q^2$, also auch von $(p - rA_1)^2 + (q - sA_1)^2$ ist, so kann man

$$A_1 A_2 = (p - rA_1)^2 + (q - sA_1)^2$$

setzen, wo $A_2 < \frac{1}{2}A_1$ ist. Multipliziert man diese Gleichung mit der Gleichung $AA_1 = p^2 + q^2$, so erhält man

$$\begin{aligned} AA_1^2A_2 = {} & p^4 - 2rp^3A_1 + r^2p^2A_1^2 + p^2q^2 - 2sp^2qA_1 + s^2p^2A_1^2 + p^2q^2 - 2rpq^2A_1 + r^2q^2A_1^2 \\ & + q^4 - 2sq^3A_1 + s^2q^2A_1^2 \\ = {} & (p^2 + q^2)^2 + (rp + sq)^2A_1^2 + (rq - sp)^2A_1^2 - 2(p^2 + q^2)rpA_1 - 2(p^2 + q^2)sqA_1 \\ = {} & [(p^2 + q^2) - (rp + sq)A_1]^2 + (rq - sp)^2A_1^2. \end{aligned}$$

---

*) Legendre, Théorie des nombres, 3. Édit. Paris 1830. Tome I. pag. 203.

Ersetzt man hierin $p^2 + q^2$ durch AA_1, so ergiebt sich nach Division durch A_1^2

$$AA_2 = [A - (rp + sq)]^2 + (rq - sp)^2.$$

Ist $A_2 > 1$, so läßt sich aus dem Produkte AA_2 in derselben Weise ein Produkt AA_3 gleich einer Summe zweier Quadrate herleiten, in dem $A_3 < \frac{1}{2}A_2$ ist, u. s. w. Da in der Reihe der ganzen positiven Zahlen

$$A, A_1, A_2, A_3, \ldots$$

jede kleiner als die Hälfte der vorhergehenden Zahl ist, so gelangt man notwendig zu einer Gleichung von der Form

$$AA_k = t^2 + u^2,$$

in der $A_k = 1$ ist. Folglich ist A eine Summe zweier Quadrate.

Jeder Teiler einer Summe der Quadrate zweier relativen Primzahlen ist eine Summe zweier Quadrate.

Anmerkung. In dem vorstehend wiedergegebenen Legendreschen Beweise wird vorausgesetzt, daß x und y relative Primzahlen sind. Daraus folgt, daß keine der Zahlen $p = x - vA$ und $q = y - wA$ gleich Null sein kann. Die Voraussetzung ist aber auch notwendig, weil man, wenn x und y einen gemeinschaftlichen Faktor hätten, als A diesen Faktor wählen könnte. Dann aber wäre die Bestimmung von p und q derart, daß sie kleiner als $\frac{1}{2}A$ sind, nur möglich, wenn $x = vA$, $y = wA$ gesetzt würde, folglich sowohl p als auch q gleich Null wäre, wodurch die weitere Entwickelung unmöglich würde.

Es kann die Frage aufgeworfen werden, ob sich r und s stets den Erfordernissen des Beweises gemäß bestimmen lassen. Von den Zahlen p und q muß mindestens eine größer als $\frac{1}{2}A_1$ sein. Denn wären beide kleiner als $\frac{1}{2}A_1$ oder die eine kleiner als $\frac{1}{2}A_1$ und die andere gleich $\frac{1}{2}A_1$ oder beide gleich $\frac{1}{2}A_1$, so wäre wegen der Gleichung $AA_1 = p^2 + q^2$, $AA_1 \leq \frac{1}{2}A_1^2$, $A \leq \frac{1}{2}A_1$. Also ist eine der Zahlen r und s stets größer als Null, während die andere gleich Null sein kann.

Da t und u Differenzen sind, so ist der Fall nicht ausgeschlossen, daß die eine dieser Zahlen verschwindet, A also gleich einem Quadrate B^2 ist. Alsdann ist auch B ein Teiler von $x^2 + y^2$, läßt sich daher unter der Form einer Summe zweier Quadrate darstellen, wo aber ebenfalls das eine Quadrat verschwinden, B also gleich einem Quadrat B_1^2 sein kann. Es ist daher denkbar, daß man zu dem Ergebnisse gelangt, daß

$$A = B^2, \ B = B_1^2, \ B_1 = B_2^2, \ \ldots$$

ist. Da in der Reihe der Zahlen

$$A, B, B_1, B_2, \ldots$$

jede die Quadratwurzel aus der vorhergehenden, also kleiner als die vorhergehende ist, so muß man zu einer Zahl B_k gelangen, die gleich $t^2 + u^2$ ist, wo aber keins der Quadrate verschwindet. Aus § 6 geht hervor, daß $x^2 + y^2$ nur *einen* geraden Faktor haben kann, nämlich 2. Ist $A = 2$, so ist $A = 1^2 + 1^2$. In jedem anderen Falle ist A, also auch B_k ungerade, folglich die eine der Zahlen t und u ungerade, die andere gerade. Ferner ist

$$B_{k-1} = B_k^2 = (t^2 + u^2)^2 = (t^2 - u^2)^2 + (2tu)^2 = t_1^2 + u_1^2,$$

wo t_1 ungerade, u_1 gerade ist, und ebenso

$$B_{k-2} = B_{k-1}^2 = t_2^2 + u_2^2, \quad B_{k-3} = B_{k-2}^2 = t_3^2 + u_3^2, \ \ldots$$
$$B_1 = B_2^2 = t_{k-1}^2 + u_{k-1}^2, \quad A = B^2 = t_k^2 + u_k^2.$$

Legendre giebt a. a. O. einen auf ganz anderen Prinzipien beruhenden Beweis des Satzes: „Tout diviseur de la formule $t^2 + u^2$, composée de deux carrés premiers entre eux, est également la somme de deux carrés premiers entre eux“. Den vorstehend mitgeteilten Beweis schließt er mit den Worten: „ . . . on parviendra donc nécessairement à un terme égal à l'unité, et alors le nombre A sera égal à la somme de deux carrés.“ Wie man sieht, läßt er hier am Schlusse die Worte „premiers entre eux“ weg. Aus dem hier mitgeteilten Beweise geht auch in der Tat nicht hervor, daß A eine Summe der Quadrate zweier *relativen Primzahlen* ist.

Euler giebt a. a. O. folgenden Beweis:

Aus dem im § 12 wiedergegebenen Satze folgert Euler zunächst, daß, wenn das Produkt der beiden Zahlen A und B eine Summe $x^2 + y^2$ der Quadrate zweier relativen Primzahlen und A nicht eine Summe zweier Quadrate ist, von den Grundfaktoren von B mindestens einer ebenfalls nicht eine Summe zweier Quadrate ist. Denn wäre jeder Grundfaktor von B eine Summe zweier Quadrate, so würde man durch auf einander folgende Divisionen durch die einzelnen Grundfaktoren zur Zahl A gelangen, die nach dem bewiesenen Satze eine Summe zweier Quadrate sein müßte. Dann fährt er fort:

557. Nunc igitur investigemus, an summa duorum quadratorum $pp + qq$ inter se primorum per ullum numerum $\mathfrak{A}$, qui non sit summa duorum quadratorum, divisibilis esse queat. Ad hoc sumamus $pp + qq$ divisibile esse per talem numerum $\mathfrak{A}$, atque etiam $(p - m\mathfrak{A})^2 + (q - n\mathfrak{A})^2$ divisibilis erit per $\mathfrak{A}$.*)

558. Poterit ergo talis summa duorum quadratorum $pp + qq$ exhiberi, quorum radices p et q minores sint quam $\mathfrak{A}$, quin etiam minores quam $\frac{1}{2}\mathfrak{A}$; cum etiam $(\mathfrak{A} - p)^2 + (\mathfrak{A} - q)^2$ divisionem admittere debeat, quorum quadratorum radices minores erint quam $\frac{1}{2}\mathfrak{A}$, si p et q eo essent majores.

559. Dabitur ergo summa duorum quadratorum $pp + qq$ minor qnam $\frac{1}{2}\mathfrak{A}\mathfrak{A}$ (cum sit $p < \frac{1}{2}\mathfrak{A}$ et $q < \frac{1}{2}\mathfrak{A}$) per numerum $\mathfrak{A}$ divisibilis; ponatur quotus $= \mathfrak{B}$, qui etiam vel ipse non erit summa duorum quadratorum, vel factorem talem habebit, eritque $\mathfrak{B} < \frac{1}{2}\mathfrak{A}$.

560. Cum jam $pp + qq$ divisibile sit per $\mathfrak{B}$, exhiberi poterit summa duorum quadratorum $rr + ss$ minor quam $\frac{1}{2}\mathfrak{B}\mathfrak{B}$, divisibilis per $\mathfrak{B}$, et quotus $\mathfrak{C}$, qui erit minor quam $\frac{1}{2}\mathfrak{B}$, pariter non erit summa duorum quadratorum, per quem cum divisibilis sit $rr + ss$, dabitur $tt + uu < \frac{1}{2}\mathfrak{C}\mathfrak{C}$ divisibilis per $\mathfrak{C}$, et quotus $\mathfrak{D} < \frac{1}{2}\mathfrak{C}$ itidem non erit summa duorum quadratorum.

561. Hoc modo tandem pervenietur ad summam duorum quadratorum quantumvis parvam, quae foret divisibilis per numerum non-summam duorum quadratorum, quod cum sit absurdum, necessario sequitur, summam duorum quadratorum inter se primorum non esse divisibilem per ullum numerum, qui ipse non sit summa duorum quadratorum."

Abgesehen von der Unrichtigkeit der am Fuße des Textes mitgeteilten Randbemerkung (denn ist z. B. $p = 37$, $q = 16$, $\mathfrak{A} = 65$, so ist $p - 1 \cdot \mathfrak{A} = -28$, $q - o \cdot \mathfrak{A} = 16$) sind Eulers Schlußfolgerungen nicht unbedenklich. Er hat bewiesen, daß $\mathfrak{B}$ **entweder** nicht eine Summe zweier Quadrate ist **oder** eine Nicht-Summe zweier Quadrate als Faktor enthält, also **nicht** bewiesen, daß $\mathfrak{B}$ eine Nicht-Summe zweier Quadrate ist. Der Schluß in § 560 beruht aber auf der Voraussetzung, daß $\mathfrak{B}$ **nicht** eine Summe zweier Quadrate ist, weil, wenn $\mathfrak{B}$ eine Summe zweier Quadrate wäre, alle Grundfaktoren von $\mathfrak{C}$ Summen zweier Quadrate sein könnten.

§ 14. Nach **Euler****). Nach der Lehre von den quadratischen Resten läßt sich, wenn $4k + 1$ eine **Primzahl** ist, ein Quadrat x^2 so bestimmen, daß

$$r(4k + 1) - 1 = x^2$$

ist. Folglich ist

$$1^2 + x^2 = r(4k + 1),$$

also $4k + 1$ ein Teiler von $1^2 + x^2$. Nach dem vor. § ist aber jeder Teiler einer Summe der Quadrate zweier relativen Primzahlen, auch wenn diese ungerade sind, die Summe ihrer Quadrate also nicht eine Hypotenuse ist, ebenfalls eine Summe zweier Quadrate. Folglich ist auch $4k + 1$ eine Summe der Quadrate zweier Zahlen, die, weil $4k + 1$ eine Primzahl ist, relative Primzahlen sind, und von denen, da $4k + 1$ ungerade ist, die eine gerade sein muß. Mithin ist $4k + 1$ eine Hypotenuse. Beispiel:

$$\text{Für } k = 3 \text{ ist } 1^2 + 8^2 = 65 = 5 \cdot 13 = (1^2 + 2^2)(3^2 + 2^2).$$
$$\text{Für } k = 10 \text{ ist } 1^2 + 9^2 = 82 = 2 \cdot 41 = (1^2 + 1^2)(5^2 + 4^2).$$

Hiermit ist die Umkehrung des in § 8 in Verbindung mit § 10 enthaltenen Satzes: Jede primzahlige Hypotenuse ist von der Form $4k + 1$ und läßt nur eine Zerlegung zu, nämlich der Fermatsche Satz bewiesen:

Jede Primzahl von der Form $4k + 1$ ist eine Hypotenuse mit nur einer Zerlegung.

---

*) Script. ad marg. Quorum radices, si p et q sint primi inter se, etiam erunt primae inter se.

**) A. a. O. pag. 572.

§ 15. Aus § 13 folgt:

Jeder Grundfaktor einer Hypotenuse ist eine Hypotenuse.

Wenn eine Potenz einer Primzahl eine Hypotenuse ist, so ist es auch ihre Grundzahl.

§ 16. Nach § 12 ist, wenn $a = a_1 a_2 = m^2 + n^2$ und $a_1 = p^2 + q^2$ eine Primzahl ist, $a_2 = r^2 + s^2$, wo entweder $r = x + qt$, $s = y - pt$ oder $r = x - qu$, $s = y + pu$ und $m = px + qy$ ist. Also ist

$$m^2 + n^2 = (p^2 + q^2)(r^2 + s^2) = (pr + qs)^2 + (ps - qr)^2.$$

Da nun in beiden Fällen $pr + qs = px + qy$ ist, so ist

$$m = pr + qs, \text{ also } n = ps - qr.$$

Hiernach sind, da m und n relative Primzahlen sind, auch r und s relative Primzahlen. Also hat man den Satz:

Wenn ein Grundfaktor einer Hypotenuse eine Hypotenuse ist, so ist das Produkt der übrigen Grundfaktoren ebenfalls eine Hypotenuse.

§ 17. Haben die Hypotenusen

$$a_1 = m_1^2 + n_1^2, \quad a_2 = m_2^2 + n_2^2$$

einen gemeinschaftlichen Grundfaktor γ, so ist dieser nach § 15 eine Hypotenuse. Ist ferner

$$m_1^2 + n_1^2 = a'_1 \gamma, \; m_2^2 + n_2^2 = a'_2 \gamma,$$

so sind nach § 16 auch a'_1 und a'_2 Hypotenusen. Ist $\delta^2 + \varepsilon^2$ die nach § 10 eindeutig bestimmte Zerlegung von γ, so muß es unter den möglichen Zerlegungen von a'_1 eine, $p_1^2 + q_1^2$, geben, die mit $\delta^2 + \varepsilon^2$ zusammengesetzt die Zerlegung $m_1^2 + n_1^2$ der Hypotenuse a_1 liefert. Ebenso sei unter den möglichen Zerlegungen der Hypotenuse a'_2 $p_2^2 + q_2^2$ diejenige, deren Zusammensetzung mit $\delta^2 + \varepsilon^2$ die Zerlegung $m_2^2 + n_2^2$ der Hypotenuse a_2 liefert. Alsdann ist

$$\begin{aligned} m_1^2 + n_1^2 = (p_1^2 + q_1^2)(\delta^2 + \varepsilon^2) &= (p_1\delta + q_1\varepsilon)^2 + (p_1\varepsilon - q_1\delta)^2 \\ &= (p_1\delta - q_1\varepsilon)^2 + (p_1\varepsilon + q_1\delta)^2, \\ m_2^2 + n_2^2 = (p_2^2 + q_2^2)(\delta^2 + \varepsilon^2) &= (p_2\delta + q_2\varepsilon)^2 + (p_2\varepsilon - q_2\delta)^2 \\ &= (p_2\delta - q_2\varepsilon)^2 + (p_2\varepsilon + q_2\delta)^2. \end{aligned}$$

Hiernach ist entweder

$$m_1 = \pm(p_1\delta + q_1\varepsilon), \quad n_1 = \pm(p_1\varepsilon - q_1\delta)$$

oder

$$m_1 = \pm(p_1\delta - q_1\varepsilon), \quad n_1 = \pm(p_1\varepsilon + q_1\delta)$$

und ebenso entweder

$$m_2 = \pm(p_2\delta + q_2\varepsilon), \quad n_2 = \pm(p_2\varepsilon - q_2\delta)$$

oder

$$m_2 = \pm(p_2\delta - q_2\varepsilon), \quad n_2 = \pm(p_2\varepsilon + q_2\delta).$$

Ist eine der beiden Zahlen a_1 und a_2, etwa a_2, eine Primzahl, so ist überall $p_2 = 1$, $q_2 = 0$ zu setzen. Bildet man aus diesen Gleichungen die Zahlenpaare $m_1 m_2 + n_1 n_2$, $m_1 n_2 - m_2 n_1$ und $m_1 m_2 - n_1 n_2$, $m_1 n_2 + m_2 n_1$, so wird sich, wie man auch die Vorzeichen für m_1, n_1, m_2, n_2 wählen mag, in den Zahlen des einen Zahlenpaars stets der gemeinschaftliche Faktor γ vorfinden. Wählt man z. B.

$$\begin{aligned} m_1 &= -(p_1\delta - q_1\varepsilon), \quad n_1 = +(p_1\varepsilon + q_1\delta), \\ m_2 &= -(p_2\delta + q_2\varepsilon), \quad n_2 = -(p_2\varepsilon - q_2\delta), \end{aligned}$$

so ist

$$m_1 m_2 - n_1 n_2 = (p_1 p_2 - q_1 q_2)\gamma, \quad m_1 n_2 + m_2 n_1 = -(p_1 q_2 + p_2 q_1)\gamma;$$

oder ist

$$m_1 = +(p_1\delta + q_1\varepsilon), \quad n_1 = -(p_1\varepsilon - q_1\delta)$$
$$m_2 = -(p_2\delta - q_2\varepsilon), \quad n_2 = +(p_2\varepsilon + q_2\delta),$$

so ist

$$m_1m_2 + n_1n_2 = -(p_1p_2 - q_1q_2)\gamma, \quad m_1n_2 - m_2n_1 = +(p_1q_2 + p_2q_1)\gamma.$$

Hiernach ist also γ ein gemeinschaftlicher Faktor der Zahlen des einen der Zahlenpaare $m_1m_2 + n_1n_2$, $m_1n_2 - m_2n_1$ und $m_1m_2 - n_1n_2$, $m_1n_2 + m_2n_1$. Wäre nun γ auch ein gemeinschaftlicher Faktor der Zahlen des anderen Zahlenpaares, so würde sich durch Addition und Subtraktion ergeben, daß γ ein gemeinschaftlicher Faktor der vier Zahlen $2m_1m_2$, $2n_1n_2$, $2m_1n_2$, $2m_2n_1$, also, da γ als Hypotenuse ungerade ist, der vier Zahlen m_1m_2, n_1n_2, m_1n_2, m_2n_1 ist, was dem Satze II. widerspricht. Hiermit ist bewiesen:

Wenn die Hypotenusen $m_1^2 + n_1^2$ und $m_2^2 + n_2^2$ nicht relative Primzahlen sind, so ist jeder beiden gemeinschaftliche Grundfaktor ein gemeinschaftlicher Faktor der Zahlen des einen, aber auch nur des einen der Zahlenpaare

$$m_1m_2 + n_1n_2, \; m_1n_2 - m_2n_1 \text{ und } m_1m_2 - n_1n_2, \; m_1n_2 + m_2n_1.$$

Eine aus einer Hypotenuse durch Wiederholung eines Grundfaktors neu gebildete Hypotenuse läßt nicht mehr Zerlegungen zu als die Hypotenuse, aus der sie gebildet woren ist.

Anmerkung. Zur Erläuterung der Beweisführung diene das Produkt der Hypotenusen $a_1 = 325$ und $a_2 = 65$; beide haben die Grundfaktoren $5 = 1^2 + 2^2$ und $13 = 3^2 + 2^2$ gemein. Handelt es sich um den Grundfaktor 5, so ist $a'_1 = 65 = 7^2 + 4^2 = 1^2 + 8^2$, $a'_2 = 13 = 3^2 + 2^2$. Es sei nun $m_1^2 = 1^2$, $n_1^2 = 18^2$; $m_2^2 = 1^2$, $n_2^2 = 8^2$. Da $\delta^2 + \varepsilon^2 = 1^2 + 2^2$ eindeutig bestimmt ist, so muß, da die Zerlegung $1^2 + 18^2$ von a_1 faktisch existirt, die eine der beiden Zerlegungen von a'_1 mit $1^2 + 2^2$ zusammengesetzt $m_1^2 = 1^2$, $n_1^2 = 18^2$ geben, und das ist die Zerlegung $7^2 + 4^2$. Ebenso muß, da $3^2 + 2^2$ die einzige Zerlegung von a'_2 ist, $(3^2 + 2^2)(1^2 + 2^2)$ die Zerlegung $m_2^2 + n_2^2$ liefern. In der Tat gelangt man zu diesem Resultate, wenn man in den Gleichungen
$m_1 = p_1\delta + q_1\varepsilon$, $n_1 = p_1\varepsilon - q_1\delta$, $m_2 = p_2\delta + q_2\varepsilon$, $n_2 = p_2\varepsilon - q_2\delta$ $p_1 = 7$, $q_1 = -4$, $p_2 = 3$, $q_2 = -2$, $\delta = 1$, $\varepsilon = 2$ setzt, nämlich zu den Gleichungen $m_1 = -1$, $n_1 = 18$, $m_2 = -1$, $n_2 = 8$.

Handelt es sich um den gemeinschaftlichen Grundfaktor $13 = 3^2 + 2^2$, so ist $a'_1 = 25 = 3^2 + 4^2$, $a'_2 = 5 = 1^2 + 2^2$, und man erhält für $p_1 = 3$, $q_1 = -4$, $p_2 = 1$, $q_2 = -2$, $\delta = 3$, $\varepsilon = 2$ das Ergebnis $m_1 = 1$, $n_1 = 18$, $m_2 = -1$, $n_2 = 8$. Das Produkt $(1^2 + 18^2)(1^2 + 8^2)$ selbst liefert die beiden Quadratsummen $145^2 + 10^2$ und $143^2 + 26^2$; die Summanden der einen haben den Grundfaktor 5, die der anderen den Grundfaktor 13 gemein.

Die Zahlen 325 und 65 haben aber auch noch die zusammengesetzte Hypotenuse 65 als Faktor gemein. Sollen nun die Zahlen eines der Zahlenpaare $m_1m_2 + n_1n_2$, $m_1n_2 - m_2n_1$ und $m_1m_2 - n_1n_2$, $m_1n_2 + m_2n_1$ diesen Faktor gemein haben, so muß $a'_1 = 5 = 1^2 + 2^2$ mit $\gamma = 1^2 + 8^2$ zusammengesetzt die Zerlegung $1^2 + 18^2$ liefern, was nicht der Fall ist. Man sieht also, daß der Satz für einen gemeinschaftlichen *zusammengesetzten* Faktor keine Giltigkeit hat, was auch natürlich ist, da dieser Faktor zwei Zerlegungen zuläßt und diejenige, die $m_2^2 + n_2^2$ liefert, hier $m_2^2 + n_2^2$ selbst, nämlich $1^2 + 8^2$, nicht mit einer der Zerlegungen von a'_1, hier mit der einzigen $1^2 + 2^2$, die Werte $m_1^2 = 1^2$, $n_1^2 = 18^2$ zu liefern braucht. Daraus folgt aber nicht, daß es keine Zerlegungen von a_1 und a_2 gäbe, deren Zusammensetzung die Summe der Quadrate zweier Zahlen liefert, die eine zusammengesetzte Zahl als gemeinschaftlichen Faktor enthalten. Wäre $m_1^2 + n_1^2 = 1^2 + 18^2$, aber $m_2^2 + n_2^2$ nicht gleich $1^2 + 8^2$ sondern gleich $7^2 + 4^2$, so würde man in der Tat zu einer Summe von Quadraten zweier Zahlen, die den Faktor 65 gemein haben, gelangen; es ist nämlich $(1^2 + 18^2)(7^2 + 4^2) = 65^2 + 130^2 = 79^2 + 122^2$.

Wie man aber auch 325 und 65 zerlegen (von 325 giebt es noch die Zerlegung $17^2 + 6^2$) und die Zerlegungen kombiniren mag, stets wird sich sowohl 5 als auch 13 in den Summanden der einen der beiden sich ergebenden Quadratsummen vorfinden, in denen der anderen nicht, sei es, daß die Summanden einer und derselben Quadratsumme beide Grundfaktoren gemein haben, dann sind die der anderen relative Primzahlen, geben also eine Zerlegung, oder daß 5 in den Summanden der einen, 13 in denen der anderen enthalten ist.

§ 18. Aus § 17 erhält man durch Umkehrung den Satz:

Wenn sowohl die Zahlen $m_1 m_2 + n_1 n_2$ und $m_1 n_2 - m_2 n_1$ als auch die Zahlen $m_1 m_2 - n_1 n_2$ und $m_1 n_2 + m_2 n_1$ relative Primzahlen sind, so sind auch die Zahlen $m_1^2 + n_1^2$ und $m_1^2 + n_1^2$ relative Primzahlen.

§ 19. Da die Seiten der Gleichung

$$(m_1^2 + n_2^2)(m_2^2 + n_1^2) = (m_1 m_2 + n_1 n_2)^2 + (m_1 n_2 - m_2 n_1)^2$$

weder ihren Inhalt noch ihre Form ändern, wenn man m_1 mit m_2 und n_1 mit n_2 vertauscht, oder mit andern Worten: da die Bestandteile der Zerlegungen $m_1^2 + n_1^2$ und $m_2^2 + n_2^2$ in gleicher Weise an der Bildung der Quadratsumme $(m_1 m_2 + n_1 n_2)^2 + (m_1 n_2 - m_2 n_1)^2$, beteiligt sind, so muß, wenn $m_1 m_2 + n_1 n_2$ und $m_1 n_2 - m_2 n_1$ einen Faktor δ gemein haben, nach dem Satze vom zureichenden Grunde δ ein Faktor sowohl von $m_1^2 + n_1^2$ als auch von $m_2^2 + n_2^2$ sein. Dasselbe gilt, wenn die Zahlen $m_1 m_2 - n_1 n_2$ und $m_1 n_2 + m_2 n_1$ einen Faktor ε gemein haben. Also hat man den Satz:

Wenn die Zahlen eines der Zahlenpaare $m_1 m_2 + n_1 n_2$, $m_1 n_2 - m_2 n_1$ und $m_1 m_2 - n_1 n_2$, $m_1 n_2 + m_2 n_1$ einen Faktor gemein haben, so ist dieser auch ein Faktor sowohl von $m_1^2 + n_1^2$ als auch von $m_2^2 + n_2^2$.

§ 20. Hieraus folgt umgekehrt:

Wenn die Zahlen $m_1^2 + n_1^2$ und $m_2^2 + n_2^2$ relative Primzahlen sind, so sind sowohl die Zahlen des Zahlenpaars $m_1 m_2 + n_1 n_2$, $m_1 n_2 - m_2 n_1$, als auch die des Zahlenpaars $m_1 m_2 - n_1 n_2$, $m_1 n_2 + m_2 n_1$ ebenfalls relative Primzahlen.

§ 21. Obschon die Zahlen

$$a_1 = m_1^2 + n_1^2, \quad a_2 = m_2^2 + n_2^2$$

Hypotenusen sind, so folgt aus der Gleichung

$$a = a_1 a_2 = (m_1 m_2 + n_1 n_2)^2 + (m_1 n_2 - m_2 n_1)^2 = (m_1 m_2 - n_1 n_2)^2 + (m_1 n_2 + m_2 n_1)^2,$$

z. B. aus der Gleichung

$$a = (1^2 + 18^2)\,(1^2 + 8^2) = 145^2 + 10^2 = 143^2 + 26^2$$

noch nicht, daß a eine Hypotenuse ist, weil die Summanden der Quadratsummen nicht relative Primzahlen sind. So ist $245 = 7^2 + 14^2$ in der That keine Hypotenuse. Darum kann man vorläufig noch nicht behaupten, daß das Produkt zweier Hypotenusen ebenfalls eine Hypotenuse sei, wohl aber auf Grund der Sätze § 17 und § 20 Folgendes:

Das Produkt zweier Hypotenusen, die keinen oder nur einen Grundfaktor gemein haben, ist ebenfalls eine Hypotenuse.

§ 22. Sind die Zahlen a_1, a_2, a_3, . . . beliebige Hypotenusen, so kann man sie, soweit sie nicht schon Primzahlen sind, in Produkte von Primzahlen, also $a = a_1 a_2 a_3$ . . . . in ein Produkt der Primzahlen α_1, α_2, α_3, α_4, ... zerlegen, die nach § 15 sämtlich Hypotenusen sind, aber nicht alle verschieden zu sein brauchen. Wendet man alsdann wiederholt den vorigen Satz [auf $\alpha_1 \alpha_2$, $(\alpha_1 \alpha_2)\alpha_3$, $(\alpha_1 \alpha_2 \alpha_3)\alpha_4$ . . . .] an, so gelangt man zu dem Ergebnisse:

Jedes Produkt beliebiger Hypotenusen ist ebenfalls eine Hypotenuse.

§ 23. Jetzt läßt sich der Satz § 15 dahin erweitern:

Jeder Teiler einer Hypotenuse ist ebenfalls eine Hypoteuse.

§ 24. Sind alle Hypotenusen a_1, a_2, a_3, . . . gleich, so ergiebt sich der Satz:

Jede Potenz einer Hypotenuse ist ebenfalls eine Hypotenuse.

§ 25. Ist die Hypotenuse a eine Primzahl, so läßt sie nach § 10 nur eine Zerlegung zu. Folglich haben nach § 17 auch die Hypotenusen $aa = a^2$, $a^2a = a^3$, . . . $a^{k-1}a = a^k$, also jede Potenz von a nur eine Zerlegung. Daher kann man den Satz in § 10 mit Rücksicht auf die Erklärung der einfachen Hypotenuse dahin erweitern:

Jede einfache Hypotenuse läßt nur eine Zerlegung zu.

§ 26. Der vorige Satz läßt sich umkehren:

Jede Hypotenuse, die nur eine Zerlegung zuläßt, ist einfach.

Denn wäre sie zusammengesetzt, so hätte sie, da sie sich als ein Produkt zweier relativen Primzahlen darstellen ließe, die nach § 23 Hypotenusen wären, nach § 20 zwei Zerlegungen.

§ 27. Jede zusammengesetzte Hypotenuse läßt mindestens zwei Zerlegungen zu.

Denn ließe die Hypotenuse nur eine Zerlegung zu, so wäre sie nach § 26 einfach.

§ 28. Jede Hypotenuse mit mehr als einer Zerlegung ist zusammengesetzt.

Denn wäre eine solche Hypotenuse einfach, so ließe sie nach § 25 nur eine Zerlegung zu.

§ 29. Sind

$$a_1 = m_1^2 + n_1^2, \quad a_2 = m_2^2 + n_2^2$$

verschiedene einfache Hypotenusen, so haben sie keinen Faktor gemein. Folglich liefert das Produkt $(m_1^2 + n_1^2)(m_2^2 + n_2^2)$ nach § 20 zwei verschiedene Zerlegungen. Diese sind aber auch die einzigen, weil die Zerlegungen $m_1^2 + n_1^2$ und $m_2^2 + n_2^2$ von a_1 und a_2 nach § 25 eindeutig bestimmt sind.

Das Produkt zweier verschiedenen einfachen Hypotenusen ist eine Hypotenuse, die zwei, aber auch nur zwei Zerlegungen zuläßt.

§ 30. Es seien

$$a_1 = m_1^2 + n_1^2, \quad a_2 = m_2^2 + n_2^2, \quad a_3 = m_3^2 + n_3^2, \; . \; . \; . \; a_k = m_k^2 + n_k^2$$

verschiedene einfache Hypotenusen und

$$a = a_1 a_2 a_3 \; . \; . \; . \; . \; a_k.$$

Die Anzahl der Zerlegungen von a_1 ist gleich $1 = 2^0$, die der Zerlegungen der Hypotenuse $a_1 a_2$ ist gleich $2 = 2^1$. Angenommen die Anzahl der möglichen verschiedenen Zerlegungen der Hypotenuse $a_1 a_2 a_3 \; . \; . \; . \; . \; a_p$ ist gleich 2^{p-1}, so ist, da jede dieser Zerlegungen mit $a_{p+1} = m_{p+1}^2 + n_{p+1}^2$ zusammengesetzt zwei verschiedene Zerlegungen liefert, die Anzahl der möglichen verschiedenen Zerlegungen der Hypotenuse $a_1 a_2 a_3 \; . \; . \; . \; a_p a_{p+1}$ gleich $2^{p-1} \cdot 2 = 2^p$. Also ist die Anzahl der verschiedenen möglichen Zerlegungen von a gleich 2^{k-1}.

Eine Hypotenuse, die aus k verschiedenen einfachen Hypotenusen zusammengesetzt ist, läßt 2^{k-1} verschiedene Zerlegungen zu.

§ 31. Da die beliebige Zerlegung $m_x^2 + n_x^2$ die zur Hypotenuse gehörigen Katheten $m_x^2 - n_x^2$ und $2m_x n_x$, die keinen gemeinschaftlichen Faktor haben, liefert, so hat man nach § 30 den Satz:

Wenn eine Hypotenuse aus k einfachen verschiedenen Hypotenusen zusammengesetzt ist, so ist die Anzahl der zur Hypotenuse gehörigen Paare von Katheten, die relative Primzahlen sind, gleich 2^{k-1}.

§ 32. Ist a' ein Teiler der Hypotenuse a, also nach § 23 ebenfalls eine Hypotenuse, und

$$a = a'a'', \quad a' = m'^2 + n'^2, \quad a'^2 = (m'^2 - n'^2)^2 + (2m'n')^2,$$

so ist

$$a^2 = (a'a'')^2 = [(m'^2 - n'^2)a'']^2 + [(2m'n')a'']^2.$$

Jeder Teiler einer Hypotenuse liefert ein zur Hypotenuse gehöriges Paar von Katheten, die einen Faktor gemein haben.

§ 33. Es seien $a_1, a_2, a_3, \ldots a_k$ einfache Hypotenusen, $\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3, \ldots \alpha_k$ Primzahlen und

$$a_1 = \alpha_1^{p_1}, \quad a_2 = \alpha_2^{p_2}, \quad a_3 = \alpha_3^{p_3}, \quad \ldots a_k = \alpha_k^{p_k},$$

$$a = \alpha_1^{p_1} . \alpha_2^{p_2} . \alpha_3^{p_3} . \ldots . \alpha_k^{p_k}.$$

Die Teiler von a, die einfache Hypotenusen sind, sind die verschiedenen Potenzen der Primzahlen $\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3 \ldots . \alpha_k$, nämlich $\alpha_1, \alpha_1^2, \alpha_1^3, \ldots \alpha_1^{p_1}; \alpha_2, \alpha_2^2, \alpha_2^3, \ldots \alpha_2^{p_2}$ u. s. w., ihre Anzahl also gleich

$$p_1 + p_2 + p_3 + \ldots . + p_k = \Sigma \tbinom{k}{1},$$

wenn man allgemein die Summe der Produkte, die man erhält, wenn man die xte Klasse der Kombinationen (ohne Wiederholung) der Exponenten bildet, durch $\Sigma \binom{k}{x}$ bezeichnet. Angenommen die Anzahl der Teiler der Hypotenuse, die q verschiedene Grundfaktoren enthalten, sei gleich $\Sigma \binom{k}{q}$. Die Teiler, die $q + 1$ verschiedene Grundfaktoren enthalten, erhält man, wenn man die Teiler mit q verschiedenen Grundfaktoren mit den verschiedenen Potenzen der Grundfaktoren, die sie nicht enthalten, multipliziert, nämlich den Teiler, der die $k - q$ letzten Grundfaktoren nicht enthält, mit den p_{q+1} verschiedenen Potenzen von α_{q+1}, die Teiler, die die $k - q - 1$ letzten Grundfaktoren nicht enthalten, mit den p_{q+2} verschiedenen Potenzen von α_{q+2}, die Teiler, die die $k - q - 2$ letzten Grundfaktoren nicht enthalten, mit den p_{q+3} verschiedenen Potenzen von α_{q+3} u. s. w., die Teiler, die die beiden letzten Grundfaktoren nicht enthalten, mit den p_{k-1} verschiedenen Potenzen von α_{k-1} und schließlich die Teiler, die den letzten Grundfaktor nicht enthalten, mit den p_k verschiedenen Potenzen von α_k. Folglich ist die Anzahl der Teiler mit $q + 1$ verschiedenen Grundfaktoren gleich der Summe

$$[\Sigma \tbinom{q}{q}]\, p_{q+1} + [\Sigma \tbinom{q+1}{q}]\, p_{q+2} + [\Sigma \tbinom{q+2}{q}]\, p_{q+3} + \ldots + [\Sigma \tbinom{k-2}{q}]\, p_{k-1} + [\Sigma \tbinom{k-1}{q}]\, p_k.$$

Diese Summe ist aber die Summe der Produkte, die man erhält, wenn man die $(q + 1)$ste Klasse der Kombinationen der Exponenten bildet, ist also gleich $\Sigma \binom{k}{q+1}$. Folglich ist allgemein die Anzahl der Teiler, die x verschiedene Grundfaktoren enthalten, gleich $\Sigma \binom{k}{x}$. Da nach § 32 jeder dieser Teiler 2^{x-1} verschiedene Zerlegungen zuläßt, so liefern alle Teiler mit x verschiedenen Grundfaktoren $2^{x-1} \Sigma \binom{k}{x}$ Paare von Katheten. Hieraus ergiebt sich der Satz:

Zu jeder aus k verschiedenen einfachen Hypotenusen zusammengesetzten Hypotenuse gehören

$$2^0 \Sigma \tbinom{k}{1} + 2^1 \Sigma \tbinom{k}{2} + 2^2 \Sigma \tbinom{k}{3} + 2^3 \Sigma \tbinom{k}{4} + \ldots + 2^{k-1} \Sigma \tbinom{k}{k}$$

verschiedene Paare von Katheten. Die Katheten von 2^{k-1} Paaren sind relative Primzahlen, die der übrigen nicht.

Beispiele. Es sei a eine Hypotenuse und

$$a = \alpha_1^{p_1} . \alpha_2^{p_2} . \alpha_3^{p_3} . \alpha_4^{p_4} . \alpha_5^{p_5}.$$

$p_1 + p_2 + p_3 + p_4 + p_5 = \Sigma \binom{5}{1}$,

$p_1p_2 + (p_1 + p_2)p_3 + (p_1 + p_2 + p_3)p_4 + (p_1 + p_2 + p_3 + p_4)p_5 = \Sigma \binom{5}{2}$,

$p_1p_2p_3 + (p_1p_2 + p_1p_3 + p_2p_3)p_4 + (p_1p_2 + p_1p_3 + p_1p_4 + p_2p_3 + p_2p_4 + p_3p_4)p_5 = \Sigma \binom{5}{3}$,

$p_1p_2p_3p_4 + (p_1p_2p_3 + p_1p_2p_4 + p_1p_3p_4 + p_2p_3p_4)p_5 = \Sigma \binom{5}{4}$,

$p_1p_2p_3p_4p_5 = \Sigma \binom{5}{5}$.

Die Anzahl der Teiler, die einfache Hypotenusen sind, ist $\Sigma\binom{5}{1}$, die Anzahl der Teiler mit zwei einfachen Hypotenusen $\Sigma\binom{5}{2}$, die Anzahl der Teiler mit drei einfachen Hypotenusen $\Sigma\binom{5}{3}$, die Anzahl der Teiler mit vier einfachen Hypotenusen $\Sigma\binom{5}{4}$ und die Anzahl der Teiler mit fünf einfachen Hypotenusen $\Sigma\binom{5}{5}$. Also ist die Anzahl der Kathetenpaare

$$2^0\cdot\Sigma\binom{5}{1}+2^1\cdot\Sigma\binom{5}{2}+2^2\cdot\Sigma\binom{5}{3}+2^3\cdot\Sigma\binom{5}{4}+2^4\cdot\Sigma\binom{5}{5}$$

Zur Hypotenuse $5^3\cdot13^2\cdot17^2$ gehören

$$1\cdot(3+2+2)+2\cdot(3\cdot2+3\cdot2+2\cdot2)+4\cdot3\cdot2\cdot2,$$

also 87 Kathetenpaare; nur die Katheten von 4 Paaren sind relative Primzahlen.

§ 34. Sind die Hypotenusen des vor. Satzes, aus denen die Hypotenuse a zusammengesetzt ist, Primzahlen, so hat man sämtliche Exponenten gleich 1 zu setzen. Dadurch werden auch sämtliche Produkte in $\Sigma\binom{k}{x}$ gleich 1, ihre Summen als gleich ihrer Anzahl $\binom{k}{x}$. Oder: Die Teiler der Hypotenuse a, die x verschiedene Grundfaktoren enthalten, bilden die xte Klasse der der Kombinationen der Grundfaktoren selbst (nicht ihrer Exponenten), deren Anzahl $\binom{k}{x}$ ist; die letzte Klasse dieser Kombinationen liefert die Paare von Katheten, die relative Primzahlen sind. Also hat man den Satz:

Zu jeder aus k verschiedenen Primzahlen zusammengesetzten Hypotenuse gehören

$$2^0\binom{k}{1}+2^1\binom{k}{2}+2^2\binom{k}{3}+2^3\binom{k}{4}+\ldots+2^{k-1}\binom{k}{k}$$

verschiedene Paare von Katheten. Die Katheten von $2^{k-1}\binom{k}{k}$ Paaren sind relative Primzahlen, die der übrigen nicht.

Die Anzahl der Te … $(\frac{5}{1})$, die Anzahl der Teiler mit zwei einfachen Hypotenusen … nfachen Hypotenusen $\Sigma(\frac{5}{3})$, die Anzahl der Teiler mit vier … zahl der Teiler mit fünf ein-fachen Hypotenusen $\Sigma(\frac{5}{5})$.

$$2^0 \cdot \Sigma(\ldots \quad 2^4 \cdot \Sigma(\tbinom{5}{5})$$

Zur Hypotenuse 5^8 …

$$1 \cdot (3 \ldots \cdot 3 \cdot 2 \cdot 2,$$

also 87 Kathetenpaare; nur … Primzahlen.

§ 34. Sind die … die Hypotenuse a zusammen-gesetzt ist, Primzahlen, so … zu setzen. Dadurch werden auch sämtliche Produkte in … ch ihrer Anzahl $(\frac{k}{x})$. Oder: Die Teiler der Hypotenuse … lten, bilden die xte Klasse der der Kombinationen der Gru … ten), deren Anzahl $(\frac{k}{x})$ ist; die letzte Klasse dieser Kombinati … elative Primzahlen sind. Also hat man den Satz:

Zu jeder aus k … mengesetzten Hypotenuse gehören

$$2^0\tbinom{k}{1} \ldots 2^{k-1}\tbinom{k}{k}$$

verschiedene Paare von … $^1(\frac{k}{k})$ Paaren sind relative Primzahlen, die der üb …