Der mathematische Unterricht auf dem Gymnasium.

Nachdem die Beilagen der beiden ersten Programme der hiesigen höhern Lehranstalt den Eltern, die ihre Söhne derselben anvertraut haben, so wie den Freunden der Anstalt, die ihrer Entwicklung mit dauerndem Interesse gefolgt sind, auseinandergesetzt haben, welche Bedeutung dem Unterrichte in der deutschen und der lateinischen Sprache vom Lehrer-Collegium beigelegt wird, und in welcher Weise demgemäß diese Lehrgegenstände behandelt werden; ist der diesjährigen Beilage die Aufgabe gestellt, sich in gleicher Weise über Zweck und Behandlung der Mathematik als Unterrichtsgegenstand des Gymnasiums mit dem Publikum auseinander zu setzen. Hat schon die vorjährige Abhandlung den Anspruch auf den Charakter einer wissenschaftlichen Abhandlung (auf theoretische Vollkommenheit) von sich abgelehnt, so sieht sich der Verfasser der vorliegenden Blätter in die Nothwendigkeit versetzt, auch in praktischer Beziehung die Nachsicht namentlich der Fachgenossen, denen dieselben etwa in die Hände kommen, in Anspruch nehmen zu müssen, und glaubt sich derselben um so eher versichert halten zu dürfen, da ihm erst eine kaum dreijährige Praxis zur Seite steht.

Die Frage, ob der Mathematik unter den Lehrgegenständen des Gymnasiums ein besonderer Platz zustehe, oder ob sie nicht vielleicht der ausschließlichen Pflege der Fachschulen zuzuweisen sei, welche auf Berufsarten vorzubereiten haben, bei denen die Mathematik praktisch zur Anwendung kommt, könnte als erledigt angesehen werden im Hinblick auf die Erlasse der Behörden, welche der Mathematik die Bedeutung eines der wichtigsten Factoren bei der Beurtheilung der geistigen Reife schon längst gesichert haben; sie kann aber nicht als erledigt angesehen werden im Hinblick auf so Viele, welche, obgleich sie sich zu den Gebildeten rechnen, als Grund jener Bedeutung, wenn sie ehrlich sein wollen, keinen andern anzugeben wissen, als eben jene Erlasse. Diese sonderbare Verwechslung von Ursache und Folge steht jedoch im innigsten Zusammenhange mit einer hin und wieder immer noch auftauchenden irrigen Auffassung der Bedeutung des Gymnasial-Unterrichts, welche davon ausgeht, daß die Schule für das Leben vorzubereiten, also nicht die Aneignung von Kenntnissen zu vermitteln habe, die dann im Leben nicht zur Anwendung kommen. Würde die Mathematik auf dem Gymnasium nur der späteren Anwendung wegen betrieben, so hätten diejenigen vollkommen Recht, welche sie aus dem Lehrplane des Gymnasiums gestrichen wünschen; doch den Ansprüchen derer, welche sich in der Schule die zu ihrem künftigen Berufe nöthigen Kenntnisse und Fertigkeiten erwerben müssen, weil sie unmittelbar nach ihrem Austritte aus derselben genöthigt sind, in die Maschine des geschäftlichen Lebens selbst thätig einzugreifen, also dann nicht mehr Zeit haben, sich die dazu nöthigen Kenntnisse und Fertigkeiten anzueignen, ist das Gymnasium um so weniger zu genügen verpflichtet, seitdem ihnen in höheren Bürgerschulen, Realschulen, Gewerbeschulen und ähnlichen Lehranstalten hinreichend Gelegenheit geboten wird, ihr Bedürfniß zu befriedigen.

Doch während der größte Theil der Menschen in der Beschaffung dessen, was zur Befriedigung der leiblichen Bedürfnisse des menschlichen Lebens nothwendig ist, seine Lebensaufgabe findet, und nothwendig finden muß, ist wenigen Auserwählten die beneidenswerthe Aufgabe zugefallen, den seit Jahrtausenden unter mannigfachen Kämpfen und Mühen errungenen geistigen Schatz der Menschheit, die *Wissenschaft* im weitesten Sinne dieses Wortes, zu erhalten, zu sichten, zu vermehren und so der Nachwelt zu überliefern. Die Schatzkammern dieses wissenschaftlichen Schatzes sind die *Universitäten*; doch nicht Jeder, der hineinkommt, wird ein brauchbarer Hüter und Mehrer des Schatzes der Wissenschaften, wenn er nicht schon vom *Gymnasium* einen *regen Sinn* für wissenschaftliches Streben, einen *scharfen Blick* für wissenschaftliche Untersuchung mitgebracht hat. *Hauptaufgabe des Gymnasiums* ist es also, *den Geist für eine wissenschaftliche Thätigkeit tüchtig zu machen und das Herz für dieselbe zu erwärmen.* Wird dies als Hauptaufgabe des Gymnasiums zugestanden, so kann es keinem Zweifel mehr unterliegen, daß der Mathematik eine der ersten Stellen unter den Disciplinen des Gymnasiums gebührt; denn gerade sie ist am meisten geeignet, den Sinn für echte Wissenschaftlichkeit zu fördern, weil gerade durch sie der jugendliche Geist sich am besten an eine systematische Gedankenentwickelung gewöhnt und auf diese Weise einen deutlichen Begriff von dem erhält, was Wissenschaft genannt wird.

Die Mathematik wurzelt, wie die Philosophie, in der menschlichen Erkenntniß, und entschlägt sich, wie jene, aller Beihülfe der Erfahrung; aber während bei jener selbst über die Principien des menschlichen Wissens noch keine Einheit der Ansichten erzielt werden konnte, treten die Lehrsätze sowohl, als auch die Beweise der Mathematik mit einer so unwiderleglichen Evidenz auf, daß dieselbe geradezu sprichwörtlich geworden ist. Daher hat die Mathematik von jeher als Muster einer Wissenschaft gegolten; darum haben die alten Griechen, bei denen sie nach Cicero's Zeugnisse in hohen Ehren stand, sie die Wissenschaft *κατ᾽ ἐξοχήν* (*ἡ μαθηματική* scil. *ἐπιστήμη* von *μαθεῖν*, gelernt haben, wissen) genannt; darum hat auch Plato Keinem ohne mathematische Vorbildung (*ἀγεωμέτρητος*) zu seinem Hörsaale den Zutritt gestattet.

Doch Viele, weit entfernt, der Mathematik etwas von ihrer Würde zu rauben, oder ihre weit reichende Bedeutung zu verkennen, wünschen dieselbe gleichwohl aus dem Gymnasiallehrplane beseitigt, oder doch nur auf die obersten Klassen beschränkt, weil sie *für das Knabenalter zu schwer* sei und die von ihr geforderte Abstraktionsfähigkeit sich erst in reiferen Jahren einfinde, und in der That findet der Lehrer der Mathematik namentlich in der Quarta, wo auf den meisten Gymnasien der eigentlich mathematische Unterricht beginnt, wie ein bewährter Schulmann sich ausdrückt, „neben dem besten Willen der Schüler, etwas zu lernen, sehr oft das Erstaunen derselben, daß sie nun denken und immer nur denken sollen" während sie bisher ihre Paradigmen und Vocabeln, zwar oft mit lobenswerthem Fleiße, doch meist nur gedächtnißmäßig verarbeiteten. Er sieht oft die besten und willigsten Schüler da sitzen und darauf warten, daß es etwas auswendig zu lernen gebe, während es ihm selbstverständlich nicht um das Auswendiglernen, sondern um das Verstehen zu thun sein kann; oder warten, daß ihnen eine Rechnungsregel gegeben werde, nach welcher sie *schablonenmäßig* eine Reihe von Aufgaben abhaspeln können, welche sie aber durchaus *selbst finden* müssen, wenn sie ihnen nicht ein todter bald vergessener Buchstabe bleiben, sondern ihr geistiges Eigenthum werden soll. Es ist in der That nicht zu verkennen, daß der Schüler, der bisher nur an die Vorstellung concreter Dinge gewöhnt war, einen gewaltigen Schritt zu thun hat, wenn er nun mit einem Male das **rein Abstracte** fassen soll, und der Lehrer wird oft lange warten müssen, ehe der Schüler sich zu diesem Schritte zusammenrafft, und er befindet sich dabei noch in der üblen Lage, daß er selbst nicht viel helfen, den Schritt nicht viel erleichtern, sondern nur ermuntern und den oft sinkenden Muth nur wieder beleben kann; denn ein ungeduldiges Vorgreifen von Seiten des Lehrers würde in der Mathematik noch viel mehr, als es im vorjährigen Programme in Bezug auf den lateinischen Unterricht auseinandergesetzt worden ist, der freien „Selbstthätigkeit" und der „eigenen geistigen Anstrengung und Ueberlegung" des Schülers nicht nur entschieden Abbruch thun, sondern dieselbe gar bald gänzlich aufheben; da ein Schüler auf dieser Altersstufe lieber zehn vom Lehrer gehörte Sätze behält und nachspricht, als einen selbst producirt. Hat dagegen der Lehrer warten gelernt, so wird der Schüler zur selbstständigen Thätigkeit genöthigt; er rafft seine Kräfte zusammen und gelangt so zu der freudigen Ueberzeugung, daß er doch auf den eigenen Füßen zu stehen vermag, daß er selbst denken, selbst eine Regel, einen Beweis finden, selbst eine Aufgabe lösen kann, und dann giebt sein freudiger Eifer gerade bei solchen Uebungen dem Lehrer den hinreichenden Beweis dafür, daß er nicht zu früh versucht hat, die selbstständige Thätigkeit in dem jugendlichen Geiste wachzurufen. Wollte man nun einwenden, daß dies auf einer höheren Altersstufe mit geringerer Schwierigkeit geschehen könne, so läßt sich darauf erwidern, daß einerseits die Schwierigkeit des Schrittes zur reinen Abstraction, genau besehen, nicht sehr erheblich abnimmt, wenn man diesen Schritt auch noch so weit hinausschiebt, und daß andererseits schon der anderen Gymnasialdisciplinen wegen die selbstständige Verstandesthätigkeit des Schülers nicht früh genug entwickelt werden kann. Somit würde ein Versparen der Mathematik auf die oberen Klassen als ein entschiedener Mißgriff anzusehen sein; denn sie ist es eben, die den Schüler zum Denken zwingen soll. Sie soll den flatterhaften, zerstreuten Sinn des Kindes an ein Sammeln und Zusammenhalten seiner Gedanken gewöhnen, und ihn von dem so häufigen, aber zugleich so gefährlichen Träumen im wachen Zustande entwöhnen; darum leidet sie keinen nebelhaften Gedanken, ja kein unnützes Wort, dringt vor Allem auf Schärfe und Präcision des Ausdrucks und fordert, daß stets alles Nothwendige, doch nie etwas Ueberflüssiges vorgebracht werde.

Noch schroffer stellen sich die Angriffe derer, welche behaupten, die **Mathematik** sei überhaupt **nicht Jedermanns Sache**, und **Bekanntschaft mit ihr gehöre nicht zur allgemeinen wissenschaftlichen Bildung**, da es bekanntlich ganz geistreiche Leute gebe, die von Mathematik wenig oder nichts verstünden, und welche ihre Behauptung namentlich durch den Umstand erhärten zu können glauben, daß es viele in den übrigen Fächern, namentlich in den alten Sprachen recht gut bewanderte Schüler gebe, welche in der Mathematik wenig oder nichts leisteten. Die Grundlosigkeit dieses Einwandes hat eine Abhandlung von Erler („Zur Vertheidigung der gegenwärtigen Stellung der Mathematik auf den preußischen Gymnasien." Mützell, Zeitschr. f. d. Gymnasialw. Jahrg. X. S. 609—640) durch selbstredende Thatsachen mit so überzeugender Evidenz nachgewiesen, daß wir uns hier füglich darauf beschränken können, auf jene Abhandlung hingewiesen zu haben. Mathematik kann Jeder lernen, der nicht überhaupt zu dumm ist; denn die Mathematik erfordert nicht ein besonderes Talent, wie Musik, Malerei, Poesie u. dergl. Sie verlangt weiter nichts, als einen ganz gewöhnlichen **gesunden Menschenverstand**; diesen aber kann sie freilich nicht entbehren. Wer trotz aller Mühe und trotz des angestrengtesten Fleißes in der Mathematik durchaus zu keiner Klarheit kommen kann, der verräth dadurch einen sehr bedenklichen Mangel an logischer Denkkraft und sollte grade deshalb lieber von einem Lebensberufe zurücktreten, der eine wissenschaftliche Beschäftigung zu seiner Voraussetzung hat, da ihm zu dieser das wesentlichste Erforderniß abgeht. Daher bietet grade die mathematische Leistungsfähigkeit eines Abiturienten mit Recht einen der wichtigsten Factoren bei der Beurtheilung seiner geistigen Reife.

Eine andre Art von Gegnern der Mathematik kann hier ebenfalls nicht außer Acht gelassen werden. Es sind diejenigen, welche behaupten, die Mathematik gebe dem Geiste eine vorwiegende Verstandesrichtung und beeinträchtige dadurch die nicht minder hoch anzuschlagende Gemüthsbildung, ein Einwurf, der, wenn er begründet wäre, allein ausreichen würde, die Mathematik trotz aller andern Vortheile für immer von einer Lehranstalt zu verbannen, welche sich die gleichmäßige und harmonische Ausbildung der gesammten geistigen Kräfte ihrer Schüler zur Aufgabe gestellt hat. Allerdings übt grade die Mathematik auf ihre Jünger eine um so stärkere Anziehungskraft, je mehr sie den Anfänger durch ihre unerbittliche Strenge und ihre trockne Einfachheit oft abstößt; doch grade die Beispiele der hervorragendsten Mathematiker zeigen, daß man dieser Wissenschaft ganz ergeben sein kann und doch für andre Wissenschaften nicht gleichgültig zu sein braucht: Des Cartes hat nicht nur durch seine analytische Geometrie der mathematischen Untersuchung neue Bahnen eröffnet, sondern ist zu gleicher Zeit der Vater der neuern Philosopie geworden; Leibnitz hat nicht nur den Infinitesimalcalcul erfunden, sond.rn auch die Berliner Akademie der Wissenschaften gegründet und sowohl in der Philosophie, als auch in der Geschichtsschreibung neue, z. Th. jetzt noch betretene Bahnen eröffnet. Daß es andrerseits mathematische Sonderlinge gegeben hat und noch giebt, welche, den Kopf voll lauter Zahlen und Größenverhältnisse, dem wissenschaftlichen Leben im Allgemeinen Auge und Ohr verschließen und für Kunstinteressen erst recht jedes lebendigen Sinnes entbehren, soll hier nicht in Abrede gestellt werden; indeß wird wohl auch Niemand bestreiten wollen, daß jede andre der auf dem Gymnasium gepflegten Disciplinen wenigstens eben so viele, wo nicht mehr solcher närrischen Käuze aufzuweisen hat, daß es beispielsweise mehr „eingefleischte" Philologen, als eingefleischte Mathematiker giebt und daß ein eingefleischter Philologe eben so gut für alles Andre todt sein kann, wie ein eingefleischter Mathematiker. Daß aber ein 3- bis 4stündiger mathematischer Unterricht gegenüber dem auf 16 wöchentliche Stunden ausgedehnten Unterrichte in den klassischen Sprachen im Stande sein soll, dem Geiste eine vorwiegende Verstandesrichtung zu geben und das Gefühlsleben zurückzudrängen, muß als eine gradezu lächerliche Behauptung zurückgewiesen werden, und wir würden uns gar nicht erklären können, wie eine solche Behauptung auch nur aufgestellt werden konnte, wenn wir nicht recht gut wüßten, wie sehr einerseits die Mathematik, selbst nach dem Geständnisse ihrer Gegner, „in den Köpfen aufräumt", und wie unbequem andrerseits eine mathematische Vorbildung, die überall nach den Gründen fragen lehrt und keine Wirkung ohne Ursache begreifen will, in einem Erziehungssysteme werden muß, welches seine Hauptstütze im blinden Autoritätsglauben sucht und lange Zeit gefunden hat, und welches aller streng wissenschaftlichen Untersuchung eben so fern steht, wie der Mathematik.

Kann diese Ausführung als hinreichend erachtet werden, um den Anspruch der Mathematik auf eine hervorragende Stelle unter den Disciplinen des Gymnasiums zu begründen, so würde nun noch nachzuweisen bleiben, welche Stelle unter diesen Disciplinen ihr eigentlich gebühre. Um diesen Nachweis führen zu können ist es nöthig, noch einmal auf die Bestimmung des Gymnasiums zurückzukommen.

Der hauptsächlichste Zweck des Gymnasiums ist schon oben in einer Vorbereitung für das akademische Studium gefunden worden; das Gymnasium soll aber auch der großen Menge derer gerecht werden, welche auf demselben ihre Schulbildung abschließen, um sofort ins praktische Leben überzugehen, wie dies für viele Zweige, namentlich der staatlichen Verwaltung, von Staats wegen gestattet ist. Es sind dies besonders solche Berufsarten, welche besondre, vorher zu erwerbende praktische Kenntnisse und Fertigkeiten nicht verlangen, wohl aber eine allgemeine wissenschaftliche Bildung, wie sie als Vorbildung eben auch von denen gefordert wird, welche sich einem speciellen Studium der Wissenschaften widmen wollen. Eine allgemeine wissenschaftliche Bildung ist es also, welche das Gymnasium seinen Schülern mitzutheilen hat. Was gehört nun aber zu einer allgemeinen wissenschaftlichen Bildung? oder: Was verlangt man heutzutage von einem wissenschaftlich gebildeten Manne? Man verlangt von ihm vornehmlich dreierlei:

Erstens soll er nicht unbekannt sein mit der Natur, die ihn umgiebt und mit den Gesetzen, welchen sie gehorcht; nicht unbekannt mit der Erde, die er bewohnt, mit ihrer Stellung im Weltgebäude, wie mit ihrer Bedeutung als Wohnplatz der Menschen, nicht unbekannt mit der allmähligen Entwicklung des Menschengeschlechts, so wie mit dem, was durch die ununterbrochene geistige Arbeit des Geschlechts von seinem Beginne bis auf unsere Tage errungen worden ist.

Zweitens soll er denken können, d. h. er soll es verstehen, seine Gedanken zu concentriren und logisch zu entwickeln, Begriffe klar und bestimmt zu markiren, und sich der Gründe des für wahr Erkannten überall bewußt sein.

Drittens soll er im Stande sein, das klar und richtig Erkannte auch klar und in angemessener Form, mündlich sowohl als schriftlich, Andern mitzutheilen.

Doch soll dieses Wissen und Können nicht zusammenhangloses Stückwerk bleiben, so muß es von echt religiösem Geiste zusammengehalten und getragen werden. Wie ein solcher nicht blos in den Religionsstunden, sondern im ganzen Unterrichte durch Lehre, Zucht und Beispiel zu pflegen sei, und wie hierbei namentlich die ethische Seite gegenüber der sich oft allein breit machenden dogmatischen besonders hervorzuheben sei, das kann gar nicht oft genug hervorgehoben, gar nicht nachdrücklich genug betont werden.

Die erste der oben aufgestellten Forderungen sucht das Gymnasium zu befriedigen durch den Unterricht in der Naturbeschreibung und Naturlehre, in Geographie und Geschichte, so wie durch das durch die alten Sprachen vermittelte Studium des classischen Alterthums.

Die Befriedigung der zweiten Forderung hat die Mathematik übernommen, ohne jedoch die mächtige Beihülfe des fremdsprachlichen (namentlich des lateinischen) Unterrichts zu verschmähen.

Die Befriedigung der dritten Forderung endlich, welche die Befriedigung der beiden ersten mit involvirt, fällt ebenfalls dem fremdsprachlichen Unterrichte zu; denn erst beim Studium der fremden Sprache wird uns das Wesen der Muttersprache verständlich und durchsichtig, erst durch jene lernen wir einsehen, was an dieser nothwendig, was zufällig ist.

Die wenigen Stunden, welche der Muttersprache zugewiesen sind, sind deshalb vorzugsweise, wenn auch nicht ausschließlich, der mündlichen und schriftlichen Uebung zuzuwenden. Was der Schüler in den andern Stunden gelernt hat, wie er geistig fortgeschritten ist, soll er im deutschen Aufsatze bekunden. Daher wird der deutsche Aufsatz mit Recht als der wesentlichste Factor bei der Beurtheilung der geistigen Reife eines Abiturienten angesehen.

In der vorstehenden Auseinandersetzung liegen zugleich die Antworten auf manche andre Fragen, welche hin und wieder aufgeworfen worden sind: Wie man lange Zeit hindurch die lateinische Sprache fast allein für ausreichend halten konnte, eine allgemeine wissenschaftliche Bildung zu gewähren, und warum dieselbe mit Recht noch jetzt den Centralpunkt des ganzen Gymnasialunterrichts bilde; warum dieselbe nicht durch eine der neueren Sprachen ersetzt werden könne; warum der Unterricht in der Muttersprache trotz seiner Wichtigkeit sich mit so wenigen Stunden begnügen könne u. s. w.; doch auf die Frage, warum der naturwissenschaftliche Unterricht auf manchen Gymnasien ganz wegfallen dürfe, und warum nicht vielmehr gefordert werde, daß jedes Gymnasium eine hierfür geeignete Lehrkraft aufweise, wird man vergebens eine Anwort suchen.

So wäre denn die Stelle, welche die Mathematik unter den Disciplinen des Gymnasiums einzunehmen hat, bezeichnet, und es bliebe nur noch zu untersuchen, mit welchen Mitteln und in welcher Weise sie zu wirken hat, um den in dieser Stelle an sie gestellten Anforderungen zu genügen.

Dem oben ausgesprochenen Grundsatze gemäß, nach welchem das Gymnasium nicht sowohl die dem praktischen Leben nöthigen Kenntnisse und Fertigkeiten vermitteln, sondern vielmehr eine allgemeine wissenschaftliche Bildung gewähren, eventualiter für eine specielle Beschäftigung mit den Wissenschaften vorbereiten soll, muß es als einleuchtend erscheinen, daß es nicht der Zweck der Mathematik auf dem Gymnasium sein kann, dem Schüler eine Fertigkeit im Lösen geometrischer und arithmetischer Aufgaben beizubringen, die er dann in vielen Lebensverhältnissen praktisch verwerthen könne; denn sonst müßte man denen Recht geben, welche behaupten, daß ein solcher Nutzen namentlich für den künftigen Theologen, Juristen und Mediciner gegenüber der vielen auf die Mathematik verwendeten Mühe gar nicht in Betracht kommen könne und daß deshalb, zumal, da der Schüler ja doch wenige Jahre nach seinem Abgange von der Schule in der Regel das Meiste wieder vergessen habe, die künftigen Theologen, Juristen und Mediciner, wo möglich auch die Philologen von dem Unterrichte in der Mathematik zu dispensiren seien. Doch wenn auch, wie wir selbst gern zugeben, derjenige, welcher sich nach seinem Abgange von der Schule mit der Mathematik nicht weiter beschäftigt, das, was er sich an praktischer Fertigkeit erworben hat, in der Regel binnen wenigen Jahren meist vergißt; so wird ihm gewiß e i n e Frucht der Mathematik für das ganze Leben bleiben: durch sie hat er scharf denken gelernt, und das wird er nicht so leicht vergessen. Daher wird auch beim Unterrichte in der Mathematik die U e b u n g d e r D e n k k r a f t das Hauptaugenmerk sein müssen und überall vor der praktischen Fertigkeit in den Vordergrund zu treten haben. Nur hin und wieder wird der Lehrer auf die praktische Anwendung der im Unterrichte gewonnenen Lehrsätze und Regeln hinweisen, um den weitgreifenden Einfluß der Wissenschaft auf das Leben erkennen zu lassen und dadurch das Interesse an der Wissenschaft selbst rege zu erhalten. Bei der Beurtheilung der geistigen Reife eines Schülers wird jedoch die Klarheit in der Auffassung des ganzen wissenschaftlichen Systems vor der praktischen Fertigkeit desselben weit in den Vordergrund treten müssen, und auch die Data der gestellten Aufgaben werden sich im Allgemeinen mehr der wissenschaftlichen, als der praktischen Seite zuzuwenden haben. Ist aber die klare Einsicht in das System die erste Anforderung an die Reife des Schülers, so ist der stete Hinweis auf den systematischen Zusammenhang der einzelnen Sätze die erste Anforderung an den Unterricht. Der Schüler soll nicht gedankenlos durch die Reihe der im Lehrbuche aufgestellten Sätze hindurch geführt werden und nicht den Beweis eines jeden als ein neues Kunststück ansehen, sondern genöthigt werden, sich den innern Zusammenhang der einzelnen Sätze klar zu machen, so daß sie ihm als eine ununterbrochene Kette aus einander folgender Wahrheiten erscheinen. Er soll begreifen lernen, daß der Beweis eines Satzes im Grunde nichts Anderes ist, als die Aufzählung derjenigen Sätze, durch welche der zu beweisende Satz mit dem ganzen Systeme zusammenhängt.

Auf der andern Seite ist der Schüler anzuleiten, aus einer Menge bereits als richtig erkannter Wahrheiten neue Wahrheiten selbst aufzufinden; so wie er auch anzuleiten ist, die verschiedenen Formen, unter denen eine und dieselbe Wahrheit auftreten kann, zusammenzustellen. Der Schüler wird sich also nicht dabei beruhigen dürfen, daß der eine Satz im Lehrbuche seine Umkehrung neben sich hat, der andre nicht; sondern sich gewöhnen müssen, angeben zu können, warum ein bestimmter Satz keine Umkehrung zulasse, oder, unter welche Form er gebracht werden müsse, damit eine Umkehrung möglich sei. Der Lehrer wird beispielsweise auch aus Schülern auf einer Altersstufe, für welche auf die logische Unterscheidung des kategorischen und hypothetischen Urtheils einzugehen nicht gerathen wäre, doch leicht herausbringen können, daß der Satz: „Alle rechten Winkel sind einander gleich" nicht die Umkehrung haben kann: „Alle gleichen Winkel sind rechte", wohl aber der Satz: „Wenn mehrere Winkel rechte sind, so sind sie einander gleich" umgekehrt lautet: „Wenn von mehreren Winkeln einer ein rechter ist, so sind sie es alle" u. s. w.

So wird der Lehrer, ausgehend von allgemeinen, unbestreitbaren Grundsätzen, den Schüler gewöhnen, Neues nur auf das bereits klar Erkannte zu basiren. So wird er ihn allmählig vom Leichtern zum Schwerern fortführen, und nachdem der Schüler es in der Geometrie zu einiger Geläufigkeit in der directen und indirecten Beweisführung gebracht hat, nachdem er sich in der Arithmetik an Genauigkeit und Ausdauer auch für langwierige Rechnungen gewöhnt hat, werden ihm in jener der Begriff der Incommensurabilität, in dieser der Begriff der Irrationalität genug neue Schwierigkeiten bieten, um ein Versinken in einen gefährlichen Mechanismus zu verhindern, bis auf der obersten Stufe die Begründung der allgemeinen Zahlengesetze sein Abstractionsvermögen, die Stereometrie sein Anschauungsvermögen noch weiter zu entwickeln ganz besonders geeignet ist, während die Trigonometrie ganz dazu geschaffen scheint, einen klaren Einblick in den Zusammenhang der beiden mathematischen Disciplinen zu erschließen. Die Lösung der Constructionsaufgaben ist das geeignetste Mittel, das Erfindungstalent zu wecken, während die nach Ansicht des Verfassers oft zu sehr in den Hintergrund gestellte Determination bei solchen Aufgaben vortrefflich geeignet ist, den Scharfsinn zu entwickeln und an ein gründliches Eingehen auf alle Einzelheiten einer Aufgabe zu gewöhnen. Auch die Synthesis in Worten gegebener Gleichungen verlangt, da sie allgemeine Regeln nicht aufstellt, in jedem einzelnen Falle besondre Ueberlegung.

Die zuletzt angeführten Bemerkungen lenken unsre Aufmerksamkeit auf einen Punkt, der hier nicht mit Stillschweigen übergangen werden kann. Die häuslichen mathematischen Arbeiten der Schüler unterscheiden sich von denen in andern Fächern dadurch, daß, während diese auch von den schwächsten Schülern geleistet werden können (nur mit mehr Fehlern, als sich in den Arbeiten der bessern Schüler vorfinden), viele von den Aufgaben der Mathematik, und zwar grade die bildendsten, von der Art sind, daß sie entweder richtig oder gar nicht gelöst werden können, so daß sich der schwächere Schüler, der den Zusammenhang der Aufgabe mit dem bisher Erlernten nicht aufzufinden versteht, so wie der Träge, dem bei seinem lückenhaften Wissen nicht alles zur Lösung der Aufgabe nöthige Material zu Gebote steht, oft in die unangenehme Alternative versetzt sieht, entweder gar keine Arbeit abliefern zu können, oder bei der Anfertigung derselben fremde Hülfe benutzen zu müssen. Da nun das Erstere schon deshalb nicht gestattet werden kann, um nicht der Trägheit Einzelner einen bedenklichen Vorschub zu leisten, so bleibt in der That oft nur der zweite Ausweg übrig, und derselbe würde auch gar keine Bedenken haben, wenn er nicht leider zu oft zu gedankenlosem Abschreiben führte, bei welchem die Aufmerksamkeit des Schülers meist mehr darauf gerichtet ist, wie dem Lehrer die Benutzung der fremden Hilfe möglichst unmerklich gemacht werden könne, als auf eine klare Einsicht in die Aufgabe selbst. So leicht nun der Schüler grade in der Mathematik zu einem solchen Verfahren verleitet wird, so gefährlich ist andrerseits dieses Verfahren grade in dieser Disciplin, wo jede Lücke den empfindlichsten Nachtheil für die weitere Fortbildung zur Folge hat, und darum ist es die ganz besondre Pflicht grade des mathematischen Lehrers einem solchen Unwesen mit allen ihm zu Gebote stehenden Mitteln zu steuern. So leicht sich nun aber grade bei mathematischen Arbeiten, wenn es dem Lehrer darum zu thun ist, Abschreibereien oft an ganz unbedeutenden Merkmalen, zuweilen grade daran, wodurch der Schüler sie zu verhüllen beabsichtigte, erkennen lassen, so schwer ist es andrerseits anerkanntermaßen, grade hierin gründliche Abhilfe zu schaffen.

Der Verfasser glaubt in folgendem Verfahren ein wirksames Mittel gefunden zu haben:

Wer mit einer Aufgabe trotz aller angewendeten Mühe nicht zu Stande kommt, dem ist der Lehrer gern bereit, nach der Klasse oder auch zu Hause die erforderliche Auskunft zu ertheilen. Auch ist fremde Beihülfe bei den Arbeiten gradezu gestattet, und es wird nur verlangt, daß bei der Abgabe der Arbeit auf Befragen des Lehrers diejenigen sich melden, welche bei der Abfassung derselben eine solche Beihülfe (sei es nun durch Privatunterricht, sei es durch die Eltern oder ältern Geschwister, durch Mitschüler oder andre Personen, oder endlich durch Bücher) benutzt haben, und zugleich angegeben, worin dieselbe bestanden und wie weit sie sich erstreckt habe. Sehen nur die Schüler, daß der Lehrer ein solches Geständniß stets ohne Vorwurf aufnimmt, so werden sie sich bald gewöhnen, ihm auch hierin offen und ehrlich entgegen zu kommen. Geschieht dies aber, so ist damit dem Lehrer die Möglichkeit einer gerechten Beurtheilung der einzelnen Leistungen geboten, abgesehen davon, daß eine solche Gewöhnung der Schüler, auch mit ihren Schwächen offen und ehrlich vor das Auge des Lehrers hinzutreten, diesem erst Gelegenheit giebt, solche Schwächen noch bei Zeiten zu beseitigen, und daß eine solche Offenheit auch in Rücksicht der Charakterbildung gar nicht hoch genug angeschlagen werden kann in dem Erziehungsplane einer Bildungsanstalt, die ihre Aufgabe eben so sehr in der Veredlung des Charakters sucht, als in der Entwicklung der Intelligenz. Durch ein solches Verfahren erwächst nun aber dem Lehrer ein Recht, in Fällen, wo trotzdem eine Täuschung versucht wird, mit der unnachsichtigsten Strenge zu verfahren.

Statt einer eingehenden Besprechung des mathematischen Unterrichts auf den verschiedenen Lehrstufen gestattet uns der beschränkte Raum nur noch einige abgerissene Bemerkungen über unsern Lehrplan und die demselben zu Grunde liegenden Lehr- und Uebungsbücher.

Der Rechenunterricht in den drei untersten Klassen lehnt sich an die eben so weit verbreiteten als rühmlichst bekannten Rechenhefte von Stubba an, die durch die Mannichfaltigkeit und vielseitige Abwechslung ihrer Aufgaben (von denen, namentlich in den späteren Heften, jede ein besondres Nachdenken in Anspruch nimmt) ein schablonenmäßiges Rechnen hindern, und, da sie sich alles Regelwerkes durchaus enthalten, der Methode des Lehrers den freiesten Spielraum gestatten. Da die Proportionslehre in der Regel erst in Tertia eine eingehendere Behandlung erfährt, und deshalb der Proportionsansatz in der Regeldetri und den damit zusammenhängenden sogenannten bürgerlichen Rechnungsarten trotz aller Mühe des Lehrers für viele Schüler doch sehr bald todte Formel wird; so erscheint es zweckmäßiger, diese Rechnungen lieber auf den jetzt deshalb auch wohl ziemlich allgemein eingeführten sogenannten Einheitssatz zu basiren.

Im geometrischen Unterrichte der Quarta bildet die Lehre von den parallelen Linien die Hauptschwierigkeit. Wir wären gar nicht abgeneigt, diese Lehre nach dem Vorgange des trefflichen Lehrbuches von Kunze auf den Begriff der Aequidistanz zu stützen, welcher sich ohne Weiteres auch auf krumme Linien und ebene sowohl, als auch gekrümmte Flächen anwenden läßt, wenn man dadurch nicht genöthigt würde, die Lehre von den parallelen Linien bis hinter einen großen Theil der Lehre von den Dreiecken hinauszuschieben. Uebrigens können wir uns denen nicht anschließen, welche den auch in dem hier eingeführten Lehrbuche von Kambly angewendeten Begriff der Richtung als durchaus unbrauchbar verwerfen wollen, und wenn auch der Ausdruck „Richtungsunterschied" anstößig sein sollte, da man nicht von Größe der Richtung, also auch nicht von einem Unterschiede der Richtung sprechen kann, so läßt sich ein gleicher Einwand wohl nicht gegen den Ausdruck: „Abweichung der Richtung" erheben. Das Bedenklichste der Kambly'schen Darstellung scheint uns in dem kurzen „d. h." des Beweises zur ersten Behauptung des § 27 zu liegen; da der Lehrer, wenn er hinter dieses „d. h." im entwickelnden Unterrichte ein Fragezeichen stellen wollte, gewärtig sein müßte, daß ihm von Vielen auch geantwortet würde „$n = t$, u. s. w.", und da es doch mißlich erscheint, nun nachträglich erst darauf aufmerksam zu machen, daß E F beide Mal in derselben Richtung zur Bildung des Winkels zu benutzen sei. Ein solches Mißverständniß kann vermieden werden, wenn man die correspondirenden Winkel, die sich auch durch den Umstand von Wechselwinkeln und entgegengesetzten Winkeln unterscheiden, daß sie nicht blos bei zwei Linien, sondern eben so bei einer größeren Anzahl von Linien auftreten, besonders vorwegnimmt und die ganze Lehre von den Parallelen etwa, wie folgt, einleitet:

Eine grade Linie A B kann man sich entstanden denken: entweder, indem sich ein Punkt in der Richtung von A nach B, oder indem sich derselbe in der entgegengesetzten Richtung von B nach A bewegt. Jede grade Linie vereinigt also in sich zwei einander entgegengesetzte Richtungen. Im Allgemeinen ist es gleichgültig, welche dieser beiden Richtungen man bei einer graden Linie in Betracht zieht; in manchen besondern Fällen wird man jedoch beide von einander unterscheiden müssen.

Erklärung. Wenn mehrere grade Linien von einer und derselben graden Linie geschnitten werden, so entstehen auf jeder Seite der schneidenden graden Linie an jedem Durchschnittspunkte zwei Winkel: a, b; a', b'; a'', b''; u. s. w., je nachdem man die eine Richtung der Schneidenden zur Bildung des Winkels benutzt denkt, oder die entgegengesetzte. Diejenigen Winkel nun, welche einer und derselben Richtung der Schneidenden entsprechen, a, a', a'' u. s. w., heißen unter sich correspondirende (entsprechende) Winkel; eben so diejenigen, b, b', b'' u. s. w., welche der entgegengesetzten Richtung entsprechen. In gleicher Weise erhält man auf der andern Seite der Schneidenden zwei Reihen correspondirender Winkel: c, c', c'' u. s. w., und d, d', d'', u. s. w.

Lehrsatz. Wenn mehrere grade Linien von einer und derselben graden Linie geschnitten werden, und die Winkel einer Reihe correspondirender Winkel unter einander gleich sind, so sind auch die Winkel jeder der andern drei Reihen unter einander gleich.

(Beweis. Mittelst der Sätze von den Nebenwinkeln und Scheitelwinkeln.)

Erklärung. Grade Linien, welche dieselbe Richtung haben, heißen parallel.

Anmerkung. Ob grade Linien dieselbe Richtung haben, erkennt man daran, daß sie von einer sie schneidenden in ihrer Richtung gleichviel abweichen, d. h. (jetzt kann der Lehrer sicher sein, daß jeder Schüler von selbst fortfahren wird) mit ihr gleiche correspondirende Winkel bilden. Man drückt diesen Zusammenhang in folgenden beiden Sätzen aus:

1) Wenn grade Linien mit einer Schneidenden gleiche correspondirende Winkel bilden, so sind sie parallel.

2) Parallele Linien bilden mit einer beliebigen Schneidenden gleiche correspondirende Winkel.

Lehrsatz. Parallele Linien können, so weit man sie auch verlängert, einander nicht schneiden.

Beweis. Schnitten sie einander, so entstünde am Durchschnittspunkte ein Winkel; die Linien wichen also in ihrer Richtung von einander ab, wären also nicht parallel.

Anmerkung. Diese Eigenschaft der parallelen Linien benutzt man auch zu ihrer Definition, indem man sagt: Parallele Linien sind solche, welche, so weit man sie auch verlängert, einander nicht schneiden.

Man sieht leicht, daß sich in dieser Definition, welche eigentlich die unbewiesene Umkehrung des letzten Lehrsatzes ist, der zur Parallelentheorie unumgänglich nöthige Grundsatz verbirgt. Außerdem scheint es zweckmäßig, noch folgenden Grundsatz aufzustellen:

Alle graden Linien, welche man durch einen und denselben Punkt in einer und derselben Richtung ziehen kann, fallen in eine einzige zusammen;

aus welchem dann § 24 des Lehrbuches ohne Weiteres folgt. Hierauf kann man dann Wechselwinkel und entgegengesetzte Winkel definiren und die auf sie bezüglichen Sätze folgen lassen. Der Beweis des Lehrsatzes in § 29 hängt in der Luft, weil er sich nicht durchgängig auf vorher bereits klar ausgesprochene Sätze stützt. Daß Kambly selbst diesen Uebelstand wohl erkannt hat, beweist sein Aenderungsversuch in der neuesten Auflage, durch den indeß dieser Uebelstand immer noch nicht gehoben ist. Da nun der betreffende Satz in der Folge nur einmal und zwar in § 31 gebraucht wird, so erscheint es zweckmäßig, statt desselben lieber den folgenden zu beweisen, der für § 31 ebenfalls vollkommen ausreicht:

Ist die Summe zweier entgegengesetzten Winkel nicht gleich 2 R, so schneiden sich die sie bildenden Linien hinreichend verlängert.

Beweis. Schnitten sie sich, auch noch so weit verlängert, nicht, so wären sie parallel, also die Summe zweier entgegensetzten Winkel gleich 2 R., was der Voraussetzung widerspricht; also müssen sie sich schneiden.

Eine in der neuesten Auflage zu § 125 hinzugekommene Anmerkung giebt einen ausführlicheren Beweis des in § 124 aufgestellten Lehrsatzes für den Fall der Incommensurabilität. Nun ist aber der Begriff des Zusammenfallens zweier Grenzwerthe mit dem von ihnen begrenzten Werthe für Tertianer und Secundaner entschieden unbrauchbar; ja es muß ihnen gradezu als ein Widerspruch erscheinen, wenn u. A. in § 159 gesagt wird, daß die Umringe der umschriebenen regulären Polygone immer größer bleiben, als die der einbeschriebenen, auch dann noch, wenn sie (was im vorhergehenden Paragraphen auch von den einbeschriebenen Polygonen gesagt ist) bei unendlicher Vervielfältigung ihrer Seiten in den Kreis selbst übergehen. Daher scheint es, wenn man es nicht überhaupt vorzieht, die Berechnung des Flächeninhalts eines Rechtecks auf den Satz:

Rechtecke von gleicher Höhe verhalten sich wie ihre Grundlinien,

zu begründen, und diesen für den Fall der Incommensurabilität mit Legendre indirekt zu beweisen, zweckmäßiger, statt des gegebenen Beweises etwa folgenden Satz in folgender Weise zu beweisen:

Lehrsatz. Sind die Winkelseiten eines Rechtecks incommensurabel, so läßt sich der Inhalt desselben nicht absolut genau angeben; der Fehler, welchen man zu begehen genöthigt ist, kann jedoch kleiner gemacht werden, als jede beliebige noch so kleine Größe.

Beweis. Ist das Rechteck A B C D gegeben und a ein Maaß von A D, aber nicht von A B; so muß, wenn man a auf A B so oft als möglich abträgt, zuletzt ein Stück $EB < a$ übrig bleiben, und wenn man nun a noch einmal abträgt, also $EF = a$ macht, F über B hinausliegen, so daß, wenn man nun E G und F H || B C zieht, $AEGD < ABCD < AFHD$ ist. A E G D u. A F H D unterscheiden sich nun von einander um ein Rechteck E F H G, dessen Winkelseiten a und n a sind (wo n die Zahl bedeutet, welche angiebt, wie oft a in A D enthalten ist), dessen Inhalt also $= n a^2$ ist. Der Fehler, welchen man begeht, wenn man eins von ihnen statt des gegebenen nimmt, ist also kleiner, als $n a^2$. Nimmt man nun $\frac{a}{x}$ statt a als Maaß an, wo x eine beliebige ganze positive Zahl bedeutet, so erhält man in ähnlicher Weise wieder zwei Rechtecke, von denen das eine kleiner, daß andre größer als das gegebene ist, und die sich von einander um ein Rechteck unterscheiden, dessen Winkelseiten $\frac{a}{x}$ und n a sind, dessen Inhalt also $= \frac{na^2}{x}$ ist. Der Fehler, welchen man jetzt begeht, wenn man eins von ihnen statt des gegebenen nimmt, ist also kleiner als $\frac{na^2}{x}$. Da man nun für x jede beliebige noch so große Zahl annehmen kann, so hat man es ganz in seiner Gewalt $\frac{na^2}{x}$ so klein zu machen, als man will, d. h. den Fehler, den man zu begehen genöthigt ist, kleiner zu machen, als jede beliebige noch so kleine Größe, w. z. b. w.

Anm. 1. Wäre z. B. $AD = 7'$, und wollte man den Fehler kleiner machen als $0{,}000001 \,\square'$, so müßte man $^1/_{7000000}{}'$ als Maaß annehmen.

Anm. 2. Um zu wissen, bis auf wieviel Stellen eine solche Inhaltsangabe richtig ist, sehe man zu, bis auf wieviel Stellen der Inhalt des Rechtecks, welches zu klein ist, mit dem, welches zu groß ist, übereinstimmt.

In ähnlicher Weise verdient das Verhältniß zwischen dem Radius und dem Umfange eines Kreises abgeleitet zu werden, was in § 158 nur sehr kurz angedeutet ist. Eine solche Behandlung der Kreisberechnung findet sich im neunten Kapitel des „Cours de géométrie élémentaire à l'usage des élèves de l'école royale française rédigé par F. Joachimsthal, Berlin 1852", auf welche Schrift wir die Aufmerksamkeit unsrer Collegen hinzulenken uns erlauben. Was durch eine solche Behandlung etwa an Zeit verloren geht, könnte durch Weglassung der §§ 155, 157, 164 und 165 recht gut wieder eingebracht werden.

Die neuere Geometrie hätte wohl durch die überraschende Fruchtbarkeit ihrer Folgerungen, so wie durch die Eigenthümlichkeit ihrer Beweisführung ebenfalls einen Platz in dem mathematischen Lehrplane eines Gymnasiums verdient. Daß sie denselben trotzdem nicht einnimmt, ist lediglich der namentlich in neuerer Zeit mit Recht geltend gemachten Forderung einer möglichsten Concentration des Unterrichts zuzuschreiben, welche dringend verlangt, lieber einerlei gründlich, als zweierlei oberflächlich zu treiben. Daraus erwächst nun aber dem Lehrer die Pflicht, wenigstens den strebsamen Schülern den Einblick in die wichtigsten Gesetze der neuern Geometrie zugänglich zu machen, wie dies auch neuerdings von Kambly in einem besondern für die Schüler berechneten Programm geschehen ist.

Während jedoch die neuere Geometrie als mehr außerhalb des Systems der elementaren Geometrie stehend, ganz wohl im Lehrplane fehlen kann, ohne dadurch eine Lücke zu veranlassen; fehlt in demselben wunderbarer Weise eine andre Disciplin, welche nicht nur einen bestimmten Platz in dem Systeme der elementaren Geometrie hat, sondern dasselbe eigentlich erst zum Abschluß bringt. Wir meinen die sphärische Trigonometrie, welche den Zusammenhang zwischen Stereometrie und Arithmetik in gleicher Weise zu vermitteln hat, wie die ebene Trigonometrie den Zusammenhang zwischen der Planimetrie und Arithmetik. Da überdies das Wesentlichste der sphärischen Trigonometrie in verhältnißmäßig sehr kurzer Zeit abgemacht werden kann, so scheint es dringend geboten, wenigstens die Fundamentalsätze der sphärischen Trigonometrie selbst auf Kosten einer ausführlicheren Uebung in der ebenen Trigonometrie im Lehrplane des Gymnasiums mit aufzunehmen, wenn man einmal den Grundsatz als richtig anerkennt, daß die praktische Fertigkeit im Einzelnen gegenüber der klaren Einsicht in das ganze System in den Hintergrund treten müsse.