

Temperaturdifferenz vom Abend zum Morgen 1,22° beträgt, der Fehler ± 4,2 Hundertstelgrad 3,4% der nächtlichen Temperaturschwankung. Demnach stellt die Formel für den Dezember den nächtlichen Temperaturgang weniger befriedigend dar als die Formel für den Juni. Die Tabelle zeigt, daß die Genauigkeit der Formeln für Januar und Dezember am wenigsten befriedigt.

Numerische Berechnung des Temperaturganges am Tage.

Die früheren theoretischen Ueberlegungen haben als Resultat die Vermutung ergeben, daß sich der Temperaturgang durch eine Formel von dem Typus

$$(16) \quad \vartheta = u + b \cdot \cos \left(\frac{\pi t}{12} - a \right) + K \cdot c^t$$

darstellen läßt. Zur Berechnung nach dieser Formel benutze ich die von Birkeland in der Meteorol. Zeitschrift 1906 mitgeteilten mittleren Stundenwerte der Temperatur in Kristiania. Da Birkeland dort auch den Temperaturgang in den einzelnen Monaten nach der Besselschen Formel berechnet hat, so läßt sich an diesem Beispiel die Genauigkeit der Darstellungen nach Formel (2) und Formel (16) leicht vergleichen. Die folgende Tabelle gibt die für die Berechnung zu Grunde gelegten Stundenwerte an.

Temperaturgang am Tage in Kristiania. (1884—1903) (Celsiusgrade).
(Mittlere beobachtete Werte.)

	Jan.	Febr.	März	April	Mai	Juni	Juli	Aug.	Sept.	Okt.	Nov.	Dez.
4a	—	—	—	—	—	10,60	12,60	—	—	—	—	—
5a	—	—	—	1,04	6,52	11,48	13,23	12,20	—	—	—	—
6a	—	—	—	1,35	7,59	12,70	14,33	12,90	8,37	—	—	—
7a	—	—	-3,78	2,17	8,74	13,96	15,58	14,07	9,08	3,89	—	—
8a	-5,01	-5,98	-3,23	3,19	9,97	15,25	16,75	15,34	10,36	4,31	-0,61	-4,03
9a	-4,95	-5,58	-2,18	4,35	11,34	16,64	18,01	16,55	11,72	5,17	-0,43	-3,97
10a	-4,69	-4,86	-1,07	5,43	12,42	17,75	19,20	17,73	12,95	6,11	+0,02	-3,80
11a	-4,26	-3,95	-0,08	6,37	13,26	18,71	20,06	18,65	13,88	6,88	+0,58	-3,53
Mittag	-3,78	-3,09	+0,75	7,06	13,93	19,28	20,69	19,25	14,60	7,51	+1,11	-3,20
(IV.) 1p	-3,48	-2,48	+1,31	7,58	14,33	19,72	21,10	19,68	15,18	7,90	+1,43	-2,96
2p	-3,34	-2,13	+1,69	7,93	14,46	19,77	21,24	19,79	15,42	8,02	+1,48	-2,87
3p	-3,47	-2,23	+1,61	7,96	14,45	19,71	21,03	19,59	15,31	7,77	+1,23	-3,00
4p	-3,75	-2,60	+1,32	7,77	14,18	19,45	20,77	19,30	14,75	7,32	+0,86	-3,13
5p	—	—	+0,80	7,17	13,64	18,90	20,12	18,57	13,94	6,66	—	—
6p	—	—	—	6,59	13,08	18,21	19,36	17,91	12,94	—	—	—
7p	—	—	—	5,69	12,27	17,37	18,54	16,98	—	—	—	—
8p	—	—	—	—	—	16,12	17,33	—	—	—	—	—

Für die Berechnung habe ich die Formel (16) ersetzt durch die ihr äquivalente

$$(17) \quad \vartheta = u + p \cdot \cos \frac{\pi t}{12} + q \cdot \sin \frac{\pi t}{12} + K \cdot c^t,$$

aus welcher sich die Form (16) ableiten läßt, wenn man $p = b \cdot \cos a$ und $q = b \cdot \sin a$ setzt. Hierin soll $t = 0$ Mittag bedeuten und die Zeit zum Abend hin positiv,

zum Morgen hin negativ gerechnet werden. Dann sind die Differenzen je zweier aufeinanderfolgender Tagesstunden gebildet worden.

$$\vartheta_t - \vartheta_{t+1} = p \cdot \left(\cos \frac{\pi t}{12} - \cos \frac{\pi(t+1)}{12} \right) + q \cdot \left(\sin \frac{\pi t}{12} - \sin \frac{\pi(t+1)}{12} \right) + K(c^t - c^{t+1})$$

.....

In diesen Gleichungen sind die Differenzen des Cosinus und Sinus für jeden Wert von t bekannt.

Da sich bei der Untersuchung des nächtlichen Temperaturganges herausgestellt hatte, daß die Basis der Exponentialfunktion nahezu als konstant angesehen werden kann, so habe ich für die folgende Berechnung dieselbe Basis benutzt und einheitlich für alle Monate $c = 0,869$ gesetzt, ohne eventuelle die Rechnung verbessernde Abweichungen anzubringen. Dann ist auch die Differenz $c^t - c^{t+1}$ für jeden Wert von t bekannt. In den Differenzgleichungen sind also die Koeffizienten von p, q und K bekannt. Die Unbekannten von p, q und K sind nun nach der Methode der kleinsten Quadrate berechnet worden. Daraus ergab sich für jeden Monat eine Formel von dem Typus (17), welche durch die angegebene Transformation in (16) übergeführt wurde. Das Resultat der Berechnungen ist die folgende Tabelle:

Gleichungen des Temperaturganges am Tage in Kristiania.

Januar	$\vartheta = - 11,57 + 4,962 \cdot \cos \left(\frac{\pi t}{12} - 56,85^\circ \right) + 5,014 \cdot 0,869^t$	
Februar	$\vartheta = - 13,82 + 7,627 \cdot \cos \left(\frac{\pi t}{12} - 55,43^\circ \right) + 6,336 \cdot 0,869^t$	
März	$\vartheta = - 5,10 + 5,429 \cdot \cos \left(\frac{\pi t}{12} - 47,83^\circ \right) + 2,111 \cdot 0,869^t$	
April	$\vartheta = 3,25 + 4,378 \cdot \cos \left(\frac{\pi t}{12} - 43,80^\circ \right) + 0,585 \cdot 0,869$	
Mai	$\vartheta = 11,89 + 3,500 \cdot \cos \left(\frac{\pi t}{12} - 27,55^\circ \right) - 1,121 \cdot 0,869^t$	
Juni	$\vartheta = 16,53 + 4,060 \cdot \cos \left(\frac{\pi t}{12} - 28,12^\circ \right) - 0,803 \cdot 0,869^t$	(V.)
Juli	$\vartheta = 17,42 + 4,181 \cdot \cos \left(\frac{\pi t}{12} - 29,79^\circ \right) - 0,388 \cdot 0,869^t$	
August	$\vartheta = 15,87 + 4,139 \cdot \cos \left(\frac{\pi t}{12} - 30,67^\circ \right) - 0,262 \cdot 0,869^t$	
September	$\vartheta = 9,22 + 5,454 \cdot \cos \left(\frac{\pi t}{12} - 36,40^\circ \right) + 1,027 \cdot 0,869^t$	
Oktober	$\vartheta = 0,99 + 5,167 \cdot \cos \left(\frac{\pi t}{12} - 42,33^\circ \right) + 2,610 \cdot 0,869^t$	
November	$\vartheta = - 7,56 + 5,558 \cdot \cos \left(\frac{\pi t}{12} - 51,31^\circ \right) + 5,109 \cdot 0,869^t$	
Dezember	$\vartheta = - 8,03 + 3,129 \cdot \cos \left(\frac{\pi t}{12} - 57,08^\circ \right) + 3,084 \cdot 0,869^t$	

Das erste Glied dieser Formeln ist nach 12) $u = \vartheta_0 + \frac{M}{m}$; ϑ_0 bedeutet die Temperatur der Schicht, gegen welche die Ausstrahlung stattfindet; der Ausdruck $\frac{M}{m}$ würde unter Verwendung der Bezeichnungen von (9) und (10) etwa die Form $\frac{C}{c \cdot m} \sin \varphi \cdot \sin \delta$ annehmen. Mag dieser Ausdruck auch den Zusammenhang zwischen den darin enthaltenen Größen nur annähernd richtig wiedergeben, sicher ist jedenfalls, daß dieser Ausdruck eine direkte Funktion von $\sin \delta$ ist. Um eine annähernde Vorstellung der Bedeutung des Gliedes u zu gewinnen, habe ich die Annahme gemacht, die Temperatur ϑ_0 sei am Tage dieselbe wie in der Nacht. Eine ungefähre Berechnung des Temperaturganges ergibt für Kristiania die in Reihe 2 der folgenden Tabelle enthaltenen Werte von ϑ_0 . Daraus läßt sich dann für die einzelnen Monate der angenäherte Wert von $\frac{M}{m}$ berechnen.

$$u = \vartheta_0 + \frac{M}{m}$$

(VI.)

	Jan.	Febr.	März	April	Mai	Juni	Juli	Aug.	Sept.	Okt.	Nov.	Dez.
u	-11,57	-13,82	-5,10	3,25	11,89	16,53	17,42	15,87	9,22	0,99	-7,56	-8,03
ϑ_0 (Nacht)	-5,23	-6,58	-4,72	-0,48	3,20	7,03	9,84	10,19	6,95	3,38	-0,95	-4,27
$\frac{M}{m}$	-6,34	-7,24	-0,38	3,73	8,69	9,50	7,58	5,68	2,27	-2,39	-6,61	-3,76

Die in der letzten Zeile enthaltenen Zahlen sollen eine direkte Funktion von $\sin \delta$ sein. Sie entsprechen insoweit der Theorie, als sie im Winter, wo die Sonnendeklination negativ ist, negativ werden, während sie im Sommer positiv sind. Ungefähr ist auch an den absoluten Werten ein jährlicher Gang erkennbar, in welchen sich allerdings einige Werte nicht hineinfügen, besonders der Wert für den Dezember.

Das zweite Glied der Formeln (V) ist periodisch. Die Phasenzeiten lassen einen deutlichen jährlichen Gang erkennen. Das Maximum des periodischen Gliedes verschiebt sich im Sommer mehr auf den Nachmittag als im Winter. Im Dezember wird das Maximum des periodischen Gliedes erst vor 4 Uhr, im Juni schon kurz vor 2 Uhr erreicht. Die Amplitude des periodischen Gliedes ist der Theorie nach eine direkte Funktion von $\cos \delta$. Sie müßte demnach ihre größten Werte an den Aequinoctien erreichen, wo die Deklination null ist, und nach den Solstitien zu abnehmen.

Das letzte Glied ist dasjenige, welches den Temperaturgang am Tage unsymmetrisch macht. Der Koeffizient K zeigt einen ausgesprochenen jährlichen Gang, der von negativen Werten im Sommer zu positiven im Winter führt. Die Gleichungen zeigen also, daß die Temperatur im Winter langsamer ansteigt, als sie

wieder fällt, während sie im Sommer steiler steigt, als sie am Nachmittag fällt. Eine weitere Folge des Exponentialgliedes ist es, daß es das Maximum der Tagestemperatur etwas gegen das Maximum des periodischen Gliedes verschiebt.

Es soll hier noch einmal betont werden, daß es nicht verwunderlich ist, wenn die Koeffizienten der Gleichungen nicht überall der in der theoretischen Entwicklung gewonnenen Gestalt entsprechen, da ihr Zusammenhang mit den physikalischen Größen sicher viel verwickelter ist. Dagegen ist die Untersuchung wesentlich, mit welcher Genauigkeit die Gleichungen (V) den Temperaturgang wiedergeben. Zum Vergleich mit den Werten (IV) sind aus den Gleichungen die Stundenwerte der Temperatur berechnet und in der folgenden Tabelle zusammengestellt worden.

Temperaturgang am Tage in Kristiania.
(Berechnete Werte.)

	Jan.	Febr.	März	April	Mai	Juni	Juli	Aug.	Sept.	Okt.	Nov.	Dez.
4a	—	—	—	—	—	10,61	12,62	—	—	—	—	—
5a	—	—	—	1,06	6,52	11,60	13,43	12,21	—	—	—	—
6a	—	—	—	1,58	7,67	12,76	14,44	13,15	8,36	—	—	—
7a	—	—	-3,78	2,32	8,87	13,99	15,57	14,22	9,30	3,89	—	—
8a	-5,02	-5,99	-3,06	3,24	10,07	15,25	16,75	15,36	10,41	4,47	-0,62	-4,04
9a	-4,95	-5,54	-2,15	4,23	11,23	16,49	17,93	16,49	11,60	5,21	-0,38	-3,98
10a	-4,66	-4,82	-1,16	5,24	12,29	17,61	19,01	17,55	12,76	6,02	0,05	-3,79
11a	-4,25	-3,98	-0,19	6,19	13,18	18,57	19,94	18,46	13,80	6,78	0,55	-3,52
Mittag	-3,85	-3,15	+0,65	6,99	13,87	19,31	20,66	19,17	14,64	7,42	1,02	-3,25
1p	-3,51	-2,50	+1,29	7,60	14,34	19,78	21,12	19,63	15,19	7,85	1,36	-2,96
2p	-3,35	-2,15	+1,66	7,94	14,54	19,98	21,31	19,81	15,42	8,01	1,49	-2,87
3p	-3,42	-2,16	+1,71	8,01	14,49	19,89	21,20	19,71	15,28	7,86	1,31	-2,93
4p	-3,75	-2,61	+1,40	7,78	14,20	19,52	20,81	19,33	14,81	7,40	0,84	-3,15
5p	—	—	+0,78	7,29	13,70	18,91	20,18	18,70	13,99	6,63	—	—
6p	—	—	—	6,53	13,03	18,09	19,33	17,87	12,90	—	—	—
7p	—	—	—	5,58	12,23	17,15	18,34	16,89	—	—	—	—
8p	—	—	—	—	—	16,14	17,28	—	—	—	—	—

(VII.)

Durch Vergleichen der Tabellen (IV) und (VII) findet man die Fehler der Darstellung für die einzelnen Stundenwerte. Zur Beurteilung der Genauigkeit sind daraus in der folgenden Tabelle die mittleren Fehler nach der Formel $\pm \sqrt{\frac{\sum v^2}{n}}$ berechnet worden, wo $\sum v^2$ die Summe der Fehlerquadrate, n die Anzahl der berechneten Stunden bedeutet. Die zweite Reihe enthält die Temperaturdifferenz D zwischen der wärmsten und der kältesten Tagesstunde, also meistens zwischen 2 Uhr nachmittags und der ersten Morgenstunde. In der letzten Reihe ist der mittlere Fehler in Prozenten dieser Temperaturdifferenz ausgedrückt worden.

Mittlerer Fehler der Formeln (V).

(VIII.)

	Jan.	Febr.	März	April	Mai	Juni	Juli	Aug.	Sept.	Okt.	Nov.	Dez.
$\sqrt{\frac{\sum v^2}{n}}$ in h°	± 3,3	± 3,9	± 8,4	± 11,5	± 7,7	± 11,6	± 10,7	± 11,8	± 9,5	± 8,1	± 5,2	± 2,8
D	1,67	3,85	5,47	6,92	7,94	9,17	8,64	7,59	7,05	4,13	2,09	1,16
Mittlerer Fehler in % von D	2,0%	1,0%	1,5%	1,7%	1,0%	1,3%	1,2%	1,6%	1,3%	2,0%	2,5%	2,4%

Die mittleren Fehler erreichen hier viel höhere absolute Werte als bei der Darstellung des nächtlichen Temperaturganges, deren mittlere Fehler in Tabelle (III) angegeben waren. Der höchste mittlere Fehler im August ist fast 12 Hundertstelgrad (also doppelt so groß wie der größte mittlere Fehler in Tabelle (III)); da aber die mittlere Temperaturschwankung am Tage in diesem Monat 7,59° beträgt, so ist der Fehler nur 1,6% dieser Schwankung. Die schlechtesten Darstellungen liefern hier November und Dezember mit 2,5% bzw. 2,4% mittlerem Fehler. Die größten mittleren Fehler in Tabelle (III) gehen über 3% hinaus, die kleinsten mittleren Fehler liegen dagegen unter 1%, welches der geringste Fehler in Tabelle (VIII) ist. Wenn man noch bedenkt, daß die Formeln (II) dadurch rechnerisch verbessert sind, daß die Basis der Exponentialfunktion für die einzelnen Monate besonders bestimmt worden ist, während in den Formeln (V) überall $c = 0,869$ gesetzt worden ist, so kann man behaupten, daß die Gleichung (16) die Temperatur bei Tage ebenso gut darstellt, wie die Gleichung (8) die Temperatur während der Nacht.

Endlich sollen die Darstellungen (V) noch mit den Darstellungen nach der Besselschen Formel verglichen werden, welche Birkeland a. a. O. für die einzelnen Monate berechnet hat. Ich wähle zum Vergleich einige Monate aus und zwar den Mai, welcher durch Formel (V) gut dargestellt wird (mittlerer Fehler = 1%), August und September, deren Darstellungen der Genauigkeit nach in der Mitte stehen (1,6% bzw. 1,3%), und November, der durch Gleichung (V) weniger gut dargestellt wird (2,5%).

Die Besselschen Formeln für diese Monate sind:

$$\begin{aligned} \text{Mai} \quad \vartheta &= 10,50 + 4,167 \cdot \sin(\tau + 231^\circ 31') + 0,285 \cdot \sin(2\tau + 119^\circ 36') \\ &\quad + 0,235 \cdot \sin(3\tau + 28^\circ 21') \\ \text{August} \quad \vartheta &= 15,88 + 3,788 \cdot \sin(\tau + 233^\circ 38') + 0,467 \cdot \sin(2\tau + 80^\circ 19') \\ &\quad + 0,231 \cdot \sin(3\tau + 24^\circ 55') \\ \text{September} \quad \vartheta &= 11,47 + 3,389 \cdot \sin(\tau + 231^\circ 41') + 0,779 \cdot \sin(2\tau + 56^\circ 51') \\ &\quad + 0,135 \cdot \sin(3\tau + 5^\circ 44') \\ \text{November} \quad \vartheta &= 0,07 + 0,897 \cdot \sin(\tau + 224^\circ 46') + 0,397 \cdot \sin(2\tau + 44^\circ 6') \\ &\quad + 0,158 \cdot \sin(3\tau + 221^\circ 9') \end{aligned}$$

wobei $\tau = 0$ Mitternacht bedeutet, $\tau = 15^\circ = 1^a$ usw.

Nach diesen Formeln sind die Temperaturen der Tagesstunden berechnet worden und die mittleren Fehler in derselben Weise wie vorher gebildet worden. Diese Berechnung ist zuerst nur für zwei periodische Glieder angestellt worden, also mit Fortlassung der dritteltägigen Welle, dann aber für die vollen Formeln mit drei periodischen Gliedern wiederholt worden. Die letzten Kolonnen der folgenden Tabelle enthalten zum Vergleich die entsprechenden Zahlen aus (VIII).

Mittlere Fehler

	D	nach der Besselschen Formel				nach der Formel (V)	
		mit 2 periodischen Gliedern		mit 3 periodischen Gliedern			
		in h°	in % von D	in h°	in % von D	in h°	in % von D
Mai	7,94	± 16,0	2,0%	± 9,3	1,2%	± 7,7	1,0%
August	7,59	± 18,2	2,4%	± 7,2	0,9%	± 11,8	1,6%
September	7,05	± 18,6	2,6%	± 12,8	1,8%	± 9,5	1,3%
November	2,09	± 14,6	6,8%	± 5,0	2,4%	± 5,2	2,5%

(IX.)

Wenn nur zwei periodische Glieder genommen werden, ist die durch die Besselsche Formel erreichte Genauigkeit stets viel geringer als die Genauigkeit der Formel (V). Die mittleren Fehler betragen meist sogar das Doppelte. Wenn man die dritteltägige Welle hinzunimmt, sind die Fehler ungefähr von derselben Größe wie die Fehler der Formel (V). Die Abnahme der Fehler mit Hinzunahme eines neuen periodischen Gliedes, wie sie durch die zweite und vierte Kolonne deutlich gemacht wird, ist eine Folge der Konvergenz der Fourierschen Reihen. Bei Verwendung eines vierten und fünften periodischen Gliedes würden die Fehler immer weiter herabgedrückt werden können. Doch hat eine solche Darstellung nur rechnerische Bedeutung ohne irgendwelche Beziehung zum physikalischen Charakter der Erscheinung. Dagegen hat die Gleichung (16), wenigstens ihrer allgemeinen Form nach, einen deutlichen Zusammenhang mit den physikalischen Ursachen des Temperaturganges am -Tage.

Die in dem letzten Abschnitt mitgeteilten Berechnungen haben also das folgende Resultat:

Die Gleichung $\vartheta = u + b \cdot \cos\left(\frac{\pi t}{12} - a\right) + K \cdot c^t$, welche ein periodisches Glied und ein Exponentialglied enthält, stellt den Temperaturgang am Tage ebenso gut dar wie die Besselsche Formel mit drei periodischen Gliedern.

Nach dieser Formel sind die Funktionen der folgenden Periode zu berechnen und die anderen Werte in derselben Weise wie vorher berechnet worden. Die Berechnung ist wiederholt bis zur vollständigen Lösung der Aufgabe wiederholt worden. Die letzten Funktionen der folgenden Tabelle enthalten die Ergebnisse der Berechnungen.

Mittlere Fehler

Periode	Werte	Funktionen	Ergebnisse
1
2
3
4
5
6
7
8
9
10

Die in der Tabelle enthaltenen Berechnungen haben also das folgende Ergebnis ergeben: Die Berechnungen sind so durchgeführt worden, dass die Funktionen der folgenden Periode zu berechnen und die anderen Werte in derselben Weise wie vorher berechnet worden. Die Berechnung ist wiederholt bis zur vollständigen Lösung der Aufgabe wiederholt worden. Die letzten Funktionen der folgenden Tabelle enthalten die Ergebnisse der Berechnungen.

Die Gleichung $y = a + b \cos \left(\frac{2\pi}{T} (x - x_0) \right) + c \sin \left(\frac{2\pi}{T} (x - x_0) \right)$, welche ein periodisches Verhalten zeigt, enthält die Besetzung der Besetzung mit der Zeit.

Mittlerer Fehler der Formeln (V).

(VIII.)

	Jan.	Febr.	März	April	g.	Sept.	Okt.	Nov.	Dez.
$\sqrt{\frac{\sum v^2}{n}}$ in h°	± 3,3	± 3,3	± 3,3	± 3,3	± 3,3	± 9,5	± 8,1	± 5,2	± 2,8
D	1,67	3,0	1,67	1,67	1,67	7,05	4,13	2,09	1,16
Mittlerer Fehler in % von D	2,0%	1,0%	2,0%	2,0%	2,0%	1,3%	2,0%	2,5%	2,4%

Die mittleren Fehlerstellung des nächtlichen angegeben waren. Der (also doppelt so groß v mittlere Temperaturschw Fehler nur 1,6% dieser November und Dezember Fehler in Tabelle (III) ge dagegen unter 1%, wel noch bedenkt, daß die F der Exponentialfunktion während in den Formeln behaupten, daß die Gl darstellt, wie die Gleichung

Endlich sollen die Besselschen Formel verg Monate berechnet hat. I Mai, welcher durch Form und September, deren Da bzw. 1,3%), und November

Die Besselschen F
 Mai $\vartheta = 10,50 +$
 August $\vartheta = 15,88 +$
 September $\vartheta = 11,47 +$
 November $\vartheta = 0,07 +$
 wobei $\tau = 0$ Mitternacht

Die Werte als bei der Darstellung Fehler in Tabelle (III) fast 12 Hundertstelgrad Tabelle (III)); da aber die 7,59° beträgt, so ist der Darstellungen liefern hier er. Die größten mittleren mittleren Fehler liegen e (VIII) ist. Wenn man essert sind, daß die Basis s bestimmt worden ist, orden ist, so kann man bei Tage ebenso gut end der Nacht.

Darstellungen nach der a. a. O. für die einzelnen nate aus und zwar den Fehler = 1%), August der Mitte stehen (1,6% ut dargestellt wird (2,5%).

$5 \cdot \sin(2\tau + 119^\circ 36')$
 $35 \cdot \sin(3\tau + 28^\circ 21')$
 $67 \cdot \sin(2\tau + 80^\circ 19')$
 $61 \cdot \sin(3\tau + 24^\circ 55')$
 $79 \cdot \sin(2\tau + 56^\circ 51')$
 $65 \cdot \sin(3\tau + 5^\circ 44')$
 $67 \cdot \sin(2\tau + 44^\circ 6')$
 $68 \cdot \sin(3\tau + 221^\circ 9')$

