CXXXIX. Programm

des

Königlichen Friedrichs-Gymnasiums

zu

Breslau

für das Schuljahr von Ostern 1903 bis Ostern 1904.

Zweiter Teil:

Schulnachrichten.

Breslau 1904.
Druck von R. Nischkowsky.

Schulnachrichten.

I. Allgemeine Lehrverfassung.

1. Übersicht über die einzelnen Lehrgegenstände und die für jeden derselben bestimmte Stundenzahl.

	Gymnasium																		Vorschule		
	O I	U I lat.	U I ref.	O II lat.	O II ref.	U II lat.	U II ref.	O III lat.	O III ref.	U III lat.	U III ref.	IV lat.	IV ref.	V lat.	V ref.	VI lat.	VI ref.	Summe	1	2	3
Religionslehre:																					
a. evangelisch	2			2		2		2		2		2		2		3	3	20	2	2	2
b. katholisch	2							2				2				3		9	2		
Deutsch	3	3	3	3	3	3	3	2	3	2	3	3	4	3	4	4	5	54	10	8	6
Lateinisch	7		8	7	8	7	8	8	10	8	10	8	.	8	.	8	.	105	.	.	.
Griechisch	6		8	6	8	6	8	6	.	6	.	.	.	.	.	.	.	54	.	.	.
Französisch	3		2	3	2	3	2	2	2	2	3	4	6	.	6	.	6	46	.	.	.
Englisch (wahlfrei)	2			2		.	.	.	.	.	.	.	.	.	.	.	.	4	.	.	.
Hebräisch (wahlfrei)	2			2		.	.	.	.	.	.	.	.	.	.	.	.	4	.	.	.
Geschichte	3		2	3	2	2	2	2	2	2	2	2	3	1	1	1	1	46	.	.	.
Erdkunde						1		1	2	1	1	2	3	2 (vereinigt m. Deutsch)	2	2	2		1	.	.
Mathematik und Rechnen	4	4	3	4	3	4	3	3	4	3	4	4	5	4	5	4	5	66	4	4	4
Naturwissenschaft	2			2		2	2	2	2	2	2	2	3	2	2	2	2	29	.	.	.
Schreiben	.	.	.	.	.	.	.	.	2 nach Bedürfnis					2	2	2	2	10	3	4	4
Zeichnen	2 wahlfrei					2 wahlfr.		2	2	2	2	2	2	2	2	.	.	20	.	.	.
Singen	3													2		2		7	1		
Turnen	3					3		3		3		3		3		3		21	1		

2. Übersicht der Verteilung der Stunden unter die einzelnen Lehrer.

Lfd. Nr.	Namen:	Ordinariat	O I lat.	U I lat.	U I ref.	O II lat.	O II ref.	U II lat.	U II ref.	O III lat.	O III ref.	U III lat.	U III ref.	IV lat.	IV ref.	V lat.	V ref.	VI lat.	VI ref.	Vorschule: 1.	2.	3.	Summe
1.	Direktor Prof. Dr. **Feit**		Horaz 2		Lateinisch 8																		10.
2.	Oberlehrer Prof. Dr. **Vogt**			Mathemat. 4 Physik 2		Mathemat. 4				Mathemat. 3 Physik 2		Mathemat. 3											18.
3.	Oberlehrer Prof. **Muthreich**				Mathemat. 3						Mathemat. 4		Mathemat. 4		Mathemat. 5			Rechnen 4					20.
4.	Oberlehrer Prof. **Loewe**	U I ref.			Deutsch 3 Griechisch 8				Griechisch 8														19.
5.	Oberlehrer Prof. **Mühlenbach**	I lat.	Deutsch 3 Griechisch 6										Latein. 10										19.
6.	Oberlehrer Prof. Dr. **Walther**[4]	U II ref.							Deutsch 3 Latein. 8	Deutsch 2 Französ. 2 Geschichte 2					Geschichte 3								20.
7.	Oberlehrer Prof. **Schiller**	U II lat.	Deutsch 3 Gesch. u. Erdkunde 3					Deutsch 3 Lateinisch 7 Geschichte 2 Erdkunde 1															19.
8.	Oberlehrer Prof. **Bricke**						Mathemat. 3		Mathemat. 3 Physik 2		Physik 2		Naturkde. 2		Naturkde. 2	Naturkde. 2	Rechnen 5						22.
9.	Oberlehrer Prof. **Lerch**	IV lat.	Mathemat. 4			Physik 2		Mathemat. 4 Physik 2				Naturkde. 2		Mathemat. 4 Naturkde. 2			Naturkde. 2						22.
10.	Oberlehrer Prof. Dr. **Sellge**	O II ref.	Lateinisch 5				Lateinisch 8	Religion 2			Deutsch 3[3]					Religion 2			Religion 3[4]				20.
11.	Oberlehrer Dr. **Grundke**	O II lat.		Religion 2 Hebräisch 2		Religion 2 Deutsch 3 Hebräisch 2	Deutsch 3					Religion 2 Griechisch 6											22.
12.	Oberlehrer Dr. **Schoenaich**	VI lat. U II ref.							Deutsch 3[3] Latein. 8[3] Gesch. und Erdkde. 3[3]	Religion 2 Lateinisch 8 Erdkunde 1								Latein. 8[4]					21[3]. 22[4].
13.	Oberlehrer **Umpfenbach**						Griechisch 8	Griechisch 6						Lateinisch 8									22.
14.	Oberlehrer **Hille**	O III lat.								Griechisch 6				Deutsch 3 Geschichte 2		Deutsch 3 Lateinisch 8							22.
15.	Oberlehrer Dr. **Gröhler**	VI ref.	Französisch 3		Französ. 3 Turnen 3	Französ. 3				Deutsch 2[3] Französ. 2[3]									Deutsch 5[4] Französ. 6				22[3]. 21[4].
16.	Oberlehrer Dr. **Reiche**	U III lat.			Gesch. und Erdkde. 2	Gesch. und Erdkunde 3	Gesch. und Erdkunde 2				Geschichte 2	Lateinisch 8		Religion 2				Religion 3					22.
17.	Oberlehrer Dr. **Kulcke**[1]	IV ref.	Englisch 2				Französ. 2	Französ. 3							Deutsch 4 Französ. 6				Religion 3				20.
18.	Oberlehrer Dr. **Schliebitz**[1]	V ref.				Englisch 3			Französ. 2		Französ. 2	Französ. 2	Französ. 2				Deutsch 4 Französ. 6						21.
19.	Oberlehrer Dr. **Geisler**	O III ref.				Lateinisch 7 Griechisch 6					Latein. 10												23.
20.	Oberlehrer **Hilgenfeld**[2]	IV ref.		Englisch 2		Englisch 3	Französ. 2	Französ. 3			Deutsch 2				Deutsch 4 Französ. 6								22.
21.	Oberlehrer und kath. Religionslehrer **Schmidt**					Religion 2					Religion 2				Religion 2			Religion 2		Religion 3			11.
22.	Mitglied des Kgl. Seminars für gelehrte Schulen Dr. **Marcus**	U III ref.									Erdkunde 2	Deutsch 3 Geschichte 2 Erdkunde 1	Deutsch 3 Geschichte 2 Erdkunde 1	Französ. 4	Erdkunde 2			Deutsch 4					24.
23.	Kandidat des höh. Lehramts Dr. **Raebel**[2]	V ref.							Französ. 2		Französ. 2	Französ. 2	Französ. 3				Deutsch 4 Französ. 6						19.
24.	Kandidat des höh. Lehramts **Matern**[4]	VI lat.							Gesch. und Erdkunde 3	Geschichte 2					Geschichte 2			Lateinisch 8	Deutsch 5				20.
25.	Zeichenlehrer **Bautze**		Zeichnen 2					Zeichnen 2		Zeichnen 2	Zeichnen 2	Zeichnen 2	Zeichnen 2	Zeichnen 2	Zeichnen 2	Zeichnen 2	Zeichnen 2				Schreiben 4		24.
26.	Lehrer **Gerstenberg**									Singen 3				Erdkunde 2		Erdkunde 2 Rechnen 4 Singen 2	Erdkunde 2	Schreiben 2 Singen 2		Schreiben 2	Religion 2	Religion 2	26.
27.	Vorschullehrer **Postler**																	Naturkde. 2	Rechnen 5 Naturkde. 2 Schreiben 2	Religion 2 Deutsch 10 Rechnen 4	Singen 1		28.
28.	Vorschullehrer **Weiner**								Turnen 3	Schreiben 2		Turnen 3						Erdkunde 2 Turnen 3	Erdkunde 2	Erdkunde 1	Deutsch 8 Rechnen 4		28.
29.	Volksschullehrer **Kluge**									Turnen 3				Turnen 3		Schreiben 2 Turnen 3	Schreiben 2				Turnen 1	Deutsch 6 Rechnen 4 Schreiben 4	28.

1) Bis Michaelis. 2) Seit Michaelis. 3) Bis Neujahr. 4) Seit Neujahr.

3. Übersicht über die absolvierten Pensen.

Latein-Gymnasium.

Prima latina.

Ev. Religionslehre (vereinigt mit U I ref.). S.: Erklärung des Johannesevangeliums. W.: Glaubens- und Sittenlehre im Anschluß an das Augsburgische Bekenntnis. (Leimbach, Leitfaden für den evangelischen Religionsunterricht, Teil 2. Der religiöse Lernstoff.)

Kath. Religionslehre (vereinigt mit U I ref. und II). Die allgemeine und besondere Sittenlehre: Die Lehre vom Gesetz, Gewissen und von der Willensfreiheit, vom sittlich Guten und Bösen. Die Pflichten aus den göttlichen Tugenden. Die Gottesverehrung. Die christliche Selbstliebe in natürlicher und übernatürlicher Beziehung. Die christliche Nächstenliebe in der Sorge für das Seelenheil und leibliches Wohl, insbesondere die Pflichten in bezug auf Leib und Leben des Nächsten, auf Heilighaltung fremder Besitz- und Eigentumsrechte sowie die Pflicht des Schadenersatzes. (König, Lehrbuch für den katholischen Religionsunterricht. Vierter Kursus.)

Deutsch. O I lat. Lektüre: Abschnitte aus Lessings Dramaturgie, Stücke aus Goethes und Schillers Lyrik, Goethes Tasso. Außerdem Shakespeares Macbeth, Kleists Prinz von Homburg und Grillparzers Goldenes Vließ.

Aufsätze: 1. Die Wirkung von Lessings Laokoon dargestellt in Anlehnung an Goethes Urteil im achten Buche von Dichtung und Wahrheit. — 2. Welche Förderung der dramatischen deutschen Dichtkunst hat Lessing in der Hamburgischen Dramaturgie erstrebt? — 3. Inwiefern ist Goethes Jugend der Entwicklung seiner dichterischen Fähigkeiten günstig gewesen? — 4. Weshalb kam es in der französischen Revolution zur Pöbelherrschaft? (Klassenarbeit.) — 5. Wie bewährt Goethe in seiner Elegie „Euphrosyne" den Ausspruch: „Nur die Muse gewährt einiges Leben dem Tod"? — 6. Wer den Sinn aufs Ganze hält gerichtet, dem ist der Streit in seiner Brust geschlichtet. — 7. Inwiefern ist der Gegensatz zwischen Griechentum und Barbarentum die Grundlage des tragischen Konfliktes in Grillparzers Trilogie „Das goldene Vließ"?

U I lat. Lektüre: Luthers Sendbrief vom Dolmetschen und An die Bürgermeister usw.; Proben aus H. Sachs; Goethes Iphigenie; Gedankenlyrik (Auswahl); Lessings Laokoon (Auswahl); Shakespeare, Julius Cäsar; Schillers Braut von Messina.

Aufsätze: 1. Worauf beruht das hervorragende Interesse, welches wir dem Lebensbilde der Kamilla Vergils entgegenbringen? — 2. Welchen Einfluß hatte die Ermordung Agamemnons auf Schicksal und Charakter der Elektra des Sophokles? — 3. a) Worauf beruht der Vorzug der Erkennungsszenen in Goethes Iphigenie gegenüber denen bei Euripides? b) Worauf vertraut Iphigenie in Goethes gleichnamiger Dichtung, wenn sie zu Thoas sagt: Verdirb uns — wenn Du darfst!? — 4. Welche Einflüsse bestimmten wesentlich den Gedankengehalt in Klopstocks Oden „Der Zürchersee" und „Die Frühlingsfeier"? (Klassenarbeit.) — 5. Die Vorfabel zu Lessings Philotas. Mit möglichster Benutzung der eigenen Worte des Dichters. — 6. Was meint Goethe, wenn er Lessings Minna von Barnhelm die wahrste Ausgeburt des siebenjährigen Krieges nennt? — 7. Jeder ist seines Glückes Schmied. — 8. Aufgabe aus der Braut von Messina. (Klassenarbeit.)

Aufgaben der Reifeprüfung: Inwiefern läßt sich der Trennungsschmerz als Grundstimmung von Goethes Tasso betrachten?

Für die Extraneer: Inwiefern sind Friedrich der Große und Lessing verwandte Naturen zu nennen?

Lateinisch. Tacitus, dialogus. Cicero, Rede für Murena. Ciceros Briefe mit Auswahl. Horaz, Oden III, IV und Episteln in Auswahl. Parallelen aus der griechischen Lyrik. Gelernt carm. III, 2. 5, 41—56. 9. 13. 18. IV, 2, 1—24 und Pindar Ol. 12.

Griechisch. Sophocles, Elektra. Thukydides II mit Auswahl. Plato, Phaedon c. 1—34 und 62 bis Ende. Homer, Ilias, Buch XIII—XXIV nach Kanon.

Französisch. S.: Racine, Iphigénie. W.: Lanfrey, Campagne de 1806—1807. Gedichte von Victor Hugo.

Englisch (vereinigt mit U I ref.). Teilnehmer im S. 10, im W. 8. Southey, Life of Nelson. Sprechübungen im Anschluß an das Gelesene. Tendering, Lehrbuch der englischen Sprache, Kap. 10—15, Kasus- und Moduslehre. Monatlich eine Klassenarbeit.

Hebräisch (vereinigt mit U I ref.). Teilnehmer im S. 7, im W. 6. Genesis 12—24. Psalm 2, 3, 15, 24, 121—134. (Hollenberg, Hebräisches Schulbuch.)

Geschichte und Erdkunde. Die wichtigsten Begebenheiten der Neuzeit, insbesondere der preußisch-deutschen Geschichte vom Ende des Dreißigjährigen Krieges bis zur Gegenwart. Belehrungen über gesellschaftliche und wirtschaftliche Verhältnisse. Wiederholungen in zusammenfassenden Überblicken. (Lehrbuch von Neubauer.) Zusammenfassende geographische Wiederholungen über Deutschland und die Kolonien.

Mathematik. O I lat. Abschluß der Stereometrie. Oberflächen- und Inhaltsberechnung. Trigonometrie: Dreiecksberechnungen und goniometrische Gleichungen. Algebra: Allgemeine Eigenschaften der Gleichungen. Auflösung von Gleichungen höheren Grades, die sich auf quadratische zurückführen lassen. Kombinatorik, Wahrscheinlichkeitsrechnung und binomischer Satz. Geometrie: Konstruktionen. Grundbegriffe von den Koordinaten und Elemente der Kegelschnitte. Wiederholungen aus allen Gebieten. (Mehler, Elementar-Mathematik. Bardey, Aufgabensammlung. Gauß, fünfstellige Logarithmentafeln.)

U I lat. Stereometrie: Anleitung zum perspektivischen Zeichnen. Lehre von den Ebenen und Geraden im Raume; Ecke, Sphärik; regelmäßige Körper. Geometrische Konstruktionen und Wiederholungen. Trigonometrische Funktionen, Dreieckslösung, Höhenbestimmungen, Aufgaben aus der sphärischen Trigonometrie. Arithmetische Reihen erster Ordnung, geometrische Reihen, Zinseszins- und Rentenrechnung. Wiederholender Aufbau des arithmetischen Lehrgangs, stufenweise Erweiterung des Zahlbegriffs. (Lehrbücher wie in O I.)

Aufgaben der Reifeprüfung: 1. Die Mitten der Kanten eines Tetraeders sind die Ecken eines neuen Körpers. Es soll dessen Gestalt und das Verhältnis seines Rauminhalts zu dem des Tetraeders bestimmt werden. — 2. Ein Dreieck aufzulösen aus $a - b = 116$, $\rho_c + \rho = 1392$ und $\angle \gamma = 83^{0}\, 16'\, 1'', 5$. — 3. Ein Dreieck zu zeichnen aus dem Radius des umschriebenen Kreises, der Halbierungslinie eines Winkels und der Differenz der beiden anderen Dreieckswinkel. — 4. Vier Zahlen sind so beschaffen, daß sowohl die erste, zweite und dritte als auch die erste, dritte und vierte je eine arithmetische Reihe bilden; der Quotient der beiden ersten ist gleich dem Quotient der beiden letzten. Wäre die vierte Zahl um 2 größer, so würde die erste, dritte und vierte Zahl eine geometrische Reihe darstellen. Wie heißen die Zahlen?

Für die Extraneer: 1. Zu beweisen den Lehrsatz: Wenn ein Quadrat so in ein rechtwinkliges Dreieck eingeschrieben ist, daß beide den rechten Winkel gemein haben, so ist das Rechteck aus den Abschnitten der Hypotenuse gleich der Summe der Rechtecke aus den Abschnitten der Katheten. — 2. Die Schwerpunkte der Flächen eines regulären Oktaeders sind die Ecken eines neuen Körpers. Es soll dessen Gestalt bestimmt und sein Inhalt aus der Kante des Oktaeders berechnet werden. — 3. Zur Auflösung eines Dreiecks sind gegeben: der Umfang $2s = 3996$ und die Radien zweier äußeren Berührungskreise, $\rho_a = 666$ und $\rho_b = 333$. — 4. $\sqrt{2x + 7} + \sqrt{3x - 18} = \sqrt{7x + 1}$.

Physik (vereinigt mit U I ref.). Optik, Wellenlehre, Lehre von flüssigen und luftförmigen Stoffen, Mathematische Erdkunde. (Trappe, Schulphysik.)

Ober-Sekunda latina.

Deutsch. Ausgewählte Abschnitte aus dem Nibelungenliede und der Gudrun, Lieder Walthers von der Vogelweide; Goethes Götz von Berlichingen und Hermann und Dorothea; Schillers Wallenstein.

Aufsätze: 1. Die Vorfabel zu Goethes Egmont. — 2. Ist Schillers Tell ein Meuchelmörder? — 3. Götz von Berlichingen, sein Recht und seine Schuld. — 4. Die Wirtin zum goldenen Löwen als Hausfrau, Gattin und Mutter. (Klassenarbeit.) — 5. Sich vergessen — nimmer gut; sich vergessen — Edelmut. — 6. Die Anhänger und die Gegner Wallensteins in seinem Heere. (Vergl. besonders I und II, 1 der Trilogie.) (Klassenarbeit.) — 7. Wie verteidigt Max Piccolomini Wallenstein gegen die Anschuldigungen seines Vaters? — 8. Klassenaufsatz über eine Aufgabe aus dem Gudrunliede.

Lateinisch. Cicero, in Caecilium, Cato maior. Livius XXII. Sallust, bellum Jugurthinum. Vergil, Aeneis IV—XII, abgeschlossene Bilder nach Auswahl.

Griechisch. Herodot VIII, IX, Auswahl. Homer, Odyssee IX—XXIII nach einem Kanon. Aus U. v. Wilamowitz-Moellendorff, Griechisches Lesebuch: Solon, aus der Πολιτεία Ἀθηναίων des Aristoteles, Perikles aus Plutarch, Alexander der Große aus Arrians Anabasis, Caesars Lebensende aus Plutarch.

Französisch. S.: Scribe et Legouvé, Bataille de Dames. W.: Ségur, Napoléon à Moscou. Gedichte von Coppée.

Englisch vergl. O II ref.

Hebräisch. Teilnehmer im S. 3, im W. 3. Abschnitt 1—3 aus dem Lehrbuche von Hollenberg.

Unter-Sekunda latina.

Deutsch. Jungfrau von Orleans und Wilhelm Tell. Die Dichtung der Befreiungskriege und Schillers Glocke.

Aufsätze: 1. Der Feldzug des Labienus gegen die Parisier. — 2. Das Wirken des Sängers in Uhlands Balladen „Don Massias“ und „Bertran de Born“. — 3. Wodurch wird nach dem ersten Akt von Schillers Jungfrau von Orleans das Unglück Frankreichs herbeigeführt? (Klassenarbeit.) — 4. Wie hat Schiller in seiner Klage der Ceres den antiken Mythus vertieft? — 5. Hat es größere Vorteile, in der Stadt oder auf dem Lande zu leben? — 6. Das Gleichartige der Sühne in Schillers Jungfrau von Orleans und im Kampf mit dem Drachen. — 7. Der Nutzen der allgemeinen Wehrpflicht. — 8. „Unvergessen lebt im Volke, wer des Volkes nie vergaß“, angewendet auf die leitenden Persönlichkeiten der Befreiungskriege. — 9. Die Bedeutung der Eisenbahnen als Verkehrsmittel. — 10. Klassenarbeit.

Lateinisch. Cicero, de imperio Cn. Pompei. Livius, Buch I und II (Auswahl). Ausgewählte Stücke aus Ovids Fasten und aus Vergils Aeneis, Buch I und II.

Griechisch. Xenophon, Anabasis IV—VII, Auswahl. Xenophon, Hellenica I—IV, Auswahl. Homer, Odyssee I—VIII nach einem aufgestellten Kanon.

Französisch. Dhombres et Monod, Biographies historiques, nach Auswahl.

Ober-Tertia latina.

Deutsch. Uhland, Herzog Ernst. Grillparzer, König Ottokars Glück und Ende.

Lateinisch. Caesar, bellum Gallicum V, VI, VII, 1—53, 63—90. Ovid, Metamorphosen I, 1—88, 244—415, II, 1—339.

Griechisch. Xenophon, Anabasis I—III mit Auswahl.

Reform-Gymnasium.

Unter-Prima ref.

Religionslehre s. I lat.

Deutsch. Luther, Sendschreiben an die Ratsherrn usw., vom Dolmetschen; Hans Sachs (Bedeutung und einige Proben seiner Gedichte); das deutsche Kirchenlied, das deutsche Volkslied (einige Proben); Lessings Laokoon; Goethes Iphigenie; Goethes Gedankenlyrik (Auswahl); Schillers Braut von Messina. Wichtigere Daten aus der Literaturgeschichte im Anschluß an die Lektüre. Dispositions-Übungen.

Aufsätze: 1. Wodurch weiß das Nibelungenlied unser Mitleid mit dem Tode Siegfrieds zu erregen? — 2. Warum entfloh Sokrates nicht aus dem Gefängnisse? — 3. Pylades und Odysseus, eine Parallele. — 4. Welche Charakterzüge zeigt Arkas in der Unterredung mit Iphigenie? (Klassenarbeit.) — 5. Lust und Liebe sind die Fittiche zu großen Taten. — 6. Kann uns zum Vaterland die Fremde werden? — 7. Die vier Oden Goethes: Prometheus, Ganymed, Das Göttliche, Grenzen der Menschheit, als Ganzes betrachtet. — 8. Der Krieg auch hat seine Ehre. (Klassenarbeit.)

Lateinisch. Tacitus, dialogus und Germania. Cicero, pro Murena und Auswahl aus den Briefen. Mündliche lateinische Inhaltsangaben und häufiges unvorbereitetes Übersetzen. Vierteljährlich eine schriftliche Übersetzung, halbjährlich eine Ausarbeitung. 4 St. — Horaz, Oden I, II und Satiren in Auswahl. Parallelen aus der griechischen Lyrik. Einführung in die Metrik. Gelernt wurde carm. I, 1. 5. 7, 21—32. 22. 32. 34; II, 2. Sat. I, 3, 1—24; II, 6, 80—117. Pindar, Ol. 12. 2 St. — Eigentümlichkeiten der einzelnen Wortklassen, eingeübt an Stücken aus Ostermann-Müller, Lat. Übungsbuch V, 49—117. Wiederholung der §§ 135—250 aus Reinhardts Lat. Satzlehre. Erlernung der Vokabeln und Wendungen aus dem Übungsbuch 550—1085. Wöchentlich eine schriftliche Arbeit abwechselnd als Klassen- oder Hausarbeit. 2 St. — In einer Lektürestunde der Woche wurde nach einem Plane des Geschichtslehrers regelmäßig ein Abschnitt der römischen Geschichte wiederholt.

Griechisch. Homer, Odyssee X—XXIV, Ilias I—IX. 3 St. — Plato, Kriton. Demosthenes, Olynth. I und III. Sophokles, Elektra. Herodot VI und VIII. Äschylos, Perser, Botenbericht über die Salamis-Schlacht. Übungen im unvorbereiteten Übersetzen. 3 St. — Grammatik: Moduslehre. 12 griechisch-deutsche, 8 deutsch-griechische Klassenarbeiten, vierteljährlich eine Ausarbeitung. 2 St. — In einer Lektürestunde der Woche wurde regelmäßig griechische Geschichte wiederholt. (Lehrbuch wie in O II.)

Französisch. Lektüre: S.: Racine, Athalie. W.: Rambaud, Historie de la Civilisation. Gedichte von F. Coppée und V. Hugo. Wiederholung wichtiger Kapitel der Grammatik. Sprechübungen besonders im Anschluß an die Lektüre. Die Klassenarbeiten sind teils freie, teils Übersetzungen ins Französische.

Englisch s. I lat.

Geschichte und Erdkunde. Die für die Weltkultur bedeutsamsten römischen Kaiser. Deutsche Geschichte bis zum Ende des Dreißigjährigen Krieges unter eingehender Berücksichtigung der Verfassungs- und Kulturverhältnisse. Die außerdeutschen Verhältnisse von weltgeschichtlicher Bedeutung. (Neubauer, Lehrbuch der Geschichte, 4. Teil.) Wiederholungen aus der Erdkunde: Europa außer Süd-Europa und Deutschland; Amerika.

Mathematik. Abschluß der Trigonometrie. Stereometrie. Aufgaben aus beiden Gebieten. Wiederholung der Planimetrie an der Hand von Aufgaben. Ergänzungen zur Ähnlichkeitslehre. Gleichungen zweiten Grades mit zwei Unbekannten. Leichte Aufgaben über Maxima und Minima. Grundlehren der Kombinatorik und Anfangsgründe der Wahrscheinlichkeitsrechnung. (Mehler. Bardey, Aufgaben. Gauß, Logarithmen.)

Physik s. I lat.

Ober-Sekunda ref.

Ev. Religionslehre (vereinigt mit O II lat.). Erklärung der Apostelgeschichte und leichterer Abschnitte aus dem ersten Briefe an die Korinther, aus dem Galater-, Philipper- und Titusbriefe, welche von dem altchristlichen Gemeindeleben handeln. Lebensbilder der Apostel und anderer biblischer Personen, Juden- und Heidenchristentum und die Einigung der Kirche, Kampf und Sieg des Christentums im römischen Reiche. Wiederholung von Sprüchen, Liedern und Psalmen. (Leimbach, Leitfaden, Teil 2. Der religiöse Lernstoff.)

Kath. Religionslehre s. I lat.

Deutsch. Ausgewählte Abschnitte aus dem Nibelungenliede und der Gudrun, eine Anzahl von Liedern Walthers von der Vogelweide; Goethes Götz von Berlichingen und Hermann und Dorothea; Schillers Wallenstein; Mitteilungen über Goethes und Schillers Leben. Gelegentliches Auswendiglernen von Stellen aus den besprochenen Dichtungen; Dispositionsübungen; Übungen in frei gesprochenen Berichten.

Aufsätze: 1. Der Freiherr von Attinghausen. Ein Lebens- und Charakterbild. — 2. Hermanns Lebens- und Entwickelungsgang bis zu seiner Verlobung (nach Goethes Hermann und Dorothea). — 3. Götz von Berlichingen, ein echter Ritter. — 4. Wilhelm von Oranien, ein kluger Staatsmann und ein treuer Freund Egmonts. (Klassenarbeit.) — 5. Zur Tat laß werden, was du sprichst; doch sprich von dem nicht, was du tatst! — 6. Bescheidenheit und Selbstgefühl Siegfrieds (nach dem Nibelungenliede). (Klassenarbeit.) — 7. Der Wachtmeister, ein geschickter Förderer der Sache Wallensteins unter den Soldaten. — 8. Klassenaufsatz über eine Aufgabe aus Schillers Piccolomini.

Lateinisch. Livius, Buch 21 mit Auslassung von 15, 3—6; 19, 1—5; 25, 1—26, 2; 38, 2—9; 49, 1—50, 6; 60—62; Buch 22 mit Auslassung von 1, 8—20; 10, 1—10; 19, 1—23, 8; 31, 1—40, 5; 57, 1—6; 59; 60, 6—27. Cicero, de imperio Cn. Pompei, pro Ligario. Mündliche lateinische Inhaltsangaben des Gelesenen und häufiges unvorbereitetes Übersetzen. Vierteljährlich eine schriftliche Übersetzung. Halbjährlich eine kleine Ausarbeitung. Vergils Aeneis 2, 1—267, 634—804; 4, 1—79, 90—109, 584—629; 5, 286—361; 6, 788—825; 9, 176—223, 314—449; 10, 362—509; 12, 697—790, 887—952 und Durchblick durch das ganze Werk. Gelernt wurden 2, 199—249; 4, 584—629. 6 St. — Wiederholungen und Ergänzungen aus Reinhardts Lateinischer Schulgrammatik, besonders §§ 147—153, 169—186, 214—223, 236—250, im Anschluß an Ostermanns Lateinisches Übungsbuch V Stück 1—48. Vokabeln und Wendungen aus der Sammlung des Übungsbuches 1—800. Wöchentlich eine Haus- oder eine Klassenarbeit. Anleitung zu freien Ausarbeitungen. 2 St.

Griechisch. Xenophon, Anabasis IV, Hellenica I—III mit Auswahl. Lysias gegen Eratosthenes und für den Krüppel. Bis Juli 5 St., von August ab 3 St. — Homer, Odyssee I, II, V—IX mit Auswahl. Seit August 3 St. — Wiederholung der Formenlehre. Die Kasuslehre vollständig. Die Lehre vom Infinitivus und Partizipium. Bis Juli 3 St., von August ab 2 St. (Reinhardt und Römer, Griechische Formen- und Satzlehre.)

Französisch. Lektüre: S.: Molière, l'Avare. W.: Duruy, Historie de France de 1789—1795. In jeder Stunde Sprechübungen, besonders im Anschluß an das Gelesene. Wiederholung wichtigerer Kapitel aus der Grammatik, hauptsächlich der Lehre vom Konjunktiv und

Infinitiv. Alle drei Wochen Klassenarbeiten, teils Übersetzungen ins Französische, teils freie Arbeiten, manchmal ein Diktat.

Englisch (vereinigt mit O II lat.). Teilnehmer: S. 12, W. 9. Lese- und Aussprachübungen nach Tenderings Lehrbuch der englischen Sprache. Lektüre: Tendering Kap. 1—8 mit Auswahl. Grammatik: Formenlehre. — Sprechübungen mit Anschluß an die Lektüre. Monatlich eine Klassenarbeit.

Hebräisch (vereinigt mit O II lat.). Die Elementarlehre; das starke Verbum; das Wichtigste aus der Nominallehre und aus der Suffixbildung; die schwachen Verba. Übersetzung der Übungsstücke I—IX und der Abschnitte I—III aus dem Lehrbuche von Hollenberg.

Geschichte und Erdkunde. Griechische Geschichte bis zum Tode Alexanders des Großen mit Ausblicken auf Orient und Hellenismus. Römische Geschichte bis Augustus. Verfassungs- und Kulturverhältnisse in zusammenfassender vergleichender Gruppierung. Wiederholung der Jahreszahlen der deutschen Geschichte. (Neubauer, Lehrbuch der Geschichte, 3. Teil.) Wiederholungen aus der Erdkunde: Südeuropa, Nordafrika, Asien.

Mathematik. Harmonische Punkte und Strahlen (§ 105—111). — Zinseszinsrechnung. Arithmetische Reihen erster Ordnung und geometrische Reihen. Quadratische Gleichungen mit zwei Unbekannten. — Goniometrie. Einfache Dreiecksberechnungen. — Die einfachen Körper nebst Berechnung von Kantenlängen, Oberflächen und Rauminhalten. (Mehler, Elementar-Mathematik; Bardey, Aufgaben; Gauß, Logarithmen.)

Physik (vereinigt mit O II lat.). Wärmelehre und Meteorologie. Magnetismus und Elektrizität. (Trappe, Schulphysik.)

Unter-Sekunda ref.

Ev. Religionslehre (vereinigt mit U II lat.). Lesen und Erklärung ausgewählter Stellen des Alten Testamentes, namentlich aus den poetischen und prophetischen Schriften. Lesen und Erklärung des Matthäus-Evangeliums nebst vertiefender Wiederholung der Bergpredigt. Wiederholung des Katechismus und Vertiefung seines Verständnisses durch Darlegung seiner inneren Gliederung, sowie durch Würdigung der Auslegung Luthers in ihrer Richtung auf den religiös-sittlichen Grundgehalt des Christentums. Wiederholung von Sprüchen, Psalmen und Liedern. (Leimbach, Leitfaden, Teil I. Der religiöse Lernstoff.)

Kath. Religionslehre (vereinigt mit I und II lat.) s. I lat.

Deutsch. Praktische Anleitung zur Anfertigung von Aufsätzen durch Übungen im Auffinden und Ordnen des Stoffes. Lektüre: Die Dichtung der Befreiungskriege; Schillers Glocke, Jungfrau von Orleans und Wilhelm Tell; Wiederholung von Heyses Kolberg; daneben Lesen und Besprechungen von Aufsätzen und Gedichten des Lesebuches. Auswendiglernen von wichtigen Stellen aus den erwähnten Dichterwerken und von ganzen Gedichten; außerdem Übungen in frei gesprochenen Berichten über Gelerntes und Durchgearbeitetes.

Aufsätze: 1. Die Heimat und die Familie der Jungfrau von Orleans. — 2. Das Schicksal Niobes (nach Ovid). (Klassenarbeit.) — 3. Die Notlage Frankreichs und seines angestammten Königs vor dem Auftreten der Jungfrau von Orleans. — 4. Die Darstellung der Feuersbrunst in Schillers Gedicht „Das Lied von der Glocke". — 5. Isabeau und Philipp der Gute von Burgund als Gegner des Dauphins geschildert. — 6. Die Segnungen eines geordneten Staatswesens im Anschluß an Schillers Gedicht „Das Lied von der Glocke". — 7. Die Notlage Cäsars bei Dyrrhachium. — 8. Schilderung von Land und Leuten der Schweiz nach Schillers „Wilhelm Tell". — 9. Was veranlaßte die Schweizer zum Bunde auf dem Rütli? — 10. Hat Hedwig recht, wenn sie über die Tat ihres Gatten urteilt: „O, er hat kein Herz, er konnte den Pfeil abdrücken auf sein eignes Kind?" — 11. Wie rechtfertigt Tell die Ermordung Geßlers? (Klassenarbeit.)

Lateinisch. Caesar, bellum Gallicum VII, 1—90; bellum civile I, 37—55, 59—87; III, 41—55, 58—99, 102—104; Cicero in Catilinam I; II, 1—14; III, 3—15; IV. Ovid, Metamorphosen IV, 615—739; VI, 146—312; Fasten I, 539—586; IV, 807—862; III, 179—230; II, 475—512, 193—242, 639—684; III, 809—848; IV, 679—712. Vergil, Aeneis I, 1—158, 195—207, 418—465, 494—656. Auswendig gelernt Ovid, Met. VI, 157—183; Fasten II, 491—512; Vergil, Aeneis I, 1—33. 6 Std. — Wiederholung der Kasuslehre. Reinhardt, Lateinische Satzlehre, §§ 108—145, 156—160, 169—174, 177, 181, 185—213. Übersetzungen aus Ostermanns Lateinischem Übungsbuche IV. Wöchentlich eine Haus- oder eine Klassenarbeit. In jedem Vierteljahr eine schriftliche Übersetzung ins Deutsche als Klassenarbeit. 2 St.

Griechisch. Homer, Odyssee I und II bis 176 wurde von Anfang des Schuljahres bis Ende August gelesen und der Versuch gemacht, aus der homerischen Formenlehre die attische zu entwickeln. Klassenarbeiten nach Bedürfnis und Möglichkeit. Dann erfolgte das Erlernen der attischen Formenlehre und der Hauptsachen der Kasus-Syntax im Anschlusse an Bruhn, Hilfsbuch für den griechischen Unterricht. Anfangs 8, von Michaelis ab 4 St. — Lektüre: Xenophon, Anabasis I; III, 1. 4 St. — Wöchentlich eine Klassenarbeit; dazu öfters eine Hausarbeit. (Lehrbuch außer Bruhns Hilfsbuch Reinhardt u. Römer, Griech. Formen- und Satzlehre.)

Französisch. Erckmann-Chatrian, Waterloo. Sprechübungen im Anschluß an die Lektüre. Tempus- und Moduslehre. Banner, Französische Satzlehre, §§ 110—141. Alle drei Wochen eine Klassenarbeit, teils in freier Form, teils als Übersetzung.

Geschichte und Erdkunde. Deutsche und preußische Geschichte vom Regierungsantritt Friedrichs des Großen bis zur Gegenwart. Vergleichende Berücksichtigung der gesellschaftlichen und wirtschaftlichen Verhältnisse bis zum Ende des 19. Jahrhunderts. Wiederholung der Jahreszahlen der brandenburgisch-preußischen Geschichte. (Müller-Junge, Leitfaden der Geschichte des deutschen Volkes.) Wiederholung der Länderkunde Europas, außer Deutschland. Elementare mathematische Erdkunde. (Daniel-Volz, Leitfaden.)

Mathematik. Einiges über harmonische Punkte und Strahlen. Konstruktionsaufgaben. — Lehre von den Logarithmen. Übungen im Rechnen mit Logarithmen. Quadratische Gleichungen mit einer und mit zwei Unbekannten. Textaufgaben. — Einfache Goniometrie und einfache Dreiecksberechnungen. — Veranschaulichende Einführung in die Stereometrie. (Mehler, Elementarmathematik; Bardey, Aufgaben. Gauß, Logarithmen.)

Physik. Vorbereitender physikalischer Lehrgang II: Anfangsgründe der Chemie mit Besprechung einzelner wichtiger Mineralien. Einfachste Erscheinungen aus der Lehre vom Magnetismus und der Elektrizität in experimenteller Behandlung. (Trappe, Schulphysik.)

Ober-Tertia ref.

Ev. Religionslehre (vereinigt mit O III lat.). Das Reich Gottes im Neuen Testamente; Lesen und Erklärung von entsprechenden biblischen Abschnitten, eingehende Behandlung der Bergpredigt, deren Hauptinhalt eingeprägt wurde, und der Gleichnisse. Reformationsgeschichte im Anschluß an ein Lebensbild Luthers. (Leimbach, Leitfaden, Teil I.) Sicherung der erworbenen Kenntnis des Katechismus und des in den vorangegangenen Klassen angeeigneten Spruch- und Liederschatzes. Kurzer Abriß der Geschichte des evangelischen Kirchenliedes.

Kath. Religionslehre (vereinigt mit O III lat. und U III). Aus der Glaubenslehre die Sakramente der Buße, letzten Ölung, Priesterweihe und Ehe. Die Vollendung der Welt. Die wichtigsten Abschnitte der Sittenlehre in Umrissen. Die Gebote Gottes im allgemeinen. Die Zehngebote im besondern. Abriß der Kirchengeschichte von der apostolischen Zeit bis zur

Gegenwart. (König, Handbuch für den kath. Religionsunterricht in den mittleren Klassen der Gymnasien und Realschulen.)

Deutsch. Lesen und Besprechen ausgewählter Gedichte in Hopf und Paulsieks Lesebuch, sowie von Körners Zriny und Heyses Kolberg, auch einiger Aufsätze des Lesebuchs; Übungen in freigesprochenen Berichten über das Gelesene, Auswendiglernen von ausgewählten Stellen und von ganzen Gedichten nach einem Kanon. Zehn Aufsätze, darunter vier Klassenarbeiten und einige kürzere Ausarbeitungen im Anschluß an die Lektüre. Grammatische Wiederholungen nach Prigges Satzlehre und das Wichtigste aus der Wortbildungslehre nach Wessely, § 2, 7—10.

Lateinisch. Caesar, de bello Gallico I—VI. Auswendiglernen von häufig gebrauchten Redensarten. Ovid, Metamorphosen VI, 313—381; VIII, 183—235, 611—724; IV, 55—166; I, 89—150; XI, 85—145; VIII, 270—524, gegen 300 Verse gelernt. 6 St. — Wiederholung der Formenlehre und der in U III gelernten Vokabeln. Reinhardt-Wulff, Lateinische Satzlehre §§ 1—107. Einiges aus der Satzlehre wurde bei der Lektüre abgeleitet. Übersetzen aus Aufgaben zum Übersetzen ins Lateinische von Wulff-Bruhn, II. Teil. Wöchentlich eine Haus- und eine Klassenarbeit. 4 St.

Französisch. Lektüre von Duruy, Histoire grecque. Sprechübungen. Wiederholung der regelmäßigen und der unregelmäßigen Konjugation, sowie der wichtigsten bereits behandelten syntaktischen Kapitel, neu der Infinitiv, das Gerundium, der Artikel, Unregelmäßigkeiten in der Wortstellung nach Banner, Französische Satzlehre §§ 33—39; 40—45; 73—76; 80—91; 104—108; 147; 151b. Alle drei Wochen schriftliche Klassenarbeiten meist im Anschluß an die Lektüre.

Geschichte. Deutsche Geschichte vom Ausgange des Mittelalters bis zum Regierungsantritt Friedrichs des Großen, insbesondere brandenburgisch-preußische Geschichte; die außerdeutsche soweit, als sie zum Verständnis der vaterländischen notwendig ist. Wiederholung der Zahlen des Pensums der U III und aus der alten Geschichte.

Erdkunde. Wiederholung und Ergänzung der Landeskunde des deutschen Reiches. Kartenskizzen. (Daniel-Volz, Leitfaden.)

Mathematik. Gleichungen ersten Grades mit mehreren Unbekannten. Gleichungen zweiten Grades mit einer Unbekannten. Textaufgaben. Die leichteren Sätze von Potenzen und Wurzeln. Ausziehen der Quadratwurzel. Die leichteren Sätze von Logarithmen und ihre Anwendung. Proportionalität der Linien im rechtwinkligen Dreieck und im Kreise. Stetige Teilung. Mittelecklinien. Regelmäßige Vielecke. Gedankengang zur Kreisberechnung. Konstruktionsaufgaben, besonders aus der Ähnlichkeitslehre. (Mehler-Bardey, Gauß.)

Naturwissenschaft. Lehre vom Bau des menschlichen Körpers. Unterweisungen über die Gesundheitspflege. — Vorbereitender physikalischer Lehrgang I: Einfachste Erscheinungen aus der Mechanik fester, flüssiger und gasförmiger Körper, sowie aus der Wärmelehre in experimenteller Behandlung. (Bail, Grundriß der Naturgeschichte, und Trappe, Schulphysik.)

Unter-Tertia ref.

Ev. Religionslehre (vereinigt mit U III lat.). Das Reich Gottes im Alten Testament. Lesen und Erklärung von entsprechenden biblischen Abschnitten, auch von Psalmen und leichteren Stellen aus den Propheten. Belehrung über das Kirchenjahr und die Bedeutung der gottesdienstlichen Ordnungen. Erklärung und Erlernung des IV. und V. Hauptstückes des Katechismus. Wiederholung der anderen Hauptstücke, sowie früher gelernter Sprüche und Kirchenlieder. Einprägung leichterer Psalmen und dreier Lieder. (Biblisches Lesebuch von Völker-Strack; Leimbach, Leitfaden, Teil I. Der religiöse Lernstoff.)

Kath. Religionslehre s. O III ref.

Deutsch. Lesen und Besprechen von Gedichten und Lesestücken aus dem Lesebuche von Hopf u. Paulsiek. Auswendiglernen von Gedichten. Zehn Aufsätze. Satz- und Wortbildungslehre. 2 St.

Lateinisch. Die gesamte regelmäßige und größtenteils die unregelmäßige Formenlehre. Ableitung syntaktischer Regeln aus dem Lesestoff. Übungen im Rückübersetzen und im Übersetzen aus dem Deutschen ins Lateinische. Wöchentlich eine Haus- und eine Klassenarbeit. (Wulff, Lat. Lesebuch; Übungsbuch zum Übersetzen ins Lateinische; Wortkunde. Perthes-Gillhausen, Lateinische Formenlehre.)

Französisch. Duruy, Biographies d'hommes célèbres des temps anciens et modernes. Sprechübungen im Anschluß an die Lektüre. Wiederholung der Formenlehre. Aus Banner, Französische Satzlehre: Subjekt, Prädikat und ihre Ergänzungen, §§ 1—24; der Genetiv als Kasus des Attributs und des Objekts §§ 47, 48, 57, 58; die Präpositionen §§ 64—71, das partic. praes. und partic. perf. §§ 93; 96, 1; die Konjunktionen mit dem Konjunktiv § 132; die Stellung der Adjektive §§ 156—163. Alle drei Wochen eine Klassenarbeit, entweder Beantwortung französisch gestellter Fragen oder Übersetzungen aus dem Deutschen, beides im Anschluß an die Lektüre, gelegentlich Diktate.

Geschichte. Römische Kaisergeschichte; deutsche Geschichte vom Auftreten der Germanen bis 1517. (Müller, Leitfaden zur Geschichte des deutschen Volkes.)

Erdkunde. Länderkunde der außereuropäischen Erdteile mit besonderer Berücksichtigung der deutschen Kolonien. Einfache Kartenskizzen. (Daniel, Leitfaden.)

Mathematik. Grundrechnungsarten mit Buchstaben. Einfachste Sätze von Potenzen. Erklärung der Wurzel. Ausziehen der Quadratwurzel. Gleichungen ersten Grades mit einer Unbekannten. Textaufgaben. Kreislehre bis Sehnen- und Tangentenviereck einschl. Flächengleichheit und -ausmessung. Pythagor. Lehrsatz und zugehörige Sätze. Konstruktionsaufgaben. Geometrische Analysis. (Mehler-Bardey [Neue Bearbeitung].)

Naturwissenschaft. Beschreibung und Vergleichung einiger Nadelhölzer und Sporenpflanzen, Besprechung der wichtigeren ausländischen Nutzpflanzen. Im Anschluß hieran: Übersicht über das gesamte natürliche System, das Nötigste aus der Anatomie und Physiologie der Pflanzen, sowie einiges über Pflanzenkrankheiten und ihre Erreger. — Niedere Tiere und Überblick über das Tierreich. (Bail, Grundriß der Naturgeschichte.)

Quarta ref.

Ev. Religionslehre (vereinigt mit IV lat.). Einleitung in die Bibel und Reihenfolge der biblischen Bücher. Alttestamentliche Abschnitte über die Patriarchen, Samuel, Saul, David, Salomo, Teilung des Reichs, Untergang der Reiche, Wiederherstellung Judas. Messianische Weissagungen. Das Leben des Herrn. Katechismus: Wiederholung des ersten und zweiten, Durchnahme des dritten Hauptstücks mit Luthers Erklärungen. Wiederholung und Lernen von Sprüchen und Kirchenliedern, davon vier neu. (Biblisches Lesebuch von Völker-Strack; Leimbach, Leitfaden für den evangelischen Religionsunterricht. Der religiöse Lernstoff.)

Kath. Religionslehre (vereinigt mit IV lat. und V). Biblische Geschichten des Neuen Testamentes: Das Leiden und Sterben Jesu. Die Verherrlichung Jesu. Die Kirche Jesu Christi in den Tagen der Apostel. Wiederholung der Gleichnisse des Herrn. Aus dem Katechismus Durchnahme, Erklärung und Erlernung des zweiten Hauptstückes: Von den Geboten Gottes und der Kirche. (Schuster-Mey, Biblische Geschichte für kath. Volksschulen. Kath. Katechismus f. d. Diözese Breslau.)

Deutsch. Lektüre aus Hopf und Paulsiek, Lesebuch III. Übungen im Nacherzählen, Vortragen auswendig gelernter Gedichte. Alle 14 Tage eine schriftliche Arbeit, Diktat oder Aufsatz; dabei Wiederholung und Zusammenfassung der Regeln über Rechtschreibung und

Zeichensetzung. In der Grammatik Wiederholung des Pensums der VI und V; neu die Lehre vom zusammengesetzten Satz und der dafür erforderlichen Zeichensetzung nach Prigge, Deutsche Satzlehre. Die Elemente der Wortbildungslehre.

Französisch. Duruy, Hommes célèbres de l'histoire romaine. Übersetzung, Umformung und stündlich Sprechübungen, meist im Anschluß an die Lektüre. Wiederholung und Auswendiglernen von Gedichten. Grammatik: Systematische Wiederholung der Formenlehre, besonders des Verbs und der Fürwörter. Aus der Satzlehre Subjekt und Prädikat, Kasuslehre, Adverb; Fragesätze, Wortstellung nach Banner, Französische Satzlehre. Wöchentlich eine Klassen- und eine Hausarbeit (Übersetzungen ins Französische, Umformungen und Nacherzählungen, Diktat).

Geschichte. Griechische Geschichte bis zum Tode Alexanders des Großen mit Ausblick auf die Diadochenzeit. Römische Geschichte bis zum Tode des Augustus. (D. Müller, Alte Geschichte.)

Erdkunde. Die europäischen Staaten außer Deutschland. Wiederholung der außereuropäischen Erdteile und der deutschen Kolonien. Einfache Kartenskizzen. (Daniel-Volz, Leitfaden.)

Rechnen und Mathematik. Schluß-, Zins-, Prozent-, Gesellschafts-, Terminrechnung. (Blümel, Heft V, VI.) Linien, Winkel, Dreieck, Parallelogramm, Trapez. Kreislehre bis Tangentenviereck einschl. Konstruktionsaufgaben. Addition, Subtraktion, Multiplikation mit allgemeinen Zahlen. (Mehler-Bardey [Neue Bearbeitung].)

Naturwissenschaft. Beschreibung und Vergleichung von Pflanzen mit schwieriger erkennbarem Blütenbau. Übersicht über das natürliche System der Blütenpflanzen. Gliedertiere unter besonderer Berücksichtigung der Insekten. (Bail, Grundriß der Naturgeschichte.)

Quinta ref.

Ev. Religionslehre (vereinigt mit V lat.). Biblische Geschichten des Neuen Testamentes. Aus dem Katechismus Wiederholung der Aufgabe der Sexta, dazu Durchnahme und Erlernung des 2. Hauptstückes mit Luthers Auslegung. Einprägung von Katechismussprüchen und Schriftstellen, sowie von vier Kirchenliedern, Wiederholung der in VI gelernten Lieder. (Henning, Biblische Geschichten. Der religiöse Lernstoff.)

Kath. Religionslehre s. IV ref.

Deutsch und Geschichtserzählungen. Der einfache erweiterte Satz, der zusammengesetzte Satz, im Zusammenhang damit die Zeichensetzung. Wöchentlich Diktate, jede dritte Woche statt des Diktates eine Nacherzählung. Lesen von Gedichten und Prosastücken. Erzählungen aus der alten Sage und Geschichte. Auswendiglernen von Gedichten nach einem Kanon. (Deutsches Lesebuch von Hopf und Paulsiek, neu bearbeitet von Muff. Prigge, Deutsche Satzlehre nebst Übusbuch.)

Französisch. Die unregelmäßigen Verben wurden schematisch behandelt mit Ausnahme von fuir, bouillir, coudre, moudre, résoudre, derjenigen auf aindre, eindre, oindre, aître, croître, boire, plaire, taire, mouvoir, s'asseoir. Induktiv wurden behandelt das Demonstrativ-, Relativ- und Interrogativpronomen. Wiederholungen aus dem grammatischen Pensum der VI. Die Lesestücke des Lesebuchs wurden mit Auswahl gelesen, übersetzt, umgeformt. Einzelne Gedichte wurden gelernt. Schreib- und Sprechübungen im Anschluß an die Lektüre, die Umgebung und Vorkommnisse des täglichen Lebens. Wöchentlich eine Klassen- oder eine Hausarbeit. (Banner, Französisches Lese- und Übungsbuch, 2. Kursus.)

Erdkunde. Länderkunde Mittel-Europas, besonders des deutschen Reiches. Anleitung zum Verständnis des Globus und der Karten, sowie des Reliefs. Entwerfen von einfachen Umrissen an der Wandtafel. (Daniel-Volz, Leitfaden.)

Rechnen. Gemeine Brüche. Fortgesetzte Übungen mit benannten Dezimalzahlen, mit deutschen Maßen, Gewichten und Münzen. Dezimalrechnung. Einfache Aufgaben aus der Regeldetri. — Propädeutischer geometrischer Anschauungsunterricht. Übungen im Gebrauch von Zirkel und Lineal. (J. Blümels Aufgaben zum Zifferrechnen, 4. und 5. Heft.)

Naturwissenschaft. S.: Die äußeren Organe der Blütenpflanzen im Anschluß an die Beschreibung vorliegender Exemplare und an die Vergleichung verwandter Formen. W.: Beschreibung wichtiger Wirbeltiere. Grundzüge des Knochenbaues beim Menschen. (Bail, Methodischer Leitfaden.)

Schreiben. Deutsche und lateinische Schrift nach Vorschrift an der Wandtafel und in zusammenhängenden Stücken. Anfänge der Rundschrift.

Sexta ref.

Ev. Religionslehre. Biblische Geschichten des Alten Testamentes; vor den Hauptfesten die betreffenden Geschichten des neuen Testamentes. Aus dem Katechismus Durchnahme und Erlernung des ersten Hauptstückes mit Luthers Auslegung und Erlernung des dritten Hauptstückes ohne diese. Einprägung von Katechismussprüchen, sowie von vier Kirchenliedern und Liederstrophen. (Henning, Biblische Geschichten. Der religiöse Lernstoff.)

Kath. Religionslehre (vereinigt mit VI lat.). Biblische Geschichten des Alten Testamentes bis zur Makkabäerzeit. Aus dem Katechismus Durchnahme, Erklärung und Erlernung des ersten Hauptstückes: Von dem Glauben. Die zwölf Artikel des Apostolischen Glaubensbekenntnisses. (Schuster-Mey, Biblische Geschichte. Kath. Katechismus für die Diözese Breslau.)

Deutsch und Geschichtserzählungen. Die Wortklassen. Deklination und Konjugation. Die Lehre vom einfachen erweiterten Satze. Rechtschreibeübungen. Lesen und Besprechen von Gedichten und Prosastücken; Auswendiglernen von Gedichten. Erzählungen aus dem gesamten Gebiete der vaterländischen Geschichte unter besonderer Berücksichtigung der beiden letzten Jahrhunderte. Wöchentlich ein Diktat. (Lesebuch von Hopf und Paulsiek I; Prigge, Deutsche Satz- und Formenlehre.)

Französisch. Einübung der Aussprache. Lesen und Übersetzen ausgewählter Stücke des Übungsbuches; im Anschluß daran Sprechübungen und schriftliche Arbeiten. Auswendiglernen einzelner Gedichte. Die Konjugation von avoir und être sowie der regelmäßigen Verben auf er, ir und re. Deklination, Komparation, Zahlwörter. Possessiva und Demonstrativa. Vom zweiten Halbjahr an Klassen- und gelegentlich Hausarbeiten. (Banner, Französisches Lese- und Übungsbuch I.)

Erdkunde. Grundbegriffe der allgemeinen Erdkunde in Anlehnung an die nächste Umgebung und erste Anleitung zum Verständnis des Globus und der Karten. Anfangsgründe der Länderkunde, beginnend mit der Heimat und mit Europa. 2 St.

Rechnen. Die Grundrechnungsarten mit unbenannten und benannten Zahlen. Die Maße, Gewichte und Münzen, die dezimale Schreibweise und einfachsten dezimalen Rechnungen. Vorbereitung der Bruchrechnung. (J. Blümels Aufgaben zum Zifferrechnen, Heft III und IV.)

Naturwissenschaft. S.: Beschreibung vorliegender Blütenpflanzen und Besprechung der Teile und Formen (Wurzel, Stengel etc.) leicht erkennbarer Blütenstände und Früchte. W.: Beschreibung wichtiger Säugetiere und Vögel in bezug auf äußere Merkmale und charakteristische Einzelheiten des Knochenbaues, der Lebensweise, des Nutzens und Schadens. (Schematische Zeichnungen.) (Bail, Grundriß der Naturgeschichte.)

Schreiben. Deutsche und lateinische Schrift.

Vorschule.

Wie im vorigen Jahre.

Von der Teilnahme am evangelischen Religionsunterricht waren wegen des gleichzeitigen Konfirmandenunterrichts befreit im Sommer 8, im Winter 9 Schüler, halb befreit im Sommer 7, im Winter 7 Schüler.

4. Mitteilungen über den technischen Unterricht.

a. **Turnen:**

Die Anstalt besuchten im S. 424, im W. 422 Schüler. Von diesen waren befreit:

	vom Turnunterricht überhaupt:	von einzelnen Übungen:
auf Grund ärztlichen Zeugnisses	im S. 28, im W. 35	im S. 2, im W. 1
aus anderen Gründen	im S. 1, im W. 1	im S. —, im W. —
zusammen	im S. 29, im W. 36	im S. 2, im W. 1
also von der Gesamtzahl der Schüler	im S. 6,84%, im W. 8,29%	im S. 0,47%, im W. 0,24%

Es bestanden bei 16 getrennt zu unterrichtenden Gymnasialklassen 7 Turnabteilungen; zur kleinsten von diesen gehörten 35, zur größten 54 Schüler. Die Vorschule hatte eine Stunde Turnen wöchentlich. Eine besondere Vorturnerstunde wurde nicht abgehalten. Für den Turnunterricht waren wöchentlich insgesamt 22 Stunden angesetzt. Ihn erteilten Oberlehrer Dr. Gröhler, Vorschullehrer Weiner und Hilfslehrer Kluge. Die Anstalt besitzt eine Turnhalle, der geräumige Hof dient als Turn- und Spielplatz.

Das Schwimmen erlernten 49 Schüler, die Probe als Freischwimmer legten 36 ab. Die Zahl der Freischwimmer beträgt 177 oder 53,31 % aller Gymnasiasten nach dem Stande vom 1. Februar.

b. **Singen** }
c. **Zeichnen** } wie im vorigen Jahre.

d. **Schreiben.** Wie im vorigen Jahre. Teilnehmerzahl schwankend zwischen 10 und 4 Schülern.

Die eingeführten Lehrbücher.

A. Gymnasium.

Religion, evangelische: Der religiöse Lernstoff. Breslau 1903.
Treblin, Achtzig Kirchenlieder. VI—I.
Henning, Biblische Geschichte. VI—V.
Völker und Strack, Biblisches Lesebuch. Gera. IV—U III.
Leimbach, Leitfaden für den evangelischen Religionsunterricht. Hannover. Teil 1 VI—U II, Teil 2 O II—I.

katholische: Katholischer Katechismus für die Diözese Breslau. VI—IV.
Schuster-Mey, Biblische Geschichten. Freiburg. VI—IV.
König, Lehrbuch für den kath. Religionsunterricht in den mittleren Klassen. Freiburg. III.
Deutsch: Regeln für die deutsche Rechtschreibung nebst Wörterverzeichnis. 1903. VI—I.
Hopf und Paulsiek, Deutsches Lesebuch. VI—O III.
Prigge, Deutsche Satzlehre. VI ref.—O III ref.
Lateinisch: Ellendt-Seyffert, Grammatik. IV lat.—I.
Müller, H. J., Lateinische Schulgrammatik, vornehmlich zu Ostermanns lateinischen Übungsbüchern. Ausgabe B. VI—V lat.
Ostermann-Müller, Übungsbuch, Teil 1—5 VI—I.
Reinhardt, Lateinische Satzlehre. O III ref.—I ref.
Wulff und Bruhn, Aufgaben zum Übersetzen, Teil 1 U III ref., Teil 2 O III ref.
Perthes-Gillhausen, Lateinische Formenlehre. U III—O III ref.
Empfohlen werden die Wörterbücher von Heinichen oder Stowasser.
Griechisch: Franke-von Bamberg, Griechische Formenlehre. U II lat.—I.
Seyffert-von Bamberg, Hauptregeln der griechischen Syntax. U II—I.
Reinhardt und Römer, Griechische Formen- und Satzlehre. II—I ref.
Kaegi, Kurzgefaßte griechische Schulgrammatik. III lat.
Herwig, Lese- und Übungsbuch und Vokabularium und Regelverzeichnis zu diesem. II ref.
Dzialas, Übungsbuch, Teil 1 U III lat., Teil 2 O III lat.
Bruhn, Hilfsbuch für den griechischen Unterricht, Teil 1 und 2 II ref.
von Wilamowitz-Möllendorff, Griechisches Lesebuch. O II lat.
Kübler, Griechisches Vokabularium. U III—I.
Empfohlen werden die Wörterbücher von Benseler oder Menge.
Französisch: Plötz-Kares, Elementarbuch. Ausgabe B. IV lat.—U III lat.
Plötz-Kares, Sprachlehre. O III lat.—I.
Banner, Französisches Lehr- und Übungsbuch, Kursus 1 in VI ref., Kursus 2 in V ref. und IV ref.
Banner, Französische Satzlehre. IV ref.—I ref.
Englisch: Tendering, Lehrbuch. O II—I.
Hebräisch: Hollenberg, Elementarbuch. O II—I.
Geschichte: D. Müller, Alte Geschichte für die Anfangsstufe. IV.
D. Müller, Leitfaden zur Geschichte des deutschen Volkes. U III—U II.
Neubauer, Geschichte des Altertums. O II—I.
Neubauer, Deutsche Geschichte bis zum Westfälischen Frieden. I.
Neubauer, Deutsche Geschichte vom Westfälischen Frieden bis auf unsere Zeit. O I.
Erdkunde: Daniel, Leitfaden. V—U II.
Empfohlen: Debes, Schulatlas für die mittleren Unterrichtsstufen. V—IV.
Diercke und Gäbler, Schulatlas. U III—I.
Mathematik: Mehler, Hauptsätze der Elementar-Mathematik. IV—I.
Bardey, Aufgabensammlung. O III—I. Ausgabe von Pietzker und Presler. U III.
Gauß, Fünfstellige logarithmische und trigonometrische Tafeln, kleine Ausgabe. U II—I.
Rechnen: Blümels Aufgaben zum Zifferrechnen, Heft 3 VI, Heft 4 und 5 V, Heft 5 und 6 IV.
Naturwissenschaft: Bail, Methodischer Leitfaden (Botanik und Zoologie). VI—U III.
Trappe, Schulphysik. O III—I.
Singen: Thoma, 45 Choräle. IV—I.
Schwalm, Choralsammlung. IV—I.

B. Vorschule.

Religion, evangelische: Treblin, Achtzig Kirchenlieder. Klasse 1 und 2.
Dietrich und Dürr, Biblische Geschichten.
katholische: Kleiner katholischer Katechismus für die Diözese Breslau.
Kurze biblische Geschichte für die unteren Schuljahre von Dr. Knecht.

Deutsch: Lampe und Vogel, Lesebuch für Volksschulen. Teil 1 Klasse 2; Teil 2 Klasse 1.
Wichmann-Lampe, Fibel. Klasse 3.
Schultze, Lehrstoff für den grammatischen und orthographischen Unterricht in der Vorschule. Heft 1 Klasse 2; Heft 2 Klasse 1.

Rechnen: Übungsstoff für den Rechenunterricht in Vorschulen. Bearbeitet von Lehrern der Königlichen Vorschule zu Berlin. Heft 1—3 in Klasse 3—1.

Singen: Mettner, Deutsches Liederbuch, Heft 1 und 2.

II. Verfügungen der vorgesetzten Behörden von allgemeinerem Interesse.

Ministerialerlasse über bestimmte Berufe. Vom 2. März 1903. Die Anforderungen der Fähnrichsprüfung sind so bemessen, daß nach Erlangung der Primareife durch geregelten Schulunterricht der Besuch einer Presse unnötig ist. Die notwendigen Wiederholungen und geringen Ergänzungen kann ein junger Mann leicht selbst bewirken.

Vom 20. April 1903. Für die Zulassung zum Kgl. Forstverwaltungsdienst ist das Zeugnis der Reife mit unbedingt genügendem Urteil in der Mathematik und ein Alter unter 22 Jahren Bedingung.

Vom 29. Juni und 28. Dezember 1903. Ausführungsbestimmungen vom 10. Februar 1903 und 19. November 1903 über die Diplomprüfung an den technischen Hochschulen.

Ministerialerlaß vom 17. April 1903. Der Direktor des Goethe-Gymnasiums in Frankfurt a. M., Geheimer Regierungsrat Dr. Reinhardt, ist zum sachverständigen Beirat für Reformschulen bestellt worden.

Ministerialerlaß vom 4. November 1903. Wer am Schluß des Lehrgangs der O II unversetzt die Schule verläßt, kann zur Prüfung behufs Nachweises der Primareife als Extraneer frühestens gegen den Schluß des folgenden Halbjahrs zugelassen werden.

K. Provinzialschulkollegium vom 9. Juni 1903. Die Schüler werden vor dem Genuß von Eis nach dem Turnen gewarnt.

Dasselbe vom 26. August 1903. Der Anfang des griechischen Unterrichts in der Reformschule ist mit der Erlernung des attischen Dialekts zu machen.

Dasselbe vom 29. September 1903. Eine von dem Plan des Goethe-Gymnasiums in Frankfurt abweichende Verteilung der mathematischen Lehraufgaben wird nicht genehmigt.

Dasselbe vom 4. November 1903. Auswärtige, außerhalb des Stadtbezirks bei ihren Eltern wohnende Schüler können auf Ansuchen der Eltern vom Nachmittags-Turnunterricht befreit werden, wenn ausreichender Privatunterricht in diesem Gegenstande nachgewiesen wird. Andernfalls sind sie zu mindestens einer Stunde wöchentlich heranzuziehen.

Ministerialerlaß vom 22. Februar 1904. Zur Ausbildung und Anstellung im Büreaudienst der Berg-, Hütten- und Salinen-Verwaltung werden Bewerber, die die Reife für Prima haben, vorzugsweise berücksichtigt.

III. Chronik.

Das Schuljahr begann am 16. April, das Winterhalbjahr am 13. Oktober. Als neue Klasse wurde U I ref. eröffnet; dagegen wurden O I lat. und U I lat. zusammengezogen und blieben nur im Deutschen und der Mathematik getrennt.

Die Lehrer. Mit dem Schluß des Schuljahres 1902—1903 schieden aus Oberlehrer Dr. Ahrens, welcher an das Königl. Gymnasium zu Kreuzburg versetzt wurde, die wissenschaftlichen Hilfslehrer Dr. Dentzer und Westhoff, die nach Beendigung des Seminarjahrs das Probejahr an den Königl. Gymnasien zu Wohlau und zu Neiße antraten, und der Vorschullehrer Rupke, um eine Stelle als kommissarischer Lehrer am Seminar in Münsterberg zu übernehmen.

Es traten in das Lehrerkollegium ein Oberlehrer Dr. Schoenaich [1]), bisher am Königl. Gymnasium zu Jauer, Oberlehrer Hille [2]), bisher am Königl. Gymnasium zu Brieg, als wissenschaftlicher Hilfslehrer Dr. Marcus, Mitglied des hiesigen Königl. Seminars für gelehrte Schulen, als Hilfslehrer Lehrer Kluge.

Zu Michaelis schied aus dem Lehrerkollegium, von aufrichtigen Wünschen für seine künftige Laufbahn begleitet, Oberlehrer Dr. Kulcke, der zum Leiter des in der Entwicklung begriffenen Realprogymnasiums in Zoppot gewählt worden war. Oberlehrer Dr. Schliebitz begab sich zu Studien auf ein halbes Jahr nach Frankreich.

Es traten in das Lehrerkollegium ein Oberlehrer Hilgenfeld [3]), bisher am Königl. Gymnasium zu Wohlau, und der wissenschaftliche Hilfslehrer Dr. Raebel, Mitglied des pädagogischen Seminars in Hirschberg.

Als Vertreter des vor Weihnachten erkrankten Professors Walther wurde vom Königl. Provinzial-Schulkollegium der Kandidat des höheren Lehramts Matern, der ebenfalls Mitglied des pädagogischen Seminars in Hirschberg ist, geschickt.

Beurlaubt waren Prof. Loewe am 9. November und am 11. und 17. März, Prof. Dr. Walther vom 23.—29. Mai, Prof. Schiller am 20. Februar, Oberlehrer Dr. Grundke am 5. Dezember, Oberlehrer Dr. Gröhler am 25. April, Oberlehrer Dr. Kulcke am 12. und 13. Juni, Oberlehrer und katholischer Religionslehrer Schmidt am 27. und 29. Februar, Oberlehrer Hilgenfeld vom 24.—26. Februar, Zeichenlehrer Bautze vom 26.—29. Mai.

---

[1]) Schoenaich, Gustav, geboren am 10. Dezember 1858 in Polkwitz, besuchte das Gymnasium zu Glogau und die Universitäten Berlin und Halle, erwarb 1883 die philosophische Doktorwürde und bestand 1885 die Lehramtsprüfung. Michaelis 1885 trat er in Glogau das Probejahr an, wurde dort 1887 angestellt, Juli 1894 nach Jauer, Ostern 1903 an das Friedrichs-Gymnasium versetzt. Er verfaßte Schriften über die Geschichte der Stadt Jauer und das schlesische Schützenwesen.

[2]) Hille, Hugo, geboren am 8. September 1861 in Militsch, besuchte das Gymnasium zu St. Maria-Magdalena und studierte in Breslau vorwiegend alte Sprachen. Nach Ablegung der Lehramtsprüfung wurde er Ostern 1888 zur Ableistung des Probejahres dem obengenannten Gymnasium überwiesen und blieb an der Anstalt bis Ostern 1890 beschäftigt. Von 1890 bis 1898 gehörte er zuerst als Inspektor, dann als Oberlehrer der Königl. Ritterakademie in Liegnitz an, danach dem Königl. Gymnasium in Brieg bis zu seiner Versetzung an das Königl. Friedrichs-Gymnasium in Breslau.

[3]) Hilgenfeld, Bernhard, geboren am 16. August 1868 zu Arendsee (Altmark), besuchte das Gymnasium zu Hirschberg i. Schl. und studierte darauf in Jena, Leipzig und Breslau alte Sprachen und Französisch. Nachdem er am 4. November 1892 das Staatsexamen bestanden und in Breslau und Hirschberg die praktische Vorbildung erhalten hatte, war er als Hilfslehrer in Breslau, Kattowitz und Wohlau tätig; an letzterem Orte wurde er 1900 Oberlehrer.

Wegen Krankheit fehlten der Direktor vom 22. Februar bis zum Schluß des Schuljahres, Prof. Loewe am 20. August und 28. November, Prof. Dr. Walther vom 21. Dezember bis zum Schluß des Schuljahres, Oberlehrer und katholischer Religionslehrer Schmidt vom 2.—5. Dezember, Zeichenlehrer Bautze vom 8.—10. Juni, Vorschullehrer Postler am 22. Dezember.

Die Schüler. Die mündliche Prüfung der Abiturienten und der 9 Extraneerinnen findet erst Ende März statt, ebenso die Schlußprüfung der Reform-Untersekundaner.

Der Gesundheitszustand war auch in diesem Jahre nicht besonders günstig. Ein Schüler aus den Mittelklassen hat 80 Schultage versäumt, 6 Schüler haben fast $^1/_4$ Jahr lang gefehlt, darunter einer aus der dritten Vorschulklasse. Ein Schüler der ersten Vorschulklasse mußte sogar von Michaelis ab wegen nervösen Leidens und dadurch bedingter körperlicher Schwäche vom Unterrichte fernbleiben. Dagegen hatten an Krankheiten der Atmungsorgane und an ansteckenden Krankheiten nur wenige Schüler zu leiden.

Besondere Ereignisse. Am Sedantage hielt Oberlehrer Dr. Kulcke eine Ansprache über das Thema: „Die Deutschen während des Krieges nach dem Urteil eines Franzosen." Danach machten die meisten Klassen einen Ausflug. An die Vorschüler richtete Vorschullehrer Postler eine Ansprache; darauf besuchte die Vorschule den zoologischen Garten.

Prof. Dr. Vogt wurde zum Mitgliede der wissenschaftlichen Prüfungs-Kommission für Schlesien und Posen ernannt.

Bei der Einweihung des neuen Gymnasialgebäudes in Öls überbrachte Prof. Dr. Sellge, der früher in Öls Oberlehrer war, den dortigen Amtsgenossen die herzlichen Glückwünsche unseres Kollegiums.

Der Geburtstag Sr. Majestät des Kaisers wurde durch Gesangsvorträge und eine Festrede des Oberlehrers Dr. Schoenaich über den Staatsgedanken bei den Hohenzollern festlich begangen.

Wegen der Anwesenheit Sr. Majestät des Kaisers in Breslau fiel am 12. Januar von $9^1/_2$ Uhr an, und wegen der Anwesenheit Ihrer Majestät der Kaiserin am 10. August nachmittags der Unterricht aus. Unterrichtsausfall wegen großer Wärme fand am 15. August und am 5., 7. und 9. September statt.

Den Oberlehrern Lerch und Dr. Sellge wurde der Amtscharakter als Professor und der Rang der Räte vierter Klasse verliehen.

IV. Statistische Mitteilungen.

1) Übersicht über die Frequenz und deren Veränderung im Laufe des Schuljahres.

	O I	U I lat.	U I ref.	O II lat.	O II ref.	U II lat.	U II ref.	O III lat.	O III ref.	U III lat.	U III ref.	IV lat.	IV ref.	V lat.	V ret.	VI lat.	VI ref.	S.	Vorschule 1	Vorschule 2	Vorschule 3	S.	SS.
1. Bestand am 1. Februar 1903	5	9	—	22	3	21	9	25	16	22	20	33	23	34	19	35	23	319	40	28	20	88	407
2. Abgang bis z. Schluß d. Schuljahres 1902/03	5	1	—	4	—	8	—	—	1	4	4	3	3	2	2	7	3	47	7	2	3	12	59
3a. Zugang durch Versetzung zu Ostern . .	7	16	3	8	7	19	14	17	14	24	17	24	17	25	17	19	13	261	26	17	—	43	304
3b. Zugang durch Aufnahme zu Ostern . . .	1	—	—	1	—	2	—	1	—	4	—	4	—	3	1	11	—	28	9	5	16	30	58
4. Frequenz am Anfange d. Schuljahres 1903/04	8	17	3	11	7	26	16	24	15	29	19	34	20	36	18	33	16	332	36	22	16	74	406
5. Zugang im Sommerhalbjahr 1903	—	—	—	1	—	1	—	1	—	1	—	2	—	—	—	2	1	9	3	2	4	9	18
6. Abgang im Sommerhalbjahr 1903	—	2	—	1	1	4	1	—	—	—	—	4	1	1	—	3	1	19	1	—	—	1	20
7a. Zugang durch Versetzung zu Michaelis	—	—	—	—	—	—	—	—	—	—	—	—	—	—	—	—	—	—	—	—	—	—	—
7b. Zugang durch Aufnahme zu Michaelis .	—	4	—	—	—	—	—	1	—	3	—	2	—	2	—	—	—	12	—	2	—	2	14
8. Frequenz am Anfange des Winterhalbjahres	8	18*)	3	12*)	6	23	15	26	15	32*)	19	35*)	19	36*)	18	33*)	16	334	38	26	20	84	418
9. Zugang im Winterhalbjahr	—	—	—	1	—	—	—	—	—	—	—	1	—	—	—	1	—	3	1	—	—	1	4
10. Abgang im Winterhalbjahr	—	—	—	—	—	—	—	1	2	1	—	—	—	1	—	—	—	5	—	—	—	—	5
11. Frequenz am 1. Februar 1904	8	18	3	13	6	23	15	25	13	31	19	36	19	36	18	33	16	332	39	26	20	85	417
12. Durchschnittsalter am 1. Februar 1903 . . .	18,75	18,67	18,5	17,85	17,66	16,4	16,58	15,6	15,85	14,01	14,36	13,2	13,08	11,9	12,1	10,6	10,83		9,54	8,35	7,04		

*) Ein Schüler trat auf Wunsch des Vaters nach längerer Krankheit aus V lat. nach VI lat. über, ebenso ein Schüler aus U III lat. nach IV lat. und ein Schüler aus U I lat. nach O II lat.

2) Übersicht über die Religions- und Heimatsverhältnisse der Schüler.

	Gymnasium							Vorschule						
	Ev.	Kath.	Diss.	Juden	Einh.	Ausw.	Ausl.	Ev.	Kath.	Diss.	Juden	Einh.	Ausw.	Ausl.
1) Am Anfang des Sommerhalbjahres	264	56	—	12	294	38	—	67	5	—	2	70	4	—
2) „ „ „ Winterhalbjahres .	267	55	—	12	296	38	—	76	6	—	2	79	5	—
3) Am 1. Februar 1904	270	55	—	12	299	38	—	77	6	—	2	80	5	—

Das Zeugnis für den einjährigen Militärdienst haben erhalten Ostern 1903: 20, Michaelis: 2 Schüler.

Davon sind zu einem praktischen Beruf abgegangen Ostern 5, Michaelis 2 Schüler.

Die Schule besuchten im Schuljahre 1903—1904 folgende Schüler (die bis zum 15. März abgegangenen in Klammern):

O I.

Brunzlow, Herbert.
Durchholz, Karl.
Dyhrenfurth, Günter.
Gruner, Edwin.
Olbrich, Johannes.
Puschmann, Günter.
Schuldei, Artur.
Tichauer, Wilhelm.

U I lat.

Biedermann, Fedor.
Bleul, Erich.
Böhm, Friedrich.
Brückner, Georg.
Carstädt, Ernst.
Feit, Alexander.
Hinderer, Hans.
Hirschfelder, Johannes.
Hohlbaum, Wilhelm.
Kaufmann, Johannes.
Krumteich, Bernhard.
Pleul, Bruno.
(Ritter, Artur.)
(Graf Saurma, Adalbert.)
Schaffarra, Erich.
Schneller, Erich.
Scholtz, Georg.
Sobolowski, Franz.
Thomas, Otto.
Zacher, Friedrich.

U I ref.

Mantel, Otto.
Müller, Erich.
Vogt, Martin.

O II lat.

Becher, Georg.
Dierschke, Karl.
Endlich, Paul.
Foerster, Ernst.
(Gäbler, Otto.)
Glund, Karl.
Harbig, Artur.
Höffer, Otto.
Jacobowsky, Feodor.
Graf Plater, Johannes.
Pritsch, Franz.
Schwarz, Erhard.
Stempniewicz, Kurt.
Welk, Friedrich.

O II ref.

Ehrlich, Wilhelm.
Hahn, Erich.
Keiser, Karl.
(Maron, Max.)
Ruth, Konrad.
Selke, Georg.
Stöcker, Erich.

U II lat.

Aberle, Franz.
Avé Lallemant, Hans.
Blasel, Karl.
Brache, Walter.
(Buchholz, Karl.)
Buchs, Artur.
Denecke, Kurt.
Dindaß, Walter.
(Engelmayer, Georg.)
Fischer, Fritz.
Flügge, Rudolf.
(Fritsche, Oskar.)
Harder, Kurt.
Hildebrandt, Erhard.
Kuntze, Franz.
Längner, Hans.
Lerch, Fritz.
Matzky, Erwin.
Neumann, Rudolf.
Redner, Max.
v. Richthofen, Albrecht.
Schellenberg, Fritz.
Scholz, Georg.
(Thunig, Willi.)
Wagner, Richard.
Wiesing, Hans.
Winter, Friedrich.

U II ref.

Conrad, Walter.
Dalibor, Kurt.
Gerstenberg, Karl.
Hauenschild, Johannes.
Höhne, Erich.
Hübner, Johannes.
(Jung, Heinrich.)
Lorenz, Karl.
v. Naso, Eckard.
Primer, Georg.
Rakette, Paul.
Rudschitzky, Walter.
Schädrich, Ernst.
Stricker, Fritz.
Thomas, Hans.
Zimmermann, Erwin.

O III lat.

(Bartetzko, Herbert.)
Endlich, Johannes.
Erdhütter, Emil.
Eschenbeck, Otto.
Göbel, Max.
Goldmann, Wolfram.
Herrmann, Konrad.
Hinderer, Heinrich.
Hoffmann, Roland.
Horn, Herbert.
Klose, Karl.
Lube, Walter.
Matz, Walter.
Metzner, Karl.
Müller, Artur.
v. Mukulowski, Wladislaus.
Popplow, Otto.
Pörsch, Erich.
Regehly, Waldemar.
Schrage, Hermann.
Sellge, Julius.
Seimert, Walter.
Sindermann, Adolf.
Sutter, Erich.
Vogt, Ernst.
Wagner, Erich.

O III ref.

(Cohnstädt, Karl.)
Dölle, Walter.
Dzialas, Paul.
Fischer, Fritz.
Freund, Alfons.
Gower, Wilhelm.
Hübner, Robert.
Kämpffer, Eduard.
(Kapolke, Georg.)
May, Karl.
Mentzel, Paul.
Postoll, Johannes.
Priesnitz, Konrad.
Süßmann, Walter.
Tschöpe, Karl.

U III lat.

Bänder, Max.
Brückner, Karl.
Dziadek, Erich.
Engel, Alfred.
Fleger, Karl.
Förster, August.
Goldmann, Friedrich.
Haaßengier, Friedrich.
v. Hase, Benedikt.
Hoffrichter, Artur.
Jahn, Max.
(Kinzel, Kurt.)
Krohn, Rudolf.
Küstner, Friedrich.
Lympius, Friedrich.
Graf Matuschka, Raphael.
Monse, Georg.
Ottmann, Georg.
Otto, Walter.
Palm, Alfred.
Pliska, Johannes.
Rinke, Reinhard.
Schädrich, Fredy.
Schiller, Artur.
Schneider, Wilhelm.
Schottky, Kurt.
Schwarz, Botho.
Tittler, Artur.
Weichert, Siegfried.
Wenzig, Kurt.
Wiesner, Ernst.
Winter, Otto.

U III ref.

Battig, Karl.
Curtius, Hugo.
Feit, Herbert.
Felsmann, Fritz.
Fischer, Siegfried.

Fleger, Rudolf.
Franzke, Max.
Hähnel, Walter.
Hauenschild, Friedrich.
Hilbert, Fritz.
Höhne, Kurt.
Mücke, Kurt.
Nellhaus, Dagobert.
Okrusch, Kurt.
Pietsch, Hermann.
Pohl, Franz.
Schneider, Erich.
Schulz, Walter.
Süßmann, Kurt.

IV lat.

Adolf, Walter.
Berndt, Felix.
(Daluege, Artur.)
Ebermann, Waldemar.
Eschenbeck, Artur.
Engel, Egon.
Freund, Franz.
Fröhlich, Siegfried.
Glatzel, Hans.
Glaubitz, Georg.
Glied, Walter.
Goldmann, Georg.
Göldner, Otto.
Gruner, Hermann.
Guder, Erwin.
Guttmann, Werner.
Haase, Ludwig.
Hahn, Walter.
Heidorn, Otto.
Helling, Bertold.
Horn, Walter.
Hübner, Rudolf.
Janus, Walter.
König, Konrad.
Kornetzki, Johannes.
(Kriebel, Gerhard.)
(Kulcke, Fritz.)
Kuntze, Herbert.
Mayer, Paul.
Muschner, Georg.
Neumann, Hans Harald.
Otto, Werner.
Prankel, Walter.
Prietsch, Gerhard.
Renner, Arwed.
Schettlinger, Max.
Schlobach, Leopold.
Scholz, Otto.
Stöhr, Wilhelm.
(v. Webern, Johannes.)

IV ref.

Adler, Hans.
(Biegon, Johannes.)
Fliegner, Willi.
Giesel, Arnold.
Glatzel, Walter.
Heinrich, Wilhelm.
Hilsebein, Edmund.
Kaiser, Max.
Klose, Georg.
Lorenz, Egon.
Möse, Walter.
Nerger, Edgar.
Quade, Werner.
Rotter, Willi.
Sachs, Georg.
Schenke, Bernhard.
Scholz, Fritz.
Stöcker, Herbert.
Tschöpe, Georg.
Walther, Helmut.

V lat.

Adametz, Erich.
Anuschek, Ewald.
Dindaß, Helmut.
Edler, Victor.
Emicke, Otto.
Flöter, Franz.
Fröhlich, Eberhard.
Fröhlich, Hartmut.
(Gräber, Fritz.)
(Habel, Franz.)
Harder, Fritz.
Hildebrandt, Walter.
Hilsebein, Emil.
Knobloch, Victor.
Kosaucke, Erwin.
Koye, Helmut.
Küstner, Moritz.
Lindner, Kurt.
Meuser, Wilhelm.
Milenz, Paul.
Neukirch, Walter.
Ortlieb, Hans.
Pauli, Walter.
Ponfick, Bernhard.
Pretzsch, Otto.
Rehnert, Kurt.
Richter, Emmo.
v. Rümker, Heinrich.
Schickan, Fritz.
Schieß, Paul.
Serke, Kurt.
Strecker, Hans.
Thiel, Herbert.
Thomas, Hans.
Töppich, Gerhard.
Wein, Friedrich.
Weiß, Gerhard.
Wilde, Herbert.

V ref.

Brinsa, Ferdinand.
Buchholz, Friedr. Wilh.
Fahrtmann, Paul.
Grutke, Paul.
Günther, Fritz.
Kayser, Kurt.
Kremper, Rudolf.
Maaßen, Kurt.
Nellhaus, Arnold.
Okrusch, Walter.
Reinke, Wilhelm.
Röhrich, Fritz.
Schneider, Wilhelm.
Schönfelder, Friedrich.
Schöps, Fritz.
Troost, Hans.
Weise, Martin.
Welck, Paul.

VI lat.

Bautze, Gerhard.
Bricke, Herwig.
Denecke, Hermann.
Dreyer, Johannes.
Dzialas, Karl.
Emicke, Johannes.
Franzke, Otto.
Giersdorf, Alfred.
Göhring, Karl.
Guttmann, Herbert.
Heimburg, Kurt.
Hitze, Alfred.
Ihme, Walter.
Jacob, Georg.
Johow, Max.
Joppich, Hans.
König, Fritz.
Link, Willi.
Lympius, Siegfried.
Matzky, Gerhard.
Meltzer, Oskar.
Pietsch, Georg.
(Pläschke, Walter.)
(Pohl, Gerhard.)
Reinecke, Kurt.
Schaffarra, Herbert.
Scharfenberg, Hans.
Scholz, Walter.
Sequenz, Fritz.
Sutter, Herbert.
Vaupel, Rudolf.
Werner, Hans.
Winter, Helmut.
(Wreschniok, Alfred.)
Wunnicke, Karl.
Zickler, Otto.

VI ref.

Beck, Karl.
Bergius, Hermann.
Brandt, Georg.
Breither, Ludwig.
(Buchholz, Rudolf.)
Erbe, Kurt.
Fröhlich, Fritz.
Groke, Richard.
Kluck, Kurt.
Koschmieder, Erich.
Öbbecke, Günter.
Rechenberg, Werner.
Schöfer, Rudolf.
Schröter, Erich.
Teuchert, Kurt.
Töpsch, Hans.
Weise, Artur.

Vorschule.

Kl. 1.

Arendt, Erich.
(Besierski, Werner.)
Blechschmidt, Max.
Breither, Wilhelm.
Curtius, Kurt.
Deinert, Hugo.
Diebison, Werner.
Douglas, Karl.
Frankenberg, Walter.
Frost, Alfons.
Glombitza, Franz Josef.
Gutsche, Oskar.
Hinderer, Theodor.
Holthey, Fritz.
Ihme, Martin.
Kaape, Helmut.
Kabath, Erhard.
Kabsch, Walter.
Klemm, Ernst.
Klüche, Hans.
Langen, Bernhard.
Lympius, Joachim.
Materne, Helmut.
Müller, Alfred.
Ölkers, Kurt.
Okrusch, Erich.
Pulst, Colmar.
Renner, Karl.

v. Rümker, Arnold.	Esklony, Hans.	Scholz, Georg.	Geisler, Kurt.
(Sallani, Paul.)	Giesemann, Artur.	Schöfer, Gustav.	Gröhler, Otto.
Sander, Hans.	Guder, Ernst.	Schwider, Hans.	Günther, Ernst.
Scheyk, Kurt.	Guder, Wilhelm.	Simon, Wolfram.	Gusinde, Erich.
Schlichting, Walter.	Hille, Werner.	Späth, Richard.	Hille, Günter.
Schmidt, Karl.	Johow, Fritz.	Tesch, Willibald.	Janoske, Willi.
Schöfer, Richard.	Krüger, Gerhard.	Tietz, Helmut.	Krüger, Kurt.
Scholz, Werner.	Liebig, Fritz.	Wentzel, Walter.	Krusch, Walter.
Sequenz, Walter.	Müller, Oskar.		Lorenz, Edwin.
Stecher, Arnold.	Neuendorf, Kurt.	Kl. 3.	Lorenz, Wolfgang.
Sternberg, Martin.	Neugebauer, Kurt.		Sack, Karl.
Zeisig, Hermann.	Neumann, Georg.	Arendt, Wilhelm.	Schneider, Alfred.
	Pantke, Alfons.	Augenreich, Walter.	Schröter, Oswald.
Kl. 2.	Petersen, Peter.	Bamberg, Edmund.	Tichauer, Hans.
Bartsch, Konrad.	Rechenberg, Günter.	Döring, Herbert.	Vogel, Ulrich.
Erbe, Johannes.	Sack, Erich.	Geisler, Joachim.	

3) Übersicht über die Abiturienten.

Ostern 1904:

Kann erst im nächsten Jahresbericht gegeben werden.

V. Sammlung von Lehrmitteln.

1) Die **Lehrer-Bibliothek** (Bibliothekar: Oberlehrer Dr. Grundke) wurde vermehrt:

a. durch Ankauf der Fortsetzung des Zentralblattes für die gesamte Unterrichtsverwaltung Preußens, — der Historischen Zeitschrift, begründet von H. v. Sybel, — des Hohenzollern-Jahrbuches, — der Geographischen Zeitschrift, herausgegeben von Hettner, — der Zeitschrift für den physikalischen und chemischen Unterricht, herausgegeben von Poske, — der Zeitschrift für das Gymnasialwesen, herausgegen von Müller, — der deutschen Literaturzeitung, herausgegeben von Hinneberg, — der Zeitschrift für den evangelischen Religionsunterricht, herausgegeben von Fauth und Köster, — der Forschungen zur brandenburgischen und preußischen Geschichte, herausgegeben von Hintze, — der Schriften des Vereins für Geschichte und Altertum Schlesiens, — des statistischen Jahrbuches der höheren Schulen Deutschlands, — des deutschen Wörterbuches von J. und W. Grimm, — der Zeitschrift für französische Sprache und Literatur, herausgegeben von Behrens, — der Neuen Jahrbücher für das klassische Altertum, — der Zeitschrift für lateinlose höhere Schulen, herausgegeben von Holzmüller, — der Monatsschrift für höhere Schulen, herausgegeben von Köpke und Matthias, — des Thesaurus linguae latinae.

Ferner wurden angeschafft: Echtermeyer, Auswahl deutscher Gedichte. — Kutzen, Das deutsche Land. — Diels, Die Fragmente der Vorsokratiker. — Dannemann, Grundriß der Geschichte der Naturwissenschaften. — Baumeister, Handbuch der Erziehungs- und Unterrichtslehre. — Partsch, Schlesien. — Mitteilungen aus dem Stadtarchiv und der Stadtbibliothek zu Breslau. — Wustmann, Allerhand Sprachdummheiten. — Paulsen, System der Ethik. — Delitzsch, Im Lande des einstigen Paradieses. — Koser, Friedrich der Große. — Solmsen, Inscriptiones graecae. — Trajans Dakische Kriege, erzählt von Petersen. — Kromayer, Antike Schlachtfelder in Griechenland. — Paulsen, Philosophia militans. — Häusser, Geschichte des Zeitalters der Reformation. — Hennings, Homers Odyssee, ein kritischer Kommentar. — Marheineke, La Classe en français.

b. durch Geschenke:

des Herrn Ministers der geistlichen pp. Angelegenheiten:

Werckshagen, Der Protestantismus am Ende des 19. Jahrhunderts in Wort und Bild. — Jahrbuch der Volks- und Jugendspiele, 12. Jahrgang.

des Königl. Provinzial-Schulkollegiums:

Ascherson, Deutscher Universitätskalender.

des Magistrats von Breslau:

Verwaltungsbericht des Magistrats von Breslau für die Zeit vom 1. April 1898 bis zum 31. März 1901. — Katalog der Druckschriften über die Stadt Breslau.

der Schlesischen Gesellschaft für vaterländische Kultur:

Der neueste Jahresbericht dieser Gesellschaft.

des Geheimen Justizrates Schroedter in Breslau:

Schlosser, Weltgeschichte.

aus dem Nachlasse des † Oberbaurates Dr. H. Scheffler:

Scheffler, Die Naturgesetze. 19 Bände.

aus dem Nachlasse des † Geheimen Medizinalrates Dr. Secchi:

Schopenhauer, sämtliche Werke. — Darwin, Die Abstammung des Menschen. — Darwin, Die Entstehung der Arten. — Moltkes Briefe aus Rußland. — Cornelius Nepos, ed. Stuebelius.

des Oberlehrers Dr. Schoenaich:

Schoenaich, Die alte Fürstentumshauptstadt Jauer.

2) Die **Schüler-Bibliothek** (Bibliothekar: Professor Schiller) wurde vermehrt:

a. durch Ankauf von Luckenbach, Abbildungen zur deutschen Geschichte. — Seidel, Hohenzollernkalender. — Schulze, Die römischen Grenzanlagen in Deutschland. — Paul Lehmann, Aus großer Zeit. — Gizychi, Der neue Adel. — Frenssen, Die drei Getreuen. — Heyse, Weihnachtsgeschichten. — Kluge, Auswahl deutscher Gedichte. — Porger, Schatzkästlein moderner Erzähler, 3 Bände. — W. Raabe, Der Lar, Prinzessin Fisch. — G. Höcker, Das große Dreigestirn. — Weitbrecht, Deutsche Art. — Simplicius Simplicissimus. — O. Höcker, Zwei Riesen von der Garde. — Lindner, Die deutsche Hansa. — Brunneck, Klaus Erichsen. — O. Höcker, Im Zeichen des Bären. — Wuttke-Biller, Ein Mann, ein Wort. — Harald, Kapitän Jack. — Hennigsen, 12 Erzählungen. — W. Raabe, Deutsche Not und deutsches Ringen. — Wernersdorf, Fünf Monate vor Paris. — Fron, Das Kräuterweible von Wimpfen. — O. Höcker, Das Erbe des Pfeiferkönigs. — Im Rock des Königs. — Deutsche Treue, welsche Tücke. — Jahnke, Eiserne Zeiten. — Wörishöffer, Das Buch vom braven Mann. — v. Zobeltitz, Christian von Stachow. — Sonnenburg, Berthold der Getreue. — Pistorius, Tertianerzeit. — Pederzani-Weber, Das Thorner Blutgericht. — Wagner, Prinz Eugen. Lang, Mit Ränzel und Wanderstab. — Netopil, Der Pfalz-Erzherzog. — Trelles, Der Held von Trenton. — Clement, Junker Wolf. — Thoma, Konrad Widerholt. — Karl Stöber, Aus dem Altmühltale. — Noeldechen, Bei der Schwertprobe. — Matthias, Der Freund des Delawaren. — Sonnenburg, Eberstein. — Deutsches Knabenbuch, Jahrgang XIII und XIV. — Lohmeyer, Deutsche Jugend. — Ferdinand Schmidt, Sagenbuch. — Pannwitz, Sigismund Rüstig. — 2 Bände aus der Universalbibliothek für die Jugend. — 12 Bände aus der Vaterländischen Geschichtsunterhaltung. — Schmid, Das beste Erbteil. — Nathusius, Alte Märchen. — Marquardsen, Die Familie Bonnet.

b. durch Geschenk des Herrn Ministers der geistlichen pp. Angelegenheiten:
Otto Ehlers, Samoa, Die Perle der Südsee. — Ehlers, Im Osten Asiens. — Capelle, Die Befreiungskriege, 2 Bände. — Vollmer, Der deutsch-französische Krieg 1870/71, 2 Bände.

3) Die **Hilfs-Bibliothek** (Bibliothekar: Oberlehrer Dr. Grundke) wurde vermehrt:
a. durch Ankauf von Hopf und Paulsiek, Lesebuch für III und U II. — Schuster und Regnier, Dictionnaire. — Diercke und Gaebler, Schulatlas. — Mühlmann, Deutsch-lateinisches Wörterbuch. — Stowasser, Lateinisch-deutsches Wörterbuch. — Fürst, Hebräisches Wörterbuch. — Kaegi, Griechische Schulgrammatik. — Hopf und Paulsiek, Lesebuch für O II (3 Exemplare). — Ciceros Briefe, ed. Aly (2 Exemplare).
b. durch Geschenke. Von den meisten eingeführten Büchern haben in der Regel die betreffenden Verlagsbuchhandlungen in dankenswerter Weise mehrere Freiexemplare der Hilfs-Bibliothek übersandt.

4) Die **Karten-Sammlung** wurde vermehrt durch: Leeder, Schulwandkarte von Palästina. — Campen, Gallien. — Sydow-Habenicht, Frankreich — Deutschland (physisch). — Afrika. — Cybulski, 5 Anschauungstafeln für das griechische und römische Kriegswesen nebst erklärendem Texte. — Cybulski, Plan von Athen (2 Tafeln). — Vietor, Tafel für die französische Lautlehre. — Fünfzig Seemannsche Bilder der antiken, mittelalterlichen und neueren Kunst. — Zwei Übersichtspläne über die deutsche Flotte. — Killmann, Karte der öffentlichen höheren Lehranstalten Preußens. — Plan von Breslau (Geschenk des Herrn Subdirektors Friedrich hierselbst).

5) Für das **physikalische Kabinett** (unter Verwaltung von Prof. Dr. Vogt) wurden angekauft: die Grimsehlschen Apparate (Doppelgeschütz und Federpistole) zur Erläuterung der mechanischen Grundbegriffe, 1 Apparat zur Bestimmung des mechanischen Wärmeäquivalents, 1 Wheatstonesche Brücke, 1 Stöpselrheostat, 1 Apparat zur Demonstration der Ausflußgesetze, 1 vertikale Zentrifugalbahn, 1 Apparat für Lichtbrechung und Totalreflexion.

Herr Telegraphen-Revisor Kluck schenkte einige Kabelproben.

6) Für die **naturwissenschaftliche Sammlung** (unter Aufsicht von Prof. Lerch) wurden angeschafft: ein Glaskasten mit Beispielen inländischer Mimicry; Niepel, Wandbilder des niederen Tierreichs, 9 Tafeln; Meinhold, Tierbilder, 5 Tafeln; Lehmann-Braß, Zootomische Wandtafeln, 6 Tafeln; Lehmann-Leutemann, Zoologische Wandtafeln, 17 Tafeln.

Herr Dr. med. Gürich schenkte ein Herbarium.

7) Für den **Zeichenunterricht** wurden aus Anstaltsmitteln angeschafft: 11 Muscheln, 8 Hausgeräte (Küchenlampe, Zinnvase, Aschenschale, Saftkanne, Holzmaß, Kohlenschaufel, Eßbesteck, Zinnlöffel), 3 Handwerkzeuge (Schraubenschlüssel, hölzerne Schraubenzwinge, Maurerkelle), 3 Ampelarme, 1 Bronzeleuchter, 10 Stück Eisen- und Bronzebeschläge, 2 Schlüssel.

Geschenkt wurden von dem früheren Schüler der O II lat. Kühn eine Anzahl Zeichnungen seines Vaters.

8) An **Musikalien** wurden angeschafft: zu W. Tauberts Oden des Horaz 2 Tenor I, 2 Tenor II; Herbstlied (Beethoven), 200 autographierte Stimmen; Rudnick, Heil Hohenzollern! Partitur und 130 Stimmen; Deutsches Flottenlied, 200 autographierte Stimmen.

VI. Stiftungen und Unterstützungen von Schülern.

A. **Stiftungen und Stipendien.** a. **Keschner**sche Stiftung. 130 M erhielt Bautze aus VI lat., 60,14 M Gerstenberg aus U II ref. — b. **Kayssler**sches Reformations-Stipendium. Ein Stipendium von je 150 M erhielten die Studenten Kunert und W. Vogt; als Unterstützung empfing Engelmeyer aus U II lat. 29,51 M, Hildebrandt aus U II lat. 29,50 M. — c. **Schüler-Armenkasse.** Für Vermehrung der Unterstützungsbibliothek wurden 44,52 M ausgegeben. — d. **Pathe**sches Legat. Die Zinsen, 18,47 M, wurden unter die Schüler Rakette aus U II ref. und Brückner aus U III lat. verteilt. — e. **Hirt**sche Fundation. Die Zinsen, 11,36 M, empfing Battig aus U III ref. — f. **Säkular-Stipendien-Fonds.** Das Stipendium von 315 M empfing der Student Scharnweber. — g. **Philipp-Stiftung.** Die Zinsen, 135 M, empfing Pliska aus U III lat.

B. **Freischule** erhielten aus der **Hering**schen Fundation Winter aus U II lat., Gerstenberg aus U II ref., Fleger aus U III ref., Kulcke aus IV lat. (bis Michaelis), und Sellge aus O III lat. (von Michaelis ab).

C. **Geschenke.** Vom **Schillerverein** empfing Selke aus O II ref. eine Ausgabe von Schillers Werken; aus der **Professor Dr. August Kahlert-Stiftung** erhielt Krummteich aus U I lat. durch die Loge Friedrich zum goldenen Zepter eine Prämie; das von **Sr. Majestät dem Kaiser** unserer Anstalt zur Verteilung als Prämie überwiesene Flottenbuch von Wislicenus empfing Endlich aus O II lat.

VII. Mitteilungen an die Schüler und deren Eltern.

1. Zu den Reformklassen kommt im nächsten Schuljahre die O I hinzu.
2. Das neue Schuljahr beginnt Mittwoch, den 13. April. Die Aufnahmeprüfung und Aufnahme findet am Tage vorher um 9½ Uhr statt, für die Vorschule und die Sexten um 9 Uhr. Beizubringen ist der Geburtsschein, der Impf- bezw. Wiederimpfungsschein und das Abgangszeugnis der zuletzt besuchten Schule. Die in Sexta eintretenden Schüler müssen das neunte Lebensjahr vollendet haben und folgende Kenntnisse und Fertigkeiten besitzen: Geläufigkeit im Lesen deutscher und lateinischer Druckschrift, eine leserliche und reinliche Handschrift und die Fertigkeit, ein Diktat in beiden Schriften ohne große Rechtschreibungsfehler nachzuschreiben, Kenntnis der Redeteile und des einfachen Satzes, Sicherheit in den vier Grundrechnungsarten mit gleichbenannten Zahlen. Auf die Verfügung über die Altersgrenzen für die einzelnen Klassen und die Anforderungen im Deutschen, die bereits auf S. 27 des vorjährigen Programms abgedruckt sind, wird hier nochmals aufmerksam gemacht.
3. Ferienordnung für das Jahr 1904:

Pfingstferien:	Schulschluß am	20. Mai,	Schulanfang am	27. Mai;
Sommerferien:	„ „	2. Juli,	„ „	5. August;
Herbstferien:	„ „	30. September,	„ „	11. Oktober;
Weihnachtsferien:	„ „	23. Dezember,	„ „	10. Januar 1905.

Breslau, den 25. März 1904.

Prof. Dr. Feit,
Direktor.

VI. Stiftungen … n von Schülern.

A. **Stiftungen und Stipe** …) *M* erhielt Bautze aus VI lat., 60,14 *M* Gerstenbe … ches Reformations-Stipendium. Ein Stipendium von je … ert und W. Vogt; als Unterstützung empfing En … Hildebrandt aus U II lat. 29,50 *M*. — c. **Sch** … g der Unterstützungsbibliothek wurden 44,52 *M* aus … Die Zinsen, 18,47 *M*, wurden unter die Schüler R … er aus U III lat. verteilt. — e. **Hirt**sche Fundation … g aus U III ref. — f. **Säkular-Stipendien-Fonds.** D … er Student Scharnweber. — g. **Philipp-Stiftung.** … a aus U III lat.

B. **Freischule** erhielten … er aus U II lat., Gerstenberg aus U II ref., Fleger … (bis Michaelis), und Sellge aus O III lat. (von Michae …

C. **Geschenke.** Vom **Sc** … ref. eine Ausgabe von Schillers Werken; aus der **Pr** … **ung** erhielt Krummteich aus U I lat. durch die Lo … Prämie; das von **Sr. Majestät dem Kaiser** unserer … überwiesene Flottenbuch von Wislicenus empfing E …

VII. Mitteilung … nd deren Eltern.

1. Zu den Reformklasse … O I hinzu.
2. Das neue Schuljahr b … Aufnahmeprüfung und Aufnahme findet am Tage vorh … ule und die Sexten um 9 Uhr. Beizubringen ist der … derimpfungsschein und das Abgangszeugnis der zu … ta eintretenden Schüler müssen das neunte Lebensjah … nisse und Fertigkeiten besitzen: Geläufigkeit im Lesen … ift, eine leserliche und reinliche Handschrift und die … en ohne große Rechtschreibungsfehler nachzuschreibe … fachen Satzes, Sicherheit in den vier Grundrechnungsa … f die Verfügung über die Altersgrenzen für die einz … n im Deutschen, die bereits auf S. 27 des vorjährigen … r nochmals aufmerksam gemacht.
3. Ferienordnung für d …

Pfingstferie …	… anfang am	27. Mai;	
Sommerferie …	"	"	5. August;
Herbstferie …	"	"	11. Oktober;
Weihnachtsferie …	"	"	10. Januar 1905.

Breslau, den 25. …

Prof. Dr. Feit,
Direktor.

CXXXIX. Programm

des

Königlichen Friedrichs-Gymnasiums

zu

Breslau

für das Schuljahr von Ostern 1903 bis Ostern 1904.

Erster Teil:

Über Gleichheit und Endlichgleichheit von Prismen und Pyramiden.

Von Professor Dr. Heinrich Vogt.

Breslau 1904.
Druck von R. Nischkowsky.

1904. Progr.-Nr. 211.

§ 1. Grundlegende Begriffe und Sätze. Fragestellung. Geschichtliches.

A. Endlichgleichheit ebener Polygone.

Der Flächenvergleichung ebener Polygone liegt als erster Hauptsatz zugrunde: 1. Parallelogramme von gleicher Grundlinie und Höhe sind flächengleich.

Legt man zum Beweise dieses Satzes die beiden Parallelogramme auf eine gemeinschaftliche Grundlinie AB (Fig. 1), und fallen die zu dieser Grundlinie parallelen Seiten entweder mit ihren Endpunkten zusammen, oder haben sie ein gemeinschaftliches Stück ED, so bestehen die Parallelogramme aus kongruenten Stücken, nämlich aus dem gemeinschaftlichen Viereck ABDE und den kongruenten Dreiecken ACE und BDF. Zwei solche Polygone, welche in eine endliche Anzahl von kongruenten Stücken zerlegt werden können, heißen „zerlegungsgleich".

Die beiden Parallelogramme ABDC und ABFE in Fig. 2 stehen ebenfalls auf gemeinschaftlicher Grundlinie AB, die beiden Seiten CD und EF fallen auf dieselbe zu AB parallele Gerade, haben aber kein Stück gemeinsam. In diesem Falle pflegt man die Flächengleichheit der beiden Parallelogramme daraus herzuleiten, daß ABDC und ABFE erhalten werden, indem man vom Viereck ABFC entweder das Dreieck BDF oder das ihm kongruente ACE hinwegschneidet. Zwei solche Figuren, wie die Parallelogramme ABDC und ABFE in Fig. 2, welche durch Hinzufügung einer endlichen Anzahl von kongruenten Stücken zu kongruenten Figuren ergänzt werden können, heißen „ergänzungsgleich".

Zerlegungsgleichheit und Ergänzungsgleichheit wird zu dem Begriff „Endlichgleichheit" zusammengefaßt.

Zerlegungsgleichheit und Ergänzungsgleichheit schließen einander nicht aus. Es können zwei Figuren nach der einen Betrachtungsweise ergänzungsgleich, nach einer andern zerlegungsgleich sein. Trägt man z. B. in Fig. 2 auf CF von E aus die Strecken $EE_1 = E_1E_2 = AB$ und von D aus die Strecken $DD_1 = D_1D_2 = AB$ ab und zieht durch E_1 und E_2 Parallele zu AE, durch D_1 und D_2 Parallele zu BD, so zerfallen die Parallelogramme ABDC und ABFE in je 4 Teile, welche untereinander kongruent sind[1]); sie sind also nach dieser Betrachtungsweise zerlegungsgleich.

Der zweite Hauptsatz für Flächenvergleichung ebener Polygone: 2. Jedes Dreieck ist flächengleich mit einem Parallelogramm, mit dem es gleiche Grundlinie und halbe Höhe und einen gleichen Winkel an der Grundlinie hat, ist stets durch Zerlegungsgleichheit zu beweisen. Vergl. Fig. 3.

Satz 3. Sind 2 Polygone P_1 und P_2 mit einem dritten P_3 zerlegungsgleich, so sind sie auch untereinander zerlegungsgleich. (Dasselbe gilt für Ergänzungsgleichheit.)

---

[1]) Die hier angewendete Zerlegung, welche in allen Fällen zu der geringsten Anzahl von Teilstücken führt, ist zuerst angegeben von C. Gusserow, Leitfaden der Stereometrie. Berlin 1885.

Denn sind $\pi_1', \pi_1'' \ldots$ die Teilstücke, aus denen P_1 und P_3 zusammengesetzt sind, $\pi_2', \pi_2'' \ldots$ die Teilstücke, deren Zusammenfügung P_2 und P_3 ergibt, und trägt man in P_3 zugleich beide Teilungen ein, so erhält man in P_3 Teilstücke zweiter Ordnung $\pi_3', \pi_3'' \ldots$ Diese Teilstücke erfüllen sämtliche $\pi_1', \pi_1'' \ldots$ und lassen sich deshalb in P_1 eintragen; sie erfüllen aber auch sämtliche $\pi_2', \pi_2'' \ldots$ und lassen sich deshalb auch in P_2 eintragen; mithin bestehen P_1 und P_2 aus denselben Teilstücken.

Zur Veranschaulichung dieses Beweises wähle ich (Fig. 4) die Zerlegungsgleichheit eines gleichseitigen Dreiecks ABC (P_1) mit einem Quadrat AGKJ (P_2) durch Vermittelung des Parallelogramms AGHB (P_3).

$\triangle$ ABC ist zunächst flächengleich dem Rechteck ADEF, welches mit ihm gleiche Grundlinie und halbe Höhe hat. Wird Rechteck ADEF in bekannter Weise in das Quadrat AGKJ verwandelt, so tritt als Zwischenfigur das Parallelogramm AGHB auf, welches sowohl mit dem Rechteck wie mit dem Quadrat gleiche Grundlinie und gleiche Höhe hat, und durch welches die Zerlegung des Rechtecks überflüssig wird. Parallelogramm AGHB ist erstens zerlegungsgleich mit $\triangle$ ABC; die Stücke sind $AB\beta G \cong AB\beta G$, $\triangle\ C\beta\alpha \cong B\beta\gamma$, $\triangle\ AG\alpha \cong BH\gamma$. Trägt man AG auf JH von K bis δ und von B bis ζ auf und zieht $\delta\varepsilon \parallel KG$ und $\zeta\eta \parallel BA$, so bestehen Quadrat und Parallelogramm aus den kongruenten Stücken $\triangle\ AG\lambda \cong AG\lambda$, Fünfeck $A\eta\zeta K\lambda \cong G\lambda B\delta\varepsilon$, $\triangle\ J\eta\zeta \cong \delta\varepsilon H$. Durch beide Teilungen zusammen besteht das Parallelogramm aus fünf mit 1 bis 5 bezeichneten Stücken; dieselben Teilungen lassen sich in $\triangle$ ABC und Quadrat AGBJ eintragen, also sind das gleichseitige Dreieck und das Quadrat selbst zerlegungsgleich.

Aus den Sätzen 1, 2, 3 ergibt sich Satz 4: Zwei Dreiecke von gleichen Grundlinien und Höhen sind zerlegungsgleich. (Diese Zerlegung läßt sich auch direkt in verschiedenen Arten ausführen.)

Auf Grund der Sätze 1 bis 4 sind schon seit längerer Zeit die endlichen Zerlegungen flächengleicher Polygone tatsächlich vollzogen worden[1]); in neuerer Zeit ist nachgewiesen worden, daß alle Inhaltsgleichheit ebener Polygone sich auf Endlichgleichheit, und unter Voraussetzung der Gültigkeit des Archimedischen Axioms[2]) sogar auf Zerlegungsgleichheit zurückführen läßt.

B. Das Pyramidenproblem.

Die für ebene Figuren aufgestellten Erklärungen von Zerlegungsgleichheit, Ergänzungsgleichheit, Endlichgleichheit und ebenso Satz 3 sind ohne weiteres auf räumliche Figuren zu übertragen.

Auch der dem Satz 1 analoge Satz 5: Prismen von gleichen Grundflächen und Höhen sind inhaltsgleich, läßt sich genau mit denselben Mitteln wie der ebene Satz und mit dessen Hilfe auf Endlichgleichheit, speziell auf Zerlegungsgleichheit zurückführen. Dies ist sogar die in den Elementen übliche Behandlung[3]).

---

[1]) Die ersten derartigen Zerlegungen sind ausgeführt von Gerwien, Crelles Journal, Bd. 10, 1833. Zu den umfassendsten und einfachsten Resultaten kommt Schönemann, Progr. des Gymn. zu Soest, 1888. Die ältere Literatur findet man bei M. Simon-Berlin, Zeitschrift für mathem. u. naturw. Unterricht, Bd. XIX, 1888, und bei W. Killing, Die Grundlagen der Geometrie. Paderborn 1898, Bd. II, S. 354. Hinzu kommen Fr. Schur, Über den Flächeninhalt geradlinig begrenzter Figuren. Sitzungsber. der Dorpater Naturforscher-Vers. 1892. M. Réthy, Über endlich-gleiche Flächen. Mathem. Annalen 38, 42, 45. Dobriner, Mathem. Annalen 42, 1893. O. Rausenberger, Mathem. Annalen 43, 1893. D. Hilbert, Grundlagen der Geometrie. Leipzig 1899, cap. IV. 2. Aufl., 1903. M. Dehn, Mathem. Annalen 57, 1903.

[2]) Vgl. S. 5 Anm. 2.

[3]) Vgl. Euklid, Elemente XI, 28—31. — Baltzer, Elemente, Buch 5, § 8, 1—2.

Hingegen haben die den Sätzen 2 und 4 entsprechenden, Satz 6: Der Rauminhalt einer Pyramide ist gleich dem eines Prismas mit gleicher Grundfläche und $\frac{1}{3}$ Höhe, und der ihm gleichwertige Satz 7: Pyramiden von gleichen Grundflächen und Höhen haben gleichen Rauminhalt, von jeher der Behandlung durch Endlichgleichheit unüberwindliche Schwierigkeiten entgegengesetzt.

Satz 7 ist nach dem Zeugnis des Archimedes[1]) entdeckt und bewiesen von Eudoxus, einem Zeitgenossen Platos. Der Satz findet sich bei Euklid (XII, 5) in der Form: Zwei dreiseitige Pyramiden von gleichen Höhen verhalten sich wie ihre Grundflächen. Der Beweis geht in folgenden Schritten vor: I. Jede dreiseitige Pyramide läßt sich in zwei gleiche, untereinander und mit der ganzen ähnliche Pyramiden von halben Kantenlängen und in zwei untereinander gleiche dreiseitige Prismen zerlegen, welche zusammen mehr als die Hälfte der Pyramiden betragen (XII, 3). Fig. 5. II. Wird in zwei dreiseitigen Pyramiden V und V_1 von gleichen Höhen und den Grundflächen G und G_1 diese Zerlegung beliebig weit fortgesetzt, so verhält sich die Summe aller Prismen P in V zur Prismensumme P_1 in V_1 wie die Grundflächen $G : G_1$ (XII, 4). III. Wie die Prismensummen verhalten sich auch die Pyramiden; denn angenommen, es sei nicht $P : P_1 = V : V_1$, sondern $P : P_1 = V : W$, wo $W < V_1$ sein möge, dann könnte man nach X, 1[2]) die Pyramidenzerlegung soweit fortsetzen, bis man auf Prismensummen Q und Q_1 kommt, wo $Q_1 > W$ ist. Alsdann wäre $P : P_1 = Q : Q_1$, mithin $Q : Q_1 = V : W$, oder $Q : V = Q_1 : W$, was nicht möglich ist, da $Q < V$, $Q_1 > W$ ist. Deshalb verhalten sich die Pyramiden von gleichen Höhen wie die Prismensummen, also wie die Grundflächen.

Der Eudoxisch-Euklidische Beweis benützt das Exhaustionsverfahren[3]): Der Inhalt der Pyramide wird durch eine endlose Prismensumme „erschöpft"; den Abschluß bildet ein indirekter Schluß auf Grund eines die Stetigkeit verbürgenden Axioms.

Der antike Beweis ist später durch andere ersetzt worden: man hat offen oder in elementare Formen gekleidet die Methode der Integration angewendet, indem man die Pyramide in eine Summe von Parallelplatten zerlegte und diese Plattensumme in eine beliebig zu verengende obere und untere Grenze von Prismenplatten einschloß; man hat entweder diese Plattensummen oder die Summe der Euklidischen einbeschriebenen Prismen durch unendliche konvergente Reihen ausgedrückt und summiert; aber alle diese Beweise haben mit dem antiken das gemeinsam, daß sie nicht mit einer endlichen Anzahl von Kongruenzen auskommen, sondern die Zerlegung ins Unendliche fortsetzbar denken müssen.

Vermieden wird der Weg durch das Unendliche durch die Cavalierische Methode[4]),

---

[1]) Archimedes, de sphaera et cylindro, I, Einleitung. Archimedes, quadratura parabolae, Einleitung.

[2]) Euklid X, 1 lautet: Wenn man von der größeren unter zwei ungleichen Größen mehr als ihre Hälfte wegnimmt und von dem Reste wieder mehr als seine Hälfte und so fort, so kann der Rest kleiner gemacht werden als die kleinere der beiden gegebenen Größen. Der Beweis von X, 1 stützt sich auf V def. 4: Zwei Größen haben ein Verhältnis untereinander, wenn sie vervielfältigt einander übertreffen können. X, 1 ist gleichwertig mit dem Archimedischen Axiom (de sphaera et cylindro, I, post. 5, und quadratura parabolae, Einleitung): Der Unterschied zweier Linien, Flächen oder Volumina kann, beliebig oft vervielfältigt, jede Größe derselben Art übertreffen.

[3]) Der Name stammt nach Cantor, Geschichte der Mathem., II, S. 818, von Gregorius a S. Vincentio, 1647.

[4]) Cavalerius, geometria indivisibilibus continuorum promota, 1635, 1653, und exercitationes geometricae, 1647. Die Form, in welcher der Cavalierische Satz jetzt gewöhnlich gebraucht wird, ist nicht der Cavalierische Hauptsatz über die indivisibilia (lib. II), sondern eine von ihnen unabhängige, gewissermaßen populäre Veranschaulichung (lib. VII).

aus der Gleichheit der Parallelschnitte zweier Körper auf ihre Volumengleichheit zu schließen. Indes ist diese Hülfe nur eine scheinbare. Die Anfeindung der Cavalierischen Methode ist so alt wie sie selbst. Erstens ist der Cavalierische Satz nicht ein an sich klares Prinzip, was schon Descartes mit den Worten bezeichnet[1]): un théorème qui ne serait peut-être avoué de tous. Deshalb ist er im Zeitalter der Erfindung der Integralrechnung durchaus verworfen[2]) und lange ignoriert worden, bis Ségner[3]) ihn 1756 von neuem als Prinzip aufstellte und für lange Zeit zu Ehren brachte. Also der Cavalierische Satz muß bewiesen werden. Zweitens ist er beweisbar und zwar mit denselben Mitteln der Einschließung in Grenzen[4]), welche an mehreren Stellen der elementaren Mathematik unentbehrlich sind, und mit welchen die höhere Mathematik in die niedere übergreift. Ist er aber als Prinzip verwerflich, als Lehrsatz beweisbar und nützlich, so muß er als solcher eingeführt und bewiesen werden. Auch für die Schule gilt der Grundsatz: Principia praeter necessitatem non esse multiplicanda.

Der Widerspruch zwischen der Leichtigkeit, mit welcher das ebene Flächenproblem zu erledigen ist, und den Schwierigkeiten, welche sich einer im Endlichen bleibenden Behandlung des Volumen-, speziell des Pyramidenproblems, entgegensetzen, ist stets empfunden worden. Er wurde zum lebhaften Mißbehagen vom Beginne des 19. Jahrhunderts an. Die Geometer dieser Zeit stellen den Pyramidensatz als eine von den Alten unerledigt gelassene Forderung neben das Parallelenaxiom[5]); aber wie die Bemühungen um dieses, blieben auch alle Versuche, den Pyramidensatz durch eine endliche Anzahl von Zerlegungen und direkt zu beweisen, erfolglos.

Viel später als für das Parallelenaxiom tauchte für das Pyramidenproblem der Gedanke auf, daß die Erfolglosigkeit der Lösungsversuche nicht im Unglück oder Ungeschick der Geometer, sondern in der Unlösbarkeit des Problems seinen Grund haben müsse.

Ich finde diesen Gedanken zuerst ausgesprochen von Rausenberger 1893. Danach hat er schnell festere Gestalt angenommen. 1896 hat Bricard als Erster erkannt, daß für die Endlichgleichheit zweier Polyeder eine Bedingung nötig ist, die nicht, wie in der Ebene, stets erfüllt ist. Er hat diese Bedingung aufgestellt und für einfache Fälle bewiesen. 1900 forderte Hilbert in seinen „Mathematischen Problemen" den allgemeinen Unmöglichkeitsbeweis für die Endlichgleichheit von Prismen und Pyramiden. Noch in demselben Jahre wurde dieser Beweis von Dehn im weitesten Umfange geliefert. Daneben gingen erfolgreiche Bemühungen, besondere mit Prismen endlichgleiche Pyramiden aufzufinden, und andere, den Dehnschen Beweis zu vereinfachen.

Die ganze Bewegung, deren tiefes Interesse ihr ganz internationaler Charakter erkennen läßt, hat zurzeit einen gewissen Abschluß erreicht. Ich versuche im Folgenden, den Weg und die Resultate der weit verstreuten Arbeiten in möglichst elementarer Darstellung zugänglich zu machen. Eingefügt sind meine eigenen Untersuchungen über zerlegungsgleiche Polyeder.

---

[1]) Cantor, Geschichte der Mathematik, II, S. 788.

[2]) Besonders durch Guldin und Tacquet. Vergl. Cantor, II, S. 767, 819.

[3]) Ségner, elementa arithmeticae, geometriae et calculi geometrici. Halae 1756. Nach Ségner wurde das Prinzip lange Zeit benannt. Vergl. Gauß, Werke, Bd, 8, S. 244.

[4]) Vergl. die Beweise von Baltzer, Elemente der Mathematik. 4. Aufl. 1872. Buch 5, § 8, 7. Weinmeister, Zeitschrift f. mathem. u. naturw. Unterricht, Bd. 32, 1902, und besonders Jung, dieselbe Zeitschrift, Bd. 33, 1903; auch Thieme, Leitfaden der Mathematik, Teil II, S. 76. Leipzig 1902.

[5]) Legendre, élémens de géométrie, übersetzt von Crelle. Der Beweisgang wechselt in den Auflagen mehrere Male. — Gudermann, Zu den Elementen der Geometrie. Crelles Journal, Bd. 6, 1830. — Möbius und Crelle, Bemerkungen hierzu, ebenda. Auch Lehrbuch von Crelle. — Gauß, Briefwechsel mit Gerling, 1844. Werke, Bd. 8. Daselbst auch Hinweis auf Bemühungen von Pfaff. 1809. — Baltzer, Elemente der Mathematik. 4. Aufl. 1872. Buch 5, § 8, 9.

Literatur: Rausenberger, Das Grundproblem der Flächen- und Rauminhaltslehre. Math. Ann. 43, 1893. — Bricard, sur une question de géométrie relative aux polyèdres. Nouvelles annales de math., XV, 1896. — Sforza, periodico di matematiche. Livorno 1897 (zitiert von Dehn, mir nicht zugänglich gewesen). — Hill, Determination of the Volumes of certain Species of Tetrahedra. Proceedings of the London, Math. Society XXVII, 1896. — Schur, Modelle von Tetraederzerlegungen. 1899. — Hilbert, Mathem. Probleme Archiv d. Math. u. Phys., III. Reihe 1. 1900. — Dehn, Über raumgleiche Polyeder. Nachrichten d. K. Ges. d. Wissensch. Göttingen 1900. — Dehn, Über den Rauminhalt. Math. Ann. 55, 1902. — Vahlen, Über endlichgleiche Polyeder. Math. Ann. 56, 1903. — Kagan, Über die Transformation der Polyeder. Math. Ann. 57, 1903. — C. Juel, égalité par addition de quelques polyèdres. Ber. d. K. Ges. d. Wissensch. Kopenhagen 1903. — C. Juel, Vortrag auf d. Naturf.-Vers. zu Kassel. Berichte d. Deutschen Math. Vereinigung, Bd. 12, 1903. — C. Juel, om endelig ligestore Polyedre. Nyt Tidskrift f. Math. XIV, 1903.

§ 2. Endlichgleichheiten von Prismen und Pyramiden.

A. Symmetrische Körper.

Man könnte meinen, daß die Schwierigkeit, die Gleichheit zweier Pyramiden von gleichen Grundflächen und Höhen auf Endlichgleichheit zurückzuführen, ihren Grund in dem Vorhandensein inkongruenter, symmetrischer Gegenbilder habe. Dies ist jedoch nicht der Fall: Vielmehr lassen zunächst zwei symmetrische Tetraeder, und deshalb überhaupt symmetrische Polyeder, sich stets in kongruente Teile zerlegen.

Sind ABCD und A'B'C'D' (Fig. 6 u. 7) zwei symmetrische Tetraeder, J und J' die Mittelpunkte der ihnen einbeschriebenen Kugeln, β, δ, β', δ' die Fußpunkte der von J auf ACD und ACB, von J' auf A'C'D' und A'C'B' gefällten Lote, also die Berührungspunkte der einbeschriebenen Kugeln mit den genannten Tetraederflächen, so hat der von 6 Dreiecken begrenzte Körper JAC$\beta\delta$ die Ebene JAC zur Symmetrieebene. Denn JAC halbiert den Neigungswinkel der Ebenen ACD und ACB, es ist $J\beta = J\delta$ als Kugelradien, $A\beta = A\delta$, $C\beta = C\delta$ als Kugeltangenten. Also der Körper JAC$\beta\delta$ geht durch Spiegelung an der Ebene JAC in sich selber, d. h. in einen zu ihm nicht nur symmetrischen, sondern kongruenten über. Also ist er überhaupt seinem Spiegelbilde kongruent, d. h. JAC$\beta\delta \cong$ J'A'C'$\beta'\delta'$. Ebenso wie über den Kanten AC und A'C' ergeben sich über den übrigen entsprechenden Tetraederkanten kongruente Teilkörper. Mithin lassen sich 2 symmetrische Tetraeder in je 6 paarweis kongruente Teile zerlegen. Daraus folgt auch, daß beliebige symmetrische Polyeder zerlegungsgleich sind.

Die Zerlegung zweier symmetrischen Tetraeder vom Mittelpunkt der einbeschriebenen Kugel aus ist angegeben von Durrande in Gergonne, annales de math., t. VI, 1815, 1816; jedoch läßt sich die von ihm erfundene Zerlegung in je 12 Teile, wie oben geschehen, auf je 6 Teile reduzieren. Die Zerlegung vom Mittelpunkt der einbeschriebenen Kugel aus ist die einzige bekannte, welche stets auf Zerlegungsgleichheit führt. Von den Mittelpunkten der 7 anbeschriebenen Kugeln aus erhält man nie zerlegungsgleiche, sondern stets ergänzungsgleiche Teile. Von fast allen übrigen Autoren ist der Mittelpunkt der umschriebenen Kugel zum Ausgang der Zerlegung in 12 kongruente Tetraeder gemacht worden, deren Zahl sich nicht vermindern läßt[1]).

[1]) Diese Zerlegung ist, soweit ich die Literatur übersehe, 5 mal neu entdeckt worden: 1. Legendre, élémens, ed. 2, Note 7 (nach Baltzer, Elemente, Aufl. 4, Buch 5, § 6, 5); 2. Durrande, 1815; 3. Gudermann, Crelles Journal, Bd. 6, 1830; 4. Gerling, Gauß' Werke, Bd. 8, 1844; 5. Bricard, nouvelles annales de math., t. XV, 1896. Liegt der Mittelpunkt der umschriebenen Kugel außerhalb des Tetraeders, so ergibt sich auf diese Weise nicht Zerlegungsgleichheit, sondern Ergänzungsgleichheit. Endlich hat Hill, proceedings of the London math. Soc. XXVII, 1896, eine Überführung zweier symmetrischen Tetraeder ineinander angegeben, deren erster Teil sich von der Benutzung der Volumenformel für Prismen befreien und allein auf Zerlegungen zurückführen läßt, während der zweite Teil wesentlich auf Ergänzungsgleichheit beruht.

B. Besondere Fälle.

Das vierseitige Prisma, welches seit den Zeiten der Griechen meist den Namen „Parallelepipedon" führt, nenne ich nach Graßmann „Spat"; das „gerade Parallelepipedon auf rechteckiger Grundfläche" mit Martus „Quader".

Ein Rhomboeder (passend vielleicht „Rautenspat" zu nennen) ist ein von 6 kongruenten Rhomben begrenzter Spat. Fig. 8. In den Gegenecken O und O′ stoßen je 3 gleiche Rhombenwinkel zusammen; diese beiden Ecken sind also regelmäßig und kongruent, und die Diagonale OO′ ist ihre Symmetrieachse. In den 6 anderen Ecken stoßen je zwei gleiche und 1 ungleicher Rhombenwinkel zusammen; diese Ecken sind also gleichschenklig und kongruent. Die durch die Diagonale OO′ gehenden 3 Diagonalebenen sind ihre Symmetrieebenen, durch welche jede dieser gleichschenkligen Ecken in 2 zueinander symmetrische, rechtwinklige Ecken zerlegt wird. Die 3 vierseitigen Pyramiden, welche den Punkt O zur Spitze und die 3 in O′ zusammenstoßenden Rhomben O′A′B′C, O′B′C′A, O′C′A′B zu Grundflächen haben, sind kongruent und füllen das Rhomboeder vollständig aus. Jede dieser Pyramiden läßt sich durch eine OO′ enthaltende Ebene in 2 zueinander symmetrische Tetraeder zerlegen, z. B. O—O′B′C′A in O—O′C′A und O—O′B′A. Das ganze Rhomboeder ist also zerlegungsgleich mit 6 solchen zu je dreien kongruenten Tetraedern. Ein dreiseitiges Prisma OAB′—BC′O′, welches durch die OO′ enthaltende Diagonalebene OB′O′B′ vom Rhomboeder abgeschnitten wird, bestehend aus 3 solchen Tetraedern O—O′AB′, O—O′AC′, O′—OBC′, von denen das erste und dritte kongruent und mit dem mittelsten symmetrisch, also nach § 2, A zerlegungsgleich sind.

Hier liegt also der besondere Fall vor, daß ein dreiseitiges Prisma aus drei zerlegungsgleichen Tetraedern besteht. In jedem dieser besonderen Tetraeder, z. B. OO′AB′, sind 3 Kanten OA = AB′ = B′O′ als Rhombenseiten, OB′ = O′A als gleichartige Rhombendiagonalen, OO′ ist die durch Angabe eines Rhombus vollständig bestimmte Symmetrieachse des Rhomboeders [1]).

Unter den Flächenwinkeln des Rhomboeders kommen nur 2 Größen vor: seien die Flächenwinkel an den gleichseitigen Ecken O und O′ α, so sind die Winkel an den Kanten, welche nicht in O oder O′ zusammenlaufen, $\beta = 2\,R - \alpha$. Deshalb sind im Tetraeder OO′AB′ die Winkel an den Kanten AB′, OA, O′B′ bezw. $\beta = 2\,R - \alpha$, $\frac{\alpha}{2}$, $\frac{\alpha}{2}$; an den Kanten OB′ und O′A sind die Flächenwinkel je 1 R; um OO′ liegen im Rhomboeder 6 gleiche Winkel herum, mithin ist der Tetraederwinkel an der Kante OO′ = $\frac{2}{3}$ R. Die Bedeutung dieser Winkelgrößen für den hier vorliegenden Fall von Zerlegungsgleichheit zwischen Prisma und Tetraeder wird sich später ergeben.

Dieses besondere Tetraeder hat zuerst Hill (a. a. O.) angegeben, jedoch ohne den Zusammenhang mit dem Rhomboeder aufzudecken. Da 3 Hillsche Tetraeder zerlegungsgleich mit einem dreiseitigen Prisma sind, so gelingt es Hill, für sein besonderes Tetraeder die Euklidische Zerlegung (Fig. 5) durch Zerspaltung der beiden dreiseitigen Prismen weiterzuführen, so daß eines seiner Tetraeder zerlegungsgleich ist mit 8 teils kongruenten, teils symmetrischen Tetraedern derselben Art mit halben Kantenlängen.

Auf Grund derselben Tatsache hat Schur Modelle angefertigt, in welchen ein Hillsches Tetraeder zerlegungsgleich ist mit dem dreiseitigen Prisma, welches mit ihm dieselbe Grundfläche, $\frac{1}{3}$ Höhe und die Seitenkante parallel zu einer Seitenkante des Tetraeders hat [2]).

---

[1]) Ist OA = AB′ = B′O′ = a, OB′ = O′A = d, so ist OO′ = $\sqrt{3\,(d^2 - a^2)}$; für den Würfel im besonderen wird d = a $\sqrt{2}$, OO′ = a $\sqrt{3}$.

[2]) Derartige Modelle befinden sich in den Sammlungen zu Karlsruhe i. B. und Göttingen. Kenntnis von der Art der Ausführung verdanke ich einer brieflichen Mitteilung des Herrn Prof. Schur.

Die Ebene, welche symmetrisch zu O und O′ in M, der Mitte von OO′, auf dieser Geraden senkrecht steht, ist parallel zu den Ebenen ABC und A′B′C′ und halbiert die 6 nicht durch O oder O′ laufenden Rhomboederkanten, z. B. AB′ in δ. Die Verbindungslinie Mδ ist nach dem Gesagten $\perp$ OO′; sie ist auch $\perp$ AB′, weil sie Mittellinie des Rechtecks ABA′B′ ist.

Durch die Ebene MAB′ wird das Tetraeder OO′AB′ in zwei kongruente Tetraeder MOAB′ und MO′B′A geteilt. Denn dreht man das erste um die Gerade Mδ als Achse um 180°, so kommt es zur Deckung mit dem zweiten.

Teilt man das Tetraeder OO′AB′ durch die Ebene OO′δ in die beiden Tetraeder OO′δA und O′OδB′, so geht das erste durch Drehung um 180° um die Gerade Mδ als Achse in das zweite über; also sind auch diese kongruent.

Damit sind aus dem Hillschen Tetraeder zwei neue, ebenfalls mit einem Prisma zerlegungsgleiche und auch von Hill angegebene Tetraedertypen abgeleitet.

Zu den Hillschen Tetraedern würde man auch gelangen, wenn man das Rhomboeder zuerst vom Mittelpunkt M aus in 6 vierseitige kongruente Pyramiden zerlegt und diese weiter teilt.

Diese Zerlegung hat C. Juel (a. a. O.) noch spezieller auf den Würfel angewendet und die vierseitige Pyramide, welche als $\frac{1}{6}$ des Würfels auftritt, in einen Quader von derselben Grundfläche und $\frac{1}{3}$ Höhe durch Zerlegung umgeformt[1]). Der achte Teil dieser Pyramide ist das spezielle Hillsche Tetraeder mit den Kanten a, a, a, $a\sqrt{2}$, $a\sqrt{2}$, $a\sqrt{3}$. (Vergl. S. VIII Anm. 1.)

Andere mit Prismen zerlegungsgleiche Tetraeder als diese an das Rhomboeder bezw. den Würfel geknüpften sind zurzeit nicht bekannt.

C. Allgemeine Zerlegungsgleichheiten.

Das Volumen eines Spats, dessen drei in einer Ecke zusammenstoßende Kanten die Längen a_1, a_2, a_3 und die Zwischenwinkel α_1, α_2, α_3 haben, bezeichne ich mit S(a); sind die Kanten $2a_1$, $2a_2$, $2a_3$, die Zwischenwinkel wieder α_1, α_2, α_3, so bezeichne ich sein Volumen mit S(2a). Durch Zerlegung ergibt sich $S(2a) \equiv 8 \,.\, S(a)$.

Das Volumen eines Tetraeders, in dem die Verbindungslinien der Mitten der Gegenkanten die Längen a_1, a_2, a_3 und die Zwischenwinkel α_1, α_2, α_3 haben, bezeichne ich mit T(a); ein Oktaeder und ein Parallelogramm-Dodekaeder, in welchen die Achsen die Längen a_1, a_2, a_3 und die Zwischenwinkel die Größen α_1, α_2, α_3 haben, mit O(a) und D(a). Entsprechende Bedeutung haben die Zeichen T(2a), O(2a), D(2a).

1) Wird ein Spat EH′FG′—F′GE′H [S(a)] (Fig. 10) von seinem Mittelpunkte M aus in 6 Pyramiden zerlegt, M—EH′FG′, M—E′HF′G, M—EG′HF′, M—E′GH′F, M—EH′GF′, M—E′HG′F, und werden diese Pyramiden mit ihren Grundflächen auf die Seitenflächen eines dem ersten Spat kongruenten AD′BC′—B′CA′D (Fig. 9) aufgesetzt, z. B. M—EH′FG′ auf die Fläche A′DB′C usw., so fallen zwei Dreiecksflächen, z. B. EH′M und E′HM, welche vorher in einer Ebene lagen, auch in der neuen Lage in eine Ebene als B′Cγ′ und CB′α; denn das Aufsetzen der Pyramiden auf die Flächen des Spats AD′BC′—B′CA′D ist ohne Drehung nur durch Parallelverschiebung zu vollziehen. Die beiden Dreiecksflächen B′Cγ′ und CB′α bilden deshalb ein Parallelogramm. Ein derartiges Parallelogramm liegt über jeder Kante des Spats AD′BC′—B′CA′D; in jeder Spatecke stoßen je 3 von diesen 12 Parallelogrammen zusammen. In den 6 Punkten α, α′, β, β′, γ, γ′, stoßen je 4 Parallelogramme zusammen. Die Verbindungslinie γγ′ ist, wie aus der Parallelverschiebung der beiden Pyramiden M—EH′FG′ und M—E′HF′G hervorgeht, doppelt so groß als die Spatkante EF′ bezw. AB′, also wenn $EF' = a_3$ ist, so ist $\gamma\gamma' = 2a_3$, und ent-

[1]) Irrtümlich gibt Juel an (Ber. d. K. Dän. Ges. d. Wissensch., S. 65—67, Nyt Tidskrift, S. 6—9, Bericht d. deutschen Math. Vereinigung, S. 500), daß seine Pyramide endlichgleich mit einem Würfel sei. Die Umformung muß vielmehr beim Quader stehen bleiben; weiter geht sie weder durch Zerlegung noch überhaupt mit Lineal und Zirkel.

sprechend $\alpha\alpha' = 2a_1$, $\beta\beta' = 2a_2$. Also die Achsen des entstandenen Parallelogramm-Dodekaeders haben die Längen $2a_1$, $2a_2$, $2a_3$ und dieselben Zwischenwinkel wie die Kanten des Spats, α_1, α_2, α_3. Sein Volumen ist D(2a). Da es entstanden ist aus Überlagerung der 6 Pyramiden des Spats EH'FG'—E'HF'G auf die Flächen eines ihm kongruenten Spats, so ist das Dodekaeder zerlegungsgleich mit dem Spat E''H''F''G'—F'G'E'H', dessen Kanten a_1, a_2, $2a_3$ sind; also ergibt sich die Zerlegungsgleichheit I: $D(2a) \equiv 2\,S(a)$.

Diese Zerlegungsgleichheit ist sehr merkwürdig; denn sie ist die einzige bekannte Zerlegung eines Spates in einen pyramidischen Körper von allgemeinem Charakter.

2) Es liegt nahe zu versuchen, von dieser einzigen bekannten allgemeinen Spatzerlegung einen Übergang zu den einfacheren pyramidischen Körpern, dem Tetraeder und dem Oktaeder, zu suchen. Ein solcher Übergang ist in der Tat möglich.

Schneidet man von den Ecken A, B, C, D, A', B', C', D' des Dodekaeders die 8 Tetraeder bis zu den Punkten α, β, γ, α', β', γ' (Fig. 9) ab, so bleibt von dem Dodekaeder als Kernkörper das Oktaeder $\alpha\beta\gamma\alpha'\beta'\gamma' = O(2a)$ (Fig. 11) übrig. Die abgeschnittenen tetraedrischen Ecken aber lassen sich zu je vieren zu 2 Tetraedern T(a) und T'(a), welche zueinander symmetrisch sind, zusammensetzen. Nämlich die 4 bei A', B', C', D' abgeschnittenen Tetraeder lassen sich durch bloße Parallelverschiebung so zusammenrücken, daß sie mit den Eckpunkten A', B', C', D' zusammenfallen. Auf die Fläche $A'\alpha'\beta'$ des Tetraeders A'—$\alpha'\beta'\gamma'$ fällt die ihr kongruente $B'\beta\alpha$ des Tetraeders B'—$\alpha\beta\gamma'$; auf die Fläche $A'\alpha'\gamma'$ von A'—$\alpha'\beta'\gamma'$ fällt die Fläche $D'\gamma\alpha$ von D'—$\alpha\beta'\gamma$; auf die Fläche $A'\beta'\gamma'$ von A'—$\alpha'\beta'\gamma'$ fällt die Fläche $C'\gamma\beta$ von C'—$\alpha'\beta\gamma$; und ebenso schließen sich die Tetraeder, welche die Spitzen B', C', D' haben, untereinander mit kongruenten Dreiecksflächen aneinander.

Die Ebene $\alpha'\beta'\gamma'$, durch welche das Tetraeder A'—$\alpha'\beta'\gamma'$, abgeschnitten wird, halbiert die 3 Geraden A'B, A'C, C'D, in ε, ζ, η, so daß $A'\varepsilon = \frac{a_3}{2}$, $A'\zeta = \frac{a_1}{2}$, $A'\eta = \frac{a_2}{2}$ wird. Ebenso halbiert die Ebene $\alpha\beta\gamma'$, welche das Tetraeder B'—$\alpha\beta\gamma'$ abschneidet, B'A, B'D, B'C in ε', ζ', η', so daß $B'\varepsilon' = \frac{a_3}{2}$, $B'\zeta' = \frac{a_1}{2}$, $B'\eta' = \frac{a_2}{2}$ wird. Beim Aufeinanderlegen dieser beiden Tetraeder mit den kongruenten Flächen $A'\alpha'\beta'$ und $B'\beta\alpha$ fällt $B'\varepsilon'$ auf $A'\varepsilon$; $B'\zeta'$ fällt, da die Richtung nicht verändert wird, in die Verlängerung von $\zeta A'$; die so entstandene Gerade $\zeta\zeta'$, welche $= a_1$ ist, verbindet in dem neu entstandenen Tetraeder die Mitten zweier Gegenkanten, welche aus $\beta'\gamma'$ und $\beta\gamma'$ entstanden sind; ebenso haben die Verbindungsgeraden der beiden andern Gegenkantenpaare die Längen a_2 und a_3, also ist mit Recht das entstandene Tetraeder als T(a) zu bezeichnen. Die zusammenfallenden Punkte A', B', C', D' liefern den Schwerpunkt σ von T(a).

Fig. 12 stellt den Restkörper dar, wenn vom Dodekaeder D(2a) die 4 Tetraeder an den Ecken A', B', C', D' abgeschnitten werden; Fig. 13 zeigt das aus Zusammenschieben dieser 4 Tetraeder entstandene Tetraeder T(a). Da die an den 4 Ecken A, B, C, D abzuschneidenden Tetraeder sich zu einem Tetraeder T'(a) zusammenschieben lassen, welches zu T(a) symmetrisch, also zerlegungsgleich ist, so ergibt sich die Zerlegungsgleichheit II: $D(2a) \equiv O(2a) + 2T(a)$.

3) Noch in anderer Weise lassen sich aus dem Spat Zerlegungsgleichheiten herleiten.

Schneidet man (Fig. 14) die 4 Ecken A, B, C, D bis zu den Diagonalen der Seitenflächen ab, so bleibt als Restkörper ein Tetraeder $A'B'C'D' = T(a)$ übrig. Die 4 abgeschnittenen Tetraeder lassen sich mit den parallelen Spatkanten ohne Drehung so aneinanderschieben, daß sie das Gerüst eines Oktaeders $\alpha\alpha'\beta\beta'\gamma\gamma'$ (Fig. 11) $= O(2a)$ bilden, jedoch füllen sie dieses Oktaeder nicht ganz aus, sondern liefern nur die 4 Teile M—$\alpha'\beta'\gamma'$, M—$\alpha\beta\gamma'$, M—$\alpha'\beta\gamma$, M—$\alpha\beta'\gamma$. Schneidet man aber von einem kongruenten Spat die Ecken A', B', C', D' bis zu den Diagonalen ab, so füllen diese 4 Tetraeder die Lücken des Oktaeders O(2a) aus und lassen vom Spat S(a) als

Restkörper ein zu T(a) symmetrisches Tetraeder T′(a) übrig. Deshalb ergibt sich die Zerlegungsgleichheit III: O(2a) + 2 T(a) ≡ 2 S(a).

4) Schneidet man von einem Spat AD′BC′—B′CA′D = S(a) (Fig. 15) die Ecken bis zu den Mitten der Kanten ab, so lassen sich die 8 abgeschnittenen Tetraeder zu einem Oktaeder O(a) zusammenschieben. Andrerseits lassen sich die 4 bei A′, B′, C, D abgeschnittenen Tetraeder mit ihren Flächen $A'\varkappa'\iota'$, $B'\mu'\lambda'$, $C\mu'\iota'$, $D\varkappa'\lambda'$ auf das von der Spatfläche AD′BC′ übriggebliebene Mittelparallelogramm $\iota\varkappa\lambda\mu$ aufsetzen, und ebenso die zu den Ecken ABC′D′ gehörigen Tetraeder auf die Mittelfigur $\iota'\varkappa'\lambda'\mu'$. Ebenso ließen sich die 4 Tetraeder der Ecken A, B′, C′, D auf die Mittelfigur von A′BCD′ und umgekehrt aufsetzen; und die 4 Tetraeder der Ecken A, B′, C, D′ auf die Mittelfigur von A′BC′D und umgekehrt. Um alles dies auszuführen, müßten die Ecktetraeder aber nicht einfach, sondern dreifach vorhanden sein, also außer den vom Spat S(a) abgeschnittenen vom Summenwert O(a) müßte noch 2 O(a) hinzugenommen werden. Alsdann würden sie den Restkörper des Spats zum Oktaeder O(2a) (Fig. 11) ergänzen, und es ergäbe sich die Zerlegungsgleichheit IV: O(2a) ≡ S(a) + 2 O(a).

5) Legt man durch einen Spat S(2a) die 8 Schnittebenen, welche sich in 3. auf 2 kongruente Spate verteilten (Fig. 16)[1], so erhält man als Kernkörper das den beiden Tetraedern ABCD und A′B′C′D′ gemeinsame Oktaeder $\alpha\alpha'\beta\beta'\gamma\gamma'$ = O(2a). Über jeder Oktaederfläche liegt, auf die Ecke des Spats zu gerichtet, ein Tetraeder, welches entweder mit ABCD oder mit A′B′C′D′ ähnlich und von den halben Kantenlängen ist, also T(a) oder T′(a); z. B. über $\alpha\beta\gamma$ liegt $A—\alpha\beta\gamma \backsim$ A—CDB, über $\alpha'\beta'\gamma'$ liegt $A'—\alpha'\beta'\gamma' \backsim$ A′—C′D′B′ usw. Derartige Tetraeder gibt es 8. Außerdem liegt über jeder Oktaederkante ein Tetraeder, welches als Gegenkante eine Spatkante hat, z. B. $\gamma\beta'$—CA′, $\beta'\gamma$—D′B, $\gamma\beta$—AC′, $\beta\gamma'$—B′D. Derartige Tetraeder gibt es 12. Die 4 soeben genannten, welche die parallelen Kanten CA′, D′B, AC′, B′D enthalten, lassen sich ohne Drehung, allein durch Parallelverschiebung mit diesen Kanten aufeinanderlegen und bilden alsdann ein Oktaeder $\mathfrak{a}\mathfrak{a}'\mathfrak{b}\mathfrak{b}'\mathfrak{c}\mathfrak{c}'$ = O(2a) (Fig. 17). Dasselbe gilt von den 4 Tetraedern, welche sich an die zu AD′ parallelen Kanten anschließen, und ebenso von denen, welche die zu AB′ parallelen Kanten enthalten. Also ergibt sich die Zerlegungsgleichheit V: S(2a) ≡ 4 O(2a) + 8 T(a).

6) Zwei weitere Zerlegungsgleichheiten ergeben sich aus der Teilung des Tetraeders. Sei ABCD (Fig. 5) ein Tetraeder, dessen Gegenkantenmitten durch die Geraden $\alpha\alpha' = 2a_1$, $\beta\beta' = 2a_2$, $\gamma\gamma' = 2a_3$ verbunden sind, so ist ABCD = T(2a). Die Punkte $\alpha\alpha'\beta\beta'\gamma\gamma'$ bestimmen ein Oktaeder O(2a); außerdem liegt an jedem der Punkte A, B, C, D ein Tetraeder T(a); also VI: T(2a) ≡ O(2a) + 4 T(a).

7) Nach der Euklidischen Zerlegung ist das Tetraeder ABCD [T(2a)] gleich 2 Tetraedern $\gamma'\beta'\alpha'D$, $\alpha B\gamma\beta'$ und 2 Prismen $A\beta\gamma'—\alpha\gamma\beta'$, $\beta\gamma C—\gamma'\beta'\alpha'$. Die Teiltetraeder sind T(a), jedes der beiden dreiseitigen Prismen ist gleich S(a). Denn Prisma $A\beta\gamma'—\alpha\gamma\beta'$ (Fig. 18) ist zerlegungsgleich mit dem Spat $A\alpha\gamma\beta—\delta\xi\zeta\eta$, wo ζ und η die Mitten von $\gamma\beta'$ und $\beta\gamma'$ sind. Dieser aber läßt sich so umformen, daß statt der Grundfläche $\beta\gamma\zeta\eta$ die ihr flächengleiche $\beta M\gamma\vartheta$ mit den Seiten $M\beta = a_2$, $M\gamma = a_3$ eintritt, und die dritte von M ausgehende Seitenkante $M\alpha = a_1$ wird. Deshalb ist $A\beta\gamma'—\alpha\gamma\beta'$ ≡ S(a); dasselbe gilt für das Prisma $\beta\gamma C—\gamma'\beta'\alpha'$; und es ergibt sich die Zerlegungsgleichheit VII: T(2a) ≡ 2 T(a) + 2 S(a).

D. Algebraische Behandlung der gewonnenen Zerlegungsgleichheiten.

Sieht man in den unter C. gewonnenen Zerlegungsgleichheiten das Spatvolumen als bekannt, die Volumina der pyramidischen Körper D(2a), O(2a), T(2a), O(a), T(a) als unbekannt an, so ist zunächst durch Gleichung I D(2a) als zerlegungsgleich mit S(a) bestimmt. Die übrigen

[1] Auf den Flächen AB′CD′ und A′BC′D sind die Schnittlinien nicht ausgezogen.

Zerlegungsgleichheiten aber enthalten die pyramidischen Körper nicht isoliert, sondern zu zweien oder dreien vereinigt. Es fragt sich, ob die vorhandenen 7 Gleichungen geeignet sind, die 5 Unbekannten D(2a), O(2a), T(2a), O(a), T(a) zu bestimmen.

Die gewonnenen Zerlegungsgleichheiten behalten nach Definition der Zerlegungsgleichheit ihren Charakter, wenn man auf beiden Seiten einer Gleichung kongruente oder zerlegungsgleiche Körper addiert, also auch wenn man die Gleichungen untereinander addiert oder mit einem positiven ganzen Zahlenfaktor multipliziert, oder wenn man gewisse Größen durch zerlegungsgleiche ersetzt. Subtrahiert man zwei der vorhandenen Zerlegungsgleichheiten von einander, jedoch so, daß die Subtraktion als Wegnehmen gewisser Körperstücke von anderen wirklich ausführbar ist, so erhält man nach Definition der Ergänzungsgleichheit aus zwei Zerlegungsgleichheiten eine Ergänzungsgleichheit; ebenso, wenn man auf beiden Seiten einer Zerlegungsgleichheit gleiche Körper abzieht. Nun werden aus einem System linearer Gleichungen die Unbekannten bestimmt, indem man auf beiden Seiten der Gleichungen Gleiches addiert oder subtrahiert, die Gleichungen selbst addiert oder subtrahiert, mit gleichen Faktoren multipliziert und Gleiches für Gleiches einsetzt.

Daraus geht hervor, daß alle durch das charakterisierte Eliminationsverfahren aus I bis VII sich ergebenden Gleichungen zwar nicht sämtlich Zerlegungsgleichheiten, aber sicher Endlichgleichheiten sein werden.

Zunächst ist zu prüfen, ob die Gleichungen I bis VII voneinander unabhängig sind. Dies ist offenbar nicht der Fall: Gleichung III ergibt sich durch Gleichsetzen von I und II; deshalb soll II aus dem System ausgeschieden werden. Setzt man in V für S(2a) 8 S(a) ein, so ist V das Vierfache von III; deshalb ist V auszuscheiden. Setzt man aus III den Wert von O(2a) in VI ein, so ergibt sich die Identität mit VII; deshalb ist VI auszuscheiden. Als unabhängige Zerlegungsgleichheiten bleiben

$$\begin{aligned} D(2a) &\equiv 2\,S(a) \\ O(2a) + 2\,T(a) &\equiv 2\,S(a) \\ O(2a) &\equiv 2\,O(a) + S(a) \\ T(2a) &\equiv 2\,T(a) + S(a). \end{aligned}$$

Diese 4 Zerlegungsgleichheiten aber enthalten 5 als Unbekannte anzusehende pyramidische Körper. Einzig und allein D(2a) ist durch S(a) bestimmt; irgend eine der andern Unbekannten O(2a), T(2a), O(a), T(a) zu bestimmen, reichen die hier gewonnenen Zerlegungen nicht aus; also auch nicht, um das Pyramidenvolumen durch Endlichgleichheit aus dem Prismenvolumen herzuleiten.

Nach den Untersuchungen dieses Paragraphen ist es nicht gelungen, die für Lösung des Pyramidenproblems durch Endlichgleichheit nötige Anzahl von Zerlegungsgleichheiten aufzustellen. Es ist aber nicht ersichtlich, ob es allgemein unmöglich oder nur hier mißlungen ist, die eine fehlende Zerlegung aufzufinden, welche das aufgestellte Gleichungssystem zu einem bestimmten machen würde. Über diese Frage gibt der Dehnsche Satz Aufschluß.

§ 3. Der Dehnsche Satz.

1. Besteht ein Polyeder P aus Teilpolyedern P_1, P_2, $P_3 \ldots$, so können zunächst die Kanten der Teilpolyder sämtlich ungeteilt auftreten, und zwar können sie als ganze erstens mit den Kanten des Hauptpolyeders P zusammenfallen, zweitens können sie in Flächen des Hauptpolyeders oder der Teilpolyeder fallen, drittens können sie frei innerhalb des Hauptpolyeders verlaufen. Sind die Flächenwinkel des Hauptpolyeders W_1, W_2, $W_3 \ldots$, die der Teilpolyeder w_1, w_2, $w_3 \ldots$, so ist im ersten Falle die Summe der einer Kante anliegenden Flächenwinkel $w_i + w_k + \ldots$ gleich einem Winkel W_l; im zweiten Falle gleich 2 R, im dritten Falle gleich 4 R.

So würde im Parallelogrammdodekaeder Fig. 9 die Summe aller Winkel w, welche an den Seitenkanten der 6 Teilpyramiden liegen, gleich der Summe der Winkel W des Dodekaeders sein; die Basiswinkel der Pyramiden aber würden sich mit den Spatwinkeln zu 12 mal 2 R ergänzen. Es ergibt sich also für die Winkelsumme der Teilpolyeder die Gleichung $\Sigma\, w = \Sigma\, W + 12 \,.\, 2\, R$.

In Fig. 10 möge das Hauptpolyeder E′HF′G—F″G″E″H″ mit P′ bezeichnet werden, seine Winkel mit W'_1, $W'_2 \ldots$, die Teilpolyeder mit P'_1, P'_2, $P'_3 \ldots$ und ihre Winkel mit w'_1, $w'_2 \ldots$ Hier liegen die Seitenkanten der Teilpyramiden zu je dreien aufeinander in den Linien ME, MF, MG, MH, ME′, MF′, MG′, MH′, und zwar frei innerhalb des Hauptpolyeders P′; sämtliche ihnen anliegende Pyramidenwinkel w geben also eine Summe von 8 mal 4 R. Viermal fallen je 2 Pyramidengrundkanten mit einer Spatkante zusammen in einer Seitenfläche des Hauptpolyeders (EH′, H′F, FG′, G′E) und liefern die Winkelsumme gleich 4 mal 2 R. Die übrigen Kanten der Teilkörper fallen in die Kanten von P′; die ihnen anliegenden Winkel w′ ergeben summiert die Winkel W′ des Hauptpolyeders. Doch ist folgendes zu beachten: Die Kante E″F′ wird durch E in 2 Teile geteilt; der ihr anliegende Winkel W'_1 kommt deshalb in der Summation zweimal vor, erstens gleich dem Spatwinkel an der Kante E″E, zweitens gleich der Summe zweier Pyramidenbasiswinkel an der Kante EF′. Entsprechendes gilt für die Winkel W'_2, W'_3, W'_4 an den Kanten H″G, F″E′, G″H. Deshalb ergibt die Zerlegung von P′ die Winkelgleichung

$$\Sigma\, w' = W'_1 + W'_2 + W'_3 + W'_4 + \Sigma\, W' + 8 \,.\, 4\, R + 4 \,.\, 2\, R.$$

Sehen wir von allen Besonderheiten der hier gewählten Polyeder ab, so wird in dem einfachsten vorliegenden Fall die Zerlegung von P und P′ in ihre Teilpolyeder zwei Gleichungen ergeben:

$$\text{I. } \Sigma\, w = m \,.\, 4\, R + n \,.\, 2\, R + n_1 \,.\, W_1 + n_2 \,.\, W_2 \ldots + n_k \,.\, W_k$$
$$\text{II. } \Sigma\, w' = m' \,.\, 4\, R + n' \,.\, 2\, R + n'_1 \,.\, W'_1 + n'_2 \,.\, W'_2 \ldots + n'_i \,.\, W'_i.$$

Sind nun die beiden Polyeder P und P′ zerlegungsgleich, so ist $w_\lambda = w'_\lambda$, $\Sigma\, w = \Sigma\, w'$. Mithin ergibt sich für die Flächenwinkel zweier zerlegungsgleichen Polyeder die Bedingung

$$m \,.\, 4\, R + n \,.\, 2\, R + n_1 \,.\, W_1 + n_2 \,.\, W_2 + \ldots = m' \,.\, 4\, R + n' \,.\, 2\, R + n'_1 \,.\, W_1 + n_2 \,.\, W'_2 + \ldots,$$

oder kürzer $\Sigma\, n \,.\, W + N \,.\, 2\, R = \Sigma\, n' \,.\, W' + N' \,.\, 2\, R$, (A)

worin sämtliche Koeffizienten positive ganze Zahlen sind.

2. Es ist der Fall zu berücksichtigen, daß die Kanten der Teilpolyeder nur streckenweise aufeinander fallen, also auf den einzelnen Kanten sogenannte „Zerlegungsstrecken“ entstehen.

Das Tetraeder ABCD (P) (Fig. 19) mit den Flächenwinkeln W_I, $W_{II} \ldots W_{VI}$ sei durch die Ebenen ABα und C$\alpha\beta$ in die Teiltetraeder ABDα, BC$\alpha\beta$, AC$\alpha\beta$ (P_1, P_2, P_3) mit den Flächenwinkeln w_1, $w_2 \ldots w_{18}$ geteilt. An den Kanten BC, AC, AD, BD ist $w_7 = W_{III}$, $w_{13} = W_{VI}$, $w_6 = W_{IV}$, $w_3 = W_V$. Die Kante CD zerfällt in die Zerlegungsstrecken Dα und Cα; für Dα ist $w_2 = W_{II}$, für Cα $w_8 + w_{14} = W_{II}$, also $w_2 + w_8 + w_{14} = 2 \,.\, W_{II}$.

AB hat die Zerlegungsstrecken Aβ und Bβ; für Aβ ist $w_1 + w_{17} = W_I$, für Bβ $w_1 + w_{11} = W_I$, zusammen $2\, w_1 + w_{11} + w_{17} = 2 \,.\, W_I$. Dazu kommen noch die Winkelgleichheiten an den Kanten Aα, Bα, $\beta\alpha$, βC, welche 4 mal 2 R ergeben. Deshalb ist im ganzen I. $w_1 + \Sigma\, w = W_I + W_{II} + \Sigma\, W + 4 \,.\, 2\, R$.

Wird aus denselben Teiltetraedern ein anderer Körper P′ = AαCBD′α′B′ (Fig. 20) gebildet, indem man das Teiltetraeder DAαB aus Fig. 19 mit dem Winkel DAα, welchen ich, um die Figur nicht zu sehr zu komplizieren, $= \angle$ BAC annehme, an $\angle$ BAC von außen anlegt, so ergeben sich an den Kanten III′ bis XII′ und ebenso an $\beta\alpha$ und βC leicht die Winkelgleichheiten, welche addiert liefern $\Sigma\, w' = W'_{III} + W'_{IV} + \ldots W'_{XII} + 1 \,.\, 2\, R$. Hierinnen ist zu beachten, daß auf der linken Seite die Winkel w'_{11}, w'_{13}, w'_{17} fehlen; um den konvexen Winkel W'_{XII} zu erhalten, ist $W'_{XII} = w_7' + 2R$ zu rechnen[1]). Die Zerlegungsstrecken CA, Aβ, Bβ liefern die Gleichungen $w'_{13} + w'_4 = W'_{II}$, $w'_{17} + w'_6 = W'_I$, $w'_{11} + w'_6 = W'_I$. Fügt man diese zur obigen Gleichung hinzu, so ergibt sich II: $w'_4 + 2 \,.\, w'_6 + \Sigma w' = W'_I + \Sigma W' + 1 \,.\, 2R$. Stellt man diese Gleichung mit der oben für P erhaltenen I: $w_1 + \Sigma w = W_I + W_{II} + \Sigma W + 4 \,.\, 2R$ zusammen, so zeigt sich, daß die w und w′, welche untereinander gleich sind, sich nicht eliminieren lassen, daß also in diesem Falle auf dem eingeschlagenen Wege eine Bedingung zwischen den W und W′ nicht zu erhalten ist.

2a. Diese Schwierigkeit läßt sich dadurch überwinden, daß man alle Teilpunkte, durch welche die Kante eines Teilpolyeders in P geteilt wird, auf die entsprechende Kante in P′ überträgt und umgekehrt. In unseren Figuren würde der Teilpunkt β von AB in P als β_1 auf AB′ in P′ zu übertragen sein; β und B von AD′ in P′ auf AD in P als β_2 und B_1, C von Aα′ in P′ auf Aα in P als C_1 und auch auf Aα in P′ als C_2. Dadurch entstehen auf den entsprechenden Kanten der Teilpolyeder in P und P′ identische Teilungen, sogenannte „Elementarstrecken“. Stellen wir für jede dieser Elementarstrecken die Winkelgleichheiten auf, so tritt zu der oben für P aufgestellten Gleichung I, weil AD jetzt in drei, Aα in zwei Elementarstrecken zerfallen ist, noch hinzu $2 w_6 + w_4 + w_{15} = 2 W_{IV} + 1 \,.\, 2R$; I geht also über in

$$\mathrm{I'}: w_1 + w_4 + 2 w_6 + w_{15} + \Sigma w = W_I + W_{II} + 2 \,.\, W_{IV} + \Sigma W + 5 \,.\, 2R.$$

Zu der für P′ gültigen Gleichung II tritt, weil jetzt Aα in zwei, AB′ in zwei Elementarstrecken zerfallen ist, hinzu $w_1 + w_{15} = W'_{VII} + W'_{IX}$; dadurch geht II über in

$$\mathrm{II'}: w'_1 + w'_4 + 2 w'_6 + w'_{15} + \Sigma w' = W'_I + W'_{VII} + W'_{IX} + \Sigma W' + 1 \,.\, 2R.$$

Nunmehr stimmen die linken Seiten der Gleichungen I′ und II′ überein, und durch Elimination der w und w′ ergibt sich wie im Fall 1 eine Gleichung von der Form A

$$\Sigma n \,.\, W + N \,.\, 2R = \Sigma n' \,.\, W' + N' \,.\, 2R$$

mit ganzzahligen positiven Koeffizienten.

3. In den allgemeinsten Fällen bedarf auch die in 2a angewendete Methode noch einer Erweiterung[2]).

Auf einer Kante $k_1 = AB$ (Fig. 21) eines Teilpolyeders P_1 in der Zusammensetzung P können streckenweise die Kanten anderer Teilpolyeder aufliegen, so daß auf AB die „Zerlegungsstrecken“ $z_1, z_2 \ldots$ entstehen (in der Figur $AC_1 = z_1$, $C_1C_2 = z_2$, $C_2B = z_3$). Jede dieser Zerlegungsstrecken liegt entweder auf einer Kante des Hauptpolyeders P oder auf einer Fläche von P bezw. der Teilpolyeder oder verläuft frei innerhalb von P. Die Summe der die Zerlegungsstrecke umgebenden Teil-Flächenwinkel ist im ersten Falle gleich einem Winkel W des Hauptpolyeders P, im zweiten Falle gleich 2 R, im dritten gleich 4 R.

Auch in P′ zerfallen die einzelnen Kanten der Teilpolyeder in Zerlegungsstrecken. Da aber in P′ die Teilpolyeder in anderer Weise aneinander gelagert sind wie in P, so sind auch die Zerlegungsstrecken andere, z. B. möge die Kante k'_1 des Teilpolyeders P'_1 in die Zerlegungsstrecken $z'_1, z'_2 \ldots$ zerfallen (in der Figur A′B′ in $A'D'_1 = z'_1$, $D'_1D'_2 = z'_2$, $D'_2D'_3 = z'_3$, $D'_3B' = z'_4$). Jeder von ihnen gehört als Summe der ihr anliegenden Teilwinkel entweder ein Winkel W′ des Hauptpolyeders oder eine der Größen 2 R oder 4 R zu.

Jede der Zerlegungsstrecken, z. B. z_1 auf k_1 von P_1, wird im allgemeinen nicht nur P_1 angehören, sondern auch den Kanten $k_2, k_3 \ldots$ der Teilpolyeder $P_2, P_3 \ldots$; die Zerlegungsstrecke z'_1 auf k'_1 aber wird in der Zerlegung P′ nicht nur dem Teilpolyeder P'_1, sondern auch den Kanten $k'_\alpha, k'_\beta \ldots$ der Teilpolyeder $P'_\alpha, P'_\beta \ldots$ angehören. Deshalb würden in die

[1]) Man könnte auch BC als Kante des Polyeders AB′D′α′BC mit dem zugehörigen Winkel $w'_1 = 2R$ unter die w′ einrechnen; dasselbe müßte dann auch in Fig. 19 geschehen.

[2]) Ich schließe mich im Folgenden an Kagan, Math. Annalen 57.

Summation die Teilwinkel der $P_1, P_2 \ldots$ in ganz anderer Weise eingehen als die der $P'_1, P'_2 \ldots$ Die w und w' würden sich auf diesem Wege nicht eliminieren lassen, wie sich schon in dem besonderen Falle 2 zeigte.

Trägt man jetzt, so wie es schon in 2a geschah, alle Teilungen, welche $k_1 = AB$ in P erfährt, auf die Kante $k'_1 = A'B'$ in P' auf und umgekehrt, so zerfallen AB und A'B' in identische „Elementarstrecken". (In der Figur $e_1 = e'_1, e_2 = e'_2 \ldots e_6 = e'_6$;

$$z_1 = e_1 + e_2 + e_3,\quad z_2 = e_4 + e_5,\quad z_3 = e_6,$$
$$z'_1 = e'_1,\ z'_2 = e'_2,\ z'_3 = e'_3 + e'_4,\ z'_4 = e'_5 + e'_6.)$$

Da eine Zerlegungsstrecke, z. B. z_1, außer P_1 noch den Polyedern $P_2, P_3 \ldots$ angehört, so wird sie auf diesen in andere Elementarstrecken zerfallen.

Ich ordne nun jeder Elementarstrecke $e_1, e_2 \ldots$ der Zerlegungsstrecke z_1, als zugehörig zur Kante k_1 des Teilpolyeders P_1, einen ganzzahligen positiven Zahlenfaktor $f_1, f_2 \ldots$ zu, ebenso den Elementarstrecken von z_1 als zugehörig zur Kante k_2 von P_2 die Zahlenfaktoren $g_1, g_2 \ldots$, für k_3 auf P_3 $h_1, h_2 \ldots$ usw., jedoch mit der Bedingung, daß

$$\alpha)\ f_1 + f_2 + \ldots = g_1 + g_2 + \ldots = h_1 + h_2 + \ldots = Z_1$$

sei; d. h. die Summen der Zahlenfaktoren für diejenigen Elementarstrecken, welche auf verschiedenen Kanten dieselbe Zerlegungsstrecke bilden, sollen einander gleich sein.

Führe ich nun in die Summation jeden an einer Elementarstrecke eines Polyeders liegenden Teilwinkel mit diesen Zahlenfaktoren versehen ein, z. B. w_1 mit den Faktoren $f_1, f_2 \ldots$, w_2 mit $g_1, g_2 \ldots$, w_3 mit $h_1, h_2 \ldots$, so erhalte ich für dieselbe Zerlegungsstrecke z_1, da sie den verschiedenen Teilpolyedern $P_1, P_2, P_3 \ldots$ angehört, die Teilwinkelsummen

$$f_1 w_1 + f_2 w_1 + f_3 w_1 + \ldots + g_1 w_2 + g_2 w_2 + g_3 w_2 + \ldots + h_1 w_3 + h_2 w_3 + h_3 w_3 + \ldots =$$
$$(f_1 + f_2 + f_3 + \ldots)\, w_1 + (g_1 + g_2 + g_3 + \ldots)\, w_2 + (h_1 + h_2 + h_3 + \ldots)\, w_3 + \ldots =$$
$$Z_1 . w_1 + Z_1 . w_2 + Z_1 . w_3 \ldots = Z_1 . (w_1 + w_2 + w_3 + \ldots)$$
$$= Z_1 . W_1 \ (\text{bezw.} = Z_1 . 2R \text{ oder } = Z_1 . 4R).$$

Vollzieht man in dieser Weise die Summation über alle Elementarstrecken mit den ihnen zugeordneten Teilwinkeln und Zahlenfaktoren, so erhält man diese Summe gleich einer Summe, in welche die den einzelnen Zerlegungsstrecken zugehörigen Hauptpolyederwinkel W (bezw. 2 R oder 4 R) mit ihren Zahlenfaktoren eingehen, also eine Gleichung von der Form

$$\text{I}: \Sigma\, mw = \Sigma\, n . W + N . 2R.$$

Ganz dieselbe Zuordnung von Zahlenfaktoren f', g', h' ... läßt sich auch zu den Elementarstrecken $e'_1, e'_2 \ldots$ der Zerlegungsstrecke z'_1 in P' vornehmen. Ist auch hier die Bedingung erfüllt, daß

$$\beta)\ f'_1 + f'_2 + \ldots = g'_1 + g'_2 + \ldots = h'_1 + h'_2 + \ldots = Z'_1,$$

so ergibt sich für die Zerlegung P' die Beziehung

$$\text{II}: \Sigma\, m'w' = \Sigma\, n' . W' + N' . 2R.$$

Kann man außerdem dafür sorgen, daß γ) die Zahlenfaktoren f, g, h in P gleich den zu denselben Elementarstrecken gehörigen f', g', h' in P' sind, so ist $\Sigma\, mw = \Sigma\, m'w'$, und aus I und II ergibt sich, jetzt ohne jede Einschränkung, für zwei zerlegungsgleiche Polyeder P und P' die Dehnsche Bedingung A:

$$\Sigma\, n . W + N . 2R = \Sigma\, n' . W' + N' . 2R.$$

3a. Die zum Beweise in 3 gemachten Voraussetzungen α), β), γ) sind nun in der Tat erfüllbar. Die Gleichungen α), β), einschließlich der Bedingung γ) sind lineare homogene Gleichungen mit ganzzahligen Koeffizienten. Die Zahl der Unbekannten ist gleich der Zahl sämtlicher auf den getrennt gedachten Teilpolyedern in P und P' liegenden Elementarstrecken; die Zahl der Gleichungen hängt von der Anzahl der Zerlegungsstrecken in P und P' und von der Anzahl der Polyeder ab, welchen jede Zerlegungsstrecke angehört.

Ob das vorliegende Gleichungssystem lösbar ist, würde im allgemeinen nicht zu entscheiden sein, wenn es nicht möglich wäre, ein sicher vorhandenes spezielles Lösungssystem anzugeben. Ordnet man nämlich jeder Elementarstrecke als Zahlenfaktor die Maßzahl ihrer Länge zu, so sind die Bedingungen α), β), γ) offenbar erfüllt. Die so aufgestellten Lösungen sind reelle positive, aber im allgemeinen nicht rationale Zahlen. Ist aber das System homogener linearer Gleichungen mit ganzen Koeffizienten durch reelle positive Zahlen lösbar, so ist es auch durch rationale und speziell durch ganze Zahlen lösbar. Denn die bekannte Lösungsmethode linearer homogener Gleichungen ergibt, wenn die Gleichungen überhaupt lösbar sind, die Unbekannten als proportioniert mit rationalen ganzen Funktionen der Koeffizienten. Mithin müssen sich aus jenen reellen positiven Lösungen positive ganzzahlige Lösungen durch Hinzufügung von geeigneten Proportionalitätsfaktoren herstellen lassen. Damit ist die Grundlage für den allgemeinen Beweis in 3 geschaffen.

4. Sei jetzt nicht **ein** Körper P zerlegungsgleich **einem** Körper P′, sondern das Aggregat $P + Q_1 + Q_2 + \ldots Q_k$ zerlegungsgleich mit $P' + Q'_1 + Q'_2 \ldots Q'_k$, so besteht für die Flächenwinkel beider Aggregate die **Dehn**sche Bedingung in der Form A′:

$$\Sigma\, n \,.\, W + \Sigma\, m \,.\, U + N \,.\, 2\, R = \Sigma\, n' \,.\, W' + \Sigma\, m' \,.\, U' + N' \,.\, 2\, R.$$

Sind nun die Körper $Q_1 \cong Q'_1$, $Q_2 \cong Q'_2 \ldots Q_k \cong Q'_k$, so sind erstens die in den Summen $\Sigma\, m \,.\, U$ und $\Sigma\, m' \,.\, U'$ vorkommenden Flächenwinkel $U_1 = U'_1$, $U_2 = U'_2 \ldots U_i = U'_i$. Die ganzzahligen Faktoren m und m′ aber können nach 3a proportioniert den Zerlegungsstrecken, also die Summe der zu derselben Kante gehörigen Faktoren proportioniert den Kantenlängen gewählt werden. Da nun diejenigen Kanten der Q und Q′, an welchen kongruente Winkel U und U′ liegen, der Annahme nach selbst kongruent sind, so können die entsprechenden m und m′ einander gleich gewählt werden. Aus A′ fallen also die Summen $\Sigma\, m \,.\, U$ und $\Sigma\, m' \,.\, U'$ heraus, und es bleibt für P und P′, welche der Definition nach **ergänzungsgleich** sind, eine Bedingung von derselben Form A bestehen wie für **zerlegungsgleiche**.

Sollen also zwei Körper P und P′ endlichgleich sein, so müssen sich positive ganze Zahlen n, n′, N, N′ von der Art auffinden lassen, daß

$$A\colon \Sigma\, n \,.\, W + N \,.\, 2\, R = \Sigma\, n' \,.\, W' + N' \,.\, 2\, R \text{ ist.}$$

5. Die Bedeutung der **Dehn**schen Bedingung A für endlichgleiche Polyeder wird sich am besten erkennen lassen, wenn wir das Verhalten ebener und sphärischer Polygone zum Vergleich heranziehen[1]).

a. Bestehen zwei ebene Polygone P und P′ aus den Teilpolygonen $P_1, P_2 \ldots P_k$ und den ihnen kongruenten $P'_1, P'_2 \ldots P'_k$, so werden (vergl. Fig. 4) die Ecken der Teilpolygone teils in die Ecken von P bezw. P′ fallen, teils auf die Seiten von P oder P′ oder von anderen Teilpolygonen, teils werden sie frei in P oder P′ liegen. Die Winkelsummen ergänzen sich demnach zu W oder W′ der Hauptpolygone, oder zu 2 R oder zu 4 R. Deshalb ist

$$\Sigma\, w = \Sigma\, W + N \,.\, 2\, R$$

$$\Sigma\, w' = \Sigma\, W' + N' \,.\, 2\, R, \text{ und daraus folgt}$$

$$B\colon \Sigma\, W + N \,.\, 2\, R = \Sigma\, w' + N' \,.\, 2\, R.$$

Dasselbe ergibt sich für Ergänzungsgleichheit.

Sind nun p und p′ die Eckenzahlen von P und P′, so ist

$$\Sigma\, W = (2\, p - 4)\, R, \quad \Sigma\, W' = (2\, p' - 4)\, R.$$

Die Bedingung B ist deshalb für ebene Polygone von beliebig vielen Ecken stets erfüllbar, also nicht mehr charakteristisch für gewisse Polygone, d. h. sie ist nichtssagend.

[1]) **Dehn**, Math. Annalen 55, S. 467.

b. Für die Winkelsummen zweier endlichgleichen sphärischen Polygone P und P′ ergibt sich dieselbe Bedingung B wie für ebene Polygone.

Haben die einzelnen Teilpolygone die Eckenzahlen

$$p_1 = p'_1,\ p_2 = p'_2 \ldots p_k = p'_k,$$

und sind

$$\varepsilon_1 = \varepsilon'_1,\ \varepsilon_2 = \varepsilon'_2 \ldots \varepsilon_k = \varepsilon'_k$$

die sphärischen Exzesse der einzelnen Polygone, durch welche ihre Flächengrößen bestimmt sind, so ist für ein einzelnes Polygon $\Sigma\, w = \varepsilon + 2\,p - 4$ (Benennung R), für sämtliche Polygone

$$\Sigma\, w = \varepsilon_1 + \varepsilon_2 + \ldots \varepsilon_k + 2\,(p_1 + p_2 + \ldots p_k) - 4\,.\,k,$$
$$\Sigma\, w' = \varepsilon'_1 + \varepsilon'_2 + \ldots \varepsilon'_k + 2\,(p'_1 + p'_2 + \ldots p'_k) - 4\,.\,k,$$

oder

$$\Sigma\, \varepsilon = \Sigma\, w - 2\,.\,\Sigma\, p + 4\,.\,k,$$
$$\Sigma\, \varepsilon' = \Sigma\, w' - 2\,.\,\Sigma\, p' + 4\,.\,k.$$

Der sphärische Exzeß eines Polygons ist aber gleich der Summe der sphärischen Exzesse seiner Teile: $\Sigma\, \varepsilon = E$, $\Sigma\, \varepsilon' = E'$. Mithin ergibt sich aus der Bedingung $\Sigma\, w = \Sigma\, w'$, welche die Bedingung B lieferte, für sphärische endlichgleiche Polygone die Bedingung

C: $E = E'$ als andere Form der Bedingung B.

Die Bedingung B ist deshalb für Endlichgleichheit zweier sphärischen Polygone nicht nur notwendige, sondern auch hinreichende Bedingung.

Die konstruktive Begründung der Flächengleichheit sphärischer Polygone durch Zerlegungsgleichheit hat Gerwien 1833 durchgeführt auf Grund eines zuerst von Steiner anschaulich bewiesenen Satzes [1]).

c. Die Dehnsche Bedingung A ist, wie bewiesen, notwendig für die Endlichgleichheit zweier Polyeder. Sie ist z. B. für das Hillsche Tetraeder mit den Winkeln 1 R, 1 R, $\frac{2}{3}$ R, $\frac{\alpha}{2}$, $\frac{\alpha}{2}$, $2\,R - \alpha$ und ein dreiseitiges Prisma (Winkelsumme = 8 R) tatsächlich erfüllbar. Aber sie ist nicht hinreichend, wie die Bedingung B für die Endlichgleichheit sphärischer Polygone. Denn die Winkelsumme eines Polyeders bestimmt bei gegebener Ecken- und Kantenzahl nicht die Volumengröße, wie der sphärische Exzeß eines sphärischen Polygons seine Fläche bestimmt. Auch lassen sich Beispiele von Polyedern angeben, für welche A erfüllbar ist, und welche doch nicht endlichgleich sind. Dies gilt z. B. für ein regelmäßiges Tetraeder, verglichen mit der Summe zweier regelmäßiger Tetraeder [2]).

Während B für ebene Polygone stets erfüllt, also nichtssagend ist, ist A für diejenigen Polyeder, deren Winkelsumme, unabhängig von ihrer Ecken- und Kantenzahl und ihren sonstigen Eigenschaften, ein ganzes Vielfaches von 2 R ist, nicht selbstverständlich erfüllt, aber stets erfüllbar, weil die Koeffizienten n und n′ sich in diesem Falle stets der Bedingung A entsprechend wählen lassen. Dies gilt für alle Prismen; denn ein p-seitiges Prisma hat an den Seitenkanten die Winkelsumme $= (2\,p - 4)$ R, an zwei parallelen Grundkanten 2 R, an allen Grundkanten zusammen 2 pR, also Gesamtwinkelsumme $4\,(p - 1)$ R.

Die Auffindung der nicht nur notwendigen, sondern auch hinreichenden Bedingung für Endlichgleichheit zweier Polyeder ist bisher nicht gelungen [3]).

---

[1]) Gerwien, Crelles Journal, Bd. 10. Steiner, ebenda Bd. 2 und Werke I, S. 106.

[2]) Dehn, Math. Annalen, Bd. 55, S. 476.

[3]) Die Königl. Gesellschaft der Wissenschaften zu Kopenhagen hat dafür ihre goldene Medaille ausgesetzt.

§ 4. Trigonometrische und algebraische Hülfssätze. Schluß.

1. Es ist $\cos(A+\varphi) = 2\cos\varphi \,.\, \cos A - \cos(A-\varphi)$. Setzt man hierin für A nacheinander die Werte a, $a+\varphi$, $a+2\varphi \ldots a+(n-2)\varphi$ ein, so erhält man

$$\begin{aligned}
\text{I.}\quad \cos(a+\varphi\ ) &= 2\cos\varphi \,.\, \cos a - \cos(a-\varphi)\\
\cos(a+2\varphi) &= 2\cos\varphi \,.\, \cos(a+\varphi) - \cos a\\
\cos(a+3\varphi) &= 2\cos\varphi \,.\, \cos(a+2\varphi) - \cos(a+\varphi)\\
\cos(a+4\varphi) &= 2\cos\varphi \,.\, \cos(a+3\varphi) - \cos(a+2\varphi)\\
&\ \vdots\\
\cos(a+(n-1)\varphi) &= 2\cos\varphi \,.\, \cos(a+(n-2)\varphi) - \cos(a+(n-3)\varphi).
\end{aligned}$$

Setzt man hierin $a = \varphi$ und ergänzt die Reihe durch die Anfangszeilen $\cos 0 = 1$, $\cos\varphi = \cos\varphi$, so ergibt sich

$$\begin{aligned}
\text{II.}\quad \cos 0 &= 1\\
\cos\varphi &= \cos\varphi\\
\cos 2\varphi &= 2\cos^2\varphi - 1\\
\cos 3\varphi &= 4\cos^3\varphi - 3\cos\varphi\\
\cos 4\varphi &= 8\cos^4\varphi - 8\cos^2\varphi + 1\\
\cos 5\varphi &= 16\cos^5\varphi - 20\cos^3\varphi + 5\cos\varphi\\
\cos 6\varphi &= 32\cos^6\varphi - 48\cos^4\varphi + 18\cos^2\varphi - 1\\
\cos 7\varphi &= 64\cos^7\varphi - 112\cos^5\varphi + 56\cos^3\varphi - 7\cos\varphi\\
\cos 8\varphi &= 128\cos^8\varphi - 256\cos^6\varphi + 160\cos^4\varphi - 32\cos^2\varphi + 1\\
&\ \vdots\\
\cos n\varphi &= \alpha_0 \,.\, \cos^n\varphi - \alpha_1 \,.\, \cos^{n-2\cdot 1}\varphi + \alpha_2 \,.\, \cos^{n-2\cdot 2}\varphi - \alpha_3 \,.\, \cos^{n-2\cdot 3}\varphi + \ldots (-1)^i \,.\, \alpha_i \cos^{n-2\cdot i}\varphi \ldots
\end{aligned}$$

Jede dieser Zeilen wird erhalten (von der dritten an), indem man die vorangehende mit $2\cos\varphi$ multipliziert und die dieser vorangehende davon subtrahiert.

Die Koeffizienten der einzelnen Kosinuspotenzen ergeben sich nach demselben Gesetz: Seien $p_1, p_2, p_3 \ldots p_k \ldots$ die Koeffizienten in der p^{ten} Vertikalreihe von II, $q_1, q_2, q_3 \ldots q_k \ldots$ die der folgenden Vertikalreihe, so ist, dem absoluten Werte nach,

$$\begin{aligned}
\text{III.}\quad q_k &= 2 \,.\, q_{k-1} + p_k\\
q_{k-1} &= 2 \,.\, q_{k-2} + p_{k-1}\\
q_{k-2} &= 2 \,.\, q_{k-3} + p_{k-2}\\
&\ \vdots\\
q_3 &= 2 \,.\, q_2 + p_3\\
q_2 &= 2 \,.\, q_1 + p_2\\
q_1 &= p_1
\end{aligned}$$

Hieraus folgt

$$\begin{aligned}
\text{IV.}\quad q_k &= 2 \,.\, q_{k-1} + p_k\\
2 \,.\, q_{k-1} &= 2^2 \,.\, q_{k-2} + 2\, p_{k-1}\\
2^2 \,.\, q_{k-2} &= 2^3 \,.\, q_{k-3} + 2^2 \,.\, p_{k-2}\\
&\ \vdots\\
2^{k-3} \,.\, q_3 &= 2^{k-2} \,.\, q_2 + 2^{k-3} \,.\, p_3\\
2^{k-2} \,.\, q_2 &= 2^{k-1} \,.\, q_1 + 2^{k-2} \,.\, p_2\\
2^{k-1} \,.\, q_1 &= 2^{k-1} \,.\, p_1,
\end{aligned}$$

und endlich durch Addition

$$\text{V.}\quad q_k = 2^{k-1} \,.\, p_1 + 2^{k-2} \,.\, p_2 + 2^{k-3} \,.\, p_3 + \ldots 2^2 \,.\, p_{k-2} + 2 \,.\, p_{k-1} + p_k.$$

Hierdurch ist es möglich, die Koeffizienten einer beliebigen Vertikalreihe in II zu berechnen, wenn die Koeffizienten der nächst vorangehenden Vertikalreihe bekannt sind.

Die Koeffizienten der ersten Vertikalreihe bilden, abgesehen vom ersten Gliede, eine geometrische Reihe: $a_1 = 1$, $a_2 = 1$, $a_3 = 2^1$, $a_4 = 2^2 \ldots a_k = 2^{k-2} \ldots$

Wegen V ist hiernach der k^{te} Koeffizient der zweiten Vertikalreihe

$$\begin{aligned} b_k &= 2^{k-1} \cdot 1 + 2^{k-2} \cdot 1 + 2^{k-3} \cdot 2^1 + 2^{k-4} \cdot 2^2 + \ldots 2^2 \cdot 2^{k-4} + 2^1 \cdot 2^{k-3} + 2^{k-2} \\ &= 2^{k-1} + 2^{k-2} \cdot (k-1) = 2^{k-2} \cdot (k+1); \end{aligned}$$

also die einzelnen Koeffizienten der 2. Vertikalreihe:

$$b_1 = 1,\ b_2 = 3,\ b_3 = 8,\ b_4 = 20 \ldots b_k = 2^{k-2} \cdot (k+1).$$

Der k^{te} Koeffizient der dritten Vertikalreihe ist nach V:

$$\begin{aligned} c_k &= 2^{k-1} \cdot 2^{-1} \cdot 2 + 2^{k-2} \cdot 2^0 \cdot 3 + 2^{k-3} \cdot 2^1 \cdot 4 + 2^{k-4} \cdot 2^2 \cdot 5 + \ldots 2^{k-2} \cdot (k+1) \\ &= 2^{(k-2)} (2 + 3 + 4 + \ldots (k+1)) = 2^{k-2} \cdot \left(\frac{(k+1)(k+2)}{1 \cdot 2} - 1\right) = 2^{k-2} \cdot \left(\binom{k+2}{2} - 1\right). \end{aligned}$$

$$c_1 = 1,\ c_2 = 5,\ c_3 = 18,\ c_4 = 56 \ldots,\ c_k = 2^{k-2} \cdot \left(\frac{(k+1)(k+2)}{1 \cdot 2} - 1\right).$$

Weiter ist (4. Reihe):

$$\begin{aligned} d_k &= 2^{k-1} \cdot 2^{-1} \cdot \left(\frac{2 \cdot 3}{1 \cdot 2} - 1\right) + 2^{k-2} \cdot 2^0 \cdot \left(\frac{3 \cdot 4}{1 \cdot 2} - 1\right) + 2^{k-3} \cdot 2^1 \cdot \left(\frac{4 \cdot 5}{1 \cdot 2} - 1\right) + \ldots 2^{k-2} \cdot \left(\frac{(k+1)(k+2)}{1 \cdot 2} - 1\right) \\ &= 2^{k-2} \left(\frac{2 \cdot 3}{1 \cdot 2} + \frac{3 \cdot 4}{1 \cdot 2} + \frac{4 \cdot 5}{1 \cdot 2} \ldots \frac{(k+1)(k+2)}{1 \cdot 2}\right) - 2^{k-2} \cdot (1 + 1 + 1 \ldots 1) \\ &= 2^{k-2} \left(\frac{(k+1) \cdot (k+2)(k+3)}{1 \cdot 2 \cdot 3} - 1\right) - 2^{k-2} \cdot k \\ &= 2^{k-2} \cdot \left(\frac{(k+1) \cdot (k+2)(k+3)}{1 \cdot 2 \cdot 3} - (k+1)\right) = 2^{k-2} \cdot \left(\binom{k+3}{3} - \binom{k+1}{1}\right). \end{aligned}$$

$$e_k = 2^{k-1} \cdot 2^{-1} \left(\frac{2 \cdot 3 \cdot 4}{1 \cdot 2 \cdot 3} - 2\right) + 2^{k-2} \cdot 2^0 \cdot \left(\frac{3 \cdot 4 \cdot 5}{1 \cdot 2 \cdot 3} - 3\right) + 2^{k-3} \cdot 2^1 \cdot \left(\frac{4 \cdot 5 \cdot 6}{1 \cdot 2 \cdot 3} - 4\right) + \ldots 2^{k-2} \left(\frac{(k+1)(k+2)(k+3)}{1 \cdot 2 \cdot 3} - (k+1)\right)$$

Fügt man hierzu zur Ergänzung der ersten Reihe $2^{k-2} \cdot \frac{1 \cdot 2 \cdot 3}{1 \cdot 2 \cdot 3} - 2^{k-2} \cdot 1$ (identisch $= 0$) hinzu, so ist

$$e_k = 2^{k-2} \cdot \left[\frac{(k+1)(k+2)(k+3)(k+4)}{1 \cdot 2 \cdot 3 \cdot 4} - \frac{(k+1) \cdot (k+2)}{1 \cdot 2}\right] = 2^{k-2} \cdot \left[\binom{k+4}{4} - \binom{k+2}{2}\right].$$

$$f_k = 2^{k-2} \cdot \left[\binom{k+5}{5} - \binom{k+3}{3}\right]$$

(k^{tes} Glied der 6. Reihe); und endlich allgemein das k^{te} Glied der q^{ten} Vertikalreihe:

$$q_k = 2^{k-2} \cdot \left[\binom{k+q-1}{q-1} - \binom{k+q-3}{q-3}\right].$$

Nunmehr lassen sich die Koeffizienten α der Entwicklung von $\cos n\varphi$ in II bestimmen; dabei ist zu beachten, daß

α_0	das $(n+1)^{te}$ Glied der 1. Vertikalreihe,		
α_1	„ $(n+1) - 2 \cdot 1 = (n-1)^{te}$ Glied der 2. Vertikalreihe,		
α_2	„ $(n+1) - 2 \cdot 2 = (n-3)^{te}$ „ „ 3.	„	
.	.		
.	.		
.	.		
α_i	„ $(n+1-2\,i)^{te}$	„ „ $(i+1)^{ten}$ „	ist.

Deshalb ist $\alpha_i = 2^{n-2i-1} \cdot \left[\binom{n-i+1}{i} - \binom{n-i-1}{i-2}\right]$. Dieser Größe, dem Koeffizienten von $\cos^{n-2i}\varphi$, läßt sich auch folgende Form geben:

$$\alpha_i = 2^{n-2i-1} \cdot \frac{(n-2i+2)(n-2i+3)\ldots(n-i-1)}{1.2.3\ldots(i-2)} \cdot \left[\frac{(n-i)(n-i+1)}{(i-1) \cdot i} - \frac{(i-1) \cdot i}{(i-1) \cdot i}\right]$$
$$= 2^{n-2i-1} \cdot \frac{(n-2i+2)(n-2i+3)\ldots(n-i-1)}{1.2.3\ldots(i-2)} \cdot \frac{(n-2i+1) \cdot n}{(i-1) \cdot i}$$
$$= 2^{n-2i-1} \cdot \frac{n}{i} \cdot \binom{n-i-1}{i-1}.$$

Hiernach ist

$$\text{VI. } \cos n\varphi = 2^{n-1} \cdot \cos^n\varphi - 2^{n-3} \cdot \frac{n}{1} \cdot \cos^{n-2}\varphi + 2^{n-5} \cdot \frac{n}{2} \cdot \binom{n-3}{1} \cdot \cos^{n-4}\varphi - 2^{n-7} \cdot \frac{n}{3} \cdot \binom{n-4}{2} \cdot \cos^{n-6}\varphi + \ldots{}^{1})$$

Ist n eine ungerade Zahl $= 2m + 1$, welcher Fall im Folgenden allein in Betracht kommt, so schließt die Reihe mit $(-1)^m \cdot n \cdot \cos\varphi$.

Multipliziert man diese Gleichung mit 2 und setzt $2 \cos\varphi = x$, so geht sie über in

$$\text{VII. } 2 \cos n\varphi = x^n - \frac{n}{1} \cdot x^{n-2} + \frac{n}{2} \cdot \binom{n-3}{1} \cdot x^{n-4} - \frac{n}{3} \cdot \binom{n-4}{2} \cdot x^{n-6} + \ldots (-1)^m \cdot nx.$$

Sämtliche Koeffizienten dieser Gleichung sind, da sie aus Binomialkoeffizienten durch Addition und Subtraktion hervorgegangen sind, ganze Zahlen.

Setzt man in VII $n\varphi = 2R$ oder gleich einem Vielfachen von 2 R, so wird $2 \cos n\varphi = \pm 2$, und die Gleichung VII geht über in eine Gleichung mit ganzen Koeffizienten von der Form

$$\text{VIII. } x^n - A_1 x^{n-2} + A_2 \cdot x^{n-4} \ldots \pm A_n \cdot x \pm 2 = 0.$$

Die Unbekannte x bedeutet in dieser Gleichung die doppelten Kosinus aller Winkel, welche n^{te} Teile von Vielfachen von 2 R sind (n ungerade).

2. Hat eine Gleichung

$$\text{IX. } x^n + a_1 x^{n-1} + a_2 x^{n-2} + \ldots a_n = 0$$

mit ganzen Koeffizienten rationale Wurzeln, so müssen dieselben ganzzahlig sein. Denn wäre eine Wurzel $\frac{p}{q}$ vorhanden, wo p und q teilerfremd seien, so wäre

$$p^n + a_1 p^{n-1} \cdot q + a_2 p^{n-2} \cdot q^2 + \ldots a_n \cdot q^n = 0,$$

also
$$p^n + q \cdot (a_1 p^{n-1} + a_2 p^{n-2} \cdot q + \ldots a_n \cdot q^{n-1}) = 0,$$

also müßte p^n gleich einem Vielfachen von q sein, was der Annahme nach nicht zutrifft.

Da ferner jede Wurzel der Gleichung IX als Faktor in a_n enthalten sein muß, so können, wenn a_n eine Primzahl ist, keine andern rationalen Wurzeln vorhanden sein als ± 1 und $\pm a_n$.

3. Nach 2. kann die Gleichung VIII in 1. keine andern rationalen Wurzeln haben als ± 1, ± 2.

$$x = \pm 1 \text{ liefert } \cos\varphi = \pm \tfrac{1}{2},\ \varphi = \frac{(3k \pm 1) \cdot 2R}{3},$$
$$x = \pm 2 \text{ liefert } \cos\varphi = \pm 1\ \ \varphi = k \cdot 2R.$$

Aus $\cos\frac{\varphi}{2} = \sqrt{\frac{1 + \cos\varphi}{2}}$ folgt, daß, wenn $\cos\varphi$ irrational ist, auch $\cos\frac{\varphi}{2}$ irrational sein muß. Berücksichtigt man dies, und außerdem, daß $\cos(2k + 1)R = 0$ ist, so ergibt sich: Die Kosinus aller Winkel, welche ganze (ungerade oder gerade) Bruchteile von Vielfachen von 2 R sind, also die Kosinus aller Winkel, welche kommensurabel mit R sind, sind irrational. Ausgenommen sind nur die Kosinus der Winkel, welche durch Dritteilung gewisser Vielfachen von 2 R entstehen, und der Winkel, welche selbst gerade oder ungerade Vielfache von R sind.

---

[1]) Euler, Introductio in analysin infinitorum. Lausannae 1748, S. 206. — Klügel, Mathem. Wörterbuch, Bd. 2. Leipzig 1805, S. 548.

4. Sind α, β, γ, δ die Flächenwinkel des regelmäßigen Tetraeders, Oktaeders, Ikosaeders, Dodekaeders, so ist $\cos\alpha = \frac{1}{3}$; $\cos\beta = -\frac{1}{3}$; $\cos\gamma = -\frac{\sqrt{5}}{3}$ und wegen $\cos 2\gamma = 2\cos^2\gamma - 1$ $\cos 2\gamma = \frac{1}{9}$; $\cos\delta = -\frac{1}{\sqrt{5}}$, $\cos 2\delta = -\frac{3}{5}$.

Da $\cos\alpha$, $\cos\beta$, $\cos 2\gamma$, $\cos 2\delta$ rationale Größen sind, können nach 3. die Winkel α, β, 2γ, 2δ, also auch die Winkel α, β, γ, δ, nicht rationale Teile irgend eines Vielfachen von 2 R oder kommensurabel mit R sein[1]). Folglich läßt sich durch Vervielfältigung der Winkel der regelmäßigen Körper, mit Ausnahme des Würfels, kein ganzes Vielfaches von 2 R herstellen. Es läßt sich also nicht durch Aneinanderlegung von regelmäßigen Körpern, mit Ausnahme des Würfels, weder von einer Art noch von mehreren Arten ein voller Winkelumlauf um eine Kante herstellen. Also ist der Würfel der einzige regelmäßige Körper, mit dem sich der Raum ohne Lücken ausfüllen läßt.

5. Die Dehnsche Bedingung A für Endlichgleichheit zweier Polyeder P und P′, $\Sigma n . W + N . 2R = \Sigma n' . W' + N' . 2R$, angewendet auf regelmäßige Körper (ausgenommen den Würfel) einerseits und einen Quader andrerseits, würde für den Quader bei jeder beliebigen Wahl der n' und N' ein ganzes Vielfaches von R ergeben; Σ nW aber wäre nach 4. für keinen der bezeichneten Körper kommensurabel mit R; deshalb können regelmäßige Polyeder und Quader, also auch regelmäßige Körper und Prismen nicht endlichgleich sein. Speziell lehrt die Unerfüllbarkeit der Gleichung A für regelmäßige Tetraeder und Prismen, daß es Pyramiden gibt, welche mit Prismen nicht endlichgleich sind, **daß also die geforderte Begründung der Gleichheit zwischen einem Prisma und einer Pyramide von gleicher Grundfläche und $\frac{1}{3}$ Höhe auf Endlichgleichheit im allgemeinen nicht möglich und auf besondere Fälle beschränkt ist.**

Was seit Eudoxus zur Herleitung dieses Satzes tatsächlich geschehen ist, nämlich die Zerlegung in unbegrenzt viele Teile und die Anwendung eines Stetigkeitsaxioms, ist hiermit als Notwendigkeit erwiesen. Zugleich ist der Grund aufgedeckt, auf dem die bisher unverständliche Verschiedenheit in der Behandlung desselben ebenen, sphärischen und räumlichen Problems ruht.

---

[1]) Diese Entwicklung nach Vahlen, Math. Ann. 56.

4. Sind α, β, γ, δ die Flächenwinkel des regelmäßigen Tetraeders, Oktaeders, Ikosaeders, Dodekaeders, so ist $\cos\alpha = \frac{1}{3}$; $\cos\beta = -\frac{1}{3}$; $\cos\gamma = -\frac{\sqrt{5}}{3}$ und wegen $\cos 2\gamma = 2\cos^2\gamma - 1$

$\cos 2\gamma = \frac{1}{9}$; $\cos\delta = -\frac{1}{\sqrt{5}}$, $\cos 2\delta = -\frac{3}{5}$.

Da nun $\cos\beta$, $\cos 2\gamma$, $\cos 2\delta$ *rationale Größen sind, können nach 3. die Winkel* β, 2γ, 2δ, *also auch die Winkel* α, β, γ, δ, *nicht rationale Teile irgend eines Vielfachen von 2 R oder kommensurabel mit R sein*[1]). Folglich läßt sich durch Vervielfältigung der Winkel der regelmäßigen Körper, mit Ausnahme des Würfels, kein ganzes Vielfaches von 2 R herstellen. Es läßt sich also nicht durch Aneinanderlegung von regelmäßigen Körpern, mit Ausnahme des Würfels, weder von einer Art noch von mehreren Arten ein voller Winkelraum um eine Kante herstellen. *Also ist der Würfel der einzige regelmäßige Körper, mit dem sich der Raum ohne Lücken ausfüllen läßt.*

5. Die *Dehnsche* Bedingung A für Endlichgleichheit zweier Polyeder P und P', $\Sigma n W + N \cdot 2R = \Sigma n' W' + N' \cdot 2R$, angewendet auf regelmäßige Körper (ausgenommen den Würfel) einerseits und einen Quader andererseits, würde für den Quader bei jeder beliebigen Wahl der n' und N' ein ganzes Vielfaches von R ergeben; $\Sigma n W$ aber wäre nach 4. für keinen der betrachteten Körper kommensurabel mit R; deshalb *können regelmäßige Polyeder und Quader, also auch regelmäßige Körper und Prismen nicht endlichgleich sein.* Ebenso lehrt die Unerfüllbarkeit der Gleichung A für regelmäßige Tetraeder und Prismen, daß es Pyramiden gibt, welche mit Prismen nicht endlichgleich sind, daß also **die geforderte Begründung der Gleichheit zwischen einem Prisma und einer Pyramide von gleicher Grundfläche und $\frac{1}{3}$ Höhe auf Endlichgleichheit im allgemeinen nicht möglich und auf besondere Fälle beschränkt ist.**

Was seit *Eukleides* zur Herleitung dieses Satzes *tatsächlich* geschehen ist, nämlich die Zerlegung in unbegrenzt viele Teile und die Anwendung eines Stetigkeitsaxioms, ist hiernach als *Notwendigkeit* erwiesen. Zugleich ist der Grund aufgedeckt, auf dem die bisher unerklärliche Verschiedenheit in der Behandlung desselben ebenen, sphärischen und räumlichen Problems ruht.

1) Diese Bemerkung nach Vahlen, Math. Ann. 54.

Fig. 1.

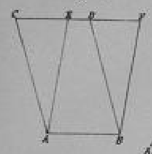


Fig. 2.

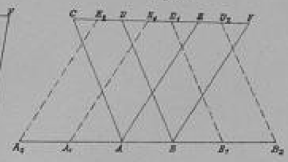


Fig. 3.

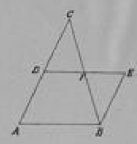


Fig. 4.

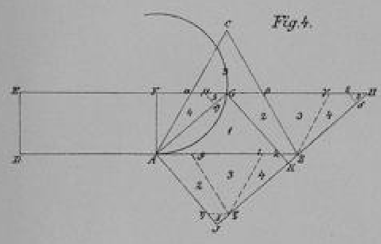


Fig. 5.

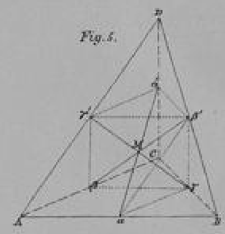


Fig. 6.

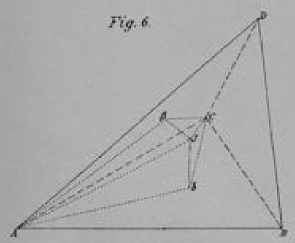
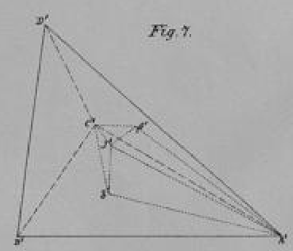


Fig. 7.



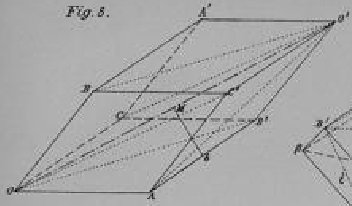


Fig. 8.

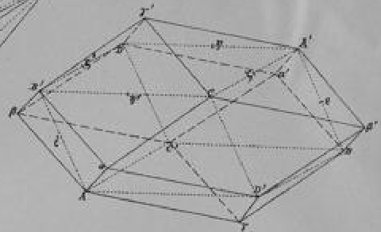


Fig. 9.

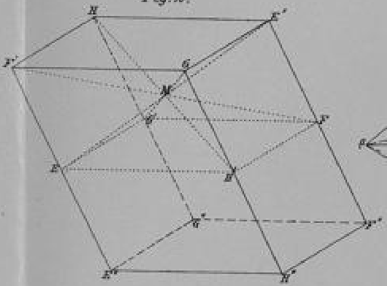


Fig. 10.

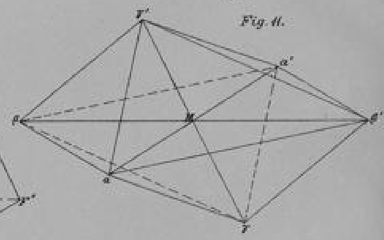


Fig. 11.

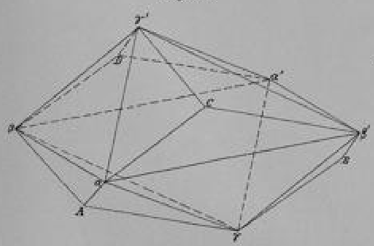


Fig. 12.

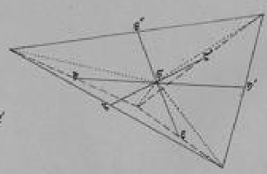


Fig. 13.

Fig. 14.

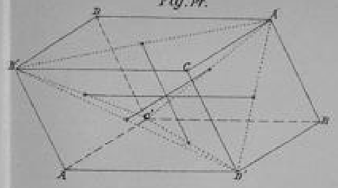


Fig. 15.

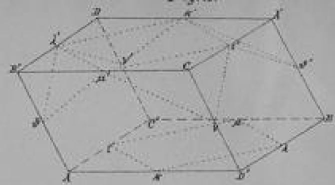


Fig. 16.

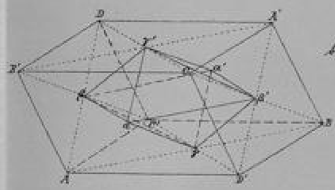


Fig. 17.

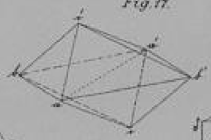


Fig. 18.

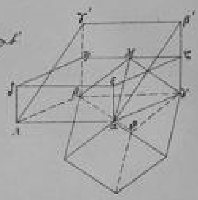


Fig. 19.

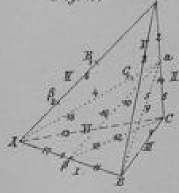


Fig. 20.

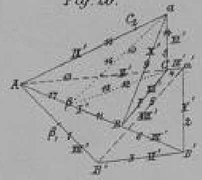


Fig. 21.