Ueber die mathematische Darstellung der Riemann'schen P-Function.

Das Problem, die Differentialgleichung der hypergeometrischen Reihe zu integriren, ist bekanntlich, nachdem bereits durch Gauss die Frage angeregt war, später von Kummer, Jacobi und Riemann auf verschiedene Weise behandelt worden. Kummer hat zuerst durch Transformation der Differentialgleichung die Aufgabe erschöpfend gelöst, namentlich auch in den complicirten Fällen, wenn zwischen den drei ersten Argumenten der Reihe $F(a, b, c, z)$ eine oder zwei Relationen bestehen. Jacobi hat gezeigt, wie durch Veränderung der Grenzen eines und desselben bestimmten Integrals alle Particularlösungen erhalten werden. Riemann endlich hat zur Lösung der Aufgabe die allgemeinen Principien seiner Theorie der Functionen complexer Variabeln benutzt: er definirt eine Function P dadurch, dass er ihren Zweigen die charakteristischen Eigenschaften der Particularlösungen der Differentialgleichung beilegt, und zeigt dann, dass die Differentialgleichung, welcher seine Function genügt, die der hypergeometrischen Reihe ist. Der Vorzug seiner Behandlungsweise besteht aber darin, dass, wenn für einen Zweig eine bestimmte analytische Form gefunden ist — und diese erhält Riemann durch Integration der Differentialgleichung der hypergeometrischen Reihe —, diejenige aller übrigen Zweige und ihre Transformationen sich ohne Rechnung aus der Definition der Function ablesen lassen.

In einer zu Mich. 1867 erschienenen Programmabhandlung des Fridericianums zu Königsberg hat Herr Sohnke für den besondern Fall, dass in der hypergeometrischen Reihe $F(a, b, c, z)$ eine der 4 Grössen a, b, $c - a$, $c - b$ eine ganze Zahl ist, die Particularlösungen in der Form von höheren Differentialquotienten und vielfachen Integralen dargestellt und durch einigermassen mühsame Rechnungen einen Zusammenhang zwischen diesen Lösungsformen und den hypergeometrischen Reihen ermittelt. Als ich bei der Lectüre dieser Abhandlung mir die Frage vorlegte, ob nicht auch die darin enthaltenen Lösungsformen sich aus der Darstellungsweise Riemann's ebenso einfach, wie die Transformationen der hypergeometrischen Reihe, ergeben sollten, fand ich, dass in den von Herrn Sohnke behandelten besonderen Fällen die Darstellung der Zweige der Riemann'schen P-Function ganz ohne Benutzung der Differentialgleichung direct aus den Eigenschaften der Function hergeleitet werden kann, und dass dies auch in dem allgemeinen Falle möglich ist, wenn man die von Liouville herrührende, für Potenzen geltende Definition der Differentialquotienten mit beliebigem Index zu Grunde legt. In dem ersten Abschnitte der folgenden Arbeit werde ich im Anschluss an die Untersuchungen Fuchs' (Crelle's Journ. Bd. 66 und 68) den Nachweis geben, dass, wenn man von einer Function ausgeht, die dieselben Eigenschaften wie die Riemann'sche P-Function, aber ϱ singuläre Punkte und m von einander unabhängige Zweige hat, und wenn man verlangt, dass sie bestimmt sein soll, nothwendigerweise entweder $m = 1$ und ϱ gleich einer beliebigen ganzen Zahl, oder $m = 2$ und $\varrho = 2$ gesetzt werden muss. Im zweiten Abschnitte werde ich die wesentlichsten Resultate der Untersuchungen Riemann's, die sich auf den Fall $m = 2$ und $\varrho = 2$ beziehen, so weit reproduciren, als es für das Verständniss der folgenden Abschnitte nöthig erscheint; in diesen soll dann die Function ohne Benutzung der Differentialgleichung mathematisch dargestellt werden.

1.

Eine Function w der Variabeln z sei durch folgende Eigenschaften definirt:

1) Sie soll mehrwerthig, jedoch im ganzen Gebiete der Variabeln mit Ausnahme der Punkte $a_1\, a_2 \cdots\cdot a_\varrho$, deren Anzahl eine endliche, und des Punktes ∞ eindeutig, endlich und continuirlich sein.

2) Die verschiedenen Werthe, welche die Function für irgend einen nicht singulären Punkt z_0 annimmt, und deren Anzahl im Allgemeinen unendlich gross ist, sollen derartig mit einander verbunden sein, dass immer zwischen $m + 1$ derselben $w\; w'\; w'' \cdots\cdot w^{(m)}$ eine lineare homogene Relation mit constanten Coefficienten besteht der Form

$$cw + c'\, w' + c''\, w'' + \cdots\cdot c^{(m)}\, w^{(m)} = 0\,.$$

3) Die Art der Unstetigkeit in den Punkten $a_1\, a_2 \cdots\cdot a_\varrho$ und ∞ wird auf folgende Weise bestimmt: Die Function lässt sich in die Formen setzen

$$\begin{array}{llll}
\alpha_{11}\, w_{11} & + \alpha_{12}\, w_{12} & + \cdots\cdot + \alpha_{1m}\, w_{1m}\,, \\
\alpha_{21}\, w_{21} & + \alpha_{22}\, w_{22} & + \cdots\cdot + \alpha_{2m}\, w_{2m}\,, \\
\cdot\;\cdot\;\cdot & \cdot\;\cdot\;\cdot & \cdot\;\cdot\;\cdot \\
\alpha_{\varrho 1}\, w_{\varrho 1} & + \alpha_{\varrho 2}\, w_{\varrho 2} & + \cdots\cdot + \alpha_{\varrho m}\, w_{\varrho m}\,, \\
\alpha_{\varrho+1,1} w_{\varrho+1,1} & + \alpha_{\varrho+1,2} w_{\varrho+1,2} & + \cdots\cdot + \alpha_{\varrho+1,m} w_{\varrho+1,m}\,,
\end{array}$$

worin die Coefficienten α constant sind. Irgend ein Element w_{ik} $(i = 1, 2 \cdots\cdot \varrho)$ hat die Eigenschaft, mit einer bestimmten Potenz $(z - a_i)^{-r_{ik}}$ multiplicirt, in der Umgebung des Punktes a_i eindeutig, endlich und continuirlich zu sein; und irgend ein Element $w_{\varrho+1,k}$ hat, mit $\left(\frac{1}{z}\right)^{-r_{\varrho+1,k}}$ multiplicirt, in der Umgebung von $z = \infty$ dieselbe Eigenschaft. — Die den verschiedenen Zweigen *einer* Horizontalreihe entsprechenden Exponenten sollen sich nicht durch ganze Zahlen von einander unterscheiden.

Wir beschäftigen uns zunächst mit der Frage, ob und unter welchen Bedingungen die Periodicität der Function bestimmt ist, wenn die singulären Punkte $a_1\, a_2 \cdots\cdot a_\varrho$ und die Exponenten r_{ik} als beliebig gegebene, von einander unabhängige Grössen betrachtet werden.

Nach Nr. 2 der Definition kann jeder Zweig der Function durch m andere von einander unabhängige Zweige linear homogen mit constanten Coefficienten ausgedrückt werden. Als solche von einander unabhängige Zweige können nun je m in einer Horizontalreihe der Nr. 3 befindliche Zweige angesehen werden, da sich die ihnen zugehörigen Exponenten nicht durch ganze Zahlen unterscheiden. Drücken wir durch diese alle übrigen aus, so erhalten wir folgende ϱ Gleichungssysteme:

$$(1)\qquad \begin{cases} w_{i1} = c^i_{11}\, w_{11} + c^i_{12}\, w_{12} + \cdots + c^i_{1m}\, w_{1m}, \\ w_{i2} = c^i_{21}\, w_{11} + c^i_{22}\, w_{12} + \cdots + c^i_{2m}\, w_{1m}, \\ \cdot\quad \cdot\quad \cdot\quad \cdot\quad \cdot\quad \cdot\quad \cdot\quad \cdot\quad \cdot\quad \cdot \\ w_{im} = c^i_{m1}\, w_{11} + c^i_{m2}\, w_{12} + \cdots + c^i_{mm}\, w_{1m} \end{cases}$$

für $i = 2, 3 \cdots\cdot \varrho + 1$. Von den $m^2\varrho$ Coefficienten c hängt die Periodicität der Function ab, d. h. sind m Zweige $w_{11}\, w_{12} \cdots\cdot w_{1m}$ bestimmt, so sind es durch die Coefficienten c auch alle übrigen. Bestehen nun, wie es allerdings der Fall ist, zwischen diesen noch Relationen, so wird sich als nothwendige Bedingung für die Bestimmtheit der Function ergeben, dass nach Berücksichtigung jener Relationen nur so viel Coefficienten c willkürlich bleiben, als die Function ihrer Definition nach willkürliche Constante enthalten muss. — Es kann noch bemerkt werden, dass keine der ϱ Determinanten der Systeme (1) verschwinden darf, da nach der Definition zwischen irgend m Zweigen $w_{i1}\, w_{i2} \cdots\cdot w_{im}$ eine lineare homogene Gleichung mit constanten Coefficienten nicht bestehen kann.

Zur Herleitung der erwähnten Relationen ist es nöthig, m von einander unabhängige Zweige, z. B. $w_{11}\, w_{12} \cdots\cdot w_{1m}$, von einem nicht singulären Punkte z_0 aus auf einem Wege, der durch keinen singulären Punkt hindurchführt, wieder zum Punkte z_0 zurück fortzusetzen. Durch einen solchen Weg werden nämlich gleichzeitig zwei Gebiete, das eine direct, das andere inverse, umkreist, und da beide Gebiete zusammen das ganze Gebiet der unendlichen Ebene bilden, so enthalten sie alle singulären Punkte, den Punkt ∞ eingerechnet. Die Umgehung eines Gebietes, das mehrere singulären Punkte enthält, kann aber zerlegt werden in successive Umgehung der einzelnen Punkte. Nun wissen wir aus der Definition, dass ein Zweig w_{1k} nach einem Umlaufe um den Punkt a_1 in $e^{2\pi i r_{1k}} w_{1k}$, nach einem Umlaufe um einen andern Punkt a_i aber in eine lineare homogene Function der Elemente $w_{11}\, w_{12} \cdots\cdot w_{1m}$ übergeht. Denn um letztere Umgehung zu bewerkstelligen, hat man zunächst vermittelst des dem Punkte a_i zugehörigen Systems (1) w_{1k} durch $w_{i1}\, w_{i2} \cdots\cdot w_{im}$ auszudrücken, dann diese Functionen resp. durch $e^{2\pi i r_{i1}} w_{i1},\ e^{2\pi i r_{i2}} w_{i2} \cdots\cdot e^{2\pi i r_{im}} w_{im}$ zu ersetzen und endlich wieder durch Anwendung desselben Systems (1) für $w_{i1}\, w_{i2} \cdots\cdot w_{im}$ die ersten m Zweige $w_{11}\, w_{12} \cdots\cdot w_{1m}$ einzuführen.

Bezeichnen wir nun diejenigen Werthe, in welche die Functionen $w_{11}\, w_{12} \cdots\cdot w_{1m}$ nach Zurücklegung des ganzen geschlossenen Weges von z_0 nach z_0 zurück übergehen, durch $w_{11}'\, w_{12}' \cdots\cdot w_{1m}'$, so erhalten wir durch die Begrenzung des einen Gebietes:

$$w_{11}' = A_{11}\, w_{11} + A_{12}\, w_{12} + \cdots + A_{1m}\, w_{1m}\,,$$
$$w_{12}' = A_{21}\, w_{11} + A_{22}\, w_{12} + \cdots + A_{2m}\, w_{1m}\,,$$
$$\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots$$
$$w_{1m}' = A_{m1} w_{11} + A_{m2} w_{12} + \cdots + A_{mm}\, w_{1m}\,,$$

durch die Begrenzung des andern Gebietes:

$$w_{11}' = B_{11}\, w_{11} + B_{12}\, w_{12} + \cdots + B_{1m}\, w_{1m}\,,$$
$$w_{12}' = B_{21}\, w_{11} + B_{22}\, w_{12} + \cdots + B_{2m}\, w_{1m}\,,$$
$$\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots$$
$$w_{1m}' = B_{m1} w_{11} + B_{m2} w_{12} + \cdots + B_{mm}\, w_{1m}\,,$$

in welchen Gleichungen die Grössen A und B nur von den Periodicitätscoefficienten c und den Exponenten r abhängen. Die Gleichsetzung der beiden für w_{1k}' gefundenen Ausdrücke liefert eine Gleichung, in welcher die Coefficienten der $w_{11}\, w_{12} \cdots w_{1m}$ für sich gleich Null sein müssen, weil sonst zwischen diesen m Zweigen eine lineare homogene Gleichung bestünde, was der Definition widerspräche. Man erhält daher m^2 Relationen

$$A_{ik} = B_{ik}\,.$$

Wir beschränken uns hier auf diesse allgemeine Darstellung, da es uns nur darauf ankommt, die Anzahl der Relationen festzusetzen.

Es muss jetzt bewiesen werden, dass es nicht mehr als diese m^2 Relationen giebt, dass also verschiedene Wege nicht zu verschiedenen Relationen führen. Wir beweisen diese Behauptung zunächst für zwei Wege, von denen der eine eine beliebige Anzahl singulärer Punkte, der zweite ausser diesen noch einen andern singulären Punkt umschliesst.

Irgend eine Gruppe der singulären Punkte $a_1\, a_2 \cdots a_\varrho$ sei R; die übrigen mit Einschluss von ∞, aber mit Ausschluss von a_i werden mit S bezeichnet. Ferner mögen durch eine directe Umgehung der Gruppe R die Zweige $w_{11}\, w_{12} \cdots w_{1m}$ übergehen in

$$(2)\quad \begin{cases} w_{11}^r = a_{11}\, w_{11} + a_{12}\, w_{12} + \cdots + a_{1m}\, w_{1m}\,, \\ w_{12}^r = a_{21}\, w_{11} + a_{22}\, w_{12} + \cdots + a_{2m}\, w_{1m}\,, \\ \cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots \\ w_{1m}^r = a_{m1} w_{11} + a_{m2} w_{12} + \cdots + a_{mm} w_{1m}\,, \end{cases}$$

durch eine inverse Umgehung der Gruppe S in

$$(3)\quad \begin{cases} w_{11}^s = b_{11}\, w_{11} + b_{12}\, w_{12} + \cdots + b_{1m}\, w_{1m}\,, \\ w_{12}^s = b_{21}\, w_{11} + b_{22}\, w_{12} + \cdots + b_{2m}\, w_{1m}\,, \\ \cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots \\ w_{1m}^s = b_{m1} w_{11} + b_{m2} w_{12} + \cdots + b_{mm} w_{1m}\,. \end{cases}$$

Wird nun a_i einmal zur Gruppe R hinzugenommen und direct umgangen, das andere Mal zur Gruppe S und inverse umgangen, so erhalten wir die Relationen aus zwei verschiedenen Wegen, von denen der erste die Gruppe R und a_i, der zweite nur die Gruppe R umschliesst.

1) Herleitung der Relationen durch Benutzung des Weges, der R und a_i direct, also S inverse umgiebt. Es müssen in (2) $w_{11}\, w_{12} \cdots w_{1m}$ durch $w_{i1}\, w_{i2} \cdots w_{im}$ ausgedrückt werden. Bezeichnen wir die Determinante

$$\begin{vmatrix} c^i_{11} & c^i_{12} & \cdots & c^i_{1m} \\ c^i_{21} & c^i_{22} & \cdots & c^i_{2m} \\ \cdot & \cdot & \cdots & \cdot \\ c^i_{m1} & c^i_{m2} & \cdots & c_{mm} \end{vmatrix}$$

durch Δ^i, lassen aber im Folgenden der Kürze wegen bei den Coefficienten c und Δ den Index i fort, so ergiebt sich aus dem dem Punkte a_i zugehörigen Gleichungssysteme (1)

$$(4)\quad \begin{cases} \Delta w_{11} = \dfrac{\partial \Delta}{\partial c_{11}} w_{i1} + \dfrac{\partial \Delta}{\partial c_{21}} w_{i2} + \cdots + \dfrac{\partial \Delta}{\partial c_{m1}} w_{im}, \\ \Delta w_{12} = \dfrac{\partial \Delta}{\partial c_{12}} w_{i1} + \dfrac{\partial \Delta}{\partial c_{22}} w_{i2} + \cdots + \dfrac{\partial \Delta}{\partial c_{m2}} w_{im}, \\ \cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots \\ \Delta w_{1m} = \dfrac{\partial \Delta}{\partial c_{1m}} w_{i1} + \dfrac{\partial \Delta}{\partial c_{2m}} w_{i2} + \cdots + \dfrac{\partial \Delta}{\partial c_{mm}} w_{im}. \end{cases}$$

Demnach gehen die Gleichungen (2) über in

$$(5)\quad \begin{cases} \Delta w^r_{11} = \sum\limits_1^m{}_k\, a_{1k} \dfrac{\partial \Delta}{\partial c_{1k}} w_{i1} + \sum\limits_1^m{}_k\, a_{1k} \dfrac{\partial \Delta}{\partial c_{2k}} w_{i2} + \cdots + \sum\limits_1^m{}_k\, a_{1k} \dfrac{\partial \Delta}{\partial c_{mk}} w_{im}, \\ \Delta w^r_{12} = \sum\limits_1^m{}_k\, a_{2k} \dfrac{\partial \Delta}{\partial c_{1k}} w_{i1} + \sum\limits_1^m{}_k\, a_{2k} \dfrac{\partial \Delta}{\partial c_{2k}} w_{i2} + \cdots + \sum\limits_1^m{}_k\, a_{2k} \dfrac{\partial \Delta}{\partial c_{mk}} w_{im}, \\ \cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots \\ \Delta w^r_{1m} = \sum\limits_1^m{}_k\, a_{mk} \dfrac{\partial \Delta}{\partial c_{1k}} w_{i1} + \sum\limits_1^m{}_k\, a_{mk} \dfrac{\partial \Delta}{\partial c_{2k}} w_{i2} + \cdots + \sum\limits_1^m{}_k\, a_{mk} \dfrac{\partial \Delta}{\partial c_{mk}} w_{im}. \end{cases}$$

Durch directe Umgehung von a_i erhalten nun $w_{i1}\, w_{i2} \cdots w_{im}$ resp. die Factoren $g_1\, g_2 \cdots g_m$, wenn wir $e^{2 r_{ik} \pi i}$ kurz durch g_k bezeichnen; und wird alsdann wieder $w_{11}\, w_{12} \cdots w_{1m}$ eingeführt, so ergiebt sich

$$\begin{aligned} (6)\quad \Delta (w^r_{11})' = & \Big(c_{11}\, g_1 \sum_1^m{}_k\, a_{1k} \frac{\partial \Delta}{\partial c_{1k}} + c_{21}\, g_2 \sum_1^m{}_k\, a_{1k} \frac{\partial \Delta}{\partial c_{2k}} + \cdots + c_{m1}\, g_m \sum_1^m{}_k\, a_{1k} \frac{\partial \Delta}{\partial c_{mk}}\Big) w_{11} \\ & + \Big(c_{12}\, g_1 \sum_1^m{}_k\, a_{1k} \frac{\partial \Delta}{\partial c_{1k}} + c_{22}\, g_2 \sum_1^m{}_k\, a_{1k} \frac{\partial \Delta}{\partial c_{2k}} + \cdots + c_{m2}\, g_m \sum_1^m{}_k\, a_{1k} \frac{\partial \Delta}{\partial c_{mk}}\Big) w_{12} \\ & + \cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots \\ & + \Big(c_{1m} g_1 \sum_1^m{}_k\, a_{1k} \frac{\partial \Delta}{\partial c_{1k}} + c_{2m} g_2 \sum_1^m{}_k\, a_{1k} \frac{\partial \Delta}{\partial c_{2k}} + \cdots + c_{mm} g_m \sum_1^m{}_k\, a_{1k} \frac{\partial \Delta}{\partial c_{mk}}\Big) w_{1m}, \end{aligned}$$

und entsprechende Ausdrücke ergeben sich für $\Delta (w^r_{12})' \cdots \Delta (w^r_{1m})'$.

Nach den vorhin entwickelten Principien ist aber identisch

$$(w_{11}^r)' = w_{11}^s\,, \quad (w_{12}^r)' = w_{12}^s \cdot\cdot\cdot\cdot\cdot (w_{1m}^r)' = w_{1m}^s\,.$$

Daher erhalten wir, wenn in (6) die Coefficienten noch etwas anders angeordnet werden, aus der Vergleichung von (3) und (6) die ersten m Relationen in folgender Form:

$$(7)\quad \begin{cases} a_{11} \sum\limits_1^m{}_\lambda\, g_\lambda c_{\lambda 1} \dfrac{\partial \Delta}{\partial c_{\lambda 1}} + a_{12} \sum\limits_1^m{}_\lambda\, g_\lambda c_{\lambda 1} \dfrac{\partial \Delta}{\partial c_{\lambda 2}} + \cdots\cdot + a_{1m} \sum\limits_1^m{}_\lambda\, g_\lambda c_{\lambda 1} \dfrac{\partial \Delta}{\partial c_{\lambda m}} = \Delta b_{11}\,, \\ a_{11} \sum\limits_1^m{}_\lambda\, g_\lambda c_{\lambda 2} \dfrac{\partial \Delta}{\partial c_{\lambda 1}} + a_{12} \sum\limits_1^m{}_\lambda\, g_\lambda c_{\lambda 2} \dfrac{\partial \Delta}{\partial c_{\lambda 2}} + \cdots\cdot + a_{1m} \sum\limits_1^m{}_\lambda\, g_\lambda c_{\lambda 2} \dfrac{\partial \Delta}{\partial c_{\lambda m}} = \Delta b_{12}\,, \\ \cdot\;\cdot\;\cdot\;\cdot\;\cdot\;\cdot\;\cdot\;\cdot\;\cdot\;\cdot\;\cdot\;\cdot\;\cdot\;\cdot\;\cdot\;\cdot\;\cdot\;\cdot\;\cdot\;\cdot \\ a_{11} \sum\limits_1^m{}_\lambda\, g_\lambda c_{\lambda m} \dfrac{\partial \Delta}{\partial c_{\lambda 1}} + a_{12} \sum\limits_1^m{}_\lambda\, g_\lambda c_{\lambda m} \dfrac{\partial \Delta}{\partial c_{\lambda 2}} + \cdots\cdot + a_{1m} \sum\limits_1^m{}_\lambda\, g_\lambda c_{\lambda m} \dfrac{\partial \Delta}{\partial c_{\lambda m}} = \Delta b_{1m}\,. \end{cases}$$

Für die übrigen Relationen sind statt des ersten Index 1 der Grössen a und b die Indices $2,\ 3 \cdot\cdot\cdot\cdot m$ zu setzen.

2) Herleitung der Relationen durch Benutzung des Weges, der die Gruppe R direct, also S und a_i inverse umschliesst. Es muss a_i zu S hinzugenommen werden. Die Gleichungen (4) bleiben dieselben. Statt der Gleichungen (5) ist ein System aufzustellen, in welchem b an die Stelle von a tritt. Durch inverse Umgehung von a_i erhalten dann $w_{i1}\, w_{i2} \cdot\cdot\cdot\cdot w_{im}$ resp. die Factoren $\frac{1}{g_1},\ \frac{1}{g_2} \cdot\cdot\cdot\cdot \frac{1}{g_m}$, und für (6) ergiebt sich ein anderes Gleichungssystem, wenn statt a überall b und statt $g_1,\ g_2 \cdot\cdot\cdot\cdot g_m$ resp. $\frac{1}{g_1},\ \frac{1}{g_2} \cdot\cdot\cdot\cdot \frac{1}{g_m}$ gesetzt wird. Demnach werden die ersten m Relationen des zweiten Weges:

$$(8)\quad \begin{cases} b_{11} \sum\limits_1^m{}_\lambda \dfrac{c_{\lambda 1}}{g_\lambda} \dfrac{\partial \Delta}{\partial c_{\lambda 1}} + b_{12} \sum\limits_1^m{}_\lambda \dfrac{c_{\lambda 1}}{g_\lambda} \dfrac{\partial \Delta}{\partial c_{\lambda 2}} + \cdots\cdot + b_{1m} \sum\limits_1^m{}_\lambda \dfrac{c_{\lambda 1}}{g_\lambda} \dfrac{\partial \Delta}{\partial c_{\lambda m}} = \Delta a_{11}\,, \\ b_{11} \sum\limits_1^m{}_\lambda \dfrac{c_{\lambda 2}}{g_\lambda} \dfrac{\partial \Delta}{\partial c_{\lambda 1}} + b_{12} \sum\limits_1^m{}_\lambda \dfrac{c_{\lambda 2}}{g_\lambda} \dfrac{\partial \Delta}{\partial c_{\lambda 2}} + \cdots\cdot + b_{1m} \sum\limits_1^m{}_\lambda \dfrac{c_{\lambda 2}}{g_\lambda} \dfrac{\partial \Delta}{\partial c_{\lambda m}} = \Delta a_{12}\,, \\ \cdot\;\cdot\;\cdot\;\cdot\;\cdot\;\cdot\;\cdot\;\cdot\;\cdot\;\cdot\;\cdot\;\cdot\;\cdot\;\cdot\;\cdot\;\cdot\;\cdot\;\cdot\;\cdot\;\cdot \\ b_{11} \sum\limits_1^m{}_\lambda \dfrac{c_{\lambda m}}{g_\lambda} \dfrac{\partial \Delta}{\partial c_{\lambda 1}} + b_{12} \sum\limits_1^m{}_\lambda \dfrac{c_{\lambda m}}{g_\lambda} \dfrac{\partial \Delta}{\partial c_{\lambda 2}} + \cdots\cdot + b_{1m} \sum\limits_1^m{}_\lambda \dfrac{c_{\lambda m}}{g_\lambda} \dfrac{\partial \Delta}{\partial c_{\lambda m}} = \Delta a_{1m}\,. \end{cases}$$

Es ist nachzuweisen, dass die Gleichungssysteme (7) und (8) identisch sind, dass also (8) die Auflösung des Systems (7) in Bezug auf die Grössen $a_{11}\, a_{12} \cdot\cdot\cdot\cdot a_{1m}$ darstellt. Hierzu benutzen wir folgenden Satz aus der Theorie der Determinanten:

„Wenn $\gamma_{\varkappa\lambda}$ den Coefficienten des Elementes $c_{\varkappa\lambda}$ in der Determinante

$$\Delta = \begin{vmatrix} c_{11} & c_{12} & \cdots & c_{1m} \\ c_{21} & c_{22} & \cdots & c_{2m} \\ \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \\ c_{m1} & c_{m2} & \cdots & c_{mm} \end{vmatrix}$$

bedeutet, und wenn $g_1 g_2 \cdots g_m$ irgend welche beliebigen Grössen sind, so hat die Summe

$$\sum_1^m {}_\lambda \left(\sum_1^m {}_\varkappa g_\varkappa c_{\varkappa\lambda} \gamma_{\varkappa\varrho} \sum_1^m {}_\varkappa \frac{1}{g_\varkappa} c_{\varkappa\varrho'} \gamma_{\varkappa\lambda} \right) \tag{9}$$

den Werth Δ^2 oder 0, je nachdem die Indices ϱ und ϱ' gleich oder ungleich sind."

Die Summe der Coefficienten von $g_s : g_s$ oder das von g freie Glied in (9) wird nämlich

$$\sum_1^m {}_\lambda \sum_1^m {}_\varkappa c_{\varkappa\lambda} \gamma_{\varkappa\varrho} c_{\varkappa\varrho'} \gamma_{\varkappa\lambda} = \sum_1^m {}_\varkappa \gamma_{\varkappa\varrho} c_{\varkappa\varrho'} \sum_1^m {}_\lambda c_{\varkappa\lambda} \gamma_{\varkappa\lambda} = \Delta \sum_1^m {}_\varkappa \gamma_{\varkappa\varrho} c_{\varkappa\varrho'} ,$$

also Δ^2 oder 0, je nachdem ϱ und ϱ' gleich oder verschieden sind. Der Coefficient von $g_r : g_s$ aber, wo r und s verschieden sind, wird

$$\sum_1^m {}_\lambda c_{r\lambda} \gamma_{r\varrho} c_{s\varrho'} \gamma_{s\lambda} = \gamma_{r\varrho} c_{s\varrho'} \sum_1^m {}_\lambda c_{r\lambda} \gamma_{s\lambda} ,$$

also gleich 0, da r und s ungleich sind, und damit ist der Determinantensatz bewiesen.

Multipliciren wir nun in dem Systeme (7)

die erste Gleichung mit $\sum_1^m {}_\lambda \frac{1}{g_\lambda} c_{\lambda 1} \frac{\partial \Delta}{\partial c_{\lambda 1}}$,

„ zweite „ „ $\sum_1^m {}_\lambda \frac{1}{g_\lambda} c_{\lambda 1} \frac{\partial \Delta}{\partial c_{\lambda 2}}$,

. . . .

„ m^{te} „ „ $\sum_1^m {}_\lambda \frac{1}{g_\lambda} c_{\lambda 1} \frac{\partial \Delta}{\partial c_{\lambda m}}$,

und addiren, so wird nach dem aufgestellten Satze der Coefficient von a_{11} gleich Δ^2, während die Coefficienten von $a_{12}\, a_{13} \cdots a_{1m}$ verschwinden. Man erhält also die erste der Gleichungen (8) und auf dieselbe Weise die übrigen. Die Systeme (7) und (8) sind folglich identisch; und beiläufig ergiebt sich für ein Gleichungssystem von der Form (7), dass man die Auflösung desselben in Bezug auf $a_{11}\, a_{12} \cdots a_{1m}$ dadurch erhält, dass man die Grössen a und b mit einander vertauscht und statt der Grössen g ihre reciproken Werthe einsetzt.

Es ist hiermit bewiesen, dass zwei Wege, von denen der erste eine beliebige Gruppe der singulären Punkte, der zweite ausser diesen noch einen andern singulären Punkt umschliesst, auf *dieselben* Relationen zwischen den Grössen c führen.

Da nun irgend zwei verschiedene Wege durch successives Hinzufügen *eines* singulären Punktes in einen und denselben Weg übergeführt werden können, so folgt allgemein, dass

„die Relationen zwischen den Coefficienten c stets dieselben sind, wie auch immer die Wege beschaffen seien, die zu ihrer Herleitung benutzt wurden."

Das unter (7) aufgestellte Gleichungssystem in Verbindung mit $m - 1$ anderen Systemen, die sich aus jenem ergeben, wenn man an Stelle des ersten Index 1 der Grössen a und b resp. die Indices $2, 3 \cdots m$ setzt, repräsentirt die gesuchten m^2

Relationen zwischen den $m^2 \varrho$ Coefficienten c. In jenen Gleichungen sind aber die Grössen a und b jedenfalls nur von denjenigen Coefficienten c abhängig, deren oberer Index von i verschieden ist. Demnach sind die Relationen homogen von der m^{ten} Ordnung in Bezug auf die c^i, und vermittelst derselben werden folglich nur $m^2 - 1$ Coefficienten c durch die übrigen ausgedrückt, so dass $m^2 \varrho - m^2 + 1$ unbestimmte Periodicitätscoefficienten übrig bleiben.

Ihrer Definition nach muss nun die Function w so viel willkürliche Constante enthalten, als Elemente w_{ik} vorhanden sind, weniger 1. Denn nur die Verhältnisse der Coefficienten der unter Nr. 3 der Definition aufgestellten $\varrho + 1$ Ausdrücke für w können in Betracht kommen, da alle dieselbe Function w darstellen, also alle durch den Coefficienten *eines* Zweiges dividirt werden können. Die Anzahl der Elemente w_{ik} ist $m(\varrho + 1)$; daher ist die Bedingung für die Bestimmtheit der Function w durch folgende Gleichung gegeben:

$$m^2 \varrho - m^2 + 1 = m(\varrho + 1) - 1\,,$$

oder

$$\varrho\, m(m-1) = (m-1)(m+2)\,. \tag{10}$$

Hieraus ergiebt sich, dass entweder

(I) $\qquad m = 1$ und $\varrho =$ einer positiven ganzen Zahl,

oder

(II) $\qquad m = 2$ und $\varrho = 2$

ist. Es müsste jetzt ferner bewiesen werden, dass die hier als nothwendig erkannte Bedingung (10) für die Bestimmtheit der Function gleichzeitig auch hinreichend ist, dass also in den beiden gefundenen Fällen die einzelnen Zweige w_{ik} bis auf willkürliche constante Factoren völlig bestimmt sind. Für den ersten einfacheren Fall erledigt sich die Sache durch die unmittelbar aus der Definition sich ergebende mathematische Darstellung der Function. Für den zweiten Fall ist dieser Beweis von Riemann in seiner Abhandlung über die Gauss'sche Function $F(\alpha, \beta, \gamma, x)$ gegeben worden (Berichte der Societät der Wissenschaften zu Göttingen, 1857). Auf anderem Wege ist Fuchs zu demselben Resultate gelangt in seiner ersten Abhandlung „Zur Theorie der linearen Differentialgleichungen mit veränderlichen Coefficienten" (Crelle's Journ. Bd. 66, pag. 121 sqq.), indem er die Form der Differentialgleichung bestimmt, welcher Functionen von den Eigenschaften der Zweige w_{ik} als Particularlösungen genügen sollen. Es zeigt sich dort, dass die Constanten der Differentialgleichung nur in den beiden Fällen (I) und (II) durch die Exponenten der Elemente w_{ik} vollständig bestimmt sind*).

---

*) In der Abhandlung Fuchs' (Crelle's Journ. Bd. 66, pag. 160) ist durch ein Versehen für $m = 1$ $\varrho = 3$ angenommen. Die dort entwickelte Gleichung $\varrho = 1 + \frac{2}{m}$ ergiebt sich indess aus der vorhergehenden erst durch Division mit dem Factor $m(m-1)$. Diese Division ist aber nicht gestattet, wenn $m = 1$ ist. Vielmehr lehrt dann die vorangehende Gleichung, dass die Coefficienten der Differentialgleichung erster Ordnung für jede beliebige endliche Anzahl singulärer Punkte durch die Exponenten der Elemente bestimmt sind.

Aus dem, was vorhin über die Relationen zwischen den Periodicitätscoefficienten c gesagt ist, wird noch, wenn als geschlossener Umlauf ein Weg benutzt wird, der einerseits keinen singulären Punkt umschliesst, als fernere nothwendige Bedingung für die Existenz der Function w leicht erkannt, dass die Summe aller Exponenten r_{ik} eine ganze Zahl sein muss. Fuchs weist in seiner Abhandlung nach, dass diese ganze Zahl gleich $(\varrho - 1)\,\frac{m\,(m-1)}{2}$, also im Falle (I) gleich 0, im Falle (II) gleich 1 ist, von welcher Eigenschaft wir im Folgenden Gebrauch machen werden.

Zum Schlusse dieses Abschnittes seien noch einige Worte über die mathematische Darstellung der Function im Falle (I) gestattet. „Eine Function w soll nur in den Punkten $a_1\, a_2 \cdots a_\varrho$ und ∞ unstetig sein, und zwar so, dass das Product $(z-a_i)^{-\alpha_i}w$ in der Umgebung von a_i, und das Product $\left(\frac{1}{z}\right)^{-\lambda} w$ in der Umgebung des Punktes $z = \infty$ eindeutig, endlich und continuirlich wird. Die Summe aller Exponenten $\Sigma\,\alpha_i + \lambda$ soll gleich 0 sein.“ Hierdurch ist die Form der Function bis auf einen constanten Factor völlig bestimmt. Denn das Product

$$w\,(z-a_1)^{-\alpha_1}\,(z-a_2)^{-\alpha_2}\cdots\cdots(z-a_\varrho)^{-\alpha_\varrho}$$

ist für jeden endlichen Werth von z nach der Definition stetig; für $z = \infty$ aber wird es unendlich von der Ordnung $-\Sigma\,\alpha_i - \lambda = 0$. Es ist daher überhaupt constant, und folglich

$$w = \text{Const.}\,(z-a_1)^{\alpha_1}\,(z-a_2)^{\alpha_2}\cdots\cdots(z-a_\varrho)^{\alpha_\varrho}. \tag{11}$$

Die mathematische Darstellung der Function ist also hier ohne Benutzung der Differentialgleichung geleistet.

Der erste Differentialquotient der Function hat dieselben singulären Punkte, wie w selbst; aber für a_i wird das Product $(z-a_i)^{-\alpha_i+1}\frac{dw}{dz}$, und für ∞ das Product $\left(\frac{1}{z}\right)^{-\lambda-1}\frac{dw}{dz}$ eindeutig, endlich und continuirlich; daher ist das Product

$$\frac{dw}{dz}\,(z-a_1)^{-\alpha_1+1}\,(z-a_2)^{-\alpha_2+1}\cdots\cdots(z-a_\varrho)^{-\alpha_\varrho+1}$$

für jeden endlichen Werth von z stetig und für $z = \infty$ unendlich von der Ordnung $-\Sigma\alpha_i - \lambda + \varrho - 1 = \varrho - 1$, also eine ganze rationale Function $(\varrho-1)^{\text{ten}}$ Grades. Bezeichnen wir diese durch $f_{\varrho-1}(z)$, so wird

$$\frac{dw}{dz} = (z-a_1)^{\alpha_1-1}\,(z-a_2)^{\alpha_2-1}\cdots\cdots(z-a_\varrho)^{\alpha_\varrho-1}f_{\varrho-1}(z)\,. \tag{12}$$

Wird noch

$$(z-a_1)\,(z-a_2)\cdots\cdots(z-a_\varrho) = \psi\,(z)$$

gesetzt, so erhält man aus (11) und (12)

$$\frac{dw}{dz} = \frac{f_{\varrho-1}(z)}{\psi(z)}\,w \tag{13}$$

und zwischen den Coefficienten der Function $f_{\varrho-1}(z)$ und den Exponenten α besteht die Beziehung

(14) $$\frac{f_{\varrho-1}(z)}{\psi(z)} = \sum_1^{\varrho}{}_i \frac{f_{\varrho-1}(a_i)}{\psi'(a_i)} \frac{1}{z-a_i} = \sum_1^{\varrho}{}_i \frac{\alpha_i}{z-a_i}\,.$$

Es ist zugleich ersichtlich, dass nun auch umgekehrt die Differentialgleichung (13), wenn die Coefficienten von $f_{\varrho-1}(z)$ durch (14) bestimmt werden, als Definitionsgleichung für die Function w betrachtet werden kann, und dass ihre Integration wieder die mathematische Darstellung von w in der Form (11) liefert.

Es ist noch leicht, die allgemeine Form der k^{ten} Ableitung der Function w festzusetzen. Das Product

$$\frac{d^k w}{dz^k}(z-a_1)^{-\alpha_1+k}\,(z-a_2)^{-\alpha_2+k}\cdot\cdot\cdot\cdot(z-a_\varrho)^{-\alpha_\varrho+k}$$

wird nämlich für jeden endlichen Werth eindeutig, endlich und continuirlich, für $z=\infty$ aber so unendlich wie $z^{k(\varrho-1)}$; daher erhält man

(15) $$\frac{d^k w}{dz^k} = (z-a_1)^{\alpha_1-k}\,(z-a_2)^{\alpha_2-k}\cdot\cdot\cdot\cdot(z-a_\varrho)^{\alpha_\varrho-k}\,f_{k(\varrho-1)}(z)\,,$$

wenn wieder $f_{k(\varrho-1)}(z)$ eine ganze rationale Function $k(\varrho-1)^{\text{ten}}$ Grades bezeichnet. Vergleichen wir die so gefundene Function (15) mit (11), so ergiebt sich als wesentlicher Unterschied, dass jene für jeden nicht singulären Punkt einen endlichen von Null verschiedenen Werth hat, während diese noch in $k(\varrho-1)$ anderen Punkten, nämlich den Wurzeln der Gleichung $f_{k(\varrho-1)}(z)=0$, den Werth Null annimmt. In der That ist aber auch die Summe aller Exponenten dieser neuen Function nicht mehr 0, sondern eine negative ganze Zahl $-k(\varrho-1)$. Verlangt man also von einer Function, dass ihre sämmtlichen Ableitungen für jeden nicht singulären Punkt einen von Null verschiedenen Werth haben sollen, oder, was nach dem Vorhergehenden dasselbe ist, dass für jede Ableitung ebenfalls die Summe der Exponenten gleich 0 wird, so kann dies nur dadurch erreicht werden, dass $f_{k(\varrho-1)}(z)$ eine Constante, also $\varrho=1$ wird. Wählen wir für diesen Fall als einzigen singulären Punkt $z=0$, so ergiebt sich als einfachste Gattung der hierhin gehörigen Functionen die Potenz mit beliebigem Exponenten z^α. Sie wird nur in den Punkten $z=0$ und $z=\infty$ unstetig und hat für jeden andern Punkt einen endlichen von Null verschiedenen Werth; und gleichzeitig ist sie die einzige Function, deren sämmtliche Ableitungen dieselbe Eigenschaft haben.

Des Folgenden wegen mag noch der Fall

$$\varrho=2\,,\quad a_1=0\,,\quad a_2=1$$

besonders hervorgehoben werden. Sind hier die den Punkten 0, 1 und ∞ zugehörigen Exponenten resp. α, β und λ, und besteht die Relation

$$\alpha+\beta+\lambda=0\,,$$

so hat man

(16) $$w = \text{Const.}\; z^\alpha\,(1-z)^\beta\,.$$

Diese Form der Darstellung gilt für die ganze unendliche Ebene. Braucht man unendliche Reihen, so ist für die Umgebung des Punktes $z=0$ nach steigenden Potenzen von z, für die Umgebung des Punktes $z=1$ nach steigenden Potenzen von $1-z$ und endlich für die Umgebung von $z=\infty$ nach steigenden Potenzen von $\frac{1}{z}$ zu entwickeln.

2.

Die mathematische Darstellung der Function für den Fall

$$m = 2 \text{ und } \varrho = 2$$

und namentlich ihre Transformationen sind, wie bereits erwähnt, von Riemann gegeben worden. Es erscheint zweckmässig, diejenigen Resultate seiner Untersuchungen, auf die wir uns im Folgenden vorzugsweise beziehen werden, hier zusammenzustellen. Auch werden wir uns im Allgemeinen der von Riemann eingeführten Bezeichnungsweise bedienen.

Sind a und b die beiden singulären Punkte, $\alpha\,\alpha'$, $\beta\,\beta'$, $\gamma\,\gamma'$ resp. die den Punkten a, b und ∞ zugehörigen Exponentenpaare, so werden die den einzelnen Exponenten entsprechenden Bestandtheile der Function resp. durch

$$P^{\alpha}\, P^{\alpha'}\, P^{\beta}\, P^{\beta'}\, P^{\gamma}\, P^{\gamma'},$$

und die Function selbst durch

$$P\begin{pmatrix} a & b & \infty & \\ \alpha & \beta & \gamma & z \\ \alpha' & \beta' & \gamma' & \end{pmatrix}$$

bezeichnet. In Bezug auf die Exponenten wird nach Abschnitt I. vorausgesetzt, dass die Summe

$$\alpha + \beta + \gamma + \alpha' + \beta' + \gamma' = 1$$

und dass die Differenzen $\alpha - \alpha'$, $\beta - \beta'$, $\gamma - \gamma'$ keine ganzen Zahlen seien.

1) Jeder Zweig P^{α}, $P^{\alpha'}$ etc. ist durch die der Function zuertheilten Eigenschaften bis auf einen willkürlichen constanten Factor vollkommen bestimmt.

2) Sind die die Periodicität bestimmenden Gleichungen

$$(1)\qquad \begin{cases} P^{\alpha} = \alpha_{\beta}\, P^{\beta} + \alpha_{\beta'}\, P^{\beta'} = \alpha_{\gamma}\, P^{\gamma} + \alpha_{\gamma'}\, P^{\gamma'} \\ P^{\alpha'} = \alpha'_{\beta}\, P^{\beta} + \alpha'_{\beta'}\, P^{\beta'} = \alpha'_{\gamma}\, P^{\gamma} + \alpha'_{\gamma'}\, P^{\gamma'}, \end{cases}$$

so bestehen zwischen den Coefficienten derselben die Relationen

$$(2)\qquad \begin{cases} \dfrac{\alpha_{\beta}}{\alpha'_{\beta}} = \dfrac{\alpha_{\gamma}}{\alpha'_{\gamma}}\, \dfrac{e^{\alpha\pi i}}{e^{\alpha'\pi i}}\, \dfrac{\sin(\alpha+\beta'+\gamma)\pi}{\sin(\alpha'+\beta'+\gamma)\pi} = \dfrac{\alpha_{\gamma'}}{\alpha'_{\gamma'}}\, \dfrac{e^{\alpha\pi i}}{e^{\alpha'\pi i}}\, \dfrac{\sin(\alpha+\beta'+\gamma')\pi}{\sin(\alpha'+\beta'+\gamma')\pi} \\[2ex] \dfrac{\alpha_{\beta'}}{\alpha'_{\beta'}} = \dfrac{\alpha_{\gamma}}{\alpha'_{\gamma}}\, \dfrac{e^{\alpha\pi i}}{e^{\alpha'\pi i}}\, \dfrac{\sin(\alpha+\beta+\gamma)\pi}{\sin(\alpha'+\beta+\gamma)\pi} = \dfrac{\alpha_{\gamma'}}{\alpha'_{\gamma'}}\, \dfrac{e^{\alpha\pi i}}{e^{\alpha'\pi i}}\, \dfrac{\sin(\alpha+\beta+\gamma')\pi}{\sin(\alpha'+\beta+\gamma')\pi}. \end{cases}$$

3) Drei Functionen P, P_1, P_2 mögen dieselben Unstetigkeitspunkte a, b, ∞, aber verschiedene Exponenten haben, nämlich resp.

$$\begin{matrix} \alpha & \beta & \gamma \\ \alpha' & \beta' & \gamma' \end{matrix} \qquad \begin{matrix} \alpha_1 & \beta_1 & \gamma_1 \\ \alpha_1' & \beta_1' & \gamma_1' \end{matrix} \qquad \begin{matrix} \alpha_2 & \beta_2 & \gamma_2 \\ \alpha_2' & \beta_2' & \gamma_2' ; \end{matrix}$$

jedoch sollen in je zweien von ihnen die correspondirenden Exponenten sich nur durch ganze Zahlen unterscheiden. Alsdann ist klar, dass die Relationen (2), mithin auch die Determinanten der Gleichungen (1), die wir mit A_β und A_γ bezeichnen wollen, für alle drei Functionen dieselben bleiben. Führen wir ferner die Bezeichnungen ein

$$(3) \qquad \begin{vmatrix} P_1^{\alpha_1} & P_2^{\alpha_2} \\ P_1^{\alpha_1'} & P_2^{\alpha_2'} \end{vmatrix} = \Pi^\alpha \qquad \begin{vmatrix} P_2^{\alpha_2} & P^{\alpha} \\ P_2^{\alpha_2'} & P^{\alpha'} \end{vmatrix} = \Pi_1^\alpha \qquad \begin{vmatrix} P^{\alpha} & P_1^{\alpha_1} \\ P^{\alpha'} & P_1^{\alpha_1'} \end{vmatrix} = \Pi_2^\alpha$$

und entsprechende für die Exponenten β und γ, so gelten offenbar die Identitäten

$$(4) \qquad \begin{cases} \Pi^\alpha = A_\beta \Pi^\beta = A_\gamma \Pi^\gamma \\ \Pi_1^\alpha = A_\beta \Pi_1^\beta = A_\gamma \Pi_1^\gamma \\ \Pi_2^\alpha = A_\beta \Pi_2^\beta = A_\gamma \Pi_2^\gamma \end{cases}$$

und zwischen den drei Functionen P, P_1, P_2 besteht die Gleichung

$$(5) \qquad P\Pi + P_1\Pi_1 + P_2\Pi_2 = 0$$

in welcher den Coefficienten Π nach Belieben einer der Indices α, β oder γ beigelegt werden kann. Es ist ersichtlich, dass diese Gleichung durch Multiplikation mit bestimmten Potenzen von $z - a$ und $z - b$ in eine andere transformirt werden kann, in welcher die Coefficienten von $P\,P_1\,P_2$ die Form $(z-a)^m\,(z-b)^n\,f(z)$ haben, worin m und n ganze positive Zahlen und $f(z)$ ganze rationale Function von z ist. Daher lassen sich sämmtliche P-Functionen, deren correspondirende Exponenten sich nur durch ganze Zahlen unterscheiden, durch zwei beliebige von ihnen linear mit rationalen Functionen von z als Coefficienten ausdrücken.

Bemerkung. Setzen wir die Darstellbarkeit der P-Function durch die hypergeometrische Reihe hier bereits als bekannt voraus, so enthält der vorige Satz eine Eigenschaft der hypergeometrischen Reihe, die sich durch folgende Formel wiedergeben lässt:

$$f(z)\,F(l, m, n, z) + f_1(z)\,F(l', m', n', z) + f_2(z)\,F(l'', m'', n'', z) = 0\,,$$

worin $l' - l$, $m' - m$, $n' - n$ und ebenso $l'' - l$, $m'' - m$, $n'' - n$ ganze Zahlen und $f(z)$, $f_1(z)$, $f_2(z)$ ganze rationale Functionen von z sind. Diese Eigenschaft war schon Gauss bekannt, wenn er es auch nicht ausdrücklich ausspricht, dass die Coefficienten ganze rationale Functionen werden (vgl. seine Abhandlung Disquisitiones generales circa seriem infinitam etc., sectio prima art. 7—11). Allein die Methode Gauss, die Coefficienten in einem gegebenen Falle vermittelst der relationes inter functiones contiguas zu bestimmen, macht noch sehr complicirte Rechnungen nöthig. Durch die Gleichung (5) ist nun der Grad jener Functionen f unmittelbar hinzuschreiben, und die Bestimmung ihrer Coefficienten kann, worauf wir hier nicht weiter eingehen, auf die Lösung eines Systems linearer Gleichungen zurückgeführt werden.

4) Werden im Vorhergehenden statt P_1 und P_2 die beiden ersten Differentialquotienten der Function P genommen, durch welche in der That die in der vorigen Nummer geforderte Exponentenbedingung erfüllt wird, so erhält man als Differential-

gleichung, der die Function P als allgemeine Lösung und die Zweige P^α, $P^{\alpha'}$ etc. als Particularlösungen genügen

$$(6)\qquad P\Pi + \frac{dP}{dz}\Pi_1 + \frac{d^2P}{dz^2}\Pi_2 = 0$$

wo in den Coefficienten Π ebenfalls statt P_1 und P_2 die Differentialquotienten zu nehmen sind. Nun ist, wenn man sich der in (3) gegebenen Bedeutung der Π erinnert,

$$(7)\qquad \Pi^\alpha (z-a)^{-\alpha-\alpha'+3}(z-b)^{-\beta-\beta'+3}$$

für $z=a$, $z=b$ und überhaupt für jeden endlichen Werth von z eindeutig, endlich und continuirlich; für $z=\infty$ aber ist $\Pi^\gamma z^{\gamma+\gamma'+3}$, daher nach (4) auch $\Pi^\alpha z^{\gamma+\gamma'+3}$ eindeutig, endlich und continuirlich; folglich das Product (7) eine ganze Function vom $(-\alpha-\alpha'-\beta-\beta'-\gamma-\gamma'+3)^{\text{ten}}$, oder, da die Summe der Exponenten 1 ist, vom 2^{ten} Grade. Ebenso folgt, dass das Product

$$\Pi_1^\alpha (z-a)^{-\alpha-\alpha'+2}(z-b)^{-\beta-\beta'+2}$$

eine ganze rationale Function vom 1^{ten} Grade von z, und endlich, dass das Product

$$\Pi_2^\alpha (z-a)^{-\alpha-\alpha'+1}(z-b)^{-\beta-\beta'+1}$$

eine Constante ist. Wird also die Gleichung (6) mit dem Factor $(z-a)^{-\alpha-\alpha'+1}(z-b)^{-\beta-\beta'+1}$ multiplicirt und durch die aus dem letzten Product sich ergebende Constante dividirt, so erscheint

$$(8)\qquad \frac{d^2P}{dz^2} + \frac{f_1(z)}{(z-a)(z-b)}\frac{dP}{dz} + \frac{f_2(z)}{(z-a)^2(z-b)^2}P = 0$$

wobei $f_1(z)$ und $f_2(z)$ ganze rationale Functionen vom 1^{ten} resp. 2^{ten} Grade von z sind. Die Bestimmung der Coefficienten derselben bietet keine Schwierigkeiten; man findet

$$(9)\qquad \begin{cases} \dfrac{f_1(z)}{(z-a)(z-b)} = \dfrac{1-\alpha-\alpha'}{z-a} + \dfrac{1-\beta-\beta'}{z-b} \\[2ex] \dfrac{f_2(z)}{(z-a)(z-b)} = \gamma\gamma' + \dfrac{(a-b)\alpha\alpha'}{z-a} + \dfrac{(b-a)\beta\beta'}{z-b}. \end{cases}$$

Demnach ist die Differentialgleichung, welcher die Function

$$P\begin{pmatrix} a & b & \infty & \\ \alpha & \beta & \gamma & z \\ \alpha' & \beta' & \gamma' & \end{pmatrix}$$

als allgemeine Lösung genügt,

$$(10)\qquad \frac{d^2P}{dz^2} + \left(\frac{1-\alpha-\alpha'}{z-a} + \frac{1-\beta-\beta'}{z-b}\right)\frac{dP}{dz} + \left(\gamma\gamma' + \frac{(a-b)\alpha\alpha'}{z-a} + \frac{(b-a)\beta\beta'}{z-b}\right)\frac{P}{(z-a)(z-b)} = 0$$

und die Zweige P^α, $P^{\alpha'}$ etc. sind Particularlösungen derselben.

5) Jede P-Function mit den singulären Punkten a und b kann durch die lineare Substitution

$$z' = \frac{a'(z-b) - b'(z-a)}{a-b}$$

in eine andere mit beliebig vorher gewählten singulären Punkten a' und b' transformirt werden, ohne dass die Exponenten sich ändern. Daher können, ohne der Allgemeinheit zu schaden, für a und b ganz bestimmte Zahlenwerthe — sie seien 0 und 1 — angenommen werden.

6) Aus der Definition der P-Function folgt ferner

$$(11)\qquad P\begin{pmatrix} a & b & \infty & \\ \alpha & \beta & \gamma & z \\ \alpha' & \beta' & \gamma' & \end{pmatrix} = (z-a)^{\alpha}(z-b)^{\beta}\, P\begin{pmatrix} a & b & \infty & \\ 0 & 0 & \gamma+\alpha+\beta & z \\ \alpha'-\alpha & \beta'-\beta & \gamma'+\alpha+\beta & \end{pmatrix}.$$

Daher können ebenfalls ohne Beeinträchtigung der Allgemeinheit zwei der Exponenten, z. B. α und β, gleich 0 gesetzt werden, so dass dann die Function, da zwischen $\gamma\alpha'\beta'\gamma'$ noch die Relation

$$\gamma+\alpha'+\beta'+\gamma'=1$$

besteht, ausser von z nur noch von 3 Parametern abhängt. Es genügt nun die Function

$$P\begin{pmatrix} 0 & 1 & \infty & \\ 0 & 0 & \gamma & z \\ & \alpha' & \beta' & \gamma' \end{pmatrix}$$

der Differentialgleichung

$$(12)\qquad \frac{d^2P}{dz^2}+\left(\frac{1-\alpha'}{z}+\frac{1-\beta'}{z-1}\right)\frac{dP}{dz}+\frac{\gamma\gamma'}{z(z-1)}\,P=0^{*)}$$

Durch Integration dieser Gleichung, die mit der Differentialgleichung der hypergeometrischen Reihe in ihrer bekannten Form übereinstimmt, wenn noch $\gamma=a$, $\gamma'=b$, $\alpha'=1-c$, demnach $\beta'=c-a-b$ gesetzt wird, kann die mathematische Darstellung der Zweige der Function P gewonnen werden. Diejenige Particularlösung der Differentialgleichung (12), welche in der Umgebung des Punktes $z=0$ eindeutig, endlich und continuirlich ist, stellt, da $\alpha=0$, den Zweig P^{α} dar. Daher ist, wenn wir in der Bezeichnung der P-Function die singulären Punkte $0\,1\,\infty$, sobald sie in dieser Reihenfolge zu nehmen sind, fortlassen und die hypergeometrische Reihe mit den Argumenten $abcz$ nach Gauss durch $F(a,b,c,z)$ bezeichnen,

$$(13)\qquad P^{\alpha}\begin{pmatrix} 0 & 0 & \gamma & \\ \alpha' & \beta' & \gamma' & z \end{pmatrix} = \text{Const.}\; F(\gamma,\gamma',1-\alpha',z).$$

---

*) Die unter 5) und 6) aufgeführten Eigenschaften zeigen zugleich, dass jede Differentialgleichung von der Form (8) durch die Substitutionen $z=a+(b-a)\,z'$ und $P=z'^{\,\alpha}(1-z')^{\beta}\,w$ in die einfachere Differentialgleichung (12) transformirt werden kann, wenn nur α und β so bestimmt werden, wie es die Gleichungen (9) verlangen, d. h. so, dass sie die Gleichungen

$$\alpha(\alpha-1)+\alpha\,\frac{f_1(a)}{a-b}+\frac{f_2(a)}{(a-b)^2}=0$$
$$\beta(\beta-1)+\beta\,\frac{f_1(b)}{b-a}+\frac{f_2(b)}{(b-a)^2}=0$$

befriedigen. Die letzteren ergeben sich übrigens auch, wie es sein muss, aus den Fuchs'schen Fundamentalgleichungen, und können drittens gefunden werden, wenn man die angegebenen Substitutionen unmittelbar in (8) einführt und die Forderung stellt, dass dadurch die Differentialgleichung (8) in (12) übergehen soll.

7) Die Darstellung der übrigen Zweige, so wie alle möglichen Transformationen derselben ergeben sich jetzt aus der Definition auf folgende Art: Die Function

$$P\begin{pmatrix} \alpha & \beta & \gamma & \\ \alpha' & \beta' & \gamma' & z \end{pmatrix}$$

ändert sich nicht, wenn zwei zusammengehörige Exponenten mit einander vertauscht werden. Dagegen führt eine Vertauschung zweier Exponentenpaare mit einander eine der 6 einfachen linearen Substitutionen für die letzte Veränderliche ein. Denn, ähnlich wie in Nr. 5, ist

$$P\begin{pmatrix} 0 & 1 & \infty & \\ \alpha & \beta & \gamma & z \\ \alpha' & \beta' & \gamma' & \end{pmatrix} = P\begin{pmatrix} a' & b' & c' & \\ \alpha & \beta & \gamma & z' \\ \alpha' & \beta' & \gamma' & \end{pmatrix}$$

wenn man für z' einen rationalen gebrochenen Ausdruck ersten Grades in z setzt, der für $z = 0$, $z = 1$, $z = \infty$ resp. die Werthe a', b', c' erhält. Nehmen wir nun statt $a'\, b'\, c'$ wiederum die Werthe $0\; 1\; \infty$, aber in irgend einer der 6 möglichen Reihenfolgen, oder, lassen wir diese ungeändert und vertauschen die Exponentenpaare auf die 6 möglichen verschiedenen Arten mit einander, was auf dasselbe hinaus kommt, da man berechtigt ist, die drei Verticalreihen einer P-Function (die singulären Punkte mitgerechnet) nach Belieben zu vertauschen, so erhalten wir die 6 einfachen linearen Substitutionen für z', nämlich

$$z \quad \frac{z-1}{z} \quad 1-z \quad \frac{z}{z-1} \quad \frac{1}{z} \quad \frac{1}{1-z}.$$

Hiernach können durch Vertauschung von je zwei Exponentenpaaren und von je zwei zusammengehörigen Exponenten jeder P-Function 48 verschiedene Formen gegeben werden. Bezeichnen ferner r und s zwei beliebige der 6 Exponenten $\alpha\beta\gamma\alpha'\beta'\gamma'$, so erhält man aus der mathematischen Darstellung eines Zweiges P^r die Darstellung eines anderen Zweiges P^s, indem man diejenigen der vorhin erwähnten Vertauschungen vornimmt, durch welche s an die Stelle von r tritt. Die verschiedenen Transformationen desselben Zweiges P^s aber ergeben sich durch alle Vertauschungen, die möglich sind, ohne dass das Exponentenpaar, zu dem s gehört, seine Stelle ändert. Es ist noch zu bemerken, dass die Vertauschung der beiden Exponenten der dritten Verticalreihe nach (13) auf dieselbe Darstellung führt, da die hypergeometrische Reihe $F(a, b, c, z)$ in Bezug auf die beiden Argumente a und b symmetrisch ist.

Zur Erläuterung soll die folgende Tabelle dienen, in welcher links die Vertauschungen der Exponenten auf die angedeutete Art ausgeführt sind, während auf der rechten Seite jeder Zweig vermittelst der Formel

$$P^\alpha\begin{pmatrix} \alpha & \beta & \gamma & \\ \alpha' & \beta' & \gamma' & z \end{pmatrix} = \text{Const. } z^\alpha (1-z)^\beta F(\alpha+\beta+\gamma,\, \alpha+\beta+\gamma',\, 1-\alpha'+\alpha,\, z)$$

mit Uebergehung der willkürlichen Constanten durch eine hypergeometrische Reihe dargestellt wird.

I (P^{α}).

$$P^{\alpha}\left(\begin{matrix}0 & 0 & \gamma\\ \alpha' & \beta' & \gamma'\end{matrix}\quad z\right) = F(\gamma, \gamma', 1-\alpha', z)$$

$$P^{\alpha}\left(\begin{matrix}0 & \beta' & \gamma\\ \alpha' & 0 & \gamma'\end{matrix}\quad z\right) = (1-z)^{\beta'} F(\beta'+\gamma, \beta'+\gamma', 1-\alpha', z)$$

$$P^{\alpha}\left(\begin{matrix}0 & \gamma & 0\\ \alpha' & \gamma' & \beta'\end{matrix}\quad \frac{z}{z-1}\right) = (1-z)^{-\gamma} F\left(\gamma, \beta'+\gamma, 1-\alpha', \frac{z}{z-1}\right)$$

$$P^{\alpha}\left(\begin{matrix}0 & \gamma' & 0\\ \alpha' & \gamma & \beta'\end{matrix}\quad \frac{z}{z-1}\right) = (1-z)^{-\gamma'} F\left(\gamma', \beta'+\gamma', 1-\alpha', \frac{z}{z-1}\right)$$

II ($P^{\alpha'}$).

$$P^{\alpha'}\left(\begin{matrix}\alpha' & 0 & \gamma\\ 0 & \beta' & \gamma'\end{matrix}\quad z\right) = z^{\alpha'} F(\alpha'+\gamma, \alpha'+\gamma', 1+\alpha', z)$$

$$P^{\alpha'}\left(\begin{matrix}\alpha' & \beta' & \gamma\\ 0 & 0 & \gamma'\end{matrix}\quad z\right) = z^{\alpha'}(1-z)^{\beta'} F(\alpha'+\beta'+\gamma, \alpha'+\beta'+\gamma', 1+\alpha', z)$$

$$P^{\alpha'}\left(\begin{matrix}\alpha' & \gamma & 0\\ 0 & \gamma' & \beta'\end{matrix}\quad \frac{z}{z-1}\right) = z^{\alpha'}(1-z)^{-\alpha'-\gamma} F\left(\alpha'+\gamma, \alpha'+\beta'+\gamma, 1+\alpha', \frac{z}{z-1}\right)$$

$$P^{\alpha'}\left(\begin{matrix}\alpha' & \gamma' & 0\\ 0 & \gamma & \beta'\end{matrix}\quad \frac{z}{z-1}\right) = z^{\alpha'}(1-z)^{-\alpha'-\gamma'} F\left(\alpha'+\gamma', \alpha'+\beta'+\gamma', 1+\alpha', \frac{z}{z-1}\right)$$

III (P^{β}).

$$P^{\beta}\left(\begin{matrix}0 & 0 & \gamma\\ \beta' & \alpha' & \gamma'\end{matrix}\quad 1-z\right) = F(\gamma, \gamma', 1-\beta', 1-z)$$

$$P^{\beta}\left(\begin{matrix}0 & \alpha' & \gamma\\ \beta' & 0 & \gamma'\end{matrix}\quad 1-z\right) = z^{\alpha'} F(\alpha'+\gamma, \alpha'+\gamma', 1-\beta', 1-z)$$

$$P^{\beta}\left(\begin{matrix}0 & \gamma & 0\\ \beta' & \gamma' & \alpha'\end{matrix}\quad \frac{z-1}{z}\right) = z^{-\gamma} F\left(\gamma, \alpha'+\gamma, 1-\beta', \frac{z-1}{z}\right)$$

$$P^{\beta}\left(\begin{matrix}0 & \gamma' & 0\\ \beta' & \gamma & \alpha'\end{matrix}\quad \frac{z-1}{z}\right) = z^{-\gamma'} F\left(\gamma', \alpha'+\gamma', 1-\beta', \frac{z-1}{z}\right)$$

IV ($P^{\beta'}$).

$$P^{\beta'}\left(\begin{matrix}\beta' & 0 & \gamma\\ 0 & \alpha' & \gamma'\end{matrix}\quad 1-z\right) = (1-z)^{\beta'} F(\beta'+\gamma, \beta'+\gamma', 1+\beta', 1-z)$$

$$P^{\beta'}\left(\begin{matrix}\beta' & \alpha' & \gamma\\ 0 & 0 & \gamma'\end{matrix}\quad 1-z\right) = z^{\alpha'}(1-z)^{\beta'} F(\alpha'+\beta'+\gamma, \alpha'+\beta'+\gamma', 1+\beta', 1-z)$$

$$P^{\beta'}\left(\begin{matrix}\beta' & \gamma & 0\\ 0 & \gamma' & \alpha'\end{matrix}\quad \frac{z-1}{z}\right) = z^{-\beta'-\gamma}(1-z)^{\beta'} F\left(\beta'+\gamma, \alpha'+\beta'+\gamma, 1+\beta', \frac{z-1}{z}\right)$$

$$P^{\beta'}\left(\begin{matrix}\beta' & \gamma' & 0\\ 0 & \gamma & \alpha'\end{matrix}\quad \frac{z-1}{z}\right) = z^{-\beta'-\gamma'}(1-z)^{\beta'} F\left(\beta'+\gamma', \alpha'+\beta'+\gamma', 1+\beta', \frac{z-1}{z}\right)$$

V (P^γ).

$$P^\gamma\begin{pmatrix}\gamma & 0 & 0 & \frac{1}{z}\\ \gamma' & \beta' & \alpha' & \end{pmatrix} = z^{-\gamma}\,F\left(\gamma,\alpha'+\gamma,1+\gamma-\gamma',\tfrac{1}{z}\right)$$

$$P^\gamma\begin{pmatrix}\gamma & \beta' & 0 & \frac{1}{z}\\ \gamma' & 0 & \alpha' & \end{pmatrix} = z^{-\beta'-\gamma}(1-z)^{\beta'}\,F\left(\beta'+\gamma,\alpha'+\beta'+\gamma,1+\gamma-\gamma',\tfrac{1}{z}\right)$$

$$P^\gamma\begin{pmatrix}\gamma & 0 & 0 & \frac{1}{1-z}\\ \gamma' & \alpha' & \beta' & \end{pmatrix} = (1-z)^{-\gamma}\,F\left(\gamma,\beta'+\gamma,1+\gamma-\gamma',\tfrac{1}{1-z}\right)$$

$$P^\gamma\begin{pmatrix}\gamma & \alpha' & 0 & \frac{1}{1-z}\\ \gamma' & 0 & \beta' & \end{pmatrix} = z^{\alpha'}(1-z)^{-\alpha'-\gamma}\,F\left(\alpha'+\gamma,\alpha'+\beta'+\gamma,1+\gamma-\gamma',\tfrac{1}{1-z}\right)$$

VI $(P^{\gamma'})$.

$$P^{\gamma'}\begin{pmatrix}\gamma' & 0 & 0 & \frac{1}{z}\\ \gamma & \beta' & \alpha' & \end{pmatrix} = z^{-\gamma'}\,F\left(\gamma',\alpha'+\gamma',1+\gamma'-\gamma,\tfrac{1}{z}\right)$$

$$P^{\gamma'}\begin{pmatrix}\gamma' & \beta' & 0 & \frac{1}{z}\\ \gamma & 0 & \alpha' & \end{pmatrix} = z^{-\beta'-\gamma'}(1-z)^{\beta'}\,F\left(\beta'+\gamma',\alpha'+\beta'+\gamma',1+\gamma'-\gamma,\tfrac{1}{z}\right)$$

$$P^{\gamma'}\begin{pmatrix}\gamma' & 0 & 0 & \frac{1}{1-z}\\ \gamma & \alpha' & \beta' & \end{pmatrix} = (1-z)^{-\gamma'}\,F\left(\gamma',\beta'+\gamma',1+\gamma'-\gamma,\tfrac{1}{1-z}\right)$$

$$P^{\gamma'}\begin{pmatrix}\gamma' & \alpha' & 0 & \frac{1}{1-z}\\ \gamma & 0 & \beta' & \end{pmatrix} = z^{\alpha'}(1-z)^{-\alpha'-\gamma'}\,F\left(\alpha'+\gamma',\alpha'+\beta'+\gamma',1+\gamma'-\gamma,\tfrac{1}{1-z}\right).$$

Wird in den 24 hypergeometrischen Reihen der rechten Seite überall α statt γ, β statt γ', $1-\gamma$ statt α' und $\gamma-\alpha-\beta$ statt β' gesetzt, so ergeben sich die 24 Particularlösungen der Differentialgleichung der hypergeometrischen Reihe, wie sie zuerst von Kummer (Crelle Journ. Bd. 15) hergeleitet sind.

Riemann erhält, wie aus dem Mitgetheilten ersichtlich, die mathematische Darstellung für den ersten Zweig durch Integration der Differentialgleichung, welcher die Function P genügt; die Darstellungen der übrigen Zweige und ihre Transformationen ergeben sich dann aber ohne Rechnung aus der Definition der Function. Es ist der Zweck des Folgenden, zu zeigen, wie auch die Darstellung jenes ersten Zweiges sich ohne jede Benutzung der Differentialgleichung unmittelbar aus den Eigenschaften der Function herleiten lässt. Ich werde dabei von den in der Einleitung erwähnten besonderen Fällen ausgehen.

3.

Wir knüpfen die folgenden Betrachtungen zunächst an die Gleichungen (1) und (2) der vorigen Nummer, welche lauteten

$$(1)\quad \begin{cases} P^\alpha = \alpha_\beta\,P^\beta + \alpha_{\beta'}\,P^{\beta'} = \alpha_\gamma\,P^\gamma + \alpha_{\gamma'}\,P^{\gamma'}\\ P^{\alpha'} = \alpha'_\beta\,P^\beta + \alpha'_{\beta'}\,P^{\beta'} = \alpha'_\gamma\,P^\gamma + \alpha'_{\gamma'}\,P^{\gamma'}\end{cases}$$

und

$$(2)\qquad \begin{cases} \dfrac{\alpha_\beta}{\alpha'_\beta} = \dfrac{\alpha_\gamma}{\alpha'_\gamma}\,\dfrac{e^{\alpha\pi i}}{e^{\alpha'\pi i}}\,\dfrac{\sin(\alpha+\beta'+\gamma)\pi}{\sin(\alpha'+\beta'+\gamma)\pi} = \dfrac{\alpha_{\gamma'}}{\alpha'_{\gamma'}}\,\dfrac{e^{\alpha\pi i}}{e^{\alpha'\pi i}}\,\dfrac{\sin(\alpha+\beta'+\gamma')\pi}{\sin(\alpha'+\beta'+\gamma')\pi} \\[2ex] \dfrac{\alpha_{\beta'}}{\alpha'_{\beta'}} = \dfrac{\alpha_\gamma}{\alpha'_\gamma}\,\dfrac{e^{\alpha\pi i}}{e^{\alpha'\pi i}}\,\dfrac{\sin(\alpha+\beta+\gamma)\pi}{\sin(\alpha'+\beta+\gamma)\pi} = \dfrac{\alpha_{\gamma'}}{\alpha'_{\gamma'}}\,\dfrac{e^{\alpha\pi i}}{e^{\alpha'\pi i}}\,\dfrac{\sin(\alpha+\beta+\gamma')\pi}{\sin(\alpha'+\beta+\gamma')\pi}. \end{cases}$$

Aus den Gleichungen (2) wird erkannt, dass diejenigen Fälle einer besonderen Untersuchung werth sind, in denen eine der unter dem sin.-Zeichen stehenden Exponentensummen eine ganze Zahl wird. Unter Berücksichtigung der Relation $\alpha+\beta+\gamma+\alpha'+\beta'+\gamma'=1$ hat man folgende 4 Fälle zu unterscheiden, wobei k eine beliebige positive oder negative ganze Zahl oder 0 bedeutet:

1) $\alpha+\beta+\gamma=k$ und $\alpha'+\beta'+\gamma'=1-k$
2) $\alpha+\beta+\gamma'=k$ „ $\alpha'+\beta'+\gamma=1-k$
3) $\alpha+\beta'+\gamma=k$ „ $\alpha'+\beta+\gamma'=1-k$
4) $\alpha+\beta'+\gamma'=k$ „ $\alpha'+\beta+\gamma=1-k$.

Das gleichzeitige Eintreten zweier Fälle darf nicht in Betracht gezogen werden, da dieses der Voraussetzung widersprechen würde, nach welcher die Differenzen $\alpha-\alpha'$, $\beta-\beta'$, $\gamma-\gamma'$ jedenfalls keine ganzen Zahlen sein dürfen.

Nehmen wir zunächst an, es sei $\alpha+\beta+\gamma$, demnach auch $\alpha'+\beta'+\gamma'$ eine ganze Zahl, so lehren die Gleichungen (2), dass entweder die Coefficienten $\alpha_{\beta'}$ und $\alpha_{\gamma'}$ oder die Coefficienten α'_β und α'_γ gleich 0 zu setzen sind, dass also entweder die Zweige P^α, P^β, P^γ, oder die Zweige $P^{\alpha'}$, $P^{\beta'}$, $P^{\gamma'}$ einander proportional werden. Welches von Beidem stattfindet, muss auf anderem Wege entschieden werden. Wir stellen zu dem Zwecke folgenden Satz auf:

> „Wenn die Summe der Exponenten dreier Zweige, die zu verschiedenen singulären Punkten gehören, eine negative ganze Zahl $-n$ oder 0 ist, so unterscheiden sich diese drei Zweige nur durch einen constanten Factor. Wenn jene Summe gleich einer positiven ganzen Zahl $+n$ ist, so unterscheiden sich die drei übrigen Zweige nur durch einen constanten Factor. Die einander proportionalen Zweige sind ganze rationale Functionen, im ersten Falle n^{ten}, im zweiten $(n-1)^{\text{ten}}$ Grades, jede multiplicirt mit $z^\mu(1-z)^\nu$, wo μ und ν auf bestimmte Weise von den gegebenen Exponenten abhängen.“

Zum Beweise nehmen wir zuerst an, es sei $\alpha+\beta+\gamma=-n$ (oder 0). Vermöge Formel (11) in Nr. 2. hat man

$$(3)\qquad P\begin{pmatrix}\alpha & \beta & \gamma & \\ \alpha' & \beta' & \gamma' & z\end{pmatrix} = z^\alpha(1-z)^\beta\, P_1\begin{pmatrix}0 & 0 & -n & \\ \alpha'-\alpha & \beta'-\beta & \gamma'+\alpha+\beta & z\end{pmatrix}.$$

In der Gleichung

$$(4)\qquad P_1{}^\alpha = \alpha_\gamma P_1{}^\gamma + \alpha_{\gamma'} P_1{}^{\gamma'}$$

ist $P_1{}^\alpha$ um $z=0$ eindeutig und endlich, und $P_1{}^\gamma$ um $z=0$ jedenfalls eindeutig, da es nur ganze Potenzen von z enthält. Demnach müsste durch einen vollständigen Umlauf der Variablen um $z=0$ auch die Function $P_1{}^{\gamma'}$ ihren ursprünglichen Werth wieder-erhalten, was andrerseits nicht möglich ist, da der den Zweig $P_1^{\gamma'}$ charakterisirende Exponent $\gamma' + \alpha + \beta$ keine ganze Zahl sein darf, weil sonst auch $\gamma - \gamma'$ eine ganze Zahl wäre. Hieraus folgt, dass die Gleichung (4) nicht bestehen kann, wenn nicht $\alpha_{\gamma'}$ gleich 0 wird, dass also P_1^α und P_1^γ sich nur durch einen constanten Factor unterscheiden. Nun hat P_1^γ nach der Definition die Form

$$C\left(\frac{1}{z}\right)^{-n} + C_1\left(\frac{1}{z}\right)^{-n+1} + \cdots\cdot;$$

hierin müssen aber die Glieder mit negativen Potenzen von z verschwinden, weil P_1^α um $z = 0$ auch endlich ist; daher sind P_1^α und P_1^γ proportional einer ganzen rationalen Function von z vom n^{ten} Grade. Stellen wir endlich noch die Gleichung auf

$$P_1^\alpha = \alpha_\beta P_1^\beta + \alpha_{\beta'} P_1^{\beta'}$$

und bedenken, dass P_1^α jetzt auch um $z = 1$ eindeutig ist, so lehrt ein geschlossener Umlauf der Variablen um den Punkt $z = 1$, dass auch $\alpha_{\beta'}$ gleich 0 sein muss, dass also überhaupt die Zweige $P_1^\alpha\ P_1^\beta\ P_1^\gamma$ einer ganzen rationalen Function n^{ten} Grades von z proportional sind. Für die Zweige $P^\alpha\ P^\beta\ P^\gamma$ selbst muss diese ganze Function nach (3) noch mit dem Factor $z^\alpha(1-z)^\beta$ multiplicirt werden.

Es sei ferner $\alpha + \beta + \gamma = + n$. Alsdann hat man ebenfalls nach Formel 11 in Nr. 2.

$$(5) \qquad P\begin{pmatrix} \alpha & \beta & \gamma & \\ \alpha' & \beta' & \gamma' & z \end{pmatrix} = z^{\alpha'}(1-z)^{\beta'} P_1\begin{pmatrix} \alpha-\alpha' & \beta-\beta' & \gamma+\alpha'+\beta' & \\ 0 & 0 & 1-n & z \end{pmatrix}$$

und für die Zweige $P^{\alpha'}\ P^{\beta'}\ P^{\gamma'}$ gilt jetzt dasselbe, wie vorhin für $P^\alpha\ P^\beta . P^\gamma$, nur dass α und β durch α' und β' und die ganze Function vom n^{ten} Grade durch eine solche vom $(n-1)^{\text{ten}}$ Grade zu ersetzen ist.

Wenn nicht die Summe der drei Exponenten α, β, γ, sondern dreier beliebiger Exponenten, die nur verschiedenen singulären Punkten angehören müssen (wie sie den erwähnten 4 Fällen entsprechen), gleich einer ganzen Zahl ist, so wird der Beweis auf den vorigen Fall zurückgeführt, wenn man erst solche Exponentenvertauschungen vornimmt, durch welche die drei Exponenten in dieselbe Horizontalreihe rücken.

Die gewonnenen Resultate stellen wir übersichtlich in folgender Tabelle zusammen:

$$(6) \qquad \left\{\begin{array}{lll}
1)\ \alpha + \beta + \gamma = -n & P^\alpha = \alpha_\beta\, P^\beta = \alpha_\gamma\, P^\gamma & = z^\alpha(1-z)^\beta f_n(z) \\
\quad \alpha + \beta + \gamma = +n & P^{\alpha'} = \alpha'_{\beta'}\, P^{\beta'} = \alpha'_{\gamma'}\, P^{\gamma'} & = z^{\alpha'}(1-z)^{\beta'} f_{n-1}(z) \\
2)\ \alpha + \beta + \gamma' = -n & P^\alpha = \alpha_\beta\, P^\beta = \alpha_{\gamma'}\, P^{\gamma'} & = z^\alpha(1-z)^\beta f_n(z) \\
\quad \alpha + \beta + \gamma' = +n & P^{\alpha'} = \alpha'_{\beta'}\, P^{\beta'} = \alpha'_\gamma\, P^\gamma & = z^{\alpha'}(1-z)^{\beta'} f_{n-1}(z) \\
3)\ \alpha + \beta' + \gamma = -n & P^\alpha = \alpha_{\beta'}\, P^{\beta'} = \alpha_\gamma\, P^\gamma & = z^\alpha(1-z)^{\beta'} f_n(z) \\
\quad \alpha + \beta' + \gamma = +n & P^{\alpha'} = \alpha'_\beta\, P^\beta = \alpha'_{\gamma'}\, P^{\gamma'} & = z^{\alpha'}(1-z)^\beta f_{n-1}(z) \\
4)\ \alpha + \beta' + \gamma' = -n & P^\alpha = \alpha_{\beta'}\, P^{\beta'} = \alpha_{\gamma'}\, P^{\gamma'} & = z^\alpha(1-z)^{\beta'} f_n(z) \\
\quad \alpha + \beta' + \gamma' = +n & P^{\alpha'} = \alpha'_\beta\, P^\beta = \alpha'_\gamma\, P^\gamma & = z^{\alpha'}(1-z)^\beta f_{n-1}(z).
\end{array}\right.$$

Hierin bedeutet, wie auch stets im Folgenden, $f_s(z)$ eine ganze rationale Function von z vom Grade s. Wir fügen noch hinzu, was unmittelbar aus den Gleichungen (1) folgt, dass in jedem Falle die drei übrigen Zweige sich nur durch diejenige mit einer Constanten multiplicirte Function unterscheiden, welcher die drei ersten Zweige proportional sind.

Bevor wir zur Darstellung der Zweige selbst übergehen, ist es nöthig, Einiges über die höheren Differentialquotienten und vielfachen Integrale der P-Function vorauszuschicken. Den ϱ^{ten} Differentialquotienten einer Function nach z werden wir im Folgenden durch das Symbol D_z^{ϱ}, das ϱ-fache Integral durch $D_z^{-\varrho}$ bezeichnen, jedoch da, wo kein Missverständniss möglich, die Differentiations- resp. Integrationsvariable z fortlassen. Aus der Definition unserer Function ergiebt sich nun folgende allgemeine Regel:

„Durch eine ϱ-fache Differentiation oder Integration einer P-Function entsteht eine neue P-Function mit derselben letzten Veränderlichen und denselben singulären Punkten, aber veränderten Exponenten; und zwar sind bei einer ϱ-fachen Differentiation die Exponenten der endlichen singulären Punkte der gegebenen Function um ϱ zu vermindern, dagegen die Exponenten des Unendlichkeitspunktes um ϱ zu vermehren. Bei einer ϱ-fachen Integration findet das Umgekehrte statt.“

Diese Regel hat allgemeine Gültigkeit, sobald unter den Exponenten keine ganzen Zahlen vorkommen. Ist dies aber der Fall, so sind einige Modificationen nöthig, die wir jedoch nur auf die einfache Form

$$P\begin{pmatrix} 0 & 0 & \gamma & \\ \alpha' & \beta' & \gamma' & z \end{pmatrix}$$

beziehen, weil sich auf diese jede andere zurückführen lässt. Die beiden ersten Exponenten 0 bleiben bei jeder Differentiation oder Integration ungeändert. Für die Exponenten α' und β' hat die Regel unbeschränkte Gültigkeit, da diese keine ganzen Zahlen sein dürfen. Ist einer der Exponenten γ oder γ' eine negative ganze Zahl $-n$, und bereits festgesetzt, dass der entsprechende Zweig eine ganze rationale Function von z ist, so gilt die Regel für jede Integration und für Differentiationen, deren Index gleich oder kleiner als n ist; für einen höheren Index ist dagegen der betreffende Exponent gleich 0 zu setzen. Ist endlich γ oder γ' eine positive ganze Zahl $+n$, so kann unbeschränkt differentiirt, aber nur $(n-1)$mal integrirt werden, weil bei weiter fortgesetzter Integration Logarithmen auftreten würden.

Hiernach lässt sich folgende Formel aufstellen:

$$D^{\varrho} P\begin{pmatrix} 0 & 0 & \gamma & \\ \alpha' & \beta' & \gamma' & z \end{pmatrix} = P\begin{pmatrix} 0 & 0 & \gamma+\varrho & \\ \alpha'-\varrho & \beta'-\varrho & \gamma'+\varrho & z \end{pmatrix}, \tag{7}$$

wo ϱ positive oder negative ganze Zahl und das Gleichheitszeichen so aufzufassen ist, dass die correspondirenden Zweige der beiden Seiten sich nur durch constante Factoren unterscheiden. Die Formel verliert ihre Gültigkeit, wenn γ oder γ' gleich $+n$ und

$-\varrho \gtreqless n$ ist; und ferner ist statt $\gamma+\varrho$ resp. $\gamma'+\varrho$ 0 zu setzen, wenn γ oder γ' eine negative ganze Zahl und ϱ grösser als der absolute Werth derselben ist*).

Aus der Gleichung (7) ergiebt sich noch die andere

$$P\begin{pmatrix} 0 & 0 & \gamma & \\ \alpha' & \beta' & \gamma' & z \end{pmatrix} = D^\varrho P\begin{pmatrix} 0 & 0 & \gamma-\varrho & \\ \alpha'+\varrho & \beta'+\varrho & \gamma'-\varrho & z \end{pmatrix}, \tag{8}$$

durch welche jede P-Function in einen höheren Differentialquotienten oder ein vielfaches Integral mit willkürlich zu wählendem Index transformirt werden kann.

Nach diesen Vorbereitungen gehen wir zur mathematischen Darstellung der Zweige über und nehmen von vorne herein $\alpha=0$ und $\beta=0$ an, um den Vergleich mit den in Nr. 2. mitgetheilten Resultaten zu erleichtern.

I. Es sei $\gamma=-n$ (oder 0), also die Zweige der Function

$$P\begin{pmatrix} 0 & 0 & -n & \\ \alpha' & \beta' & \gamma' & z \end{pmatrix}$$

zu bestimmen. Nach (6) dieser Nummer hat man

$$\begin{cases} P^\alpha = \alpha_\beta P^\beta = \alpha_\gamma P^\gamma = f_n(z) \\ P^{\alpha'} = \alpha'_\beta f_n(z) + \alpha'_{\beta'} P^{\beta'} = \alpha'_\gamma f_n(z) + \alpha'_{\gamma'} P^{\gamma'}. \end{cases} \tag{9}$$

Ferner ist

$$P = z^{\alpha'}(1-z)^{\beta'} P_1 \begin{pmatrix} -\alpha' & -\beta' & \alpha'+\beta'-n & \\ 0 & 0 & \alpha'+\beta'+\gamma' & z \end{pmatrix}.$$

Durch n-fache Integration der Function P_1, welche gestattet ist, da $\alpha'+\beta'+\gamma'=n+1$, erhält die obere Horizontalreihe die Exponenten $-\alpha'+n$, $-\beta'+n$, $\alpha'+\beta'-2n$, deren Summe gleich 0 ist. Da ferner $P_1^\alpha P_1^\beta P_1^\gamma$ proportional sein müssen, weil $P^\alpha P^\beta P^\gamma$ es sind, so kann Formel (16) in Nr. 1. angewendet werden, und man erhält

$$D^{-n} P_1^\alpha + \varphi_{n-1}(z) = C.\, z^{-\alpha'+n}(1-z)^{-\beta'+n},$$

wo φ_{n-1} eine ganze Function $(n-1)^{\text{ten}}$ Grades mit willkürlichen Coefficienten bedeutet. Differentiirt man die gefundene Gleichung wieder n mal, so findet man

$$P_1^\alpha = C.\, D^n\left\{z^{-\alpha'+n}(1-z)^{-\beta'+n}\right\},$$

folglich

$$P^\alpha = \alpha_\beta P^\beta = \alpha_\gamma P^\gamma = C.\, z^{\alpha'}(1-z)^{\beta'} D^n\left\{z^{-\alpha'+n}(1-z)^{-\beta'+n}\right\}. \tag{10}$$

Dass der gefundene Ausdruck in der That eine ganze rationale Function n^{ten} Grades

---

*) Setzen wir als bekannt voraus, dass die Function P der Differentialgleichung der hypergeometrischen Reihe (12) in Nr. 2. Genüge leistet, so enthält die Formel (7) die Eigenschaft jener Differentialgleichung, durch ϱ-malige Differentiation in

$$\frac{d^{\varrho+2}P}{dz^{\varrho+2}} + \left(\frac{1-\alpha'+\varrho}{z} + \frac{1-\beta'+\varrho}{z-1}\right)\frac{d^{\varrho+1}P}{dz^{\varrho+1}} + \frac{(\gamma+\varrho)(\gamma'+\varrho)}{z(z-1)}\frac{d^\varrho P}{dz^\varrho} = 0$$

überzugehen, wo ϱ positiv oder negativ sein kann.

repräsentirt, ergiebt sich unter Anderem aus Formel (15) der Nr. 1. — Zur Bestimmung der drei andern Zweige erwägen wir, dass nach der zweiten der Gleichungen (9)

$$D^{n+1} P^{\alpha'} = \alpha'_{\beta'} D^{n+1} P^{\beta'} = \alpha'_{\gamma'} D^{n+1} P^{\gamma'},$$

und dass ferner durch eine $(n+1)$-fache Differentiation von P die Exponenten der zweiten Horizontalreihe $\alpha' - n - 1$, $\beta' - n - 1$, $\gamma' + n + 1$ werden, deren Summe gleich 0 ist; daher hat man wieder nach Formel (16) (Nr. 1.)

$$D^{n+1} P^{\alpha'} = C' \cdot z^{\alpha'-n-1}(1-z)^{\beta'-n-1}.$$

Folglich ergiebt sich für die drei Zweige $P^{\alpha'}$, $P^{\beta'}$, $P^{\gamma'}$ die gemeinsame Darstellung

$$C' \cdot D^{-n-1}\left\{z^{\alpha'-n-1}(1-z)^{\beta'-n-1}\right\}. \tag{11}$$

Für die Umgebung des Punktes $z = 0$ ist unter dem Integrationszeichen nach steigenden Potenzen von z, für die Umgebung des Punktes $z = 1$ nach steigenden Potenzen von $1 - z$ und für die Umgebung von $z = \infty$ nach steigenden Potenzen von $\frac{1}{z}$ zu entwickeln. Alsdann sind, falls wir als obere Integrationsgrenzen in jedem Falle z nehmen, die unteren Grenzen so zu wählen, dass die complementären Functionen verschwinden.

Es erscheint indess zweckmässiger, bei dieser Untersuchung von dem Begriff des bestimmten Integrals ganz zu abstrahiren und durch das Zeichen $D^{-\varrho}$ solche unbestimmte Integrationen anzudeuten, bei denen die complementären Functionen verschwinden, so dass, da es sich hier nur um Potenzen handelt, $D^{-\varrho}$ definirt wird durch die Gleichung

$$D^{-\varrho} \cdot z^m = \frac{z^{m+\varrho}}{(m+1)(m+2)\cdots(m+\varrho)}.$$

Dieses vorausgesetzt, stellt der Ausdruck (11) die Zweige $P^{\alpha'}$, $P^{\beta'}$, $P^{\gamma'}$ dar, je nachdem nach steigenden Potenzen von z, $1 - z$ oder $\frac{1}{z}$ entwickelt wird. Dass übrigens diese Zweige trotz der Relationen (9) in demselben Ausdruck (11) ihre Darstellung finden, erklärt sich aus der Vieldeutigkeit dieses Ausdruckes und stimmt mit der aus den Elementen der Integralrechnung bekannten Thatsache überein, dass der allgemeine Werth eines μ-fachen Integrals aus einem particularen Werthe desselben erhalten wird, wenn man zu letzterem eine ganze rationale Function $(\mu - 1)^{\text{ten}}$ Grades mit willkürlichen Coefficienten hinzufügt. Hieraus ergiebt sich nämlich, dass verschiedene particulare Werthe eines μ-fachen Integrals sich nur durch ganze rationale Functionen höchstens vom $(\mu - 1)^{\text{ten}}$ Grade von einander unterscheiden können.

Es sei ferner $\gamma = +n$, also die Zweige von

$$P\begin{pmatrix} 0 & 0 & n & \\ \alpha' & \beta' & \gamma' & z \end{pmatrix}$$

zu bestimmen. Nach (6) dieser Nummer in Verbindung mit (1) ist

$$\left\{\begin{aligned} P^{\alpha} &= \alpha_\beta P^\beta + \alpha_{\beta'} z^{\alpha'}(1-z)^{\beta'} f_{n-1}(z) = \alpha_\gamma P^\gamma + \alpha_{\gamma'} z^{\alpha'}(1-z)^{\beta'} f_{n-1}(z), \\ P^{\alpha'} &= \alpha'_{\beta'} P^{\beta'} = \alpha'_{\gamma'} P^{\gamma'} = z^{\alpha'}(1-z)^{\beta'} f_{n-1}(z) \end{aligned}\right. \tag{13}$$

und ferner

$$P\begin{pmatrix} 0 & 0 & n & \\ \alpha' & \beta' & \gamma' & z \end{pmatrix} = z^{\alpha'}(1-z)^{\beta'} P_1 \begin{pmatrix} -\alpha' & -\beta' & \alpha'+\beta'+n & \\ 0 & 0 & \alpha'+\beta'+\gamma' & z \end{pmatrix}.$$

Durch n-fache Differentiation von P_1 werden die oberen Horizontalexponenten $-\alpha'-n$, $-\beta'-n$, $\alpha'+\beta'+2n$, deren Summe gleich 0. Ferner folgt aus (13), dass P_1^{α}, P_1^{β}, P_1^{γ} sich nur durch ganze rationale Functionen $(n-1)^{\text{ten}}$ Grades unterscheiden, die durch n-fache Differentiation verschwinden. Daher sind $D^n P_1^{\alpha}$, $D^n P_1^{\beta}$ und $D^n P_1^{\gamma}$ proportional, also nach (16) (Nr. 1.)

$$D^n \cdot P_1^{\alpha} = C \cdot z^{-\alpha'-n}(1-z)^{-\beta'-n}$$

und

$$P_1^{\alpha} = C \cdot D^{-n}\left\{z^{-\alpha'-n}(1-z)^{-\beta'-n}\right\},$$

demnach werden die Zweige P^{α}, P^{β}, P^{γ} durch

(14) $$C \cdot z^{\alpha'}(1-z)^{\beta'} D^{-n}\left\{z^{-\alpha'-n}(1-z)^{-\beta'-n}\right\}$$

dargestellt, je nachdem nach steigenden Potenzen von z, $1-z$ oder $\frac{1}{z}$ entwickelt wird. — Für die drei anderen Zweige ergiebt die $(n-1)$-fache Integration von P als untere Exponenten $\alpha'+n-1$, $\beta'+n-1$, $\gamma'-n+1$, deren Summe 0; daher

(15) $$P^{\alpha'} = \alpha'_{\beta'} P^{\beta'} = \alpha'_{\gamma'} P^{\gamma'} = C' \cdot D^{n-1}\left\{z^{\alpha'+n-1}(1-z)^{\beta'+n-1}\right\}.$$

Die für $\gamma = -n$ und $\gamma = +n$ gefundenen Ausdrücke lassen sich vereinigen, und es ergiebt sich, dass, wenn γ überhaupt eine ganze Zahl, P^{α}, P^{β}, P^{γ} durch

(16) $$C \cdot z^{\alpha'}(1-z)^{\beta'} D^{-\gamma}\left\{z^{-\alpha'-\gamma}(1-z)^{-\beta'-\gamma}\right\}$$

und $P^{\alpha'}$, $P^{\beta'}$, $P^{\gamma'}$ durch

(17) $$C' \cdot D^{\gamma-1}\left\{z^{\alpha'+\gamma-1}(1-z)^{\beta'+\gamma-1}\right\}$$

dargestellt werden.

Die erste dieser beiden Formen für negatives, ganzzahliges γ, als endliche Darstellung der hypergeometrischen Reihe $F(\gamma, \gamma', 1-\alpha', z)$, war bereits Jacobi bekannt (Crelle's Journ. Bd. 56). Diejenigen Resultate, welche unter Anwendung der Relationen (9) und (13) aus der Vergleichung der gefundenen Formen mit den entsprechenden hypergeometrischen Reihen folgen, sind von Herrn Sohnke in der bereits erwähnten Abhandlung durch Rechnung hergeleitet worden.

II. Es sei γ' eine ganze Zahl, alsdann ist klar, dass im Vorhergehenden die Exponenten γ und γ' mit einander zu vertauschen sind.

III. Es sei $\beta'+\gamma$ eine ganze Zahl, und zwar sei

1) $\beta'+\gamma = -n$, in welchem Falle nach (6)

$$P^{\alpha} = \alpha_{\beta'} P^{\beta'} = \alpha_{\gamma} P^{\gamma} = (1-z)^{\beta'} f_n(z),$$
$$P^{\alpha'} = \alpha'_{\beta} P^{\beta} + \alpha'_{\beta'}(1-z)^{\beta'} f_n(z) = \alpha'_{\gamma}(1-z)^{\beta'} f_n(z) + \alpha'_{\gamma'} P^{\gamma'},$$

2) $\beta'+\gamma = +n$, in welchem Falle nach (6)

$$P^{\alpha} = \alpha_{\beta}\, z^{\alpha'} f_{n-1}(z) + \alpha_{\beta'} P^{\beta'} = \alpha_{\gamma} P^{\gamma} + \alpha_{\gamma'} z^{\alpha'} f_{n-1}(z)\,,$$
$$P^{\alpha'} = \alpha'_{\beta} P^{\beta} = \alpha'_{\gamma} P^{\gamma'} = z^{\alpha'} f_{n-1}(z)\,.$$

Erwägen wir, dass

$$P\begin{pmatrix} 0 & \beta' & \gamma \\ \alpha' & 0 & \gamma' \end{pmatrix}, z) = (1-z)^{\beta'}\, P_1 \begin{pmatrix} 0 & 0 & \beta'+\gamma \\ \alpha' & -\beta' & \beta'+\gamma' \end{pmatrix}, z)$$

und wenden auf P_1 die in (16) und (17) gegebenen Darstellungen an, so finden wir als mathematische Darstellung für die Zweige P^{α}, $P^{\beta'}$, P^{γ}

(18) $$C \cdot z^{\alpha'} D^{-\beta'-\gamma} \left\{ z^{\gamma'-1}(1-z)^{-\gamma} \right\}$$

und für die Zweige $P^{\alpha'}$, P^{β}, $P^{\gamma'}$

(19) $$C' \cdot (1-z)^{\beta'} D^{\beta'+\gamma-1} \left\{ z^{-\gamma'}(1-z)^{\gamma-1} \right\}.$$

IV. Ist endlich $\beta' + \gamma'$ eine ganze Zahl, so hat man in (18) und (19) die Exponenten γ und γ' mit einander zu vertauschen.

Für die 24 hypergeometrischen Reihen der Seite XVI aufgestellten Tabelle ergiebt sich aus dem Vorhergehenden das wichtige Resultat, dass, wenn eine der 4 Grössen γ, γ', $\beta' + \gamma$ oder $\beta' + \gamma'$ eine ganze Zahl ist, stets 12 derselben einander proportional werden und sich in endlicher Form darstellen lassen, nämlich als Product eines Ausdrucks $z^{\mu}(1-z)^{\nu}$ in einen höheren Differentialquotienten. Für die 12 übrigen Reihen erhält man zwar in jedem Falle ebenfalls eine gemeinsame Darstellung, aber in Form eines vielfachen Integrals; wird dann vorausgesetzt, dass jedesmal die Integrationen so ausgeführt werden sollen, dass die willkürlichen Constanten verschwinden, so ergeben sich aus dem gemeinsamen Ausdrucke die Lösungen der noch fehlenden 3 Classen, je nachdem man vor der Integration nach steigenden Potenzen von z, $1-z$ oder $\frac{1}{z}$ entwickelt.

Welche Lösungen jedesmal einander proportional sind, kann aus folgender Uebersicht entnommen werden:

1) wenn γ eine ganze Zahl,

I, III, V $\quad C \cdot z^{\alpha'}(1-z)^{\beta'} D^{-\gamma} \left\{ z^{-\alpha'-\gamma}\,(1-z)^{-\beta'-\gamma} \right\}$,

oder II, IV, VI $\quad C' D^{\gamma-1} \left\{ z^{\alpha'+\gamma-1}(1-z)^{\beta'+\gamma-1} \right\}$,

je nachdem der Index von D positiv (0) oder negativ ist; ebenso

2) wenn γ' eine ganze Zahl,

I, III, VI $\quad C \cdot z^{\alpha'}(1-z)^{\beta'} D^{-\gamma'} \left\{ z^{-\alpha'-\gamma'}(1-z)^{-\beta'-\gamma'} \right\}$,

oder II, IV, V $\quad C' \cdot D^{\gamma'-1} \left\{ z^{\alpha'+\gamma'-1}(1-z)^{\beta'+\gamma'-1} \right\}$;

3) wenn $\beta' + \gamma$ eine ganze Zahl,

I, IV, V $\quad C \cdot z^{\alpha'} D^{-\beta'-\gamma} \left\{ z^{\gamma'-1}(1-z)^{-\gamma} \right\}$,

oder II, III, VI $\quad C' \cdot (1-z)^{\beta'} D^{\beta'+\gamma-1} \left\{ z^{-\gamma'}\,(1-z)^{\gamma-1} \right\}$;

4) wenn $\beta' + \gamma'$ eine ganze Zahl,

$$\text{I, IV, VI} \qquad C \cdot z^{\alpha'} D^{-\beta'-\gamma'} \left\{ z^{\gamma-1} (1-z)^{-\gamma'} \right\},$$

$$\text{oder II, III, V} \qquad C' \cdot (1-z)^{\beta'} D^{\beta'+\gamma'-1} \left\{ z^{-\gamma} (1-z)^{\gamma'-1} \right\}.$$

4.

Um nun auch für den allgemeinen Fall, in welchem die Exponenten $\gamma, \alpha', \beta', \gamma'$ nur der Relation $\gamma + \alpha' + \beta' + \gamma' = 1$ unterworfen, sonst aber ganz beliebig sind, eine mathematische Darstellung für die einzelnen Zweige der Function P zu erhalten, ohne die Differentialgleichung, welcher sie Genüge leistet, zu integriren, ist es nöthig, die Gültigkeit der in voriger Nummer aufgestellten Formel

$$(1) \qquad D^{\varrho} P \begin{pmatrix} 0 & 0 & \gamma & \\ \alpha' & \beta' & \gamma' & z \end{pmatrix} = P \begin{pmatrix} 0 & 0 & \gamma + \varrho & \\ \alpha' - \varrho & \beta' - \varrho & \gamma' + \varrho & z \end{pmatrix}$$

auf den Fall eines beliebigen nicht ganzzahligen ϱ auszudehnen.

Man könnte sich die Aufgabe stellen, aus den Eigenschaften der Function P einen Zusammenhang zwischen zwei solchen Functionen herzuleiten, von denen die eine die Exponenten $\begin{matrix} 0 & 0 & \gamma \\ \alpha' & \beta' & \gamma' \end{matrix}$, die andere die Exponenten $\begin{matrix} 0 & 0 & \gamma + \varrho \\ \alpha' - \varrho & \beta' - \varrho & \gamma' + \varrho \end{matrix}$ hat, wo ϱ ganz beliebig ist. Dadurch wäre dann zugleich eine Definition des Zeichens D^{ϱ} mit beliebigem Index gewonnen. Wir wollen indess diesen Weg hier nicht einschlagen, sondern die von Liouville herrührende, für Potenzen gültige Definition der Differentialquotienten mit beliebigem Index zu Grunde legen, nach welcher

$$(2) \qquad D^{\mu} \cdot \frac{1}{x^n} = (-1)^{\mu} \frac{\Gamma(n+\mu)}{\Gamma(n)\, x^{n+\mu}}.$$

Die Euler'sche Function $\Gamma(\alpha)$ ist ursprünglich definirt durch das bestimmte Integral

$$\int_0^{\infty} e^{-\vartheta} \vartheta^{\alpha-1} d\vartheta.$$

Weil dies jedoch nur einen endlichen Sinn hat, so lange $\alpha > 0$ ist, hat Liouville (Crelle's Journ. Bd. 11) die Definition der Function Γ erweitert, so dass sie nun nur für negative ganzzahlige Argumentenwerthe und für 0 unendlich wird. Diese Erweiterung war überflüssig, wenn Liouville die bereits von Gauss eingeführte Function $\Pi(\alpha)$ acceptirte, welche mit der erweiterten $\Gamma(\alpha+1)$ identisch ist.

Wird nun die Definition (2) als bekannt vorausgesetzt, so bietet die Darstellung der Zweige P^{α}, $P^{\alpha'}$ etc. im allgemeinen Falle keine Schwierigkeiten mehr, ja sie ist eigentlich schon in der vorigen Nummer enthalten. Man hat zunächst

$$P \begin{pmatrix} 0 & 0 & \gamma & \\ \alpha' & \beta' & \gamma' & z \end{pmatrix} = z^{\alpha'} (1-z)^{\beta'} P_1 \begin{pmatrix} -\alpha' & -\beta' & \alpha' + \beta' + \gamma & \\ 0 & 0 & \alpha' + \beta' + \gamma' & z \end{pmatrix}$$

$$= z^{\alpha'} (1-z)^{\beta'} D^{-\gamma} P_2 \begin{pmatrix} -\alpha' - \gamma & -\beta' - \gamma & \alpha' + \beta' + 2\gamma & \\ 0 & 0 & 1 & z \end{pmatrix}.$$

Aber nach voriger Nummer sind P_2^{α}, P_2^{β}, P_2^{γ} proportional, und zwar ist

$$P_2^{\alpha} = c\,P_2^{\beta} = c'\,P_2^{\gamma} = \text{Const. } z^{-\alpha'-\gamma}(1-z)^{-\beta'-\gamma},$$

welche Darstellung für die ganze unendliche Ebene gilt. Will man Darstellungen in Form von unendlichen Reihen haben, so muss, wie schon erwähnt, für die Umgebung des Punktes $z=0$ nach steigenden Potenzen von z, für die Umgebung von $z=1$ nach steigenden Potenzen von $1-z$ und für die Umgebung von $z=\infty$ nach steigenden Potenzen von $\frac{1}{z}$ entwickelt werden. — Es folgt ferner für die Zweige P^{α}, P^{β}, P^{γ} die Darstellung

$$\text{(3)} \qquad \text{Const. } z^{\alpha'}(1-z)^{\beta'} D^{-\gamma}\left\{z^{-\alpha'-\gamma}(1-z)^{-\beta'-\gamma}\right\},$$

und da das Zeichen $D^{-\gamma}$ überhaupt nur einen Sinn hat, wenn unter demselben eine Reihe von Potenzen steht, so werden P^{α}, P^{β} oder P^{γ} durch (3) dargestellt werden, je nachdem nach steigenden Potenzen von z, $1-z$ oder $\frac{1}{z}$ entwickelt wird.

Es ist ferner

$$P\begin{pmatrix} 0 & 0 & \gamma & \\ \alpha' & \beta' & \gamma' & z \end{pmatrix} = D^{\gamma-1}\,P_1\begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 & \\ \alpha'+\gamma-1 & \beta'+\gamma-1 & \gamma'-\gamma+1 & z \end{pmatrix}.$$

Nach voriger Nummer ist wieder

$$P_1^{\alpha'} = c\,P_1^{\beta'} = c'\,P_1^{\gamma'} = \text{Const.}'\, z^{\alpha'+\gamma-1}(1-z)^{\beta'+\gamma-1}.$$

Daher werden die Zweige $P^{\alpha'}$, $P^{\beta'}$, $P^{\gamma'}$ durch

$$\text{(4)} \qquad \text{Const.}'\, D^{\gamma-1}\left\{z^{\alpha'+\gamma-1}(1-z)^{\beta'+\gamma-1}\right\}$$

dargestellt, je nachdem nach steigenden Potenzen von z, $1-z$ oder $\frac{1}{z}$ entwickelt wird.

Nach dem, was in Nr. 2. von Riemann's Untersuchungen mitgetheilt ist, wäre übrigens nur die Darstellung *eines* Zweiges nöthig, um daraus die Darstellungen der übrigen und ihre Transformationen herzuleiten. Es ist indess nicht uninteressant zu bemerken, dass schon durch die beiden Ausdrücke (3) und (4) für jeden der 6 Zweige *eine* mathematische Darstellung gewonnen ist. Um einen Vergleich derselben mit der durch die hypergeometrische Reihe zu ermöglichen, wollen wir untersuchen, durch welche Reihen allgemein der Ausdruck

$$\text{(5)} \qquad D^{\mu}\left\{z^{\alpha}(1-z)^{\beta}\right\}$$

dargestellt wird, wenn unter dem Differentiationszeichen nach steigenden Potenzen von z, $1-z$ oder $\frac{1}{z}$ entwickelt und dann die Differentiation nach (2) ausgeführt wird. Die Entwickelung nach steigenden Potenzen von z werden wir dadurch andeuten, dass wir hinter die Klammer das Zeichen z setzen, und entsprechend die Entwickelungen nach $1-z$ und $\frac{1}{z}$.

1) Wird in (5) nach steigenden Potenzen von z entwickelt und dann nach (2) differentiirt, so erhält man

$$(-1)^\mu \frac{\Gamma(-\alpha+\mu)}{\Gamma(-\alpha)} z^{\alpha-\mu} - (-1)^\mu \frac{\beta}{1} \frac{\Gamma(-\alpha-1+\mu)}{\Gamma(-\alpha-1)} z^{\alpha-\mu+1}$$
$$+ (-1)^\mu \frac{\beta \cdot \beta-1}{1 \cdot 2} \frac{\Gamma(-\alpha-2+\mu)}{\Gamma(-\alpha-2)} z^{\alpha-\mu+2} - \ldots .$$

Daher wird unter Anwendung des Gauss'schen Zeichens F

$$D^\mu \left\{z^\alpha (1-z)^\beta\right\}_z = (-1)^\mu \frac{\Gamma(-\alpha+\mu)}{\Gamma(-\alpha)} z^{\alpha-\mu} F(-\beta,\ \alpha+1,\ \alpha+1-\mu,\ z).$$

2) Wird in (5) nach steigenden Potenzen von $1-z$ entwickelt und dann nach (2) differentiirt, so ergiebt sich

$$\frac{\Gamma(-\beta+\mu)}{\Gamma(-\beta)}(1-z)^{\beta-\mu} - \frac{\alpha}{1} \frac{\Gamma(-\beta-1+\mu)}{\Gamma(-\beta-1)}(1-z)^{\beta-\mu+1} + \frac{\alpha \cdot \alpha-1}{1 \cdot 2} \frac{\Gamma(-\beta-2+\mu)}{\Gamma(-\beta-2)}(1-z)^{\beta-\mu+2} - \ldots,$$

folglich

$$D^\mu \left\{z^\alpha (1-z)^\beta\right\}_{1-z} = \frac{\Gamma(-\beta+\mu)}{\Gamma(-\beta)} (1-z)^{\beta-\mu} F(-\alpha,\ \beta+1,\ \beta+1-\mu,\ 1-z).$$

3) Wird in (5) nach steigenden Potenzen von $\frac{1}{z}$ entwickelt und dann wieder nach (2) differentiirt, so folgt

$$(-1)^{\beta+\mu} \left\{ \frac{\Gamma(-\alpha-\beta+\mu)}{\Gamma(-\alpha-\beta)} z^{\alpha+\beta-\mu} - \frac{\beta}{1} \frac{\Gamma(-\alpha-\beta+1+\mu)}{\Gamma(-\alpha-\beta+1)} z^{\alpha+\beta-1-\mu} + \right.$$
$$\left. + \frac{\beta \cdot \beta-1}{1 \cdot 2} \frac{\Gamma(-\alpha-\beta+2+\mu)}{\Gamma(-\alpha-\beta+2)} z^{\alpha+\beta-2-\mu} - \ldots \right\}$$

und demnach ergiebt sich

$$D^\mu \left\{z^\alpha (1-z)^\beta\right\}_{\frac{1}{z}} = (-1)^{\beta+\mu} \frac{\Gamma(-\alpha-\beta+\mu)}{\Gamma(-\alpha-\beta)} z^{\alpha+\beta-\mu} F\left(-\beta,\ \mu-\alpha-\beta,\ -\alpha-\beta,\ \frac{1}{z}\right).$$

Die Anwendung der gefundenen Reihenentwickelungen auf die Ausdrücke (3) und (4) und die Berücksichtigung des Umstandes, dass letztere mit willkürlichen constanten Factoren multiplicirt sind, führt zu folgenden Ergebnissen:

I. $P^\alpha = z^{\alpha'}(1-z)^{\beta'} D^{-\gamma} \left\{z^{-\alpha'-\gamma}(1-z)^{-\beta'-\gamma}\right\}_z$
$= \text{Const.}\ (1-z)^{\beta'} F(\beta'+\gamma,\ \beta'+\gamma',\ 1-\alpha',\ z)$,

II. $P^{\alpha'} = D^{\gamma-1} \left\{z^{\alpha'+\gamma-1}(1-z)^{\beta'+\gamma-1}\right\}_z$
$= \text{Const.}\ z^{\alpha'} F(\alpha'+\gamma',\ \alpha'+\gamma,\ 1+\alpha',\ z)$,

III. $P^\beta = z^{\alpha'}(1-z)^{\beta'} D^{-\gamma} \left\{z^{-\alpha'-\gamma}(1-z)^{-\beta'-\gamma}\right\}_{1-z}$
$= \text{Const.}\ z^{\alpha'} F(\alpha'+\gamma,\ \alpha'+\gamma',\ 1-\beta',\ 1-z)$,

IV. $P^{\beta'} = D^{\gamma-1} \left\{z^{\alpha'+\gamma-1}(1-z)^{\beta'+\gamma-1}\right\}_{1-z}$
$= \text{Const.}\ (1-z)^{\beta'} F(\beta'+\gamma',\ \beta'+\gamma,\ 1+\beta',\ 1-z)$,

V. $P^\gamma = z^{\alpha'}(1-z)^{\beta'} D^{-\gamma} \left\{z^{-\alpha'-\gamma}(1-z)^{-\beta'-\gamma}\right\}_{\frac{1}{z}}$
$= \text{Const.}\ z^{-\beta'-\gamma}(1-z)^{\beta'} F\left(\beta'+\gamma,\ \alpha'+\beta'+\gamma,\ 1+\gamma-\gamma',\ \frac{1}{z}\right)$,

$$\text{VI.}\quad P^{\gamma'} = D^{\gamma-1}\left\{z^{\alpha'+\gamma-1}(1-z)^{\beta'+\gamma-1}\right\}_{\frac{1}{z}}$$
$$= \text{Const.}\, z^{-\gamma'} F\left(\alpha'+\gamma',\ \gamma',\ 1+\gamma'-\gamma,\ \frac{1}{z}\right).$$

Hierdurch ist die Identität dieser Darstellung mit der durch die hypergeometrische Reihe erwiesen. Es sei noch bemerkt, dass auch die Untersuchungen Liouville's über die complementäre Function in den Formen (3) und (4) ihre Bestätigung finden.