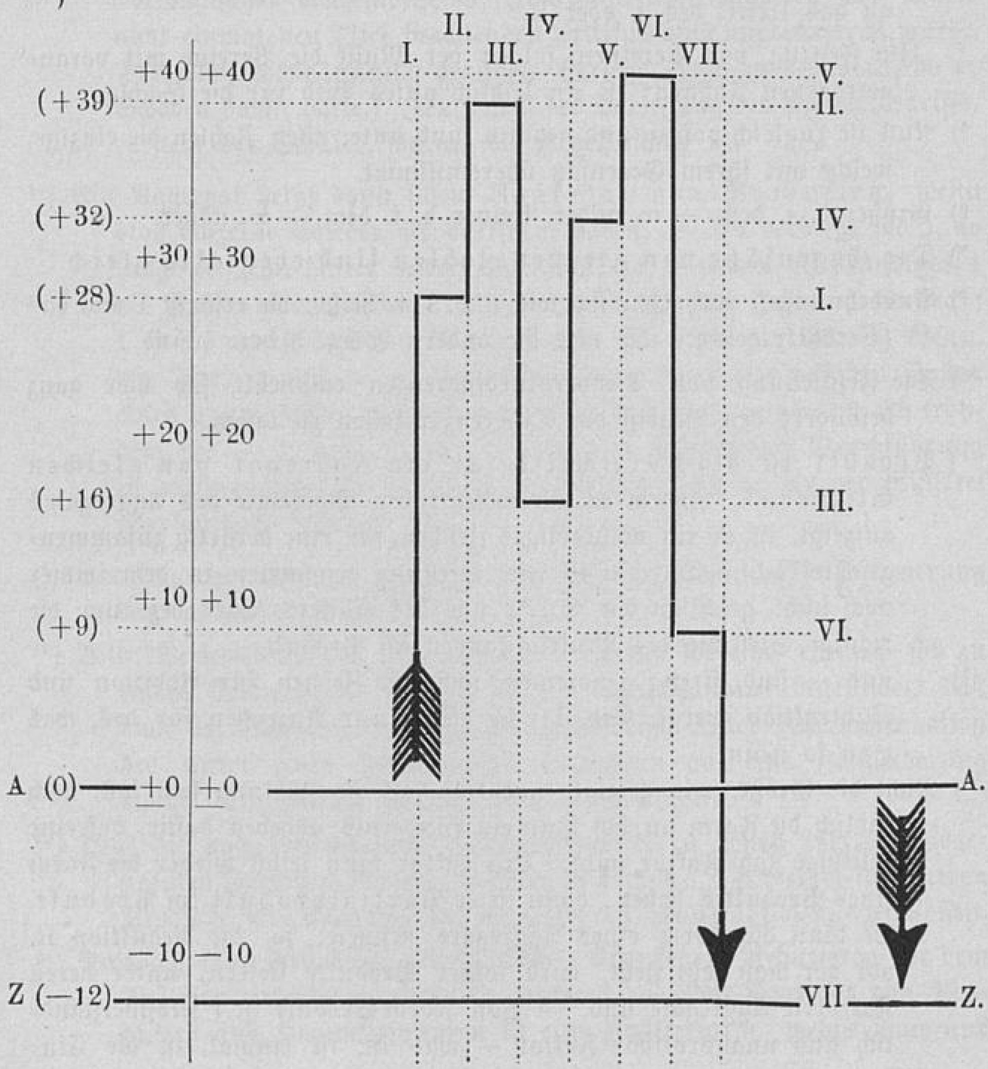
bleiben die Massenmittelpunkte der Körper bei ungehemmter Bewegung mindestens von einander entfernt und wann sind dieselben einander am nächsten? — Hier ist auch noch Gelegenheit auf die Lösung quadratischer Gleichungen mit ungefügen Koëffizienten, unter Benützung von Logarithmen, einzugehen.)

Anmerkungen.

(Anmerkungen [1]) bis [6]) siehe nächste Seite.)

[7])



[1]) Während des Bemessens von Ausdehnungen bleibt die Art der Einheit, in welcher sie vorliegen, stets außer Acht; und nur, wenn sich die Ausführung auf die Überzeugung, daß einerlei Einheiten vorhanden sind, mit Recht gründet, kann sie völlig streng verlaufen. Pari passu erfolgt die Bemessung eines Teils von der durch die Zahlenreihe vorgestellten Gesamt-Ausdehnung, welche in nirgends begrenzter Folge aus insofern idealen Einheiten verbunden ist, als man sich grundsätzlich des Gedankens an etwelche Abart dabei entschlägt.

[2]) Die Zählung 10 besteht hier blos als Einzelzählung einer zusammengesetzten.

[3]) Vergl. die Bemerkung zu dieser Nr. im Hofer Programm! Dort ist, abgesehen von untergeordneten Abweichungen, bis Nr. 16) das nämliche behandelt. Es steht: „Was zwischen zwei Spielern A und B umgesetzt wird, wenn jener 7 ℳ gewinnt, 15 ℳ verliert und wieder 11 ℳ gewinnt, wird im einzelnen und ganzen von A und B entgegengesetzt gewürdigt!" Die Fortsetzung könnte lauten: „Jeder Dritte, welcher dem Vorgang Interesse widmet, thut es anklingend an das Urteil des A oder B."

[4]) „Im Festzug von Vereinen folgen der Musik die Vereine mit vorangetragenen Fahnen" ist ein leidlich gutes Bild für die Sachlage.

[5]) Null ist zugleich positiv und negativ, und unter allen Zahlen die einzige, welche mit ihrem Gegensatz übereinstimmt.

[6]) Größer d. i. dem $+\infty$ näher, kleiner d. i. dem $-\infty$ näher.

[8]) Die Gegensätze von gleichen Zahlen sind ebenfalls gleich.

[9]) Ausdehnungen verhalten sich wie 1:2:3:4, heißt: die erste ist 1 mal das (Verhältniseinheit E), was die andern 2 bez. 3 bez. 4 sind.

[10]) Die Feststellung von Temperaturdifferenzen empfiehlt sich hier ganz besonders den Begriff der Differenz erfassen zu lassen.

[11]) Produkt ist die Kurzschrift für ein Aggregat von gleichen Gliedern. Indem es alle wesentlichen Merkmale des Aggregates aufzeigt, ist es ein vollwertiges Zeichen für eine derartig zusammengesetzte Zahl. Durch r ist feste Stellung genommen in dem immer noch nicht geschlichteten Streit um des Kaisers Bart bez. um die richtige Stellung des Multiplikanden im Produkt.

[12]) + und — sind, streng genommen, nicht die Zeichen für Addition und Subtraktion (vergl. Kap. I); sie bieten nur Anzeichen für das, was man so nennt.

[13]) Nicht die Größe, wie gezeigt, noch wie oft sie Zählung sein soll, noch endlich die Form an sich kann ein Hindernis abgeben dafür, daß eine beliebige Zahl Faktor wird. Ein Faktor kann selbst wieder die Form eines Produktes haben; dann ist er Partialprodukt im Produkt. Er kann die Form eines Aggregats besitzen; ja, die Reduktion R, vor der man jetzt steht, wird sofort Produkte liefern, unter deren Faktoren Aggregate sind. — Von jedem Produkt ist 1 selbstverständlich und unausrottbar Faktor — was ist, ist einmal, ist die Ein-

heit (1) oder eines von ihren Vielfachen! — Darum wird 1 neben sonstigen Faktoren gar nicht mehr geschrieben; 1a und a gelten für einander. Und, jede Zahl ist, wenn man will, Produkt. Wie groß eine Zahl selbst ist, bestimmen die für sie angegebenen Faktoren. In Kap. IIa erfährt man noch, daß auch irgend ein anderer Faktor im Produkt begriffen ist, indem man ihn im zeitweilig gehobenen Zustand beliebig oft hineinlegen kann. So gilt denn: Jede Zahl ist Produkt; sie ist Faktor in jedem Produkt.

[14]) bez. daß der vom Produkt zweier Zahlen leicht nachzuweisende Satz auch von der neuen Art Produkt gilt.

[15]) Bardey ist die eingeführte Aufgabensammlung.

[16]) Bei der etwa angestellten Probe mag schon notwendig sein an die bei den Zahlenausdrücken benützte Regel zu erinnern: Die Rechnungen der zweiten Stufe gehen derjenigen der ersten Stufe vor. (Vergl. des Verfassers Regeln und Erläuterungen zum Rechenunterricht, Bamberg 1888, S. 36. — Auch dieses Büchlein steht der handwerksmäßigen Rechenweise so fremd gegenüber, daß es von einem nicht einmal den Titel beachtenden Kritikus blos angeschnarcht wurde. Der selbst fachmännnisch gebildete Verleger war zu bedauern, da er Schaden damit hatte.) Jetzt, nach der Darlegung des Produktbegriffs, versteht der Schüler, warum die Regel richtig ist.

[17]) Ein Aggregat heißt dann schon Aggregat von Produkten, wenn blos einzelne Glieder Produktform haben. — Es verbirgt sich 1, so lange es geht, hinter andere Faktoren; ja, wird ein offenkundiges 1 als Faktor ausgeschieden, stets ist hinter ihm ein Faktor 1 versteckt; 1 ist in unerschöpflicher Menge Faktor einer jeden Zahl. — Wenn, wie hier, 1 und — 1 gleich brauchbare Anwärter auf den Posten eines gemeinsamen Faktors vorstellen, und man entscheidet sich trotzdem für — 1, weil es zuerst steht (bei der zweiten Durchführung in entsprechender Weise für 1), so gemahnt dies an ein der Müllerei abgelauschtes Sprüchwort.

[18]) Ein Aggregat, welches als Faktor vorkommt, ist nur in Umklammerung denkbar (vergl. R und Kap. I, Nr. 12).

[19]) Bild: Verschiedene aus Teilvereinen bestehende Vereine einigen sich zu einem Verband! — Es liegt in der Menschennatur begründet, daß man sich angesichts verwickelter Verhältnisse unter Zusammenhalten des unter einen Gesichtspunkt Fallenden an eine Zergliederung macht. Oft gelingt nur so der richtige Einblick.

[20]) Blos die noch bestimmbaren, nicht die bereits zu festen Werten ausgeprägten Faktoren können in Betracht kommen. Andererseits bleiben Produkte mit unendlich großen Faktoren grundsätzlich ausgeschlossen.

[21]) Auflösen kann Reduktion ermöglichen! Umgekehrt: Reduzieren vor dem Auflösen erleichtert zuweilen letzteres. — Das Aggregat von Produkten aus Klammerfaktoren ist eine Zwitterform, welche man nur

ungern stehen läßt. Läßt sich das Aggregat nicht reduzieren, so löst man die einzelnen Klammerreduktionen auf.

[22]) Beachte hier und an der nächsten Regel die charakteristische Umstellung von Produkt und Aggregat. Ähnliches zeigt sich immer wieder in der Folge.

[23]) Das Produkt des Aggregats mit der Zahl ist die Kurzschrift, das weitere Aggregat die Kurrentschrift des Nämlichen.

[24]) 2tes mit 1tem gibt soviel wie 1tes mit 2tem; also 2tes mit 1tem doppelt (entspr. 4tes mit 2tem doppelt). Dagegen 1tes mit sich selbst bleibt unverbunden; u. s. w. — Die Zerlegung eines Quadrats über einer Seite $a + b + c + \cdots\cdot$ in der hergebrachten Weise erleichtert das Verständnis bedeutend.

[25]) Trinom, d. i. dreigliederiges Aggregat, und gestuftes Trinom sind zweierlei. — Die Einübung fange mit Serienaufgaben an d. i. Reihen von Beispielen, welche auf die Zerlegung einer besonders geeigneten Zahl z. B. 30; 210 und dergl. (vergl. Landshuter Programm) basiert sind. Voraufgabe ist der Entwurf des wochenweise verwendbaren Schemas der Zerlegungen der Zahl in je zwei Faktoren.

[26]) Die trinomische Stufe, bei welcher der Koëffizient des Zwischengliedes 0 ist, weicht durch nicht mehr trinomisches Aussehen von den übrigen ab. Gerade sie ist aber durch ihre reduzierte Form, Vielfaches des Produkts von Summe mit Differenz der nämlichen Zahlen, besonderer Beachtung wert.

[27]) Text einer Bestimmungsaufgabe zweiten Grades! — Das Hauptgeheimnis einer Textlösung beruht in der gründlichen (schriftlichen) Disposition. Diese beginnt mit der obigen (hergebrachten) Antwort auf die Frage. Das dabei eingeführte x benützt man um alles, was der Text an Bemeßbaren berührt, den Angaben entsprechend auszudrücken. Sobald der Text erschöpft ist, liegen für genügend viel Bemeßbare je zwei Ausdrücke und damit Gleichungen vor, deren Lösungen schließlich im Einklang mit Text und Disposition gedeutet werden müssen. — Aus einer mustergiltigen Berechnung sind Benennungen verbannt; Gleichartigkeit der Bemessenen ist eben unbedingte Voraussetzung (vergl. Anm. 1).

[28]) Auflösen von Produkten zu Aggregaten ist nicht eigentlich multiplizieren. Es verdankt die Bezeichnung einzig dem Umstand, daß die Glieder des Aggregats aus Faktoren zusammengestellt werden.

[29]) Die wesentlichste Vereinfachung ist, eine Zahl, welche unter den gebotenen Faktoren und unter den Einzeldivisoren vorkommt, — der Divisionsanweisung folgend — an beiden Stellen fortzulassen. Der Überblick über die verschiedenen Stadien der Vereinfachung läßt die schon aus dem Rechenunterricht geläufige Regel vom Heben und Erweitern der Brüche gewinnen. — Die Vereinfachung gelingt meist nur unvollkommen; häufig behält der Quotient die Form einer Divisions-

anweisung. In gewissem Sinn gilt dieses sogar noch, wenn der Quotient in Form einer Dezimalzahl vorliegt, weil die Ausführung der dezimalen Division von Haus aus nur eine stenographische Vereinbarung ist (vergl. Regeln und Erläuterungen zum Rechnen, S. 10). Durch Spezialisieren der allgemeinen Werte zu bestimmten Zahlen kann (muß nicht!) die Form der Divisionsanweisung verschwinden. Bis dahin heißt es in Gedanken zur reinen Zahlvorstellung durchzudringen. Die Endform gilt trotzdem als vollwertiger Ausdruck für solche Vorstellung. Genau so hat man früher eine aus bestimmten Ganzen gebrochene Form, einen gemeinen Bruch, als reine Zahl aufgefaßt. Der Bruchstrich ist an sich die Weisung, daß die Division um jeden Preis, auch um den, daß es Stücke gibt, durchgeführt wird (vergl. Regeln und Erläuterungen, S. 8). Auf dem Papier geht das nun allerdings nicht; es geht blos an den Ausdehnungen selbst. Unsere Vorstellung lebt und webt aber mit dem wirklichen Vorgang derart, daß wir einen Bruch wie $\frac{3}{4}$ nimmermehr als Rechnungsanweisung, sondern stets als Zahl im Wechselverhältnis mit sämtlichen Zahlen ohne ähnlich unvollkommene Form, mit allen Dezimalzahlen, in voller Schärfe bemessen.

[30]) Keine Rechenzeichen weisen Addition oder Subtraktion oder Multiplikation direkt an, — und nun zwei Divisionszeichen! (Vergl. übrigens Kap. IIIa, Nr. 1).

[31]) Eine subtile Unterscheidung geht bei den zwei Zeichen her; — ist die energische Anweisung (vergl. Anm. 29; die Ausführung in der Wirklichkeit unterbleibt blos bei Abfindung oder Verzicht); das andere Zeichen verlangt nicht so viel. Wie schlecht wäre auch den Zwecken, welchen die Messung entgegenkommen will, gedient, wollte man das zu Messende in lauter Maßeinheiten zerstücken?

[32]) Man darf lesen in der Reihenfolge: Zeichen (beim Stammfaktor); bestimmte Faktoren (und Divisoren); unbestimmte Fakoren (und Divisoren).

[33]) Nicht aber: Der Quotient aus einer Zahl und einem Aggregat u. s. w., während es heißen kann: das Produkt aus einer Zahl und einem Aggregat u. s. w.

[34]) Der Wechsel des Divisionszeichens, absichtlich vorgenommen, ist für die Durchführung belanglos. — Der Mechanismus funktioniert nur, wenn Dividend und Divisor übereinstimmend geordnet sind (alphabetisch unter Berücksichtigung der Stufenfolge). — Auch den Quotienten will man so geordnet erhalten. Daher wird man die zum Vorrang berechtigenden Faktoren blos erhalten, wenn man sie mit den im Vorrang stehenden Gliedern des Divisors in den entsprechenden des Dividenden sucht (Höchstes durch Höchstes gibt hier Höchstes). Infolge des Aufbaues der Dezimalzahlen geht deren Division ohne weiteres. — Die mechanische Divisionsweise liefert

auch bei Buchstabenausdrücken nicht selten Reste. Der Quotient aus Rest und Divisor wird Schlußglied des gesamten Quotienten.

[35]) Allen Gliedern des Aggregats gemeinsamen Faktor a nebst Divisor m, also gemeinsam Bruchfaktor $\frac{a}{m}$; ihn neben der Umklammerung ·····

[36]) Allen Gliedern gemeinsam Divisor $12(x^2-1)$ nebst dem stets vorhandenen Stammfaktor 1, also gemeinsam Bruchfaktor $\frac{1}{12(x^2-1)}$; ····

[37]) Sofort in Kap. IIIa fällt diese Einschränkung des Exponenten.

[38]) Bei den Anwendungen fasse man die gleich hohen Potenzen als solche von möglichst kleinen Exponenten auf z. B. $a^{48} - b^{48}$ als Differenz der Quadrate von a^{24} und b^{24}. So bekommt man die vollständige Reduktion am bequemsten.

[39]) Vergl. Kap. IIIa!

[40]) Mehr, als hier geschehen, konnte dieses Schaltkapitel des beschränkten Raumes halber nicht ausgeführt werden. Die eingehende Behandlung ist auch nicht so dringend.

[41]) Bei der Gleichheit von zwei Produkten darf man aus dem einen derselben irgend einen Faktor (bez. Divisor) zum andern transponieren so zwar, daß gilt: Ein Faktor (bez. Divisor) verwandelt sich beim Transponieren in einen Divisor (bez. Faktor).

[42]) Ähnlich ist es bei Textaufgaben (Kap. II, Nr. 12 Anm.). wenn man die Disposition nicht mit Aussagen über die gefragten Zahlen, sondern in einfacher Beziehung zu diesen stehenden Zahlen einleitet, um die weitere Disposition und Auflösung zu erleichtern.

[43]) Vielleicht nur jedes 10. Beispiel in B., S. 100—184 ev. S. 245—250 zu bearbeiten reicht die Zeit. Obendrein dürfen Proben, namentlich auf Buchstabengleichungen, nicht ganz vernachlässigt werden.

[44]) Wer das Risiko auf sich nimmt, muß sich für überzeugt halten können, vorher keinen Fehler gemacht zu haben.

[45]) I. Sind zwei Ausdrücke gleich, so sind auch die nämlichen Vielfachen derselben — insbesondere die Hauptnenner-Fachen — gleich. II. Ein Bruch mit einem Vielfachen seines Nenners — insbesondere dem Hauptnenner — multipliziert, wird das Vielfache seines Zählers. — Auf diesen Sätzen beruht das Verfahren des „Bruchreduktion-Fort".

[46]) Die Gleichung ist frei von Nennern, bez. a; b und c sind als ganze Zahlen gedacht.

[47]) Die Erwägung, daß ein gemeinsamer Faktor f von c und a + b bez. b bez. a auch Faktor von $\triangle$ bez. x bez. y sein muß und dabei gelten darf $f\triangle' = \triangle$ bez. $fx' = x$ bez. $fy' = y$ vermag rasche Bestimmung wesentlich zu fördern.

[48]) Durch die Analogie mit der Gebahrung bei dem Hauptnenner empfiehlt

sich der Name. — Die bestimmten Glieder als Koëffizienten bei 1 aufgefaßt, so kann man ihren Hauptkoëffizienten und das Verhältnis von x und y erhalten. Oft ist solches Verfahren das beste (vergl. Kap. II, Nr. 5).

[49]) Gerade bei solchen Fällen ist die größte Vorsicht geboten; leicht kommt eine den übrigen widersprechende Gleichung vor.

[50]) Auch in der Mathematik kann man Gereimtes und Ungereimtes fordern.

[51]) Nur gegensätzlich sich wendende Handhabungen von ϱ liegen in den neuen Rechenspezies, der fünften und sechsten, vor.

[52]) Auch bei dieser Art mechanischer Division ist unbedingte Voraussetzung des Gelingens, daß der Radikand (Begriffserklärung) nach guten Grundsätzen geordnet ist. Bei den Dezimalzahlen entfällt dieses (vergl. Anm. 34). Das Verfahren unterscheidet sich vom gewöhnlichen Divisionsverfahren dadurch, daß der Divisor einer Partialdivision bis auf eine Zusatzzählung bekannt ist; er ist nämlich das Doppelte des jeweils ermittelten Quotienten; die Zusatzzählung stimmt mit dem Glied des Quotienten überein, welches zur Ermittelung steht und durch vorläufige Division mit dem bekannten Teil bes Divisors gefunden wird. Bei dem Radizieren von Dezimalzahlen erstreckt sich eine nachfolgende Partialdivision bis zu derjenigen Stelle des Radikanden, an welcher die um 2 niedrigere Potenz von 10 wie bei der vorausgegangenen Partialdivision vertreten ist. — Oben hatte man: Von 2 a geht ab das Quadrat von $\sqrt{2\,a}$; es ab, so hebt es 2 a. Von $-6\sqrt{10\,ab}$ und weiterem geht $2\sqrt{2\,a}$ u. weiteres $-3\sqrt{5\,b}$ mal ab bez. geht $(2\sqrt{2a}-3\sqrt{5\,b})$ $(-3\sqrt{5\,b})$ ab; das Gegenteil oder $6\sqrt{10\,ab}-45\,b$ hinzu, so hebt es $-6\sqrt{16\,ab}+45\,b$. 2c.

[53]) Die zweiten Wurzeln aus Zahlen sind **abundante Formen**, zweifache Zahlengaben, gleichzeitige Angabe von zwei Gegensätzen.

[54])

$$\begin{array}{ccccccccc} & & & 1. & & 1. & & & \\ & & 1. & & 2. & & 1. & & \\ & 1. & & 3. & & 3. & & 1. & \\ 1. & & 4. & & 6. & & 4. & & 1. \end{array}$$

2c.

[55]) Man unterscheidet eine Zahlenebene von der in ihr festliegenden Geraden der Reellen und der in ihr beweglichen Geraden der Imaginären. Von dieser geht die Hauptlage durch den Nullpunkt auf jener. Wegen des Zusammenhanges der beiden Teilzählungen in Komplexen muß der Nullpunkt der imaginären Linie mit der Endstelle der reellen Zählung zusammen fallen. Um das „**weg von der reellen Linie**" unmittelbar richtig zu bemessen, müssen beide Linien zu einander senkrecht stehen. – Es geht auch die imaginäre Linie festzulegen und die reelle zu bewegen. Dabei kommt zum

Ausdruck, daß die Reihenfolge des Reellen und Imaginären ohne Einfluß ist auf die Bedeutung des Komplexen.

[56]) Besteht 10 aus n Faktoren ν, so sind die n-fachen Logarithmen für die Basis 10 diejenigen für die Basis ν.

[57]) Die fünfstellige von Schlömilch ist im Gebrauch.

[58]) Die Gesamtheit der Fragen soll mit der Einrichtung der Tafel 1) und den Gesetzen der logarithmischen Rechnung bekannt machen. Danach kann jede in den Bereich von Tafel 1) fallende logarithmische Berechnung unternommen werden. Insbesondere können es die Beispiele unter Nr. 4. Die weitere Theorie muß zurücktreten. Die Bearbeitung anderweitigen Lehrstoffs fordert eben auch ihr Recht. Bei der Repetition des gesamten Lehrstoffs in der obersten (9.) Gymnasialklasse bietet sich übrigens noch Gelegenheit zu logarithmischen bez. auf logarithmischem Weg zu lösenden Gleichungen.

[59]) Die technische Handhabung in den verschiedenen Schulen weist große Verschiedenheiten auf. Der Begriff „Logarithmus" sollte aber immer gegenwärtig sein. Daher rücke man einer Knüpfung bestimmter Faktoren frisch auf den Leib mit dem Urteil: ist die Zahl, welche an Faktoren 10 begreift, soviel stecken in ····, den Ganzen nach ····, so und so oft (die Dezimalstellen hole man erst nach, wenn man für das Beispiel mit den Ganzen fertig ist!); ferner in ····, u. s. w., weg die in ···· d. i. hinzu so und so viel, so und so oft u. s. w. — Ob man die Logarithmen hinter nlg (Sigel für „ist die Zahl, welche an Faktoren 10 begreift, was steckt in") zusammensetzt oder in Nebenrechnungen α), β) ···· ansetzt, ist nebensächlich. Aber statt negativer Logarithmen sollte man ihre Erweiterungen um die dekadische Ergänzung z. B. 0,52288 — 3 statt — 2,47712 benützen (vergl. die Regeln und Erläuterungen zum Rechnen, allererste Übungen). Ein negatives Produkt ist ein mit — 1 multipliziertes positives Produkt bez. — nlg (···). Durchaus geboten ist die exakte Aussprache bez. aller Wendungen des Rechenverlaufs u. z. gestimmt auf den Grundton: ist die Zahl, die an Faktoren 10 begreift, rc. rc.

[60]) Die Stufungsgröße ist nicht notwendig ersten Grades. Ist sie k^ten Grades und die Gleichung mit 1 sonstigen unbestimmten Faktoren erweitert, so ist letztere 2 k + 1^ten Grades.

[61]) Im Interesse des ausgiebigsten Reduktionsverlaufes liegt es den Koëffizienten am Gruppenbeginn als Faktor auszuscheiden. Die Berechtigung folgt aus Kap. II, Anm. zu r. — Der Reduktion des Aggregats der zwei Produkte muß die Beseitigung der streng verpönten Bruchform mit Wurzel im Nenner vorausgehen.

[62]) Versetzt man in der allgemeinen Gleichung ν_1 als Faktor zu ν_2, so entsteht eine quadratische Gleichung von schlichter Form; ihre Auflösungen werden besonders leicht erhalten; und indem die Auf-

lösungen der allgemeinen Gleichung je den $\nu_1 \underline{\text{ten}}$ Teil so groß sind, kennt man diese auch sofort. Die quadratische Gleichung von schlichter Form erweist sich dadurch als wertvolle Hilfe bei den andern Gleichungen.

63) Es ist eigentlich selbstverständlich, daß nicht blos x, sondern auch jeder x haltende Ausdruck in der Gleichung seine Bestimmung erfährt.

64) Vergl. Kap. IIIa, Nr. 4 Anm., das über die Quadratwurzeln Gesagte.

65) Ebenso $\sqrt[3]{u} \pm \sqrt[3]{v}$ bez. Σ u. $\sqrt[3]{u^2} \mp \sqrt[3]{uv} + \sqrt[3]{v^2}$ bez. $\Sigma^2 - 3\Pi$ und dergl.

66) Vorführung der Linienbilder (linea zunächst Gerade).

67) Bardey, S. 226, 6) erlaubt auch eine dem Aufbau der Gleichungen angemessene Speziallösung, welche zur Rekapitulation des über Reelle, Imaginäre, Komplexe Gesagten, ja zu Ausführungen über konjugierte Komplexe veranlassen mag. Man leitet mit der Methode des Haupt-Koëffizienten die sehr charakteristischen Bestimmungsstücke I) $xy = 3$ bez. $xyi = 3i$ und II) $x^2 - y^2 = 8$ bez. $x^2 + (yi)^2 = 8$ ab, und hat dann $\Pi = 3i$; $\Sigma^2 - 2\Pi = 8$; daher $\Sigma = \sqrt{8 + 6i}$. Nunmehr folgt $x = \frac{1}{2}\left(\sqrt{8 + 6i} \pm \sqrt{8 - 6i}\right) = \frac{1}{2}\sqrt{16 \pm 20}$ und $y = -\frac{i}{2}\sqrt{16 \mp 20}$, wie bei der gewöhnlichen Auflösung.

68) Aus dem geometrischen Anwendungsbereich empfehlen sich geometrisch leicht zu kontrollierende Beispiele z. B. Ist g der goldene Abschnitt von s; g_1 der von g; g_2 der von g_1; u. s. f., so sind wegen des Begriffs „goldener Abschnitt" alle diese Strecken, ihrer Größe nach, Glieder einer geometrischen Reihe. Vor s, dem goldenen Abschnitt von $s + g$, dürfen $s + g$ und beliebig viel weitere Glieder angenommen werden. Zeige, daß jedes Reihenglied Summe aller folgenden, das unmittelbar folgende ausgenommen, ist!

69) Bei 4% wächst ein Betrag in Jahresfrist auf sein 1,04 Faches an. Dieses, weil Zins auch vom Zins, in weiterer Jahresfrist auf sein 1,04 Faches, also auf das $1{,}04^2$ Fache des Anfangsbetrages, u. s. w., an. — Kommt ein einzelner von den Beträgen in Betracht, ist es Zinseszinsenrechnung. Handelt es sich um eine ganze Folge, so hat man eine Rentenrechnung. Das $n - 1$ der Definitionsformel ist die Zahl der Jahre (ev. Zinsfristen); denn Reihenglieder sind es um 1 mehr als Jahre (ev. Zinsfristen). Besondere Formeln für diese Rechnungsweise sind geradezu vom Übel. Besser ist unbedingt eingehende Disposition zu Anfang der Bestimmung.

70) Man findet das Gleiche unmittelbar, wenn man die zwei Aggregate in der Reduktion von $\nu_1 x^2 + mx + \nu_2$ (siehe Beginn des Kapitels) multipliziert.

71) Das Bild einer abundanten Zahlform, einer zweiten, dritten, vierten, $\cdots$ Wurzel, besteht aus $2; 3; 4; \cdots$ Punkten, welche zentrisch-symmetrisch gruppiert sind zum Nullpunkt der reellen Zahlenlinie und achsial-symmetrisch zu dieser Linie.

72) Während man für die x die Linie der Reellen benützt, steht für die y die Linie der Imaginären zur Verfügung (vergl. Anm. 55). Damit sind aber keineswegs die y als Imaginäre hingestellt und ihr Zusammenhang mit den x als solcher zwischen Teilzählungen einer Komplexen. Notwendig ist jedoch, und wird dabei erreicht, daß die einander entsprechenden y und x zusammen geordnet auftreten.