von 10 durch fortgesetztes Radizieren auf sechs Dezimalstellen! (Tafel der Resultate.)

Nr. 2. Benützung von 1) um 2 als Potenz von 10 auszudrücken, resp. den (Zehner-)Logarithmus von 2 bez. lg 2 bez. die Menge der Faktoren von 10 in 2 zu ermitteln! Wie würde lg 3; lg 19 u. s. w. erhalten werden? Wie kann man aus dem (Zehner-)Logarithmus von 2 den Zweier-Logarithmus von 10 d. i. ${}_2\lg 10$ und, wie den Zweier-Logarithmus von einer sonstigen Zahl erhalten? Gilt stets $\frac{{}^n\lg a}{{}^n\lg b} = \frac{\lg a}{\lg b}$?[56])

Nr. 3. Man fand $2 = 10^{0{,}30103}$. Suche den Exponenten in der Logarithmentafel?[57]) Wo findet man da noch die Dezimalstellen des Exponenten? Wie mag das zusammenhängen? Wo stehen sie wieder zu erwarten? Was fällt an lg 4 auf? Wie wird es bei lg 16 sein? Wie bei lg 6?[58]) 2c.

Nr. 4. B., S. 88—90, etwa alle zweiten Beispiele! Sonstige[59]).

Kapitel III'.

Bestimmungsaufgaben 2. Grades. Bestimmungen aus Systemen 2. Grades. Bestimmung gesetzmäßiger Folgen von Zahlen incl. Zinseszinsen- und Rentenrechnung. Reelle quadratische Formen blos reeller Zahlen (Diskriminante).

Die Grundaufgabe für Bestimmungen übererſten Grades lautet: zwei Zahlen aus ihrer Summe Σ und ihrem Produkt Π zu bestimmen. Zur gleichzeitigen Bestimmung von zwei Zahlen sind thatsächlich zwei Bestimmungsstücke erforderlich, die nicht auf das nämliche hinauslaufen und einander auch nicht widersprechen. Σ und Π bez. die ihnen entsprechenden Gleichungen sind derartige Stücke, sind in den Anwendungen weitaus am regelmäßigsten dargeboten und besitzen besondere Wichtigkeit als Haupttypen unter den Zahlformen. — Wenn die Summe von zwei Zahlen Σ ist, so sind beide entweder gleich, jede ist $\frac{1}{2}\Sigma$; oder sie sind ungleich, die eine ist um das ($\triangle$) größer, um was die andere kleiner ist als ihr Durchschnittswert, eben $\frac{1}{2}\Sigma$. Weil aber der zweite Fall für $\triangle = 0$ in den ersten übergeht, so dürfen die Zahlen stets für $\frac{1}{2}\Sigma + \triangle$ bez. $\frac{1}{2}\Sigma - \triangle$ gelten. Ihr Produkt ist dann $\frac{1}{4}\Sigma^2 - \triangle^2$. Soll es auch Π sein, so hat man $\Pi = \frac{1}{4}\Sigma^2 - \triangle^2$ bez. $\triangle^2 = \frac{1}{4}\Sigma^2 - \Pi$ bez. $\triangle = \sqrt{\frac{1}{4}\Sigma^2 - \Pi}$, und die Zahlen sind $\frac{1}{2}\Sigma \pm \sqrt{\frac{1}{4}\Sigma^2 - \triangle^2}$. Damit ist unsere Grundaufgabe gelöst. — Im früheren Fall (Kap. II, Nr. 10) galt es ebenfalls zwei Zahlen aus ihrer Summe und ihrem Produkt zu bestimmen. Selbst wenn dieselben, weil sie irrational, imaginär oder komplex sind, mittels Zerlegung nicht gefunden werden können, erhält man sie jetzt! Man kann eine trinomische Stufe also immer reduzieren. Zum Beispiel liege $7x^2 - 160x^3 + 5x$ bez. $5x + 7x^2 - 160x^3$ vor. Man muß das Produkt der Außenkoëffizienten $5(-160) = -800$ in zwei Faktoren zerlegen, welche vereinigt gezählt bez. in Summe den Koëffizienten $+7$ der Zwischenstufe geben. Die zwei Zahlen sind nach obigem $\frac{7}{2} \pm \sqrt{\frac{49}{4} + 800}$ bez. $\frac{7}{2} \pm \frac{57}{2}$; sie sind 32 und -25, wie man durch Zerlegung auch erfahren hätte. Nun kommt d. N. n. $5x + 7x^2 - 160x^3 = 5x - 25x^2 + 32x^2 - 160x^3 = 5x(1 - 5x) + 32x^2(1 - 5x) = (1 - 5x)(5x + 32x^2) = \mathbf{x(1 - 5x)(5 + 32x)}$, w. g. i. — Wollte man jetzt fragen, bei welcher Beschaffenheit von x die Stufe Nullwert hat, so würde man mit den zwei bekannt gewordenen Nullsätzen „1) Ein Produkt ist 0, sobald ein Faktor 0 geworden ist. 2) Das Aggregat von 2 Gegensätzen ist 0" alsbald finden, daß sein muß $x = 0$ oder $x = \frac{1}{5}$ oder $x = -\frac{5}{32}$. Damit ist eine (nicht die erste) Bestimmungsaufgabe höheren (3ten) Grades im Stile einer quadratischen gelöst. Jede Gleichung, welche sich umformen läßt zu der Forderung, daß eine trinomische Stufe 0 werde, darf gelten als quadratische Gleichung für Bestimmung der Stufungsgröße, oder als hervorgegangen aus einer solchen durch Erweitern mit etwelchen sofort zu Null bestimmbaren sonstigen unbestimmten Faktoren. Dem Wesen nach stellen diese Gleichungen die Forderung dar mit Hilfe von zwei

Zahlen, deren Summe und Produkt man kennt, die Stufungsgröße[60]) der Gleichungen zu finden. — Nunmehr soll unternommen werden die allgemeinste quadratische Gleichung aufzulösen!

E. s. s. $\nu_1 x^2 + mx + \nu_2 = 0$! Die zwei Zahlen, die zur Auflösung benützt werden, sind $\frac{m}{2} \pm \sqrt{\frac{m^2}{4} - \nu_1 \nu_2}$. Sie verwendet, k. d. R. n. $\nu_1 x^2 + mx + \nu_2 = 0$

$$\text{bez. } \nu_1 x^2 + \left(\frac{m}{2} + \sqrt{\frac{m^2}{4} - \nu_1 \nu_2}\right) x + \left(\frac{m}{2} - \sqrt{\frac{m^2}{4} - \nu_1 \nu_2}\right) x + \nu_2 = 0$$

$$\text{bez. } \nu_1 x \left\{ x + \frac{1}{\nu_1}\left(\frac{m}{2} + \sqrt{\frac{m^2}{4} - \nu_1 \nu_2}\right) \right\} + \left(\frac{m}{2} - \sqrt{\frac{m^2}{4} - \nu_1 \nu_2}\right) \left\{ x + \frac{\nu_2}{\frac{m}{2} - \sqrt{\frac{m^2}{4} - \nu_1 \nu_2}} \right\} = 0$$

$$\text{bez. } \left\{ x + \frac{1}{\nu_1}\left(\frac{m}{2} + \sqrt{\frac{m^2}{4} - \nu_1 \nu_2}\right) \right\} \left\{ \nu_1 x + \frac{m}{2} - \sqrt{\frac{m^2}{4} - \nu_1 \nu_2} \right\} = 0$$ [61])

$$\text{bez. } \nu_1 \left\{ x - \frac{1}{\nu_1}\left(-\frac{m}{2} - \sqrt{\frac{m^2}{4} - \nu_1 \nu_2}\right) \right\} \left\{ x - \frac{1}{\nu_1}\left(-\frac{m}{2} + \sqrt{\frac{m^2}{4} - \nu_1 \nu_2}\right) \right\} = 0$$

$$\text{bez. } x = \frac{1}{\nu_1}\left(-\frac{m}{2} - \sqrt{\frac{m^2}{4} - \nu_1 \nu_2}\right) \text{ oder } x = \frac{1}{\nu_1}\left(-\frac{m}{2} + \sqrt{\frac{m^2}{4} - \nu_1 \nu_2}\right),$$

also $\mathbf{x = \frac{1}{\nu_1}\left(-\frac{m}{2} \pm \sqrt{\frac{m^2}{4} - \nu_1 \nu_2}\right)}$; die Aufgabe ist gelöst. —

Bilden wir noch die Summe der Auflösungen, desgl. das Produkt, so sind dieselben $-\frac{m}{\nu_1}$ bez. $\frac{\nu_2}{\nu_1}$. Demnach könnte erklärt werden: bei den quadratischen Gleichungen handelt es sich um Auffinden von zwei Zahlen, deren Summe entgegengesetzt ist zum Verhältnis zwischen dem 2. und 1. Koëffizienten und deren Produkt das Verhältnis zwischen dem 3. und 1. Koëffizienten der Nullgleichung ist[62]).

Bestimmungsaufgaben 2. Grades. (B., S. 188—245, etwa jedes 5. Beispiel. — Im Schuljahr des Beginns mit diesen Aufgaben soll zunächst immer das Trinom der Nullgleichung reduziert und die weitere Auflösung mit den zwei Nullsätzen bewirkt werden! Soweit die Hilfszahlen durch Zerlegen erhalten werden können, ist die irrationale Darstellung zu vermeiden! Ab und zu müssen Proben gefertigt werden!)

.... B., S. 193, 163) E. s. f. $x + \frac{1}{x} = a + \frac{1}{a}$ bez. $x = a$ oder $x = \frac{1}{a}$. Zwei Zahlen, deren Produkt 1 ist, heißen ein paar Reziproke. Die zwei Zahlen sind entweder positiv oder negativ, wenn man nur reelle Reziproke berücksichtigt. Da gilt noch: Keine zwei positiven (negativen) Reziprokenpaare haben die nämliche Summe oder die nämliche Differenz oder den nämlichen Quotienten. — B., S. 193, 183) E. s. f. $2x - \sqrt{2x-1} = x + 2$ bez. $x = 1$ so zwar, daß gilt $\sqrt{2x-1} = -1$, oder $x = 5$ so zwar, daß gilt $\sqrt{2x-1} = 3$[63]). Es liefert $2x + \sqrt{2x-1} = x + 2$ für x die nämlichen, für $\sqrt{2x-1}$ die entgegengesetzten Werte[64]). Das Verfahren, welches das Gesagte bestätigt, benützt $\sqrt{2x-1}$ statt x als Unbekannte. — B., S. 193, 192) E. s. f. $\sqrt{4x-3} - \sqrt{x-4} = 4$. Dieselben Werte für x, z. T. dieselben, z. T. die entgegengesetzten erhält man für $\sqrt{4x-3}$ einer- und $\sqrt{x-4}$ andererseits aus den Gleichungen $\sqrt{4x-3} + \sqrt{x-4} = 4$; $-\sqrt{4x-3} + \sqrt{x-4} = 4$ und $-\sqrt{4x-3} - \sqrt{x-4} = 4$. In jeder der vier Gleichungen ist die Summe von zwei Wurzelgliedern 4. Multipliziert man durchweg mit deren Differenz, so erhält man überall als

Quadratendifferenz $3x + 1$; deshalb ist die Differenz der Wurzelglieder durchweg $\frac{3x+1}{4}$. Halbe Summe und halbe Differenz addiert ergeben das erste, subtrahiert das zweite Wurzelglied der Summe. So ist es möglich jedes Wurzelglied zu bestimmen, und danach x. Man hat den Satz: Die Ausdrücke für Summe und Differenz von zwei Quadratwurzeln bedingen einander gegenseitig[65]). — Die lösbaren reziproken Gleichungen sind es dadurch, daß man $x \pm \frac{1}{x}$ statt x als Unbekannte verwenden kann.

Bestimmungen aus Systemen 2. Grades. Ein System ist dann schon zweiten Grades oder quadratisch, wenn neben Gleichungen 1. Grades (linearen)[66]) nur einzelne quadratische vertreten sind. Soll es Auflösungen geben, so müssen soviel von einander unabhängige und einander nicht widersprechende Gleichungen vorhanden sein wie Unbestimmte (Vergl. Kap. II'). Je mehr lineare oder vollkommen reduktionsfähige sonstige Gleichungen vorhanden sind, desto leichter bekommt man Auflösungen. Treten aber nur zwei der Reduktion unfähige quadratische Gleichungen auf, so übersteigt dieses die mit den bisherigen Mitteln zu erfüllenden Anforderungen. Soweit keine Beispiele aus einem Anwendungsgebiet Lösung erheischen, kommen sie der Absicht Sicherheit in den Auflösungsverfahren und in der Reduktion von Stufen zu erzielen fördernd entgegen. Dann am besten, wenn die Beispiele in guter methodischer Folge auftreten. Eine solche ist die in Sickenberger's Übungsbuch, 2. Abteilung, 1890. Dort trifft man an: 1. Fall: Eine lineare Gleichung ist vorhanden oder kann durch Elimination der quadratischen Glieder als Ersatz für eine der quadratischen Gleichungen erhalten werden (Substitutionsmethode). 2. Fall: Das Verhältnis der zwei Unbestimmten ist bekannt oder aus einer homogenen Gleichung 1. Grades abzuleiten ev. auch durch Proportionsreduktion zu erhalten. 3. Fall: Verhältnisse der zwei Unbekannten bekommt man aus homogen quadratischen Gleichungen (der 2. und 3. Fall können vereinigt werden. Methode der Verhältniseinheit E). 4. und 5. Fall, welche sich vereinigen lassen. Die Gleichungen sind rein quadratisch, oder sie sind frei von unbestimmten Gliedern 1. Grades (Elimination einer Unbekannten bez. der bekannten Glieder). — Dann folgen die Abänderungen von quadratischen Gleichungen zu Systemen ($x+y$ und auch $x-y=\Sigma$, xy oder $-xy=\Pi$; ev. $ax \pm by = \Sigma$ und $\pm abxy = \Pi$)[67]). Es reihen sich die Bestimmungen aus Summe bez. Differenz bez. Produkt und den Summen bez. Differenzen solcher n. Potenzen, welche sich durch Σ und Π darstellen lassen, an. Den Schluß bilden hauptsächlich Systeme von mehr als zwei Gleichungen und Texte.

Bestimmung gesetzmäßiger Folgen von Zahlen incl. Zinseszinsen- und Rentenrechnung. a) Eine arithmetische Reihe ist eine Folge von Zahlen bez. Gliedern, bei welchen unter Erweitern eines Gliedes mit einer festbestimmten Zusatzzählung, der Reihendifferenz d, das nächstfolgende erhalten wird. b) Eine geometrische Reihe ist eine Folge von Zahlen bez. Gliedern, bei welcher unter Erweitern eines Gliedes mit einem festbestimmten Zusatzfaktor, dem Reihenquotienten q, das nächstfolgende erhalten wird. Die Wechselbeziehung zwischen dem 1. Glied a und dem n. Glied z drücken die Definitionsformeln, für die arithmetische Reihe $z=a+(n-1)d$, für die geometrische $z=aq^{n-1}$, aus. Auch Formeln für die Summe s der ersten n Glieder werden erhalten. Die Summenformeln sind, für die arithmetische Reihe $s=\frac{n}{2}(a+z)$ oder auch $s=nM$, wo $M=\frac{1}{2}(a+z)$ der Durchschnittswert eines Reihengliedes ist; für die geometrische Reihe $s=\frac{a(1-q^n)}{1-q}$, woraus im ausgezeichneten Falle von $n=\infty$ und $1>q>0$ entsteht $s^*=\frac{1-q}{a}$. Die Summenformel für die geometrische Reihe erhält man unter Anwendung der Hauptteilbarkeitsregel auf den allgemeinen Ausdruck der Summe $a+aq+aq^2+\cdots+aq^{n-1} = a\left(1^{n-1}+1^{n-2}\cdot q+1^{n-3}\cdot q^2+\cdots+q^{n-1}\right)$. — In zahlreichen Fällen der Anwendung, z. B. in der Mechanik beim Fallgesetz, muß man Zahlen bestimmen, aus welchen eine jede von der unmittelbar vorausgehenden um das nämliche verschieden ist, oder die Summe von einer Folge solcher Zahlen. Die zwei Formeln für die arithmetische Reihe bieten ein bequemes Mittel dafür. Noch bedeutungsvoller sind die Formeln für die geometrische Reihe[68]). Wichtige Bestimmungen finanzieller Art, die Zinseszinsen- und Rentenrechnung[69]) fußen auf ihnen. Erstere stützt sich auf die Definitionsformel, letztere auf die Summenformel. (Vollständigere Darbietungen findet man in Dr. Zwerger's Leitfaden zum Unterricht in der elementaren Mathematik, I. Abt., 1894, S. 200—204. Vergl. auch Abhandlungen in den bayer. Gymnasialblättern, Jahrgänge 1898 und 1899.)

Reelle quadratische Formen blos reeller Zahlen (Diskriminante). Der Lehrplan erwähnt nichts von solchen Formen. Immerhin wird man es unternehmen dürfen dieselben zu diskutieren, wenn es gilt einem reiferen Kurs besseren Einblick in das Wesen quadratischer Bestimmungen zu verschaffen. Auch verlohnt es sich auf die Linienbilder für solche Formen einzugehen. Eine Beschränkung auf das Allernotwendigste ist aber geboten. — Dürfen in $\nu_1 x^2 + mx + \nu_2$ nur reelle Bestimmte und Unbestimmte vorkommen, so muß auch der Ausdruck selbst reell sein. Sein Linienbild erstreckt sich dabei nur in das eine Unendlich; vor dem andern macht es an endlicher Stelle Halt. Wir erfahren das Nähere, wenn wir in der Form das Partialaggregat der unbestimmten Glieder einem positiven Ausdruck, dem Quadrat einer, wenn auch unbestimmten, so doch reellen Größe einverleiben, wie folgt: M. h. $\nu_1 x^2 + mx + \nu_2 =$
$\nu_1 \left\{ x^2 + \frac{m}{\nu_1} x + \frac{m^2}{4\nu_1^2} - \frac{m^2}{4\nu_1^2} + \frac{\nu_2}{\nu_1} \right\} = \nu_1 \left\{ \left(x + \frac{m}{2\nu_1} \right)^2 - \frac{m^2 - 4\nu_1\nu_2}{4\nu_1^2} \right\}.$[70])
Das erste Glied der Klammer ist also positiv. Es kann durch geeignete Wahl für x zu jedem positiven Betrag und insbesondere zum kleinsten, zu 0, bestimmt werden. Das zweite Glied ist je nach der Beschaffenheit von ν_1; m und ν_2 irgend eine bestimmte reelle Zahl. Das Aggregat ist also so groß als das zweite Glied oder größer, bez. dieses Glied zeigt den Minimalwert des Aggregats an. Die quadratische Form, das $\nu_1$fache Aggregat, ist gleichzeitig mit diesem ein Minimum oder Maximum, je nachdem ν_1 positiv oder negativ ist. Nun sei $\overset{*}{x}$ der

passende ausgezeichnete Wert für x, y^* der zugehörige von y bez. $\nu_1 x^2 + mx + \nu_2$. So gilt $x^* = -\frac{m}{2\nu_1}$, sowie $y^* = -\frac{m^2 - 4\nu_1\nu_2}{4\nu_1}$. Endlich hat man, $x = x^* \pm \delta$ gesetzt, $y = y^* + \nu_1 \delta^2$. — Eben wurde untersucht, auf Grund welcher Umstände $\nu_1 x^2 + mx + \nu_2$ einen reellen Grenzwert besitzt. Früher galt es zu ermitteln, wenn die Form Nullwert hat. Man könnte noch fragen, für welche x ein anderer reeller oder sonstiger Wert w erhalten wird. Alle drei Bestimmungen sind nur Unterfälle einer einzigen; ja, die zwei ersten fallen zusammen, wenn der reelle Grenzwert 0 ist. Er ist es mit seinem Zähler $m^2 - 4\nu_1\nu_2$, und jede der zwei Auflösungen der Nullgleichung ist da $-\frac{m}{2\nu_1}$. In den übrigen Fällen sind die Auflösungen ungleich, besitzen aber $-\frac{m}{2\nu_1}$ zum Durchschnittswert. Selbst bei der Bestimmung der quadratischen Form zu einem andern Wert w ist $-\frac{m}{2\nu_1}$ d. Durchschnittswert von $x = \frac{1}{\nu_1}\left(-\frac{m}{2} \pm \sqrt{\frac{m^2}{4} - \nu_1(\nu_2 - w)}\right)$, den beiden Auflösungen. — Im Linienbild kommen die geschilderten Umstände durch dessen Symmetrie [71]) zum Ausdruck. Ja, die Umformung der Stufe mittels ξ für $x + \frac{m}{2\nu_1}$ läuft auf Parallelverlegen der Hauptlage der y-Linie [72]) bis zum Nullpunkt der ξ auf der x-Linie hinaus, und jene Linie selbst wird die Symmetrale des Linienbildes, einer Parabel. — Dem Zähler des Grenzwertes kommt nun darum höhere Bedeutung zu, weil sich alle Urteile über die Beschaffenheit des Grenzwertes, der Auflösungen der Nullgleichung und der sonstigen Bestimmungen auf ihn stützen. Er heißt die *Diskriminante der quadratischen Form*. (Unter den Anwendungen ev. mit Trigonometrie empfehlen sich Aufgaben wie die folgende: Zwei Körper bewegen sich mit Geschwindigkeiten von c_1 und c_2 m auf geraden, einander unter dem Winkel φ schneidenden Bahnen gleichförmig dem Treffpunkt S entgegen und sind in einem bestimmten Augenblick in A bez. B um a bez. b m von S entfernt. Wie weit bleiben die Massenmittelpunkte der Körper bei ungehemmter Bewegung mindestens von einander entfernt und wann sind dieselben einander am nächsten? — Hier ist auch noch Gelegenheit auf die Lösung quadratischer Gleichungen mit ungefügen Koëffizienten, unter Benützung von Logarithmen, einzugehen.)

Anmerkungen.

(Anmerkungen [1]) bis [6]) siehe nächste Seite.)

[7])