d. R. u. 3) $(4 \cdot 8 + 3 \cdot 23)y = -4 \cdot 66 - 3 \cdot 13$ bez. $y = -\frac{303}{101}$ $= -3$ und dieses in 1) gesetzt $x = \frac{-66 + 24}{21} = -2$, womit die Aufgabe gelöst ist. — Auch bei Systemen von 3; 4; 5; ... Gleichungen 1. Grades zur Bestimmung von 3; 4; 5; ... Unbekannten wendet man die Methode an, oder wendet je nach der Eigenart des Systems eine andere schon benützte Methode (Substitutionsmethode, Komparationsmethode, Methode der Verhältniseinheit E) an. In besonders ausgezeichneten Fällen[49]) (streng analoger Bau der Gleichungen) bildet man die Summengleichung, welche unter Verknüpfen mit jeder einzelnen Gleichung häufig sofort die Reihe der Unbekannten liefert, u. s. w. Was für eine Methode man aber auch anwendet, ab und zu stößt man auf ein System, für welches Lösungen nicht erhalten werden können, weil Forderungen anderen widersprechen[50]) oder auf das nämliche wie die anderen hinauslaufen. — Zu einem richtigen System 1. Grades z. B. von vier Gleichungen 1) 2) 3) 4) für vier Unbekannte w; x; y; z erhält man die Lösungen, wenn man zunächst die Gleichungen 5) 6) 7) dort aussucht und, soweit dieses nicht geht, durch irgend eine Methode bildet, in welchen z nicht vorkommt [z etwa darum, weil es den Gleichungen 1)—4) öfter fehlt. Oder sein Hauptkoëffizient erlaubt die bequemste Rechnung. U. dgl.]. Aus 5) 6) 7) bildet man 8) und 9), etwa ohne w. Dann 10) auch noch ohne x bez. y, aus der man also y bez. x findet. Zurück hierauf zu 8) oder 9), bekommt man x bez. y. Zurück nach 5) oder 6) oder 7), kommt w. Endlich z. [Während man nach Abschluß des Divisionskapitels der Systematik der Gleichungen ausschließlich die Zeit widmet, wendet man sich allmählich der Potenzlehre u. z. in der Weise zu, daß die erforderlichen Grundlagen gesichert sind, wenn man vor den Gleichungen mit Wurzelreduktionen und den Exponentialgleichungen steht].

Kapitel IIIa.

ϱ. Potenz- und Wurzelrechnung.

Nr. 1. Aus dem Wortlaut von ϱ, durch welchen Formen wie

$a^7; a^m; b^n$ und dgl. verständlich werden, und den Erklärungen in Kap. II, folgt unmittelbar die Richtigkeit von

$$a^7 a^m a^x \cdots = a^{7+m+x+\cdots};\ \frac{b^r}{b^s} \cdot b^8 = b^{r-s+8};$$

$(ab \ldots)^n = a^n b^n \ldots$; $(a^m)^n = a^{mn}$ u. s. w. Eine Reihe von zutreffenden Regeln ließe sich leicht aufstellen. Aber die bloße Deutung der Formen führt, ohne die richtige Auffassung zu unterbrechen, eben so sicher zum Ziel, will man eine derselben in ihrer Verknüpfung mit anderen gebührend würdigen. So mag also die Aufstellung von Regeln unterbleiben. Dagegen taucht sofort die Frage auf, ob nicht bei Beispielen nach der Art des obigen zweiten Einschränkungen vorkommen u. z. bez. des Exponenten s, nämlich ob s jede positive ganze Zahl sein kann z. B. 20, wenn $r = 7$ gilt. Aus obiger Gleichung entstünde da nämlich $\frac{b^7}{b^{20}} \cdot b^8 = b^{7-20+8} = b^{-5}$. Mit dem Ergebnis weiß man aber nach dem Wortlaut der Regel nichts anzufangen. Andererseits erhält man auf dem gewöhnlichen Weg der Vereinfachung von Faktorenknüpfungen $\frac{1}{b^5}$. Sofort bemerkt man, daß b^{-5} in überraschend einfacher Weise den richtigen Sinn wiederspiegelt, nämlich daß 5 Faktoren b aus der ganzen Verknüpfung von Faktoren, welcher die ursprüngliche Form einverleibt ist — mindestens gehört noch die Gesamtheit aller Faktoren in 1 dazu —, mit Rücksicht auf diese Form entfallen sollen. Was 5 in b^5 anweist, dessen Gegenteil weist der Gegensatz von 5, weist -5 bei b^{-5} an. b^{-5} hat den Sinn von 5 Divisoren b für die Verknüpfung von Faktoren, in welcher es steht. Wir folgern jetzt: 1) Ein Potenzexponent darf eine ganze negative Zahl sein. 2) Man kann auf die zwei Divisionszeichen verzichten. 3) Mit Gebrauch negativer Exponenten, um Divisoren zu kennzeichnen, fällt der äußere Unterschied von Multiplikation und Division fort und kommt ihr Zusammengehören zu einer Rechnungsstufe zum vollständigen Ausdruck. 4) 4^0; b^0 und dergl. sind neue Formen von 1, welche ausdrücken, daß 4 und b im besonderen Fall nicht erforderlich sind 1 zu bestimmen. 5) Erhält man eine Regel für Transposition innerhalb einer in Quotientenform vorliegenden Faktorenknüpfung: Der Exponent einer über das Divisionszeichen transponierten Potenz verwandelt sich dabei in seinen Gegensatz.

Nr. 2. Welche Bedeutung hat 2 in $64 = 2^6$?

Indem 64 von jeder Art Faktoren, welche 2 zusammensetzen, sechsmal soviel in sich birgt als 2, begreift 2 nur immer den sechsten (Teil) von jeder Art Faktoren in 64. Dieses drückt man aus mit $2 = 64^{\frac{1}{6}}$ oder mit $2 = \sqrt[6]{64}$. Letzteres ist die eingebürgerte Darstellung. Ersteres verdient aber den Vorzug, denn es bringt den Sachverhalt unmittelbar zum Ausdruck, und in Anlehnung daran gewinnt man alle Urteile, die sich auf Verknüpfung dieser Zahl mit anderen beziehen. Man sieht: Die Einschränkung des Exponenten auf Ganze ist ebenfalls hinfällig: Der Exponent einer Potenz kann jede positive oder negative ganze oder gebrochene Zahl sein. Und: Von einer besonderen Wurzel- neben Potenzrechnung kann abgesehen werden[51]).

Nr. 3. Es soll $a^{0,2}$; $b^{1\frac{2}{5}}$; $b^{-\frac{3}{4}}$ gedeutet und in die zweite Schreibweise übergeführt werden!

a ist mit 0,2 oder $\frac{1}{5}$ von jeder Art seiner Faktoren vertreten bez. jeder 5. einer Art soll gelten. Auch $\sqrt[5]{a}$ drückt diesen Gedanken aus. — b ist mit allen seinen Faktoren und überdies mit $\frac{2}{5}$ von jeder Art derselben in Geltung, drücken $b^{1\frac{2}{5}}$ bez. $b^{\frac{7}{5}}$ bez. $b\sqrt[5]{b^2}$ bez. $\sqrt[5]{b^7}$, ja schließlich $\left(\sqrt[5]{b}\right)^7$ übereinstimmend aus. — c soll mit $\frac{3}{4}$ von jeder Art seiner Faktoren von dem immer vorhandenen Stamm an Faktoren entfallen, $c^{\frac{3}{4}}$ soll Divisor zu Divid. 1 sein. Das nämliche drückt $\frac{1}{\sqrt[4]{c^3}}$ bez. $\frac{1}{(\sqrt[4]{c})^3}$ bez. $\left(\frac{1}{\sqrt[4]{c}}\right)^3$ aus.

Nr. 4. Die zweite bez. Quadratwurzel aus Aggregaten, ohne dieselben erst zu reduzieren, und insbesondere aus denjenigen Stufen von Potenzen aus 10, welche als Dezimalzahlen im allgemeinen Gebrauch stehen [hier ohne sie erst in Faktoren zu zerlegen], ermittelt man durch eine Art mechanischer Division. Dieselbe stützt sich auf die Identität $(a+b+c+d+\cdots)^2 = a^2 + b(2a+b) + c(2a+2b+c) + d(2a+2b+2c+d) + \cdots$ (vgl. Kap. II, Nr. 9). Durchführung an B., S. 70—72, von 6) ab, jedes 5. Beispiel.

$$\ldots;\sqrt{2a+45b+4c-6\sqrt{10ab}+4\sqrt{2ac}-12\sqrt{5bc}}$$
$$=\sqrt{(2a-6\sqrt{10ab}+4\sqrt{2ac}+45b-12\sqrt{5bc}+4c)}$$[52)]
$$=\pm(\sqrt{2a}-3\sqrt{5b}+2\sqrt{c})$$[53)].

Nebenrechnungen: I) ....

$$\text{II)}\ -6\sqrt{10ab}:2\sqrt{2a}=-3\sqrt{5b};$$
$$\_(2\sqrt{2a}-3\sqrt{5b})(-3\sqrt{5b})=\mp 6\sqrt{10ab}\pm 45b.$$
$$\text{III)}\ +4\sqrt{2ac}:2\sqrt{2a}=+2\sqrt{c};$$
$$\_(2\sqrt{2a}-6\sqrt{5b}+2\sqrt{c})\cdot 2\sqrt{c}=\_\,4\sqrt{2ac}\mp 12\sqrt{5bc}\pm 4c.$$

— Während der Bestimmung von Quadratwurzeln aus Dezimalzahlen (u. z. bereits aus den einfachsten) zeigt sich durchweg ein stetes Anschwellen der Rechnung und eine Veränderlichkeit der partiellen Divisoren, welche für endlichen oder periodischen Ausgang des Resultats keine Gewähr verheißt. Die Erscheinung ist neu im Zahlenrechnen. Thatsächlich steht man vor Zahlen, deren Dasein nicht vermutet wurde. Nur ganze Zahlen und Brüche (in einfachster Darstellung Quotienten von ganzen Zahlen) hat man gekannt. Daß nun aber z. B. $\sqrt{2}$ zwischen 1 und 2 liegen muß, kein gebrochener Zwischenwert sein kann und trotzdem als Zahl existiert, ergeben einfache Betrachtungen algebraisch-geometrischer Art, deren Ausführung dem Unterricht vorbehalten sein mag. Also $\sqrt{2}$ und dergl. gehören zu einer völlig neuen Art von Zahlen. Man nennt sie Irrationalzahlen. Während die Rationalzahlen, ganze und aus Ganzen gebrochene, sich in der größten Mannigfaltigkeit im Sinne der vier Spezies aus einander zusammenstellen lassen, stimmt keine derartige Zusammenstellung mit einer Irrationalzahl völlig überein. Die Irrationalzahlen besetzen dabei alle Lücken, welche eine noch so dicht folgende Auswahl von Rationalzahlen in der Zahlenreihe von der einen zur andern klaffen läßt. Weit klaffen läßt; denn bei der einzelnen Lücke besteht sogar noch unabsehbare Möglichkeit Rationalzahlen einzufüllen; immer bleibt zwischen zwei aufeinanderfolgenden eine angebbare, von Null abweichende Differenz, bestehen, während die hervorragenderen Arten von Ausdehnungen, die bemessen werden müssen, unmerklichen d. i. mit der Differenz Null verlaufenden Übergang in einander zeigen. Dergestalt verschwindet die Menge der Rationalzahlen unter derjenigen der Irrationalen. Eine jede gerade Linie, auf der ein Nullpunkt ausgewählt ist, darf für ein getreues Abbild der durch die Irrationalen vervollständigten Zahlenreihe gelten. Verwendet man irgend einen Maßstab mit einem konventionellen System seiner Unterabteilungen um die Längen, welche vom Nullpunkt aus durchlaufen werden, zu bemessen, so sind die Längen ein stetiger Übergang in einander, und die Maßzahlen derselben (verschwindend selten) die auf einander folgenden Rationalzahlen und (unvergleichlich häufig) die zwischenliegenden Irrationalen. Diese sind blos in der einzig noch verfügbaren dezimalen Form, in der eines Dezimalbruchs mit endlosem und unperiodischem Stellenverlauf denkbar.

Nr. 5. B., S. 41—47, von 4) ab jedes fünfte Beispiel!

.... Der binomische Lehrsatz zählt nicht zu dem vorgeschriebenen Lehrstoff. Soweit er hier in Betracht kommt, genügt es zu wissen, daß ein im Verhältnis von $a:b$ abgestuftes Aggregat, mit $a+b$ multipliziert, wieder ein solches Aggregat liefert, und die neuen Zwischenstufen aus Partialstufen zusammentreten, welche erhalten werden, wenn man von zwei auf einander folgenden Stufen des vorgelegten Aggregats die vorangehende mit b, die nachfolgende mit a multipliziert. Danach kann das bekannte Schema der Binomialkoëffizienten[54]) gebildet werden.

Nr. 6. B., S. 47—49, von 169) 1. Beispiel ab, jedes fünfte!

Nr. 7. B., S. 52—55, von 2) 1. Beispiel ab, jedes fünfte!

Nr. 8. B., S. 57—69, von 1) 4. Beispiel ab, jedes fünfte!

.... Bei der Berechnung von Ausdrücken mit Wurzeldivisor erweist sich dieser Umstand sehr lästig. Daher läßt man einen solchen Ausdruck grundsätzlich nicht unverändert stehen, sondern macht den Divisor, wie man das nennt, rational. Ein Hauptmittel dafür sind die Regeln in Kap. II a, Nr. 10.

Nr. 9. B., S. 76—78, von 1) 4. Beispiel ab, jedes fünfte!

Nr. 10. B., S. 79—82, von 1) 4. Beispiel ab, jedes fünfte!

Vorbemerkung zu dieser Nr. Die Forderung, eine negative Zahl als gerade Potenz einer andern Zahl zu bestimmen, erweist sich als unerfüllbar, weil die geraden Potenzen von allen Zahlen der vollständigen Reihe zwischen $-\infty$ und $+\infty$ positiv sind. Gleichwohl taucht sie bei den geometrischen Anwendungen auf und bezieht sich auf thatsächliche Bemessungsumstände. Darum gebührt ihr auch eine Stelle in der allgemeinen Größenlehre. Es sei hiewegen bemerkt: Die Reihe der reellen Zahlen d. i. eben die vollständige Reihe zwischen $-\infty$ und $+\infty$ zeigt die Art einer einfachen Ausdehnung. Trotzdem taugt sie zur Bemessung von zusammengesetzten bez. mehrdimensionalen Ausdehnungen, sobald die Umreihung der dabei zusammengeschlossenen Einheiten in eine Ausdehnung vom Gepräge einer einfachen möglich ist. Nicht jede Bemessung eines Mehrdimensionalen stützt sich jedoch auf solche Einheiten. Sobald nun eine Forderung der hier zu betrachtenden Art die Anzeige derartiger Bemessungsumstände ist, gestattet ihre Form ohne weiteres den genauen Einblick bez. die entsprechende Bemessung. Dieserhalb sieht man solche Formen, dgl. die Aggregate aus ihnen und Reellen als Zahlenarten, als imaginäre und komplexe Zahlen, an. Man faßt sie rechnerisch so auf, daß Imaginäre, paarweise multipliziert, negativ Reelles liefern. Die Komplexen andererseits entsprechen der Eigenart der Flächen und insbesondere der Ebene als der ausgezeichnetsten zweidimensionalen Ausdehnung in der Weise, daß ihr reeller Teil als Anweisung die vollständige Zahlenreihe der Länge nach zu durchlaufen gelten darf, während der imaginäre angibt, wie gleichzeitig innerhalb der Ebene, in welcher die Reihe als Gerade angebracht ist, von dieser weggegangen werden soll[55]). Aus angemessener algebraisch-geometrischer Betrachtung folgt endlich, daß, mit Komplexen genau so wie mit reellen Aggregaten gerechnet, die Bemessungsumstände stets erkennbar sind.

Kapitel IIIb.

Logarithmieren.

Nr. 1. Berechnung von möglichst viel gebrochenen Potenzen von 10 durch fortgesetztes Radizieren auf sechs Dezimalstellen! (Tafel der Resultate.)

Nr. 2. Benützung von 1) um 2 als Potenz von 10 auszudrücken, resp. den (Zehner-)Logarithmus von 2 bez. lg 2 bez. die Menge der Faktoren von 10 in 2 zu ermitteln! Wie würde lg 3; lg 19 u. s. w. erhalten werden? Wie kann man aus dem (Zehner-)Logarithmus von 2 den Zweier-Logarithmus von 10 d. i. $_2\lg 10$ und, wie den Zweier-Logarithmus von einer sonstigen Zahl erhalten? Gilt stets $\frac{{}^n\lg a}{{}^n\lg b} = \frac{\lg a}{\lg b}$?[56])

Nr. 3. Man fand $2 = 10^{0,30103}$. Suche den Exponenten in der Logarithmentafel?[57]) Wo findet man da noch die Dezimalstellen des Exponenten? Wie mag das zusammenhängen? Wo stehen sie wieder zu erwarten? Was fällt an lg 4 auf? Wie wird es bei lg 16 sein? Wie bei lg 6?[58]) 2c.

Nr. 4. B., S. 88—90, etwa alle zweiten Beispiele! Sonstige[59]).

Kapitel III'.

Bestimmungsaufgaben 2. Grades. Bestimmungen aus Systemen 2. Grades. Bestimmung gesetzmäßiger Folgen von Zahlen incl. Zinseszinsen- und Rentenrechnung. Reelle quadratische Formen blos reeller Zahlen (Diskriminante).

Die Grundaufgabe für Bestimmungen übererersten Grades lautet: zwei Zahlen aus ihrer Summe Σ und ihrem Produkt Π zu bestimmen. Zur gleichzeitigen Bestimmung von zwei Zahlen sind thatsächlich zwei Bestimmungsstücke erforderlich, die nicht auf das nämliche hinauslaufen und einander auch nicht widersprechen. Σ und Π bez. die ihnen entsprechenden Gleichungen sind derartige Stücke, sind in den Anwendungen weitaus am regelmäßigsten dargeboten und besitzen besondere Wichtigkeit als Haupttypen unter den Zahlformen. — Wenn die Summe von zwei Zahlen Σ ist, so sind beide entweder