Reihe der Gliederpaare angängig und führt dabei zu $a^n - b^n = (a-b)(a^{n-1} + a^{n-2}b + a^{n-3}b^2 + \cdots + ab^{n-2} + b^{n-1})$. Den Befund spricht man als Hauptteilbarkeitsregel der Algebra aus wie folgt: Die Differenz von zwei Potenzen mit gleichen positiv ganzen Exponenten ist durch die Differenz von den ersten Potenzen der zwei Grundzahlen teilbar. Der ergänzende Teiler ist derjenige vollständige stufenförmige Übergang zwischen den nächst niederen Potenzen der zwei Grundzahlen, in welchem jeder Stufenkoëffizient $+1$ ist. — Zusätzliche Teilbarkeitsregeln erhält man, wenn man $-b$ an die Stelle eines jeden Faktors b setzt u. z. für den Fall, daß n eine gerade Zahl ist, eine eigene und für ungerades n eine weitere. Der Nachweis erfolgt wie oben; nur muß die Einschaltung der Nullstufen so vollzogen werden, daß immer ein paar positive und negative Glieder abwechseln. Mit Beachtung dessen erhält man für gerades n dabei $a^n - b^n = (a+b)(a^{n-1} - a^{n-2}b + \cdots + ab^{n-2} - b^{n-1})$; für ungerades n entsteht

$$a^n + b^n = (a+b)(a^{n-1} - a^{n-2}b + \cdots - ab^{n-2} + b^{n-1}).$$

Hienach ist es leicht, Zusatzregeln zu formulieren[38]. — Den Überblick über die Gesamtheit der Regeln und der nebenher gehenden Nichtteilbarkeitsregel erzielt man, wenn man die Frage, ob die Summe bezw. Differenz von zwei n^{ten} Potenzen 1. durch die Summe, 2. durch die Differenz der zwei Grundzahlen rational[39] teilbar ist, beantwortet für positives gerades n zu 1. mit „nein" bez. „ja", zu 2. mit „nein" bez. „ja", für positives ungerades n zu 1. mit „ja" bez. „nein", zu 2. mit „nein" bez. „ja".

Kapitel II.[40]

Bestimmungsaufgaben 1. Grades. Bestimmungen aus Systemen 1. Grades.

Sollen Bestimmungsaufgaben systematisch bearbeitet werden, so muß man sich klar sein, was erreicht werden soll. Man will aber an Stelle der Forderungen, welche an die unbestimmten Zahlen im Hinblick auf die mitverbundenen bestimmten geknüpft sind, einfachste bestimmte Aussagen über jede von jenen Zahlen erhalten. Vereinfachung der in Gleichungsform vorliegenden Forderungen wird sonach erstrebt. Die Vereinfachung kann jedoch nur erzielt werden durch Vereinigung von Zählungen zu einer einzigen. Das Mittel dafür ist das Zusammentransponieren der bestimmten Zählungen weg von den unbestimmten und dann nachfolgende Berechnung oder Reduktion, im wesentlichen also Gliedertransposition. Oder sie wird erreicht durch Zusammentransponieren aller bestimmten Faktoren weg von ihrer Verknüpfung mit allen unbestimmten, hier also durch eine Faktorentransposition[41]). Diese Hauptschritte zu ermöglichen sind oft vorbereitende Schritte, nämlich Klammer-, Bruch-, Wurzelreduktion fort, notwendig. Nur, wenn Reduktionen den Hauptschritten hinderlich sind, werden die geeigneten vorbereitenden Schritte unternommen. Wenn man die Aussicht hat, eine einzige Verknüpfung von Unbestimmten mit Bestimmten als Ersatz für eine Unbestimmte zu erhalten, reduziert man sogar[42]). Die Unbestimmte erhält man nachträglich leicht. Neben dem allgemeinen Lösungsweg bietet sich gelegentlich ein bequemer sonstiger Weg, welcher der speziellen Natur der Gleichungen, der Bestimmungsstücke, angepaßt ist. Auch einen solchen Weg muß man einschlagen können. Aus der Fülle von Aufgaben, welche die Sammlungen und namentlich Bardey[43]) bieten, im Folgenden nur bemerkenswertere:

B., S. 103, 116) E. s. s. $\frac{7}{3}+\frac{13}{5x}=\frac{13x-24}{3x}-\frac{37}{20}+\frac{10}{x}$ bez. $\frac{7}{3}+\frac{13}{5}\cdot\frac{1}{x}=\frac{13}{3}-8\cdot\frac{1}{x}-\frac{37}{20}+10\cdot\frac{1}{x}$ bez. $\frac{3}{5}\cdot\frac{1}{x}=\frac{3}{20}$ bez. $\frac{1}{x}=\frac{1}{4}$ bez. $x=4$, w. g. i. — Die Ausführung der Division bei dem 1. Glied rechts erlaubt $\frac{1}{x}$ als Unbestimmte an Stelle von x zu verwenden und erleichtert überdies die Vereinigung der bestimmten, desgleichen der unbestimmten Zählungen je zu einer einzigen, wobei der vorbereitende Schritt „Bruchreduktion-Fort“ entbehrlich wird. Ohne dieses hätte die Gleichung mit einem Vielfachen von x erweitert werden müssen. Dabei hätte man riskiert mit einer Zahl, welche möglicher Weise 0 ist, zu multiplizieren. Während nun die nämlichen Vielfachen von Gleichen bez. Ungleichen sonst gleich bez. ungleich sind, besitzen die 0-fachen von Gleichen und Ungleichen den Wert 0. Wäre ein die Fortdauer der Gleichheit störender Schritt bereits unternommen worden, so würde sich derselbe nach der Multiplikation nicht mehr bemerklich machen[44]), die Auflösung aber für richtig gelten. — B., S. 103, 123) E. s. s. $\frac{3x-1}{2x-6}+\frac{5x-7}{3x-9}+\frac{7x+1}{4x-12}=11$ bez. $\frac{1}{12(x-3)}\left\{18x-6+20x-28+21x+3-132x+396\right\}=0$ bez. $\frac{365-73x}{12(x-3)}=0$ bez. $\frac{73}{12}(5-x)\cdot\frac{1}{x-3}=0$, also $x=5$, wobei $\frac{1}{x-3}$ zu $\frac{1}{2}$ wird, oder $\frac{1}{x-3}=0$ bez. $x=\infty$ d. i. ein aus dem endlichen Bemessungsbereich fallender, also an sich unbrauchbarer Wert, aber auch sonst ungeeignet, da es kein Unendlich gibt, welches gegenüber seinem um 2 vergrößerten Gegensatz verschwindet. Eine unzulässige Forderung ist in die Gleichung nebenher eingeflochten. — Daraufhin darf in ähnlichen Fällen die Lösung mit Erweitern der Gleichung[45]) als zweckmäßigstes gelten, nämlich: E. s. s. .... bez. $18x-6+20x-28+21x+3=132x-396$ bez. $365=73x$ bez. $x=\frac{365}{73}=5$, w. g. i. — B., S. 104, 128)

E. s. s. $\frac{\frac{2}{5}(x-4)}{\frac{3}{8}(3x+5)}=\frac{1}{6}$ bez. $\frac{x-4}{3x+5}=\frac{5}{32}$ bez. ...... Nach Beseitigen der lästigen Bruchsbruchform mittels Faktorentransposition (häufiger geschieht es durch Erweitern der Form mit dem Hauptnenner zu allen in ihr vorkommenden Nennern resp. durch Multiplizieren derselben mit demjenigen 1, dessen Zähler und Nenner Hauptnenner zu jenen ist) besitzt die Gleichung die Form einer für manche Anwendungen wichtigen Produktengleichung, nämlich diejenige einer Verhältnisgleichung bez. Proportion. Was an Regeln über Proportionen das bürgerliche Rechnen kennt, erklärt sich durch die Faktorentransposition. Das gilt z. B. von der Regel für die Verwandlung in eine Produktengleichung des engeren Sinnes. — Eine Zahl enthält a so gut wie b als Faktor. Ist der ergänzende Faktor β bez. α, so ist die Zahl $a\beta$, sie ist auch $b\alpha$; daher gilt $a\beta = b\alpha$. Nun stimmen a und b nur in einem Teil der für die Zahl ausdrücklich anzugebenden Faktoren überein. $\frac{a}{b}$ ist das Verhältnis der a und b unterscheidenden Partialprodukte. Die Faktoren von b, welche a fehlen, finden sich in β; diejenigen von a, welche b fehlen, in α; sonst stimmen α und β überein; also ist auch $\frac{\alpha}{\beta}$ das Verhältnis der a und b unterscheidenden Partialprodukte. Es gilt $\frac{a}{b} = \frac{\alpha}{\beta}$. Ferner gilt $\frac{ka}{b} + l = \frac{k\alpha}{\beta} + l$ bez. $\frac{ka + lb}{b} = \frac{k\alpha + l\beta}{\beta}$; ebenso $\frac{ma + nb}{b} = \frac{m\alpha + n\beta}{\beta}$; und kompariert bez. dividiert, $\frac{ka + lb}{ma + nb} = \frac{k\alpha + l\beta}{m\alpha + n\beta}$. Es heißt aber eine im Sinn dieser Herleitung unternommene Umformung einer Proportion im allgemeinen **Proportionsreduktion**; im besonderen Fall von $k = l = m = -n = 1$ nennt man sie wohl auch **korrespondierende Addition und Subtraktion**. Das Verfahren ist für gewandte Rechner ein reizvolles Mittel zur Vereinfachung von Proportionen. Im obigen Beispiel würde $k = 5$; $l = +4$; $m = 3$; $n = 1$ am besten entsprechen und führen zu $\frac{17\,x}{17} = \frac{153}{17}$ bez. $x = 9$, w. g. i. — B., S. 109, 296) E. s. s. $\frac{2x^2 - 3x + 5}{7x^2 - 4x - 2} = \frac{2}{7}$ bez. $\frac{3\,x - 5}{4\,x + 2} = \frac{2}{7}$ bez. $21\,x - 35 = 8\,x + 4$ bez. $13\,x = 39$ bez. $x = 3$, w. g. i! Zähler und Nenner des Bruches müssen 2- bez. 7-fache des nämlichen sein; sie sind es nur, wenn $3\,x - 5$ und $4\,x + 2$ ihrerseits 2- bez. 7-fache einer einzigen Zahl sind. — B., S. 204, 19) E. s. s. $a\,x + by = c$[46]). Drückt man x oder y aus, so erhält man y bez. x haltende, also noch immer unbestimmte Ausdrücke, welchen man nur entnehmen kann, in welcher Abhängigkeit von y bez. x das indepedente x bez. y steht. Zwei Zahlen zu ermitteln reicht eine einzige an ihr Auftreten geknüpfte Forderung, **ein Bestimmungsstück**, nicht aus. Ein zweites, welches aber keine Wiedergabe des ersten in abgeänderter Form und auch keinen Widerspruch gegen dasselbe vorstellen darf, ist zur ausreichenden Bestimmung notwendig. Wir entscheiden wie folgt: Entweder sind x und y

gleich oder sie unterscheiden sich. Nehmen wir an $x - y = \triangle$, so drückt dieses die zweite Eventualität aus; aber auch die erste, welche im besonderen Fall von $\triangle = 0$ aus jener hervorgeht. Wir haben jetzt die Möglichkeit x und y so zu bestimmen, daß sie sich um ein beliebiges $\triangle$ unterscheiden. E. s. s. 1) $ax + by = c$; 2) $x - y = \triangle$ bez. $bx - by = b\triangle$; beides addiert, so kommt $(a+b)x = c + b\triangle$ bez. $x = \frac{c + b\triangle}{a+b} = \frac{c - a\triangle}{a+b} + \triangle$; ferner $y = \frac{c + b\triangle}{a+b} - \triangle = \frac{c - a\triangle}{a+b}$, w. z. i. — Vorstehend wurde eine diophantische (Haupt-)Gleichung bearbeitet. Im Lehrplan sind solche Gleichungen nicht vorgeschrieben. Immerhin ist die Bearbeitung von einigen einfacheren, namentlich wenn man sich auf die gewöhnliche Nebenbedingung, daß x und y nur ganze positive Zahlen sein dürfen, einschränkt, sehr zu empfehlen. Die Einsicht in das Wesen der Bestimmungsaufgaben wird wesentlich gefördert. Der Zeitaufwand ist gering; denn rasch addiert man zu c die einfachsten Vielfachen von b, bez. subtrahiert von c die einfachsten Vielfachen von a, bis man bei einem $\triangle$-fachen anlangt, welches die Summe bez. Differenz zu einem Vielfachen von $a + b$ macht[47]) und damit x bez. y liefert; y ist um $\triangle$ kleiner bez. x um $\triangle$ größer. Den allgemeinen Auflösungen entnimmt man noch, daß eine Änderung von $\triangle$ um $k(a+b)$ von einer Änderung des x um kb, des y um $-ka$ begleitet ist. — B., S. 157, 24)
E. s. s. 1) $21x + 8y + 66 = 0$; 2) $23y - 28x + 13 = 0$. Man fühlt sich versucht, von dem eben Erkannten Gebrauch zu machen und das aus jeder Gleichung für x ev. y Erhaltene gleich zu setzen (Komparationsmethode). Man bekommt

$$x = \frac{-66 + 8\triangle}{29} = \frac{13 - 23\triangle}{5} \text{ bez. } -330 + 40\triangle$$

$$= 377 - 667\triangle \text{ bez. } \triangle = 1; \text{ also } x = \frac{-58}{29} = -2$$

und $y = -2 - 1 = -3$. Bequemer ist es jedoch, die Methode des vorigen Beispiels wieder anzuwenden, die Methode des Hauptkoëffizienten[48]) resp., wie man sie noch nennt, die Additionsmethode bez. die Eliminationsmethode. Man erhält, die Gleichungen mit 4 bez. 3 erweitert und dann addiert,

d. R. u. 3) $(4 \cdot 8 + 3 \cdot 23)\,y = -4 \cdot 66 - 3 \cdot 13$ bez. $y = -\frac{303}{101}$ $= -3$ und dieses in 1) gesetzt $x = \frac{-66+24}{21} = -2$, womit die Aufgabe gelöst ist. — Auch bei Systemen von 3; 4; 5; ... Gleichungen 1. Grades zur Bestimmung von 3; 4; 5; ... Unbekannten wendet man die Methode an, oder wendet je nach der Eigenart des Systems eine andere schon benützte Methode (Substitutionsmethode, Komparationsmethode, Methode der Verhältniseinheit E) an. In besonders ausgezeichneten Fällen[49]) (streng analoger Bau der Gleichungen) bildet man die Summengleichung, welche unter Verknüpfen mit jeder einzelnen Gleichung häufig sofort die Reihe der Unbekannten liefert, u. s. w. Was für eine Methode man aber auch anwendet, ab und zu stößt man auf ein System, für welches Lösungen nicht erhalten werden können, weil Forderungen anderen widersprechen[50]) oder auf das nämliche wie die anderen hinauslaufen. — Zu einem richtigen System 1. Grades z. B. von vier Gleichungen 1) 2) 3) 4) für vier Unbekannte $w; x; y; z$ erhält man die Lösungen, wenn man zunächst die Gleichungen 5) 6) 7) dort aussucht und, soweit dieses nicht geht, durch irgend eine Methode bildet, in welchen z nicht vorkommt [z etwa darum, weil es den Gleichungen 1)—4) öfter fehlt. Oder sein Hauptkoëffizient erlaubt die bequemste Rechnung. U. dgl.]. Aus 5) 6) 7) bildet man 8) und 9), etwa ohne w. Dann 10) auch noch ohne x bez. y, aus der man also y bez. x findet. Zurück hierauf zu 8) oder 9), bekommt man x bez. y. Zurück nach 5) oder 6) oder 7), kommt w. Endlich z. [Während man nach Abschluß des Divisionskapitels der Systematik der Gleichungen ausschließlich die Zeit widmet, wendet man sich allmählich der Potenzlehre u. z. in der Weise zu, daß die erforderlichen Grundlagen gesichert sind, wenn man vor den Gleichungen mit Wurzelreduktionen und den Exponentialgleichungen steht].

Kapitel IIIa.

ϱ. Potenz- und Wurzelrechnung.

Nr. 1. Aus dem Wortlaut von ϱ, durch welchen Formen wie