Nr. 11. Bestimmungen zu 0 an einzelnen unter Nr. 10 bearbeiteten trinomischen Stufen! Proben!

Nr. 12. Eine Großmutter und ihr Enkel, welcher das Gymnasium besucht, während die Großmutter ungewöhnliche mathematische Kenntnisse besitzt, reisen mit einander und werden von einem Mitreisenden lästig ausgefragt, zuletzt über ihr Alter. Da antworteten sie das Gleiche und dennoch richtig. Der Fragende hält sich für gefoppt und stellt das Fragen ein. Wie alt war jedes, indem die Antwort gleicher Weise gelautet hat: Die 85fache Menge meiner Jahre ist 1050 mehr als dieselbe mit ihr selbst multipliziert?[27]).

Das Alter der gefragten Person zu x Jahren angenommen, so ist die 85fache Menge der Jahre 85 x; sie ist aber auch die mit sich selbst multiplizierte und noch um 1050 erhöhte Menge; sie ist $x^2 + 1050$; daher muß sein

$$85\,x = x^2 + 1050 \text{ bez. } x^2 - 85\,x + 1050 = 0 \text{ bez.}$$
$$x^2 - 15x - 70x + 1050 = 0 \text{ bez. } x(x-15) - 70(x-15) = 0$$
$$\text{bez. } (x-15)(x-70) = 0 \text{ bez. entweder } x - 15 = 0,$$
$$\text{also } x = 15 \text{ oder } x - 70 = 0, \text{ also } x = 70.$$

Die Großmutter konnte nur 70, der Enkel blos 15 Jahre alt sein.

Kapitel II a.

Division. Gebrochene Zahlen.

Nr. 1. Wie erhält man $4\,a$; $-a^4$; $-2\,a^2bc$; $4\,a + a^4$ und $2\,a^2(1-a)$ aus a!

Man erhält das Gewünschte, wenn man 4; $-a^3$; $-2\,abc$; $4 + a^3$; $2\,a\,(1-a)$ zu a als Faktor stellt, bez. a damit multipliziert. — Das Multiplizieren ist angewiesen und (abgesehen von möglichen Vereinfachungen) vollzogen durch bloßes Nebeneinanderstellen der Faktoren[28]). Indessen muß die Verwechselung von nachfolgenden Faktoren mit nachfolgenden Zählungen (vergleiche Kapitel I, Nr. 11) vermieden werden. Darum: falls ein nachfolgender Faktor + oder − als Vorzeichen führt, wird er mit diesem in eine Umschließung gefaßt (Vergl. die durchgeführten Proben).

Nr. 2. Wie erhält man α) x, wie β) — x aus x^2; $4\,bx^3$; $-2\,c^2x^4$; $-4\,x\,(m+n)$; $a\,(x+x^2)$?

Man erhält das Gewünschte, wenn man aus den gegebenen Produkten die Partialprodukte

α) x; $4\,bx^2$; $-2\,c^2x^3$; $-4\,(m+n)$; $a\,(1+x)$,

β) $-x$; $-4\,bx^2$; $2\,c^2x^3$; $4\,(m+n)$; $-a\,(1+x)$ fortläßt bez. jene Produkte durch diese Partialprodukte dividiert. Die Division liefert durch Fortlassen eines Partialproduktes aus einem Produkt das ergänzende Partialprodukt.

Bemerkungen. Angewiesen und (abgesehen von etwaigen Vereinfachungen[29]) vollzogen ist die Division, wenn man dem aus allen bereitgestellten bezw. gebotenen Faktoren geknüpften Produkt, dem Dividenden, die Anfangsstellung bei (vor bez. über) einem Divisionszeichen[30]) (: bez. —), dem Partialprodukt der fortzulassenden Faktoren, dem aus Einzeldivisoren geknüpften Divisor, die Endstellung daselbst gibt. Der so erhaltene Ausdruck, gleichviel wie weit der Divisionsanweisung im besonderen entsprochen ist, bedeutet das Produkt der verbleibenden Faktoren, das ergänzende Partialprodukt, und heißt Quotient. — Was die Multiplikation an Faktoren zusammenknüpft, knüpft die Division wieder los. Darum sind die beiden Rechnungsweisen des Faktorenknüpfens entgegengesetzter Art, ähnlich wie die zwei einander entgegengesetzten Weisen des zusammengesetzten Zählens. Auch sie machen einander wirkungslos, wenn sie im nämlichen Zusammenhang auftreten und die nämliche Zahl als Faktor da an- und losknüpfen. Aus dem Wechselverhältnis von Multiplikation und Division erklärt sich jetzt ohne weiteres, was im Musterbeispiel beobachtet wird: Dividiert man statt durch eine Zahl durch den Gegensatz, so erhält man auch den Gegensatz des Quotienten. — Zwei Hauptaufgaben der angewandten Größenlehre werden durch Division gelöst. Die eine ist die Messung, die andere die Theilung. Bei jener will man aus dem Wert und dem Was das Wie der Wiederholung, bei dieser aus dem Wert und dem Wie das Was bestimmen. Weil aber das Wie und das Was die Rollen tauschen können, ergibt sich für beide Bestimmungen nur eine einzige Durchführung. In Ansehung dessen ist der Gebrauch von zwei Divisionszeichen (: für die Messung, — für die Teilung[31]) etwas recht überflüssiges. Die im übrigen verblaßte Tradition macht sich noch bei den Verhältnisgleichungen bez. Proportionen bemerklich, wo „:" das herrschende Zeichen geblieben ist. — Man hat $12:4=3$ und auch $\frac{12}{4}=3$. Im ersten Fall konnte es sich nach früherem Gebrauch darum handeln, wie oft sind 4^h in 12^h enthalten bez. welche Zahl paßt für 12^h, wenn für 4^h als Einheit der Messung das Einheitszeichen 1 verwendet wird? Die Antwort lautet 3; denn 3 von den erwählten 1, eben 4^h, gezählt gibt 12^h. Im zweiten Fall mochte nach dem 4. Teil von 12 Tagwerk gefragt gewesen sein, welchen jeder von vier Gleichberechtigten davon erhalten darf. Man findet 3 u. z. Tagwerk.

Nr. 3. Die Divisionen unter Nr. 2 und z. d. Reihe α) mit Gebrauch des :, die Reihe β) mit — möglichst vollkommen durchzuführen!

....Die Erledigung der Frage, was würde man erhalten, wenn x bez. — x als Divisoren verwendet werden, schafft Gewißheit über die Geltung der aus dem Rechenunterricht geläufigen Regeln: 1) Dividend durch Quotient gibt den Divisor. 2) Quotient mal Divisor gibt den Dividenden. Sie treffen bei der Durchführung der Division im Sinn des —, also fortan stets, zu.

Nr. 4. B., S. 24—26, 3; 8; 13;....38!

....Gleich bei den ersten Beispielen zeigt sich: Ein Bruch hat den nämlichen Sinn wie das Produkt von anderen Brüchen, auf deren Zähler und Nenner sein Zähler bez. Nenner faktorenweise verteilt ist. Jeder Bruch darf damit gelten als ohne weiteres ablesbares Produkt von Brüchen[32]). Bei einzelnen Beispielen ergab sich die Regel: Der Quotient gleicher bez. entgegengesetzter Zahlen ist die positive bez. negative Einheit. Zuletzt erfährt man noch, daß es eine dreifache Stellung für gebotene Faktoren und auch eine dreifache für fortzulassende Faktoren bez. für Divisoren gibt. Die dreifache Faktorenstellung ist: 1) die selbständige, 2) die im Dividenden eines Bruchfaktors (eines Bruches, welcher selbst Faktor ist), 3) die im Divisor eines Bruchdivisors (eines Bruches, welcher selbst Divisor ist). Die dreifache Divisorenstellung ist: 1) die selbständige, 2) die im Divisor eines Bruchfaktors, 3) die im Dividenden eines Bruchdivisors. (Erinnerung an hieher gehörige Beispiele im Rechnen mit gemeinen Brüchen.)

Nr. 5. B., S. 26, 43; 48; 49 u. a.!

....Hier folgt als Analogie zu Regel im Kap. II, Nr. 7: Der Quotient aus einem Aggregat und einer Zahl stimmt überein mit dem Aggregat von denjenigen Quotienten, welche man erhält, wenn man jedes Glied des Aggregats durch die Zahl dividiert[33]).

Nr. 6. B., S. 26 und 27; 54; 56; 58 u. a.!

.... 76_2)

$$(0{,}06\,m^2 + 0{,}01\,mn - 0{,}18\,mp - 18{,}2\,n^2 + 13{,}57\,np - 2{,}4\,p^2) : (1{,}5\,p - 5{,}2\,n + 0{,}3\,m)$$

$$= \frac{0{,}06\,m^2 + 0{,}01\,mn - 0{,}18\,mp - 18{,}2\,n^2 + 13{,}57\,np - 2{,}4\,p^2}{0{,}3\,m - 5{,}2\,n + 1{,}5\,p}$$

$$= \mathbf{0{,}2\,m + 3{,}5\,n - 1{,}6\,p}, \text{ w. g. i.}^{34})$$

Nebenrechnungen:

$$+1{,}05\,mn - 0{,}48\,mp \qquad\qquad + 8{,}32\,np$$

$$\text{I. } 0{,}06\,m^2 : 0{,}3\,m = 0{,}2\,m;\quad \underset{-}{}0{,}06\,m^2 \mp 1{,}04\,mn \pm 0{,}3\,mp;$$

$$\text{II. } 1{,}05\,mn : 0{,}3\,m = 3{,}5\,n;\quad \underset{-}{}1{,}05\,mn \mp 18{,}2\,n^2 \pm 5{,}25\,np;$$

$$\text{III. } -0{,}48\,np : 0{,}3\,m = -1{,}6\,p;\ \mp 0{,}48\,mp \pm 8{,}32\,np \mp 2{,}4\,p^2.$$

— Bei der Division von Aggregaten durch einander, fällt es oft schwer die zur Vereinfachung des Quotienten notwendigen Reduktionen der Aggregate zu gewinnen. Da leistet derjenige Mechanismus, dessen Einrichtung seit der Division von Dezimalzahlen bekannt ist, vorzügliche Dienste. Er leistet: 1) die zur Reduktion des Dividenden taugenden Gruppen kommen mit der Reihe der Einzeldivisionen zum Vorschein, 2) zugleich entsteht der aus den Gruppen jeweils ausscheidende Faktor als Glied des Quotienten. — Wenn es noch einen Sinn hätte, könnte man nachträglich die Division streng im Sinne des Quotientenbegriffs durchführen.

Nr. 7. B., S. 27, 7~~2~~8) mit den drei Proben! Bei der Zahlenprobe ev. $x=1; y=-6; z=-2$!

Nr. 8. Welchen Wert hat der Ausdruck B., S. 27, $79_{1)}$ im Fall von $a=2; b=4; x=-5$?

Die Bestimmung am Ausdruck selbst versucht, erhält man $0:0$. Erst dividiert und dann bestimmt, so kommt $16\frac{23}{30}$ als wirklicher Wert des Ausdrucks im Spezialfall der angegebenen Werte.

Bemerkungen. $\frac{0}{0}$ erweist sich bei näherer Überlegung (vergl. die Engelsurteile in der Einleitung) als genau so unbestimmt wie a oder im allgemeinen ein Buchstabenausdruck. Was in einem Quotienten überflüssiger Weise zugleich als Faktor und Divisor steht, ist für die Wertbestimmung belanglos. Ist es unbestimmt, so kann es bei der Bestimmung alles mögliche und je nachdem auch 0 sein. Wird es nicht entfernt, so muß es nach dem einen (welchem?) Nullsatz den Dividenden und den Divisor in 0 übergehen machen; der Quotient erscheint dabei als $\frac{0}{0}$. Eine Bestimmung ist jedoch nicht erreicht. Soll dieselbe gelingen, so muß vorerst gehoben werden. Gerade das Auftreten des Quotienten in solch unbestimmter Form ist sicheres Anzeichen, daß sich heben läßt. — Man hat ein Mittel gewonnen, um Quotienten, von welchen der Dividend oder Divisor reduziert oder reduzierbar ist, möglichst zu vereinfachen. Stellt man fest, unter welchen Umständen der einzelne Faktor der Reduktion zu 0 wird, und bestimmt mit den gefundenen Werten den Quotienten, so wird derselbe zu $\frac{0}{0}$ oder wird es nicht. Im ersteren Fall läßt sich durch den zu 0 bestimmten Faktor heben.

Nr. 9. B., S. 32—35, 3; 8; 13 und sonstige!

$$3)\ \frac{3a}{m}-\frac{2a}{m}+\frac{a}{m}=\frac{a}{m}(3-2+1)=\frac{2a}{m}\text{[35]};\ \ldots\ldots$$

$$73)\ \frac{2x-3}{3x-3}-\frac{3x-1}{4x+4}+\frac{2+x}{1-x^2}$$

$$=\frac{2x-3}{3(x-1)}\underset{+}{-}\frac{\underset{-}{}3x\mp1}{4(x+1)}+\frac{\underset{-}{}2\pm x}{(-1\mp x)(1+x)}$$

$$=\frac{1}{12(-x^2\mp1)}\{\underset{-}{}8x^2\underset{+}{-}12x\underset{-}{+}8x\underset{+}{-}12\underset{+}{-}9x^2\underset{-}{+}3x\underset{-}{+}9x$$

$$\underset{+}{-}3\underset{+}{-}24\underset{+}{-}12x\}=\frac{x^2+4x+39}{12(1-x^2)}\text{[36]}.\ \ldots$$

— Wenn ein Aggregat auch nur einzelne Bruchglieder aufweist, heißt es Bruchaggregat und mit Recht. Denn schließlich steht jedes nicht ausdrücklich gebrochene Glied für einen Bruch mit Nenner 1. Ein Bruchaggregat läßt man aber grundsätzlich nie unverändert stehen, sondern ersetzt es durch einen einzigen Bruch. Dieses geschieht im folgenden Gedankengang. Was Divisor in einem Bruchglied ist, dieses ist, entweder ausdrücklich angegeben oder in einstweilen gehobener Form, Divisor bei allen anderen. Nun erlaubt der Wortlaut von R (oder vielmehr R ist gerade mit Rücksicht auf diese Anwendung so formuliert) diesen Divisor, mit dem Stammfaktor 1 zu einem Bruchfaktor vereinigt, auszuscheiden neben die Umklammerung des Aggregats, ohne den Bruchfaktor in den einzelnen Gliedern zu wiederholen. Wenn dem umklammerten Aggregat noch die Stellung im Dividenden des ausgesetzten Bruchfaktors angewiesen wird (vergl. Nr. 4), so ist der Zweck erreicht. — Die Gesamtheit der ausgeschiedenen Einzeldivisoren resp. der Divisor des zuletzt erhaltenen Bruches heißt Hauptnenner des Bruchaggregats. Derselbe ist ein Vielfaches von jedem einzelnen Divisor und auch ein Vielfaches von jedem einzelnen Nenner — wenn man achtsam verfährt, das kleinste gemeinsame Vielfache von sämtlichen Bruchsnennern. — In manchen Fällen empfiehlt es sich aber, ein größeres gemeinschaftliches Vielfaches als Hauptnenner zu wählen.

Nr. 10. Gemischte Übungen, B., S. 31 und 32, 3) 8) 13) und sonstige.

.... Der Quadraten-Differenz nächstverwandte kurrente Formen treten in den Beispielen auf. Ja, jene Form erweist sich als die einfachste in der ganzen Formengruppe. Alle sind ausgezeichnete Stufen und Auflösungen von ausgezeichneten Produkten. Ist n eine ganze positive Zahl [37]), so ist $a^n - b^n$ ausgezeichnete Stufe von $n + 1$ Gliedern; nur sind wie bei der Quadraten-Differenz alle Zwischenstufen mit dem Koëffizienten 0 versehen und kommen deshalb nicht zum Vorschein. Wie dort kann man jede Zwischenstufe zum Beispiel $0 \cdot a^{n-3}b^3$ in der Form $-a^{n-3}b^3 + a^{n-3}b^3$ hervortreten lassen. Wie dort ist die gruppenweise Reduktion an der

Reihe der Gliederpaare angängig und führt dabei zu $a^n - b^n = (a-b)(a^{n-1} + a^{n-2}b + a^{n-3}b^2 + \cdots + ab^{n-2} + b^{n-1})$. Den Befund spricht man als Hauptteilbarkeitsregel der Algebra aus wie folgt: Die Differenz von zwei Potenzen mit gleichen positiv ganzen Exponenten ist durch die Differenz von den ersten Potenzen der zwei Grundzahlen teilbar. Der ergänzende Teiler ist derjenige vollständige stufenförmige Übergang zwischen den nächst niederen Potenzen der zwei Grundzahlen, in welchem jeder Stufenkoëffizient $+1$ ist. — Zusätzliche Teilbarkeitsregeln erhält man, wenn man $-b$ an die Stelle eines jeden Faktors b setzt u. z. für den Fall, daß n eine gerade Zahl ist, eine eigene und für ungerades n eine weitere. Der Nachweis erfolgt wie oben; nur muß die Einschaltung der Nullstufen so vollzogen werden, daß immer ein paar positive und negative Glieder abwechseln. Mit Beachtung dessen erhält man für gerades n dabei $a^n - b^n = (a+b)(a^{n-1} - a^{n-2}b + \cdots + ab^{n-2} - b^{n-1})$; für ungerades n entsteht

$$a^n + b^n = (a+b)(a^{n-1} - a^{n-2}b + \cdots - ab^{n-2} + b^{n-1}).$$

Hienach ist es leicht, Zusatzregeln zu formulieren[38]). — Den Überblick über die Gesamtheit der Regeln und der nebenher gehenden Nichtteilbarkeitsregel erzielt man, wenn man die Frage, ob die Summe bezw. Differenz von zwei n^{ten} Potenzen 1. durch die Summe, 2. durch die Differenz der zwei Grundzahlen rational[39]) teilbar ist, beantwortet für positives gerades n zu 1. mit „nein" bez. „ja", zu 2. mit „nein" bez. „ja", für positives ungerades n zu 1. mit „ja" bez. „nein", zu 2. mit „nein" bez. „ja".

Kapitel II.[40])

Bestimmungsaufgaben 1. Grades. Bestimmungen aus Systemen 1. Grades.

Sollen Bestimmungsaufgaben systematisch bearbeitet werden,