[Die andern Gruppen enthielten unter A) die Frage nach der Differenz von u bez. v bez. w und x einer-, der Summe der vier übrigen andererseits, sowie die nach der Summe von allen fünf. B) entsprechend, als Verhältniszahlen jedoch 6 : 5 : 4 : 3 bez. 3 : 4 : 5 : 6 bez. 4 : 5 : 6 : 7. C) gleichlautend.]

Kapitel II.

Reduktionen und Gegenreduktionen r; R [ρ].

r. Kommt in einem Aggregat ein Glied wiederholt vor, so reduziert man (kürzt ab), indem man es nur einmal schreibt und hinter dem (einem) + bez. — desselben notiert, wie oft es vorkommt. Z. B. $a - b - b + c + a - b + c + c - b$ reduziert man zu $2a - 4b + 3c$. — Die (Ziffer-) Notiz nennt man Koëffizient der reduzierten Zählung, diese selbst das Produkt[11]) von zwei Zahlen. In unserem Beispiel erhielt man ein Aggregat von drei Produkten als Gliedern.

Bemerkungen. Bei der Anwendung von r bedarf man in gewissen Fällen ein Sonderungszeichen, nämlich einen Punkt (· oder ×). Da man nun bei Produkten das deren Sinn so angemessene „mal" gerne spricht, so wird der Punkt gewöhnlich als Multiplikationszeichen angesehen, eigentlich ohne Recht[12]), denn die Regel r weiß nichts von einem Punkt. Nur in den Fällen, wo eine bestimmte Zahl, ohne daß ihr eine Kette vorausgeht, wiederholt ist, braucht man ihn. So schreibt man, um von der Zählung 38 die Reduktion von 3 Zählungen 8 zu unterscheiden, für letztere $3 \cdot 8$; oder für $-2-2-2-2-2$ setzt man $-5 \cdot 2$. Formen wie $-22\frac{1}{2} \cdot (-9)$ und $-22\frac{1}{2}(-9)$ bedeuten bereits genau das gleiche. Kommt vollends eine unbestimmte Zählung wiederholt vor, so bleibt der Punkt in der Kurzschrift regelmäßig weg, ohne daß verwehrt ist ein „mal" zu sprechen. — Auf die Form $-22\frac{1}{2}(-9)$ stößt man bei Reduktion des Aggregats, welches aus 22 Gliedern $-(-9)$ und einem halb so großen gefügt ist (das nämliche wie ein aus 45 Gliedern halb so groß als $-(-9)$ bez. je $4\frac{1}{2}$ gebildetes Aggregat). Beim Lesen dieser Form nimmt man in Gedanken eine Sonderung des durch den Koëffizienten abgespaltenen „$-$" und seine Verknüpfung mit dem Koëffizienten vor, indem man die Form als $22\frac{1}{2}$maligen Wegfall des Nachteils 9 deutet. Dem kommt die Mathematik entgegen dadurch, daß sie $-22\frac{1}{2}$ als Koëffizienten im erweiterten Sinn gelten läßt und sich so den Vorteil sichert, daß der Koëffizient genau wie eine jede Zählung alles mögliche, auch ein negatives, sein darf. — Daß $3 \cdot 8 = 8 \cdot 3$ ist, wissen wir längst. Ebenso, daß es andere Zahlen wie 3 und 8 sein können. Auch $22\frac{1}{2}$ und -9 können es sein und es gilt $-22\frac{1}{2}(-9) = -9(-22\frac{1}{2})$. Faßt man nämlich den Koëffizienten in der eben erläuterten Erweiterung auf, so hat man links den $22\frac{1}{2}$maligen Wegfall des Nachteils 9, rechts den 9maligen Wegfall des Nachteils $22\frac{1}{2}$. Beides ist Vorteil im Betrag $202\frac{1}{2}$. Den Koëffizienten in der ursprünglichen Beschränkung genommen, so hat man links das aus $22\frac{1}{2}$ Zählungen $-(-9)$ bez. $+9$ gebildete Aggregat in Kurzschrift vor sich, rechts diejenige des aus 9 Gliedern $-(-22\frac{1}{2})$ bez. $+22\frac{1}{2}$ bestehenden Aggregats. Beidemal erhält man, wie schon oben, $202\frac{1}{2}$. Was wir auch für zwei Zahlen haben, ob wir, allgemein ausgedrückt, a und b haben, stets gilt $ab = ba$ d. h. die Reihenfolge der Faktoren eines Produkts ist ohne Einfluß auf dessen Wert. Man nennt nämlich im Produkt von zwei Zahlen jede derselben, das „Was" der Wiederholung nicht minder wie deren „Wie", Faktor und betont mit der Gleichbenennung, daß beide die Rolle tauschen können. Nichts steht im Weg, den wirklichen Vorgängen nachkommend, Produkte von mehr als zwei Faktoren zu bilden, und auch da gilt der hochwichtige Satz[13]). Infolge der zweifachen Auffassung des Koëffizienten dürfen dabei die $+$ und $-$, welche die einzelnen Faktoren als Vorzeichen führen, samt und sonders als Zeichen einer einzigen an Faktor 1 geknüpften Kette gelten.

R. Kommt in allen Gliedern eines Aggregats der nämliche Faktor vor, so schreibt man ihn nur einmal neben

(vor oder hinter) die Umklammerung des Aggregats ohne diesen Faktor in den einzelnen Gliedern zu wiederholen. Zum Beispiel reduziert man $2a-2ab-6ac+3ad$ beliebig zu $a(2-2b-6c+3d)$ oder $2a(1-b-3c+1{,}5d)$ oder $-2a(-1+b+3c-1{,}5d)$ u. dgl. mehr.

Bemerkung. Die durch R gewonnenen Reduktionsformen sind (ebenfalls) vollwertige Zeichen für die reduzierten Aggregate. Man nennt solche Form „das Produkt von einem Aggregat mit einer Zahl“. Oben war es das Produkt von dem in Klammern gefaßten Aggregat mit der jemals vorausgehenden Zahl a bez. 2a bez. $-2a$. Der Name ist zu Recht gegeben; denn betrachtet man $mx-nx+px$, so kann man reduzieren zu $x(m-n+p)$; man kann aber auch auflösen zu dem Aggregat $\overset{1}{m-n+p}+\overset{2}{m-n+p}\cdots+\overset{x}{m-n+p}$ und erkennt hierin thatsächlich die x-fache Wiederholung des Aggregats $m-n+p$, wie es der obigen Deutung der Reduktion $x(m-n+p)$ entspricht [vergl. auch die Deutung von $-22\frac{1}{2}(-9)$ in der Bemerkung zu r]. — Den beispielsweise angeführten Reduktionen entnimmt man noch den Satz: Das Produkt von zwei Zahlen stimmt überein mit dem Produkt von deren Gegensätzen[14]).

ϱ. Es verlohnt sich, die später eingehend zu erörternde Regel bereits jetzt zu benützen: **Kommt in einem Produkt ein Faktor wiederholt vor, so schreibt man ihn nur einmal und notiert rechts oben, wie oft er vorkommt.** Zum Beispiel reduziert man $2abc \cdot 4ac \cdot 4abd$ zu $2^5a^3b^2c^2d$. — Die erhaltene Kurzschrift ist ein vollwertiges Zahlzeichen, heißt Potenz des wiederholt auftretenden Faktors bez. ihrer Basis; die Notiz rechts oben ist der (Potenz-) Exponent. — Obige Form ist ein Produkt, dessen Faktoren die Potenzen $2^5;a^3;b^2;c^2;d^1$ — wie man für d zur Bekräftigung, daß es einmal als Faktor gilt, schreiben darf — sind.

Nr. 1. Bardey[15]), S. 12, die Aggregate unter 18 zusammenzufassen! Probe mit $a=-1; b=2; x=-3$!

M. H. d. N. n.

$$7-x+a-5+7a-x+2a-3b+2x-10+2-3a$$
$$+2x-5a+3b+a=\mathbf{2x-6+3a}.$$

— Die angegebenen Werte eingesetzt, so kommt d. R. n.

L. $7+3-1-5-7+3-2-6-6-10+2+3-6$
$+5+6-1$ bez. -15;

R. $-6-6-3$ bez. -15, wie L. steht und sein soll!

Nr. 2. Wie müssen a; b und x gewählt werden, soll der bei Nr. 1 gegebene Ausdruck zu 0 werden und x halb so groß als a sein?

Für den Ausdruck kann man seine reduzierte Form benützen. E. s. s. $2x-6+3a=0$ (Hauptgl.); ferner $2x=a$ (Nebengl.). J. d. H. g. k. d. R. n. $a-6+3a=0$ bez. $4a=6$ bez. $a=\frac{3}{2}$; also $x=\frac{3}{4}$; b kann jede Zahl sein. Die Aufgabe ist gelöst[16]).

Nr. 3. B., S. 30 und 31, 3;8;13;…, ferner $a+a+a+a=$! …. 23) $ax+ay+bx+by=a(x+y)+b(x+y)$ $=(x+y)(a+b)$ oder auch $\cdots=x(a+b)+y(a+b)$ $=(a+b)(x+y)$. — Hinweis, daß der Wortlaut von R dem Verfahren nicht entgegensteht. An welchen Satz erinnert der doppelte Ausgang?
28) $ab-a-b+1=a(b-1)-(b-1)=(b-1)(a-1)$ oder auch $\cdots=(1-b)-a(1-b)=(1-b)(1-a)$[17]). — An welchen Satz erinnert hier der doppelte Ausgang? (Vergl. auch Kap. I, Nr. 18.) 28_3) $10n^2+21xy-14nx-15ny$ $=5n(2n-3y)\underset{-}{+}7x(\underset{-}{}3y\underset{+}{-}2n)=(2n-3y)(5n-7x)$.

— Eine Zahl und deren Gegensatz sind im Grund die nämliche Zahl nur mit der gegensätzlichen Einweisung in die Verknüpfung mit andern Zahlen. Darauf oder auf den Schlußabsatz in der Bemerkung zu R stützt sich der hier angewendete Mechanismus, welcher unter die Rubrik: **Verwandlung einer „—" Reduktion in eine „+" Reduktion** fallen mag. 34) $2ax-5ay+a-2bx+5by-b=\ldots$. Ein Faktor wird dreigliederiges Aggregat! Man kann sich da fragen: Ist es in ähnlichen Fällen vorteilhafter das Aggregat in zwei Gruppen von je drei Gliedern, oder in drei Gruppen von je zwei Gliedern zu überschauen? [In allen Fällen aber Gruppen von gleichviel Gliedern!] 34_4) Umformung!
$(x-y)(3a+4b)\underset{-}{+}(5b-4a)(\underset{-}{}y\underset{-}{+}x)\underset{-}{+}2(x-y)(\underset{-}{}4b\underset{-}{+}a)$
$=(x-y)\{(3a+4b)+(5b-4a)+2(a-4b)\}$[18])

$$=(x-y)\{3a+4b+5b-4a+2a-8b\}=(x-y)(a+b).$$

$$a+a+a+a=a(1+1+1+1)=4a.$$

Bemerkungen. Aus dem letzten Beispiel wird klar, inwiefern R auf r im ausgezeichneten Fall hinauskommt, r also als Unterfall in R begriffen ist. — Bei anderen Beispielen ergibt sich als Regel: Ist eine Zählung ein von Klammern umschlossenes Aggregat mit dem Vorzeichen + bez. —, so darf sie ersetzt werden durch das Aggregat bez. dessen Gegensatz. — Die Hauptsache jedoch ist: Es hat sich eine neue Reduktionsform, das Produkt von zwei Aggregaten, als vollwertige Zahlform eingestellt. Man konnte in den betreffenden Fällen Gruppen von gleichviel Gliedern mit je einem gemeinsamen Faktor wahrnehmen und dann jede so reduzieren, daß die Gesamtheit der erhaltenen Produkte die Reduktion wieder erlaubt hat[19]). Wir haben die Veranlassung, eine zweifache Handhabung von R anzuerkennen: 1) Die ein Gesamtaggregat sofort umfassende; sie führt zum Produkt eines Aggregats mit einer Zahl. 2) Die erst Gruppen von gleichviel Gliedern und danach deren sämtliche Reduktionen umfassende; sie führt zum Produkt von zwei Aggregaten. Wo beide Handhabungen möglich sind, empfiehlt es sich die gruppenweise Zerlegung zu wählen. Die bisherigen Sätze für Produkte gelten fort, ob viel, ob wenig Faktoren Aggregate sind. — Vor dem Versuch der Reduktion von viergliederigen Aggregaten zu Produkten von zwei zweigliederigen resp. zu binomischen Faktoren sollte man sich vergewissern, ob man zum Ziele kommt bez. ob das Aggregat in zweifacher Weise aus zwei Vielfachen je eines Binoms zusammengesetzt ist, d. h. die Eigentümlichkeit des Aggregats der vier Glieder einer geometrischen Proportion zeigt. Bei allen bearbeiteten Beispielen dieser Art ist thatsächlich auch das Produkt von zwei bestimmten Gliedern des Aggregats gleich dem Produkt der zwei andern. Noch mehr; läßt man überall die Koëffizienten außer Spiel, so bleiben Glieder von der Art derjenigen einer geometrischen Proportion bestehen, und auch die Koëffizienten dieser Glieder halten eine eben solche Proportion ein. Wo ein viergliederiges Aggregat diese Merkmale nicht besitzt, kann gruppenweise Reduktion nicht gelingen.

Nr. 4. Zu verschiedenen Beispielen unter Nr. 3) Proben, zum Beispiel zu 34_4) die Probe mit $x = 3$; $y = -2$; $a = 1\frac{1}{4}$; $b = -1{,}25$!

Nr. 5. Ohne weiteres steht fest: Ein Produkt ist Null, sobald ein Faktor Null geworden ist[20]). Daraufhin zu ermitteln, unter welchen Umständen einzelne der unter Nr. 3 bearbeiteten Aggregate Nullwert erlangen!

...33) Das Aggregat ist 0 entweder, wenn x und y beliebig, etwa 3 und -4, sind und gilt $a - b + c = 0$, was beispielsweise der Fall ist, sobald außer $a = -5$ und $b = 4$ noch gilt $c = 9$; oder, wenn a, b und c beliebig, etwa $\frac{1}{2}; -\frac{1}{3}; -\frac{1}{6}$, sind und x der Gegensatz zu y, etwa $x = 5$ und $y = -5$ ist. — 34_5) Das Aggregat ist 0 entweder, wenn a und b beliebig, etwa 0 und 1, sind und $2m - 3p = 0$ bez. m und p sich wie $3:2$ verhalten; oder, wenn $21a + b = 0$ ist bez. a und $-b$ sich wie $1:21$ verhalten, während m und p beliebig sind.

Nr. 6. Proben zu Bestimmungen unter Nr. 5!

....33) I) Die festgesetzten Werte $a = -5, \dots$ eingesetzt, so wird das vorgelegte Aggregat d. R. n. z..... II)..... 34_5) I) Den Ermittelungen entspr. $a = 0$; $b = 1$; $m = 3E$; $p = 2E$ in das Aggregat eingesetzt, so k. d. R. n.

$$3(2 \cdot 0 + 7 \cdot 1)(2 \cdot 3E - 3 \cdot 2E) + 5(3 \cdot 0 - 4 \cdot 1)(2 \cdot 3E - 3 \cdot 2E) = 3 \cdot 7 \cdot 0 + 5 \cdot (-4) \cdot 0 = 0,$$

w. e. s. s.! II) hier kommt d. R. n.

$$3(2E - 147E)(2m - 3p) + 5(3E + 84E)(2m - 3p) = \dots.$$

Nr. 7. B., S. 18 und 19, Auswahl unter 40) — 57_7)!

....44_2) Umformung:

$$3a(a-c)b - b(2b-3a)c - (3a-2c)b^2 + b^2 \cdot (5a+a)$$
$$= 3a^2b - 3abc - 2b^2c + 3abc - 3ab^2 + 2b^2c + 6ab^2$$
$$= 3a^2b + 3ab^2 = 3ab(a+b)$$

[21]). — Von welcher Art ist der vorgelegte Ausdruck, desgl. jede einzelne Umformung? Hier kam die nach dem Wortlaut von R selbstverständliche Regel zur Anwendung: Das Produkt von einem Aggregat mit einer Zahl stimmt überein mit dem Aggregat der Produkte[22]), welche man erhält, wenn man

jedes Glied jenes Aggregats mit der Zahl multipliziert[23]).

Nr. 8. B., S. 19, Auswahl aus 60) — 65) S. 20, Auswahl aus 110) — 110_2), S. 21, Auswahl aus 125) — 125_2) u. a.!

.... Dem Gang vieler Beispiele entspricht die folgende Regel: Das Produkt von zwei Aggregaten stimmt überein mit dem Aggregat von Produkten, welche man erhält, wenn man jedes Glied des einen von jenen Aggregaten mit einem jeden des andern multipliziert.

Nr. 9. Ausgezeichnete Produkte. Auswahl nach B., S. 19 und 20 aus 66) — 83) und 90) — 108) u. a.!

.... Vorstehend kann man zwei Arten von Beispielen, bei welchen die Auflösung wesentliche Abkürzungen erlaubt, unterscheiden. Bei der einen Art war stets ein Aggregat mit sich selbst zu multiplizieren, zu quadrieren, wie man sagt. Von gewissen Gliedern, welche man erhielt, stand im Voraus fest, daß sie ein zweites Mal vorkommen müssen[24]). Diesen Umstand berücksichtigt die Regel: Das Quadrat eines Aggregats stimmt überein mit demjenigen weiteren Aggregat, dessen Glieder die Quadrate aller einzelnen Glieder jenes Aggregats und die Doppelprodukte eines jeden seiner Glieder mit jedem vorhergehenden sind. Auch wenn ein Aggregat mit einem seiner Vielfachen multipliziert werden soll, leistet die Regel gute Dienste. — Im andern Fall stand sogleich fest, daß von gewissen Gliedern auch die Gegensätze erhalten werden und mit diesen entfallen. Dem entspricht die Regel: Das Produkt aus der Summe zweier Zahlen, gleichviel ob einfacher oder zusammengesetzter, mit deren Differenz stimmt überein mit der Differenz der Quadrate dieser Zahlen.

Nr. 10. Zerlegung trinomischer Stufen[25]).

$$2m^2 - 3m - 4m + 6 = m(2m - 3) - 2(2m - 3)$$
$$= (2m - 3)(m - 2); \ldots\ldots$$
$$3 - 70x^2 - 29x = 3 + 6x - 35x - 70x^2$$
$$= 3(1 + 2x) - 35x(1 + 2x) = (1 + 2x)(3 - 5x);$$
$$3 - 70x^2 + 29x; 70x^2 + 3 + 29x; 70x^2 - 29x + 3; \ldots\ldots$$

$$\begin{aligned}&6(a+2b)^2x^2-5(2b+a)^4x+8x^4\\&=8x^4-4(a+2b)^2x^3+10(a+2b)^2x^3-5(a+2b)^4x^2\\&=4x^3\{2x-(a+2b)^2\}+5(a+2b)^2x^2\{2x-(a+2b)^2\}\\&=x^2(2x-a^2-4ab-4b^2)(4x+5a^2+20ab+20b^2);\end{aligned}$$

$4x^4-36y^2z^6=4x^4-12x^2yz^3+12x^2yz^3-36y^3z^6=\dots$[26]).

Bemerkungen. Dreigliederige Aggregate, von welchen die Glieder in eine Reihenfolge gebracht werden können, daß bez. einer oder mehrere Arten unbestimmter Faktoren gleichmäßige Abminderung bez. Mehrung in der Häufigkeit des Vorkommens von Glied zu Glied beobachtet wird, heißen gestufte Trinome oder trinomische Stufen. — Im ersten der obigen Beispiele könnte das Aggregat auf eine trinomische Stufe zusammengezogen werden (m bez. m^1 ist die zu beobachtende Minderung des Faktorenbestandes bez. die Abstufung des Trinoms von Glied zu Glied). Doch sähe man der neuen Form nicht unmittelbar an, daß sie reduktionsfähig ist. Jene Form dagegen besitzt die unter Nr. 3 hervorgehobenen Merkmale dafür. Man weiß jedoch unter Benützung des Umstandes, daß der Koëffizient der Zwischenstufe die Summe von einem Faktorenpaar des Produkts derbeiden andern Koëffizienten ist, die trinomische Stufe zum reduktionsfähigen viergliederigen Aggregat umzuformen und gelangt dadurch zur Reduktion der Stufe selbst. Der Vergleich des allgemeinsten Produktes von Aggregaten, welches trinomische Stufen liefert, mit der Reihe der Übergänge zu seiner kurrenten Form bestätigt die Richtigkeit der für den einzelnen Fall passenden Auflösungsweise für jeden anderen denkbaren Fall. Man hat nämlich

$$\begin{aligned}(A_1X+B_1)(A_2X+B_2)&=A_1A_2X^2+A_2B_1X+A_1B_2X+B_1B_2\\&=A_1A_2X^2+(A_2B_1+A_1B_2)X+B_1B_2.\end{aligned}$$

— Auf die Koëffizienten kein Gewicht gelegt, so ist die Zwischenstufe eines gestuften Trinoms die mittlere geometrische Proportionale zu den zwei andern. Ein solches Trinom ist demnach reduktionsfähig auf Grund des weiteren Umstandes, daß der Koëffizient der Zwischenstufe die Summe von zwei Faktoren ist, in welche das Produkt der andern Koëffizienten zerfällt. Die günstige Zerspaltung der Zwischenstufe wird dadurch möglich.

Nr. 11. Bestimmungen zu 0 an einzelnen unter Nr. 10 bearbeiteten trinomischen Stufen! Proben!

Nr. 12. Eine Großmutter und ihr Enkel, welcher das Gymnasium besucht, während die Großmutter ungewöhnliche mathematische Kenntnisse besitzt, reisen mit einander und werden von einem Mitreisenden lästig ausgefragt, zuletzt über ihr Alter. Da antworteten sie das Gleiche und dennoch richtig. Der Fragende hält sich für gefoppt und stellt das Fragen ein. Wie alt war jedes, indem die Antwort gleicher Weise gelautet hat: Die 85fache Menge meiner Jahre ist 1050 mehr als dieselbe mit ihr selbst multipliziert?[27]).

Das Alter der gefragten Person zu x Jahren angenommen, so ist die 85fache Menge der Jahre $85\,x$; sie ist aber auch die mit sich selbst multiplizierte und noch um 1050 erhöhte Menge; sie ist $x^2 + 1050$; daher muß sein

$$85\,x = x^2 + 1050 \text{ bez. } x^2 - 85\,x + 1050 = 0 \text{ bez.}$$

$$x^2 - 15\,x - 70\,x + 1050 = 0 \text{ bez. } x(x-15) - 70(x-15) = 0$$

$$\text{bez. } (x-15)(x-70) = 0 \text{ bez. entweder } x - 15 = 0,$$

$$\text{also } x = 15 \text{ oder } x - 70 = 0, \text{ also } x = 70.$$

Die Großmutter konnte nur 70, der Enkel blos 15 Jahre alt sein.

Kapitel II a.

Division. Gebrochene Zahlen.

Nr. 1. Wie erhält man $4\,a$; $-a^4$; $-2\,a^2bc$; $4\,a + a^4$ und $2\,a^2(1-a)$ aus a!

Man erhält das Gewünschte, wenn man 4; $-a^3$; $-2\,abc$; $4 + a^3$; $2\,a\,(1-a)$ zu a als Faktor stellt, bez. a damit multipliziert. — Das Multiplizieren ist angewiesen und (abgesehen von möglichen Vereinfachungen) vollzogen durch bloßes Nebeneinanderstellen der Faktoren[28]). Indessen muß die Ver-