III) Hier liegt, so zu sagen, bereits die Ankündigung des jetzt behandelten Themas vor. Wenn es bis heute ausgesetzt geblieben ist, so gab sich der Verfasser der Hoffnung hin, es möchte von einem Berufeneren in Angriff genommen werden.

Kapitel I.

Einfaches und zusammengesetztes Zählen.

Vorbemerkung. Alles Rechnen ist ein Zählen und dient zur Bemessung von irgend welchen Ausdehnungen, welche in übereinstimmende Stücke, Einheiten, zerlegt oder aus solchen verbunden sind. Das Mittel für das Zählen ist die Zahlenreihe[1]), welche derart abgeschritten wird, daß man für jedes Stück eine Stelle vor= oder zurückgeht, je nach der Bedeutung des Stücks für die ganze Menge. Jeder vollständig zum Abschluß kommende Zählungsvorgang beginnt bei 0.

Nr. 1. Was drückt eine bestimmte Zahl z. B. 10 aus?

Sie fordert, daß man von derjenigen Stelle der Zahlenreihe, wo man sich befindet, so viel Stellen fortschreite, als diejenige Zählung umfaßt, welche von 0 unternommen nach 10 führt, nämlich wie die Zählung 1;2;3; . . . . 9;10! — Zugleich drückt sie aus, daß so schon gezählt ist.

Nr. 2. Man steht auf 7 und soll eine Zählung (vom Grad) 10 ausführen[2]). Wie geschieht es?

Man zählt entweder 8;9;10; . . . 16;17! oder zählt 6;5;4 . . . — 2; — 3!

Nr. 3. Wie unterscheidet man aber beide Zählungen?

Jene gilt als Zählung + 10, diese als eine Zählung — 10, indem vereinbart ist: bei den bestimmten Zahlen weist + den Weg nach dem ohne Ende zunehmenden +, nach $+\infty$, und — den Weg nach $-\infty$. + 10 und — 10 sind reine Gegensätze und machen beim Eintreten in die nämliche zusammengesetzte Zählung einander wirkungslos bez. heben einander.

Nr. 4. Was hat man sich bei 0 vorzustellen?

0 hat den Sinn von „nicht zu zählen“ bez. „nicht gezählt“, wie es der Fall ist bei blos zwei gegensätzlichen Zählungen; z. B. gilt $-5+5=0$. Ehe überhaupt gezählt wird, liegt ebenfalls ein „nicht gezählt“ vor.

Nr. 5. Eine Zählung ist nur aus einfachen Zählungen 7;12 und 9 zusammengesetzt und folgt dabei keiner andern nach, resp. beginnt bei Null (vergl. Vorbemerkung). Welches ist dieselbe, wenn die aus den meisten Einheiten gefügte, resp. absolut größte Einzelzählung den andern entgegenwirkt?

Sie ist 1;2;3;…6;7! 6;5;4;…-4;-5! -4; -3; -2;…3;4! oder -1; -2; -3;…-6; -7! -6; -5; -4;…4;5! 4;3;2;…-3; -4!

Nr. 6. Wie ist es üblich, diese Zählungen kurz anzuschreiben?

Man schreibt $7-12+9=+4$ bez. $-7+12-9=-4$.

Nr. 7. Worin stimmen sie trotz aller Verschiedenheit überein?

Beide laufen auf das nämliche hinaus wie eine einzelne Zählung 4 {1;2;3;4! bez. -1; -2; -3; -4!}. Das „=“ drückt überhaupt aus, daß die vollständigen Zählungen, zwischen welchen es steht, einander ersetzen, wenn es auf den Ausgang bezw. Wert der Zählungen und, wie in der Regel bei Bestimmungen, nicht auf eine besondere Möglichkeit der Durchführung ankommt.

Nr. 8. Es wird behauptet, daß bei der Ausführung gefehlt wurde, da mit der letzten Einzelzählung zu beginnen war. Welches ist die richtige Zählung?

Sie ist entweder $9-12+7=+4$ oder $-9+12-7=-4$ oder $9+7-12=+4$ oder $-9-7+12=-4$. — Aber es zeigt sich, daß nichts verfehlt war, wenn es nur auf den Wert der Zählung ankommt. Nun nennt man eine zusammengesetzte Zählung Aggregat oder algebraische Summe, während die einzelnen Zählungen Glieder des Aggregats bez. algebraische Summanden heißen. Es gilt und ist ein wichtiger Satz: Die Reihenfolge der Glieder ist ohne Einfluß auf den Wert des Aggregats (die Reihenfolge der algebraischen Summanden rc.).

Nr. 9. Sind beide Zählungen wirklich ganz gleich bedeutend?

Sie können für den nämlichen Zählungsvorgang stehen[3]), thun es dann aber im Sinn rein gegensätzlicher Auffassungen. Steht da der Vorgang in Verbindung mit anderen, deren Sinn bereits feststeht, so ist nur diejenige Zählung die richtige, bei welcher alle sich verstärkenden Einzelzählungen — über sie ist kein Zweifel möglich — die nämlichen Vorzeichen besitzen.

Nr. 10. Können zwei Zählungen wie die in Nr. 6 im nämlichen Zusammenhang vereinigt vorkommen, und wie ist es da?

Allerdings treffen solche Zählungen auch zusammen, wie überhaupt zu jedem Vorgange der rein entgegengesetzte so gut als sonst einer sich gesellen kann. Da aber machen die beiden, wie nicht minder die Zählungen dafür, einander wirkungslos, z. B. gilt $7-12+9-7+12-9=0$ u. dgl.

Nr. 11. Wenn a, b, c bez. $+a, +b, +c$, wie es auch heißen darf, fortan irgend welche Zahlen bedeuten, so ist $a+b+c=0$, wenn die eine Zählung den übrigen vollständig entgegenwirkt. Welche von den Zählungen ist es?

Zu $a+b$ ist c, aber eben so gut ist b zu $a+c$ oder auch a zu $b+c$ hier entgegengesetzt und hebt es auf. — Man merke: α) $+$ steht vor unbestimmten Zahlen zunächst im Hinblick auf das immer mögliche Zusammentreffen mit dem reinen Gegensatz, welcher ebenso, nur $-$ statt $+$ voran, geschrieben wird. β) Das Zusammengehören von Zählungen drückt man durch bloßes Nebeneinanderschreiben derselben aus; aber eine andern folgende Zählung muß, was ihr zukommt, $+$ oder $-$, frei voran haben[4]). γ) Indem a oder b oder c das $+$ als Vorzeichen führen können, geht es auch, sie als nachfolgende Zählungen zu schreiben.

Nr. 12. Wieder sei $a+b+c=0$. Was vermag da a oder b oder c zu ersetzen?

Hier leistet a dasselbe wie $-b-c$; also gilt $a=-b-c$; ebenso gilt $b=-a-c$ und $c=-a-b$.

Nr. 13. Was läßt sich von $10+a$ bezüglich der Art der Zählung, was bezüglich des Wertes behaupten?

$10+a$ ist eine zusammengesetzte Zählung und zwar aus Zählungen gleicher bez. entgegengesetzter Art verbunden, je nachdem a positiv (bestimmte Zahl zwischen 0 u. $+\infty$) oder negativ (bestimmte Zahl zwischen 0 und $-\infty$) ist[5]). — Was den Wert anlangt, so ist $10+a$ größer als a[6]), also je nach der Beschaffenheit von a alles mögliche und insbesondere 10, wenn $a=0$ ist; dagegen nie so groß als a, außer 10 hat gegenüber a Nullgröße. Man bedenke noch: Von jeder Stelle der Zahlenreihe kann man mit einer einzigen Zählung zu irgend einer andern übergehen.

Nr. 14. Wie muß a beschaffen sein, damit gilt $28\frac{7}{18}+a=13\frac{11}{12}$?

Mit gehöriger Beachtung von Nr. 12 erhält man der Reihe nach $28\frac{7}{18}+a=13\frac{11}{12}$ bez. $a=13\frac{11}{12}-28\frac{7}{18}$ bez. $a=-\mathbf{14\frac{17}{36}}$, w. g. i. Man entnimmt nämlich aus Nr. 12, daß man bei der Gleichheit von zwei Zählungen aus einer ein Glied zur andern überführen (transponieren) darf, so zwar, daß dabei gilt: Ein Glied verwandelt sich beim Transponieren in seinen Gegensatz (Regel von der Gliedertransposition.)

Nr. 15. Den Wert von $a-b-c+d-e+f-g$ zu bestimmen, wenn α) $a=28$; $b=-11$; $c=23$; $d=16$; $e=-8$; $f=-31$; $g=21$, β) $a=-51\frac{13}{18}$; $b=-13\frac{17}{24}$; $c=42\frac{31}{36}$; $d=30\frac{5}{12}$; $e=-19\frac{5}{6}$; $f=-26\frac{7}{8}$; $g=-53\frac{3}{4}$ gilt!

Die angegebenen Werte eingesetzt, so wird der Ausdruck d. R. n. zu α) $28+11-23+16+8-31-21=-\mathbf{12}$, w. g. i. β) $-51\frac{13}{18}+13\frac{17}{24}-42\frac{31}{36}+30\frac{5}{12}+19\frac{5}{6}-26\frac{7}{8}+53\frac{3}{4}=-\mathbf{3\frac{3}{4}}$, w. g. i. — Folgende Nebenrechnung liefert β)

+	−	+	−
13	51	$\frac{17}{24}=\frac{51}{\cdot}$	$\frac{13}{18}=\frac{52}{\cdot}$
30	42	$\frac{5}{12}=\frac{30}{\cdot}$	$\frac{31}{36}=\frac{62}{\cdot}$
19	26	$\frac{5}{6}=\frac{60}{\cdot}$	$\frac{7}{8}=\frac{63}{\cdot}$
53		$\frac{3}{4}=\frac{54}{\cdot}$	

Σ: 115; Σ: 119; $\triangle$: -4. Σ: $\frac{195}{72}$; Σ: $\frac{177}{72}$; $\triangle$: $+\frac{18}{72}$ bez. $\frac{1}{4}$.

Nr. 16. Graphische Darstellung von Nr. 15 α)![7])

Der Gang des Thermometers gelte als vorbildlich! — Man benützt die Darstellung vorteilhaft zu einem Beweis des Satzes in Nr. 8, etwa wie folgt: Eine Zählung an der richtigen Stelle übersehen, so ist man um so viel zurück oder vor, als sie vor- oder zurückgeführt hätte. Die Zählung irgend später nachgeholt, so ist man um nichts mehr zurück oder vor, insbesondere wird die nämliche Endstelle wie ohne das Übersehen erreicht.

Nr. 17. $a - 27{,}252 + b - c - d + e$ soll den Wert 0 erhalten; ferner seien a und e Gegensätze, b und c gleich groß. Wie muß d beschaffen sein?

E. s. s. $a - 27{,}252 + b - c - d + e = 0$ (Hauptgleichung); ferner $a + e = 0$ bez. $e = -a$ und $b = c$ bez. $b - c = 0$ (Nebengleichungen). In die Hauptgl. eingesetzt, so kommt d. R. n. $\mp 27{,}252 \mp d = 0$[8]) bez. $d = -$ **27,252,** w. g. i.

Nr. 18. Der vorige Ausdruck soll wieder zu 0 werden, aber von den Zahlen a;b;c;d und e die nächstfolgende immer um 100 größer sein! Wie ist zu wählen?

E. s. s. $a - 27{,}252 + b - c - d + e = 0$ (Hauptgl.); ferner $b = a + 100$; $c = a + 200$; $d = a + 300$; $e = a + 400$ (Nebengl.). J. d. H. g. k. d. R. n.

$a - 27{,}252 + a + 100 - a - 200 - a - 300 + a + 400 = 0$ bez. $a =$ **27,252;** also $b =$ **127,252;** $c =$ **227,252;** $d =$ **327,252;** $e =$ **427,252,** w. g. i.

Nr. 19. Der Ausdruck in Nr. 17 soll den Wert 72,748 erhalten und a;b;c und d im Verhältnis von 1:2:3:4 stehen, e endlich um 100 kleiner sein als a. Wie muß gewählt werden? Probe!

E. s. s. $a - 27{,}252 + b - c - d + e = 72{,}748$ (Hptgl.); ferner $a = E$[9]); $b = 2E$; $c = 3E$; $d = 4E$; $e = E - 100$ (Nbgl.). J. d. H. g. k. d. R. n.

$$E - 27{,}252 + 2E - 3E - 4E + E - 100 = 72{,}748$$

$$\text{bez. } \mp 3E = -200 \text{ bez. } E = -66\tfrac{2}{3};$$

also $a = -66\frac{2}{3}$; $b = -$ **$133\frac{1}{3}$**; $c = -$ **200**; $d = -$ **$266\frac{2}{3}$**;

$e = -$ **$166\frac{2}{3}$**, w. g. i.

Die gefundenen Werte in die Hauptgleichung gesetzt, so kommt d. N. n.

L. $-66\frac{2}{3}-27{,}252-133\frac{1}{3}+200+266\frac{2}{3}-166\frac{2}{3}=+72{,}748$, wie **R.** steht und sein soll. Nebenrechnung konnte sein:

+	—	+	—
200	66	$\frac{2}{3}$	$\frac{2}{3}$
266	27,252		$\frac{1}{3}$
	133		$\frac{2}{3}$
	166		$\triangle: -1.$

$\Sigma: 466;\ \Sigma: 392{,}252;\ \triangle: +73{,}748.$

Nr. 20. Was ist Summe, was Differenz von zwei Zahlen?[10])

Jedes zweigliederige Aggregat (das einzelne Glied mag einfache oder zusammengesetzte Zahl sein) kann mit gleich viel Recht als Summe oder Differenz von zwei Zahlen angesehen werden. Denn: Summe bez. Differenz von zwei Zahlen ist die Erweiterung der erstgenannten Zahl durch die zweite bez. den Gegensatz der zweiten. — Z. B. $18-27$ ist die Summe von 18 und -27; es ist die Differenz von 18 und 27; ja, wenn man will, Umformung der Differenz von -27 und -18, der Summe von -27 und 18.

Abschluß. + und —, sowie die Ketten aus ihnen betreffend.

Es ist vereinbart, daß von den Zeichen +; —; ·; : niemals zwei ungesondert auf einander folgen dürfen. Auf dieses hin wird für $10+a$ im Falle von $a=-5$, lediglich einsetzend, geschrieben $10+(-5)$. Man weiß aber auch (vergl. allgemein Nr. 11 und speziell Nr. 15 des Kap.), daß es $10-5$ heißen darf. Also gibt es keinen Unterschied zwischen $+(-5)$ u. -5. Es gilt $+(-5)=-5$; ebenso $+(+5)=+5$; $-(+5)=-5$ und $-(-5)=+5$. Eine Kette von zwei Zählzeichen (+; —) läßt sich durch ein einziges — ersetzen, wenn ein einziges — in ihr vorkommt; andernfalls darf + dafür stehen. — Ein Zeichen kann betrachtet werden, einmal als Anweisung, das andere Mal als Vollzug. Bei $+(+5)$; $+(-5)$; $-(+5)$; $-(-5)$ faßt man jedoch gern das in der Umschließung stehende Zeichen als Vollzug, das andere als Anweisung auf ohne einen Fehler zu begehen, wenn dieses nicht geschieht. Es geschieht aber überhaupt blos um sich die betreff. Zahlen bequem als Zugang bez. Wegfall von Vorteil bez. Nach=

teil zu vergegenwärtigen. $+$ steht in der Auffassung des Günstigen (Zugang; Vorteil), $-$ in der des Ungünstigen (Wegfall; Nachteil). Beispielsweise deutet man $-(+5)$ als Wegfall von Vorteil (im Betrag) 5. — Mit Zahlen der betrachteten Art wird auch weiter gerechnet. Z. B. man benützt $x = +(-7)$ zur Bestimmung von $10 + x$. Es wird $10 + [+(-7)] = 10 - 7 = 3$ erhalten. Nichts steht im Weg bei einer Zahl eine Kette von noch so viel $+$ und $-$ anzunehmen. Unter allen Umständen gilt α) $+$ ist das den Sinn des nachfolgenden bestätigende, $-$ das ihn verkehrende Vorzeichen. β) Die Reihenfolge der $+$ und $-$ in der Kette ist ohne Einfluß auf den Werth der Zählung. γ) Eine Kette läßt sich durch ein einziges $-$ bez. $+$ ersetzen, je nachdem eine ungerade bez. gerade Menge $-$ in ihr vorkommt.

Anhang von Übungsaufgaben.

(Übungen zu Nr. 1—16 des Kap. ergeben sich bei der Durchnahme von selbst. Hier sind nur Nr. 17—20 berücksichtigt, die selbstverständlichen Fragen sind weggeblieben, thunlichst oft sind Proben zu liefern. Übungen zum Kapitelabschluß s. im Landshuter Programm.)

Nr. 1. a ist zu b entgegengesetzt und um 5 kleiner (größer).

Nr. 2. Die Summe von a und b ist zu 27 entgegengesetzt und b um 13 größer (kleiner) als a.

Nr. 3. Summe und Differenz von a und b sind Gegensätze; ferner verhalten sich a und b wie 3 : 5 [a ist um 6 größer als b; b ist um 6 größer als a].

Nr. 4. a verhält sich zur Differenz [Summe] von a und b wie 1 : 3; die Summe (Differenz) von a und b ist 210.

Nr. 5. Zwei Komplemente [Supplemente, Implemente] verhalten sich wie 1 : 14 [unterscheiden sich um $\frac{5}{12}$ R].

Nr. 6. Von 2 Nebenwinkeln (Scheitelwinkeln) ist die Differenz (Summe) $\frac{7}{8}$ R.

Nr. 7. Die halbe Differenz von 2 Implementen [Supplementen, Komplementen] ist der vierte Teil der Summe.

Nr. 8. Die Winkel eines Dreiecks (Fünftels) stufen sich um je 11,2° ab.

Nr. 9. Ein Winkel eines Dreiecks ist so groß als die zwei andern zusammen; diese verhalten sich wie 11:13 [unterscheiden sich um 16°25′34″].

Nr. 10. Die viererlei Außenwinkel eines Vierecks verhalten sich wie 3:6:5:4 [stufen sich je um $5\frac{1}{4}^{0}$ ab]. Wie groß sind die Viereckswinkel? Probe!

Nr. 11. Aus einem Punkt strahlen sechs Halbgerade und sondern sechs Winkel von einander, welche abwechselnd um $17\frac{1}{2}^{0}$ wachsen und um $\frac{1}{8}$ R abnehmen.

Nr. 12. Die einen alternierenden Winkel eines Achtecks messen zusammen so viel als die andern; jene bilden eine fortwährend um $11\frac{5}{12}^{0}$ fallende Reihe; diese verhalten sich wie 7:9:5:6.

Nr. 13. Es gilt $a - b = 15 - c$; ferner müssen a; b und c je um 7 [—5] vergrößert werden, um Zahlen im Verhältnis von 7:6:2 zu liefern.

Nr. 14. Es gilt $a - b + c = 210 - c$; ferner müssen a; b und c je um 3[—4] verkleinert werden, um Zahlen im Verhältnis von 8:4:3 zu liefern.

Nr. 15. Es gilt $a - 2b = c + 3$; wenn man a um 3, b um —2, c um 1 vergrößert (verkleinert), entstehen Zahlen im Verhältnis von 3:2:5.

Nr. 16. Es gilt $2a - 3b = 5c - 12$; wenn man a; b und c je um 2 vergrößert (verkleinert), entstehen Zahlen im Verhältnis von $1:1\frac{2}{3}:2\frac{1}{3}$.

Nr. 17—20. (Vierfaches Thema zu einer Schulaufgabe.)

a; b und c verhalten sich wie 8:7:4; d ist um 1 kleiner, e um 1 größer als b. Wie sind a; b; c; d und e zu wählen, daß $a + c - d$ und $25 - b + e$ Gegensätze werden? Wie, daß die Summe dieser Ausdrücke 6 wird? Wie, daß die Differenz —6 ist? Zu einem Falle die Probe!

a; b und c verhalten sich wie 7:4:8; c ist um 1 größer, d um 1 kleiner als a. Wie sind a; b; c; d und e zu wählen, daß $b - c + e$ und $25 - a + d$ Gegensätze werden? Wie, daß die Summe dieser Ausdrücke 9 wird? Wie, daß die Differenz —3 ist? Zu einem Fall die Probe!

a; d und e verhalten sich wie 4 : 8 : 7; b ist um 2 größer, c um 2 kleiner als e. Wie sind a; b; c; d und e zu wählen, daß a — b + d und 25 + c — e Gegensätze werden? Wie, daß die Summe dieser Ausdrücke 14 wird? Wie, daß die Differenz — 3 ist? Zu einem Fall die Probe!

c; d und e verhalten sich wie 8 : 7 : 4; a ist um 2 kleiner, b um 2 größer als d. Wie sind a; b; c; d und e zu wählen, daß c — a + e und 25 + b — d Gegensätze werden? Wie, daß die Summe dieser Ausdrücke 17 wird? Wie, daß die Differenz — 8 ist? Zu einem Fall die Probe!

Nr. 21—24. (Vierfaches Thema in der Parallelabteilung.)

a; b und c verhalten sich wie 7 : 5 : 3; d ist zu b + 1, e zu b — 1 entgegengesetzt. Wie müssen a; b; c; d und e gewählt werden, daß a + c — d und 25 — b + e gleich groß werden? Wie, daß die Summe dieser Ausdrücke — 10 wird? Wie, daß die Differenz — 32 ist? Zu einem Fall die Probe!

a; b und e verhalten sich wie 5 : 3 : 7; c ist zu a — 1, d zu a + 1 entgegengesetzt. Wie sind a; b; c; d und e zu wählen, daß b — c + e und 25 — a + d gleich groß werden? Wie, daß die Summe dieser Ausdrücke — 15 wird? Wie, daß die Differenz — 29 ist? Zu einem Falle die Probe!

a; d und e verhalten sich wie 3 : 7 : 5; b ist zu e — 2, c zu e + 2 entgegengesetzt. Wie sind a; b; c; d und e zu wählen, daß a — b + d und 26 + c — e gleich groß werden? Wie, daß die Summe dieser Ausdrücke — 5 wird? Wie, daß die Differenz — 33 ist? Zu einem Fall die Probe!

c; d und e verhalten sich wie 7 : 5 : 3; a ist zu d + 2, b zu d — 2 entgegengesetzt. Wie sind a; b; c; d und e zu wählen, daß c — a + e und 25 + b — d gleich groß werden? Wie, daß die Summe dieser Ausdrücke — 8 wird. Wie, daß die Differenz — 34 ist? Zu einem Fall die Probe!

Nr. 25—28. (Vierfaches Thema neben Geometrie).

a; b; c und d zu bestimmen, wenn die Summe von a und b um 24 größer ist als die Differenz von c und d; ferner d um 2 vergrößert, a um 2 verkleinert werden muß, damit Zahlen im Verhältnis von 2 : 3 entstehen; endlich b um 4 größer ist als d, während c der Gegensatz von d ist. [Cyklische Vertauschung lieferte die Aufgaben der drei anderen Abteilungen.]

Nr. 29—32. (Vierfaches Thema in der Parallelabteilung.)

a; b u. c zu bestimmen, wenn gilt $4a-7b=15-c$ u. a; b und c je um 7 vergrößert werden müssen, damit Zahlen im Verhältnis von 4:2:1 entstehen! Probe! [Bei den andern Abt. war um 8 bez. 9 bez. 10 zu vergrößern.]

Nr. 33—36. (Vierfaches Thema in einer ungeteilten Klasse. Überall war die Erklärung von a) Summe, b) Differenz, c) Gegensätzen verlangt.)

Die Summe von $23-a$ und $b-62$ ist so groß als die Differenz von $c-d$ und $15-e$. Wie sind a; b; c; d und e beschaffen, wenn sich b; d und e wie 4:5:3 verhalten, c zu e entgegengesetzt, endlich a um 16 kleiner ist als die Summe von b und e? Probe!

$a+20-b$ ist entgegengesetzt zur Summe von $c-28$ und $14-d-e$. Wie sind a; b; c; d und e beschaffen, wenn a; b und c sich wie 4:3:5 verhalten, d zu b entgegengesetzt, endlich e um 18 größer ist als die Differenz von b und d? Probe!

Die Differenz von $a-36+b-c$ und $27-d+e$ hat den Wert 7. Wie sind a; b; c; d und e beschaffen, wenn b um 2 größer ist als a, c um 3 größer als b, d entgegengesetzt zur Summe von a und b, endlich e Doppeltes von a? Probe!

$a-58$ ist entgegengesetzt zur Differenz von $b+13-c$ und $d-21+e$. Wie sind a; b; c; d und e beschaffen, wenn a; b und c sich wie 4:5:3 verhalten, d zu e entgesetzt, e um 18 kleiner ist als die Summe von a und c? Probe!

Nr. 37—40. (Vierfaches Thema in einer ungeteilten Klasse.)

Gegeben $t=10m-54-2k-12l$; $u=2k-10m-41$; $v=6l+2k-8m-35$; $w=12k+15l-3m+6$, endlich $x=3m-2l-20-4k$. A) Bilde die Differenz von t und x; die Differenz von t und der Summe der vier andern entsprechend ausgedrückten Zahlen; die Summe aller fünf! B) Der Wert der unter A) betrachteten Differenz $t-x$ verhält sich zu k; l und m wie 7:6:5:4; wie groß sind k; l; m und die Differenz? C) Wie groß sind t; u; v; w; x und ihre Summe für die unter B) ermittelten Werte von k; l und m?

[Die andern Gruppen enthielten unter A) die Frage nach der Differenz von u bez. v bez. w und x einer-, der Summe der vier übrigen andererseits, sowie die nach der Summe von allen fünf. B) entsprechend, als Verhältniszahlen jedoch 6 : 5 : 4 : 3 bez. 3 : 4 : 5 : 6 bez. 4 : 5 : 6 : 7. C) gleichlautend.]

Kapitel II.

Reduktionen und Gegenreduktionen r; R [ϱ].

r. Kommt in einem Aggregat ein Glied wiederholt vor, so reduziert man (kürzt ab), indem man es nur einmal schreibt und hinter dem (einem) + bez. — desselben notiert, wie oft es vorkommt. Z. B. $a-b-b+c+a-b+c+c-b$ reduziert man zu $2a-4b+3c$. — Die (Ziffer-) Notiz nennt man *Koëffizient* der reduzierten Zählung, diese selbst das *Produkt*[11]) *von zwei Zahlen*. In unserem Beispiel erhielt man ein Aggregat von drei Produkten als Gliedern.

Bemerkungen. Bei der Anwendung von r bedarf man in gewissen Fällen ein Sonderungszeichen, nämlich einen Punkt (· oder ×). Da man nun bei Produkten das deren Sinn so angemessene „mal" gerne spricht, so wird der Punkt gewöhnlich als Multiplikationszeichen angesehen, eigentlich ohne Recht[12]), denn die Regel r weiß nichts von einem Punkt. Nur in den Fällen, wo eine bestimmte Zahl, ohne daß ihr eine Kette vorausgeht, wiederholt ist, braucht man ihn. So schreibt man, um von der Zählung 38 die Reduktion von 3 Zählungen 8 zu unterscheiden, für letztere $3 \cdot 8$; oder für $-2-2-2-2-2$ setzt man $-5 \cdot 2$. Formen wie $-22\frac{1}{2} \cdot (-9)$ und $-22\frac{1}{2}(-9)$ bedeuten bereits genau das gleiche. Kommt vollends eine unbestimmte Zählung wiederholt vor, so bleibt der Punkt in der Kurzschrift regelmäßig weg, ohne daß verwehrt ist ein „mal"