Vorrede, zugleich Einleitung.*)

Umstände haben dahin geführt, eine für eines der nächsten Jahre gemachte Zusage schon jetzt einzulösen. Die Erhebungen — geologische — für den anfangs in Aussicht genommenen Stoff sind aber noch nicht genügend gefördert. Daher mußte ein neues, das behandelte, Thema an die Stelle treten. Ein altes, resp. des Verfassers altes Lied ist es, mit neuer Aufschrift und neuem Text; beide hoffentlich so deutlich, daß die Absicht nicht mehr verkannt werden mag, wie es im früheren Falle geschehen sein will. Nebenbei soll noch die Probe gemacht werden, ob die Passivität der Kollegenschaft auch jetzt siegreich bleiben will, oder berechtigte Vorstellungen erheblicher Art nunmehr Gehör finden. Das Landshuter Programm pro 1883/84: „Die Algebra in natürlicher Herleitung", hat erstmals ohne schönen Willkommen zu finden angepocht. Auch die versuchte Erinnerung an dasselbe im Hofer Programm pro 1890: „Das Winkelfeld", ist anscheinend erfolglos geblieben. Dem Verfasser schien durch ungünstige Auffassung der Arbeit sogar Schaden zu drohen, bis eine Rezension Hoppe's in Grunert's Archiv die Situation bessern mochte. — Es erschien für das Landshuter Programm nur noch eine Rezension, soweit erinnerlich, im „Gymnasium" (Paderborn). Die Oberflächlichkeiten derselben zurückzuweisen gelang leicht. Seitdem ist es völlig still.

Schon lange ist man in allen Zweigen der Schulmathematik emsig daran, alte Zöpfe abzuschneiden, und immer bessere Methoden zu erfinden. Nur mit der Algebra will es nicht recht vorwärts gehen. Dadurch ist die Schulalgebra rückständig. An ihrer Reformbedürftigkeit wird dabei selten gezweifelt und die Mehrzahl der Fachleute wäre für Reformen

*) Die Disposition des Themas findet sich im vorletzten Absatz dieser Einleitung. Weitere Bemerkungen zu letzterer sind nach dem Schlußabsatz derselben, alle übrigen am Schluß der Arbeit zusammengestellt. Ohne gleichzeitige Berücksichtigung der Bemerkungen verlohnt es sich nicht, das Thema vorzunehmen.

zu haben. Daß es aber tief einschneidende sein müssen, glaubt man nicht. Gleicht ein Versuch einer völligen Umwälzung, so besinnt man sich gewöhnlich darauf, daß Vorsicht die Mutter der Weisheit ist, und merkt überhaupt nichts. Doch zum Thema!

Die Schulalgebra ist rückständig. Innerhalb der Gesamtmathematik beansprucht die Algebra Hand in Hand mit der schriftlichen Darstellung die Gesetze der allgemeinen Größenlehre abzuleiten und sich zum corpus juris der Mathematik auszubauen. Jedes benützte Schriftzeichen spiegelt an sich und durch seine Stellung unter den übrigen einen mathematischen Gedanken in aller Treue wieder. Wer den Sinn aller Zeichen eines Ausdrucks und ihrer gegenseitigen Stellung kennt, ist von dessen Bedeutung genau unterrichtet. Kann damit der Zweck der Schulalgebra ein anderer sein, als das Verständnis dafür zu wecken und das Idiom, welches die Wiedergabe der Gedanken in der Größenlehre beherrscht, durch Lesen-, Schreiben- und Deutenlassen der Ausdrücke zu lehren? (Genau so ist es, wenn ein Fremder das deutsche Idiom durch Lesen, Schreiben und Deuten der Bezeichnungen, welche wir zur Gedankendarstellung benützen, wirklich erlernt.) Nicht der rein äußerliche Überblick über eine Buchstaben- und Zeichenmosaik soll also erworben werden, nicht die bloße mechanische Fertigkeit im Rahmen gewisser Schemata diese Mosaik in hergebrachter Weise umzugestalten! Das Mittel mit dem Zweck, welcher immer die Hauptsache bleiben muß, verwechseln wäre solches Beginnen. — Jedes Zeichen also, auch das unscheinlichste, ja nur ein Anzeichen, hat seinen nicht ungestraft zu vernachlässigenden Sinn. Um bei einem Beispiel zu bleiben, fragen wir nach dem Sinn des Zeichens „=“. Wie oft mag man sich da mit dem Standpunkt „gleich ist eben gleich“ versündigen? Nun „=“ ist das Zeichen für die gegenseitige Ersetzbarkeit der zwei vollständigen Ausdrücke, zwischen welchen es steht. Noch mehr, auf Grund des gerade der Mathematik wie angegossen sitzenden kategorischen Prinzips darf „=“ so gut als der Befehl gelten, die Ersetzung vorzunehmen, wie für den Vollzug an einer vorausgegangenen Identität. Eine Bestimmungsgleichung soll man aber nie, ohne „E. s. s.“, d. h. „Es soll sein“ vorzusetzen, aus dem Übungsbuch schreiben. Unser niedliches Zeichen ist eine der wichtigsten Beihilfen der Algebra bei ihrer Tendenz, die anfängliche Kurrentschrift in eine vorzügliche Kurzschrift übergehen zu machen und dabei die Reihe der Gesetze weiter zu führen. — Die sogen. Vorzeichen der vier Spezies andererseits haben für die Schüler vom Rechnen her einen Sinn erlangt, welcher der Auffassung dieser Zeichen in der Mathematik nur unvollkommen entspricht. Hier ist eine Umprägung erforderlich. Schritt für Schritt gehen Ausprägung der Zeichen und Entwickelung der Gesetze neben einander her. Ein einziges schlichtes Stenographierezept, welches unten als Reduktionsregel R (r ist ein bloßer Vorläufer) angeführt wird, ist der Eckstein, auf dem sich die Gesamtheit der Gesetze der zweiten Rechenstufe aufbaut. Das nämliche Rezept fügt die Klammern, deren übliche Einführung stets etwas Gezwungenes hat, organisch in das System ein. In Wirklichkeit fließen die Klammern ja allerdings aus zwei Quellen. Die weitaus stärkere läßt sie als Umschließung von Aggregaten auftreten. Die andere liefert sie als Vorsichts-, als Sonderungszeichen und als Zeichen dafür, wie weit ein erkennbarer Bezug erstreckt werden soll. Diese Art Klammern, die klammerähnliche Umschließung, hindert aber niemals das Umschlossene als Aggregat anzusehen. Hinwiederum sind die echten Klammern dem Rezept R gemäß doch eben Zeichen dafür, wie weit ein bestimmter Bezug gelten soll. Sonach hat man auch das Recht, die Dyas der Klammerformen als Einheitliches aufzufassen. — Alle Gesetze der dritten Rechenstufe stützen sich auf ϱ. Während des Ausbaues der zweiten Stufe erscheinen Multiplizieren und Dividieren immer deutlicher als eng verwachsene Seiten dieser Stufe. Muß man da in der dritten Stufe nicht jeden Unterschied in der Geltung von Faktoren in Vielfachen- und Teilmengen beiseite lassen? Darf die geringfügige Verschiedenheit, etwa „statt des einzelnen Faktors sollen zwei solche gelten" und „statt zwei übereinstimmender Faktoren soll nur einer gelten", im Ernst zum Anlaß genommen werden, Potenzieren und Radizieren wie zwei grundverschiedene Rechnungsarten aus einander zu reißen? Nein! Auch die Thatsache des Auftauchens der neuen Zahlenarten „Irrationale, Imaginäre und Komplexe" beim Radizieren nötigt nicht dazu. Diese Zahlen werden so oder so gleich leicht verdaut. Die Zerreißung indessen bewirkt, daß fortan ein geheimnisvoller Schleier über dem wichtigen Zusammenhang wallt, welchen ein mäßig scharfes Schülerauge nimmermehr durchdringt. Wenn das Logarithmieren dennoch abseits stehen muß, so liegt das einzig an dem besonderen Algorithmus, welcher ersonnen ist, damit jeder vorliegende Faktor als „seinerseits gefügt speziell aus Faktoren 10" hingestellt werden kann. — Die zwei Rezepte R und ϱ bedingen die ganze Mannigfaltigkeit der Rechenformen und diese hinwiederum den immer breiter fließenden Strom der Gesetze. Dabei lassen sie aber den Strom vollständig überschauen! Nötig ist freilich, daß man der Gestaltungskraft der Rezepte den Ausbau der Formen und des Systems überläßt. Die Richtung dieser Kraft ist jedoch immer einmal entgegengesetzt zum üblichen Kunstweg. Zum Beispiel führt sie über das Faktorenausscheiden zum Auflösen der Produkte in mehr kurrente Aggregatformen. Oder die Rechnung mit Brüchen, der zweiten Art aus Faktoren geknüpfter Zahlen, beschließt, als Kombinationsaufgabe der Faktorenrechnung mit Rechnungen der ersten Stufe, die Reduktion von Bruchaggregaten. — Die Vermutung, daß das Gehen im Landshuter Programm auf dem eben vorgezeichneten Weg, sein Schwimmen mit dem Strom der Rechnungsformen, dem Verfasser als krasse Ignoranz oder als dreister Frevel ausgelegt wurde, mag wohl zutreffen. Wie kann man aber freche Auffassung, wie Revolution statt Reform dahinter wittern wollen? Und was ist eigentlich der Unterschied zwischen Reform und Revolution auf wissenschaftlichem Gebiet, aus welchem das Schwören auf Autoritäten bekanntlich ja verbannt ist?

Die Schulalgebra ist rückständig, wenn sie das der Mathematik als gutes Recht zustehende kategorische Prinzip nicht ihrem Kodex einverleibt, nicht ausgiebig benützt und nicht darauf dringt, daß der Schüler seinen wertvollen Gebrauch kennt. — Nicht genug, die Schulalgebra arbeitet direkt gegen den prinzipiellen Begriff „Größe". Groß an sich ist gar nichts, rein gar nichts. Und doch: Alles Bemessungsfähige ist als solches im gewissen Grade groß, je nach dem Maßstab, welcher verfügbar ist. Wenn man den Schüler veranlaßt auszusprechen, was ein Engel über den Besitz eines Millionenmannes urteilen würde, so trifft er das Richtige. Die Antwort ist die gleiche wie für einen Mann, welcher nur ebenso viel Hunderte besitzt. Der reiche Mann wie der gering Bemittelte haben Null, mit dem Maßstab des Engels gemessen. Der Engel, wahrhaftig wie er ist, gibt auch das Urtheil ab: Das eine Null ist 10,000 Mal so groß als das andere. Oder aber, man mutet dem Schüler zu, die Länge der Bank, auf welcher er sitzt, mit dem Maßstab der Siriusentfernung zu messen. Für ihn ist die Banklänge bald genug Null. Dann mit dem Maßstab eines geringfügigen Details, welches man ihn bei tausendfacher Vergrößerung an einer Pilzspore sehen lassen kann: er kommt auf unermeßlich groß. Das nämliche ist ihm der Reihe nach bemeßbar groß, unendlich geringfügig und unermeßlich groß. Ja, wenn man ihn auf Maßstäbe hinweist, welche gegen die vorigen unermeßlich groß bezw. geringfügig sind, führt man ihn ein in das System der stufenmäßig vorhandenen unendlich Geringfügig und Groß. Trotzdem liegt nur ein einziger stetiger Übergang vor. Das muß man nicht verschweigen! — Gibt es überhaupt eine Insel, wo man die unendlich zählige Mannigfaltigkeit des stetigen Übergangs nicht kennt? πάντα ῥεῖ! Und doch, die Insel gibt es, sie heißt Schlaraffenland! Da zählt man nach Äpfeln, Nüssen und anderen guten Dingen. Da herrscht vor allem die Klöserechnung. Klos, als das klotzig bezw. ohne (eigentliche) Gliederung Vorhandene, steht dadurch im Bedeutungsübergang zu individuum. Und wie leuchtet es den Schülern aus den Augen, wenn der Lehrer, welcher als Ursächer eines angeblichen, des pennalen, Zustandes wahrlich keinen Begriff von Schlaraffenleben hat, sie führt ins herrliche Fabelland! Ja, noch das Manneshherz schlägt froh im Gedenken solcher heiterer Momente des einstigen Schullebens. Leider muß der eigentliche Pennäler die Schüler gleich wieder scheiden lassen von der glücklichen Insel hinaus ins Meer, in welchem blos singulärer Auszählung fähige Fische zwar auch leben, aber viel mehr andere gefischt werden, welche unter der Hand noch in eines der Unermeßlich übergehen können. — Die Scheu vor dem Unermeßlich treibt sonderbare Blüten (vergl. Hofer Programm, S. 5). Solange man Beziehungen zwischen gegenseitig Bemeßbaren hat, ist man auf sicherem Grund! Ist der Ausgang doch einmal ein Unermeßlich, was verschlägt's? Man weiß dann eben: er ragt über das Bemessungsbereich hinaus. Oder er ist in ihm ein „Nichtzuzählen" bezw. „Nichtgezählt". Jenes Unermeßlich weicht selbst von uns zurück. Zu diesem fühlen wir uns unwiderstehlich gezogen: zu Null, dem Mephisto der Zahlen, wie es der unvergeßliche Heße liebreich und respektvoll genannt hat. Uns ist Null der Hauptmeridian und die Verankerungsstelle im Zahlenmeer, die Geburtsstätte aller selbständigen Zahl-Individuen; der gütige Freund im schulalgebraischen Entwickelungsleben, der uns als erstes Angebinde den wertvollen Begriff „Gegensätze", welchen er sich gegenüber zu leugnen so glücklich sein darf, mit auf den Weg gibt. Zuletzt ist er der sichere Rückhalt, auf welchen wir uns bei den Bestimmungen höheren Grades stützen können. Wie sollten wir von ihm lassen, wenn er gleich einmal spröde erscheint in der rauhen Schale von a^0 oder gar $\frac{0}{0}$ u. s. w? Was ist uns dagegen das allerdings gewaltig herrschende, aber pedantisch-herzlose 1? Eine Auflehnung dagegen soll aber nicht gepredigt sein!

Die Schulalgebra ist rückständig gegenüber der gewöhnlichen rechnenden Praxis. Da weiß man ohne Mathematik recht gut, was thatsächlich und was blos auf dem Papier ausführbar ist. Auch die Jungen, welche wir unterrichten, wissen es schon. Und die rechnende Praxis handhabt im zweiten Fall das Ergebnis so sicher, wie im übrigen eine wirkliche Zahl. Dem entspräche in der Schulalgebra die Benützung der vollständigen zwischen $-\infty$ und $+\infty$[1)] erstreckten Zahlenreihe. Zur Zeit verfährt sie anders! Sie stößt den noch zutraulich bereitwilligen Anfänger zurück an den Anfang der Dinge. — Wenn die Mathematik der Größenlehre ein künstliches Gepräge gibt, kann man ihr keinen Vorwurf daraus machen, weil sie die (freilich teilweise noch zu entwickelnden) Mittel das Feld zu halten beherrscht. Wenn aber die Schulalgebra anstrebt, dieses künstliche System von allem Anfang geläufig zu machen, etwa darum, weil der Rechenunterricht (mit nur fraglichem Vorteil) das Schema benützt, so schlägt sie einen Irrweg ein. Unbenommen muß es jedoch der Mathematik bleiben von denjenigen, welchen der spätere Beruf höhere mathematische Ziele steckt, die sichere Kenntnis auch des künstlichen Systems bewährt zu sehen. Die Zeit, es zu erlernen, kann freilich nur diejenige des Beginnes der eigentlichen Berufsstudien sein.[II)]

Im schon zitierten Hofer Programm ist auf ein eigentümliches Wechselverhältnis, welches infolge des verordneten Lehrganges zwischen Geometrie und Algebra bei uns geschaffen ist, hingewiesen. Die Stelle, welche auch für diesen Zusammenhang Bedeutung hat, lautet: „Die Mittel, deren sich ein Unterrichtszweig bedient, müssen zuvor wohl erworben sein. Schon frühzeitig im geometrischen Unterricht benützt man die Gleichungen. Wenn nun, wie bei uns in Bayern, der erste Unterricht in der Algebra neben dem in der Geometrie hergeht, so muß das Notwendigste über die Gleichungen dortselbst zuerst vermittelt werden. Es geschieht, wenn man die Algebra als eine von unnützem Formel- und Regelkram freie niederste Analysis III) von Haus aus betreibt. Man hat noch den Vorteil, daß das Zahlenrechnen im fortwährenden Gebrauch steht, ja die wirkliche Begründung in allen Hauptwendungen jetzt erst findet. Dieses Verfahren, im Programm der königl. Studienanstalt Landshut pro 1883/84, dann bei van Hengel und inzwischen vielleicht noch bei Einzelnen in mehr oder minder zielbewußter und erfolgreicher Weise eingeschlagen, erschließt dem Lehrenden wie dem Lernenden fortwährend neue Reize und erhält alle Beteiligten in lebhafter Spannung. Ihm gehört, sobald sich nur einmal die Aufmerksamkeit weiterer Kreise darauf lenkt, die Zukunft.“ Dazu sei bemerkt: das Verfahren ist vermutlich recht alt. Ein im Lieblingsgebrauch des Verfassers stehendes Übungsbuch ist die Sammlung arithmetischer und algebraischer Aufgaben von Dr. Fr. X. Pollak, fünfte Auflage 1866. Wenn der Verfasser aus diesem Buch die Art des verdienstvollen Mannes, dem er ja nie näher getreten, richtig versteht, so hat Dr. P. die Algebra im Stil einer niedersten Analysis s. Z. betrieben. Auch sonst finden sich in Werken gediegener älterer Schulmänner immer wieder Anzeichen dafür. Verfasser sieht in ihm den natürlichen Betrieb.

Das natürliche System der drei Stufen hat aber weniger und andere Kapitelsüberschriften als das künstliche System der sieben Spezies! 1. Einfaches und zusammengesetztes Zählen. 2. Reduktionen und Gegenreduktionen r; R [ϱ]. 2a. Division auf Grundlage von R; gebrochene Zahlen. 3. Reduktion ϱ; a) Potenzieren und Radizieren, b) Logarithmieren. — Die Gleichungen ziehen als roter

Faden durch das ganze System. Ihrer Wichtigkeit halber müssen ihnen noch Schaltkapitel gewidmet werden, nämlich 2'. Bestimmungsaufgaben ersten Grades; Bestimmungen aus Systemen ersten Grades. 3'. Bestimmungsaufgaben zweiten Grades; Bestimmungen aus Systemen zweiten Grades; Bestimmung gesetzmäßiger Folgen von Zahlen incl. Zinseszinsen- und Rentenrechnung; reelle quadratische Formen mit nur reellen Zahlen (Diskriminante). Alles kann im Gleichschritt mit dem bayerischen Gymnasial-Lehrplan geschehen.

Im Landshuter Programm sind Kap. 1, 2 und 2a behandelt worden mit der Tendenz, einen Lehrgang in „konzinner, logisch-wissenschaftlicher Sprache", wie es Hoppe in seiner Rezension nannte, zu bieten. Hier liegt der Ton durchaus auf „wirklicher Lehrgang". Anmerkungen sind vorgesehen. Das 1. Kapitel gibt die abgeschlossene heurige Darbietung; die Übungsbeispiele nebst solchen, wie sie für Schulaufgaben verfaßt wurden, folgen anhangsweise. Das 2. Kapitel wird aus den Lehrgängen in den vorjährigen Parallelabteilungen vertreten sein. Dieses und die übrigen Kapitel werden des beschränkten Raumes halber nur Beispiele aufweisen, welche für die Darstellung erheblicher sind.

Anmerkungen.

I) Man kann die Meinung hören, daß $+\infty$ und $-\infty$, ähnlich wie $+0$ und -0, die nämliche Zahl sind. Diese Meinung ist so mystisch wie das bekannte Symbol der Ewigkeit. Das Koinzidieren beider in manchen Bestimmungen läuft vielmehr auf das Auftreten der maximalsten reellen Unstetigkeit hinaus.

II) Mathematik in höherer Vollendung ist Kunst und ihre Darbietungen fallen unter den Kunstbegriff. Namentlich gilt dieses von der Zahl selbst. Sie in wirklich vertiefter künstlerischer Auffassung zu vermitteln ist bei den Elementen ausgeschlossen. Um einer Seite des Zahlbegriffs etwas näher zu treten, so kann in der Mittelschule das Irrationale nicht etwa wie bei Dedekind (Stetigkeit und irrationale Zahlen, 1. Auflage 1872; 2. unveränderte Auflage 1892) disponiert werden. Dedekind zeigt: Wenn D eine ganze positive Zahl ist, ohne Quadrat einer solchen zu sein, und x_1 bez. x_2 alle möglichen Rationalzahlen vorstellen, deren Quadrate kleiner bez. größer als D sind, so erweist sich ein y, von welchem gilt $\frac{y}{x} = \frac{x^2 + 3\,D}{3\,x^2 + D}$, zugleich größer als jedes x_1 und kleiner als jedes x_2, ist aber keine Rationalzahl. Dieses y als Schnitt (Dedekind's Benennung) zwischen den beiderlei x für eine Zahl (als Irrationalzahl) anzuerkennen sieht man sich genötigt. Es weisen nämlich jede zwei Rationalzahlen — solche der Reihe, welche, die Einheit begreifend, mit der Einheitsdifferenz auf einander folgen, bez. der Einheit nebst deren Vielfachen, und auch der Reihen der Vielfachen aller Zahlen, zu deren Vielfachen die Einheit gehört, — eine von Null verschiedene, angebbare Differenz auf. Die Gruppe der Rationalzahlen ist deshalb ganz unzulänglich für die Bemessung von stetig d. i. mit der Differenz Null in einander übergehenden Ausdehnungen. — Mit der Adoption des y ist man aber noch durchaus entfernt vom gesteckten Ziel. So eine Art Spionkop ist erst eingenommen. Wird man ihn aber behaupten können? Ja, wird sich das auch nur verlohnen? In der ersteren Hinsicht ist notwendig y mit Schnitten y' gegen die x, die y' mit Schnitten y'' gegen y einer- und die x andererseits u. s. f. in infinitum zu umgeben, resp. es muß eine irrationale Variation Y zur Trennung von zwei rationalen x aufgestellt oder vielmehr das einzelne x als rationale Singularität innerhalb einer irrationalen Variation Z nachgewiesen werden. In der anderen Hinsicht lassen sich keine wesentlichen Vorteile für die praktischen Anwendungen absehen. Es besitzt nämlich von unmerklich in einander übergehenden Ausdehnungen eine einzelne bloß durch Nebenumstände, welche dem Ausdehnungsbegriff selbst fremd gegenüberstehen, die Wahlfähigkeit zur Einheit. Die Theorie dagegen hätte größeren Gewinn, indem gewährleistet wäre, daß die Auswahl einer Einheit unter allen den nämlichen Anfang nehmenden Ausdehnungen begleitet ist vom Hervortreten je einer Rationalzahl unter den Maßzahlen für die Variation einer Ausdehnung, und daß die Variation der Einheit innerhalb der so gezogenen Grenzen die durchaus verschiedenen Variationen der rationalen Zahlen vollständig liefert. — Für die Lösung der einen oder anderen hiemit berührten Frage muß der Meister wohl noch erst erstehen. Eine Meisteraufgabe ist es auch den werdenden Fachmann in die so subtilen Wendungen des Zahlbegriffs einzuweisen. Ein richtiger Meister wird sich dieser vornehmsten unter den allgemeinen Meisteraufgaben schon darum nicht entziehen dürfen, weil kaum einer von denjenigen, welche den Zugang zu den Höhen unserer Wissenschaft suchen, den ganzen Vorzug der Gaben besitzt, durch welche er sich aus den Schriften allein und ohne Meisterhilfe zurecht findet. Die Elementarmathematik muß man also wohl oder übel die Wege ziehen lassen, welche dem Fassungsvermögen von Knaben angemessen sind.

III) Hier liegt, so zu sagen, bereits die Ankündigung des jetzt behandelten Themas vor. Wenn es bis heute ausgesetzt geblieben ist, so gab sich der Verfasser der Hoffnung hin, es möchte von einem Berufeneren in Angriff genommen werden.

Kapitel I.

Einfaches und zusammengesetztes Zählen.

Vorbemerkung. Alles Rechnen ist ein Zählen und dient zur Bemessung von irgend welchen Ausdehnungen, welche in übereinstimmende Stücke, Einheiten, zerlegt oder aus solchen verbunden sind. Das Mittel für das Zählen ist die Zahlenreihe[1]), welche derart abgeschritten wird, daß man für jedes Stück eine Stelle vor- oder zurückgeht, je nach der Bedeutung des Stücks für die ganze Menge. Jeder vollständig zum Abschluß kommende Zählungsvorgang beginnt bei 0.

Nr. 1. Was drückt eine bestimmte Zahl z. B. 10 aus?

Sie fordert, daß man von derjenigen Stelle der Zahlenreihe, wo man sich befindet, so viel Stellen fortschreite, als diejenige Zählung umfaßt, welche von 0 unternommen nach 10 führt, nämlich wie die Zählung 1;2;3; . . . . 9;10! — Zugleich drückt sie aus, daß so schon gezählt ist.

Nr. 2. Man steht auf 7 und soll eine Zählung (vom Grad) 10 ausführen[2]). Wie geschieht es?

Man zählt entweder 8;9;10; . . . 16;17! oder zählt 6;5;4 . . . — 2; — 3!

Nr. 3. Wie unterscheidet man aber beide Zählungen?

Jene gilt als Zählung + 10, diese als eine Zählung — 10, indem vereinbart ist: bei den bestimmten Zahlen weist + den Weg nach dem ohne Ende zunehmenden +, nach + ∞, und — den Weg nach — ∞. + 10 und — 10 sind reine Gegensätze und machen beim Eintreten in die nämliche zusammengesetzte Zählung einander wirkungslos bez. heben einander.