Zur Methode der Auflösung von planimetrischen Constructions- und trigonometrischen Rechenaufgaben, insbesondere solchen, die das Dreieck betreffen.

I.

Verwendung der für ein gegebenes Dreieck vereinbarten Symbole bei geometrischen Constructionsaufgaben und bei trigonometrischen Rechenaufgaben.

Nach dem Vorgange von Euler bezeichnet man jetzt wohl ziemlich allgemein die Seiten eines gegebenen Dreiecks ABC durch a, b, c, ihre Gegenwinkel*) durch α, β, γ. Hiernach bedeutet das Symbol a die Seite BC des Dreiecks ABC, ist mit BC identisch; a und BC sind nur verschiedene Namen für ein und dasselbe Ding. Wenn man aber sagt: Ein Dreieck zu construiren aus a, b, c, so will man damit ausdrücken, daß ein Dreieck ABC**) so construirt werden soll, daß die Seite BC gleich einer gegebenen Strecke a, die Seite CA gleich einer gegebenen Strecke b und die Seite AB gleich einer gegebenen Strecke c ist. Hier bedeuten also die Symbole a, b, c nicht die Seiten eines Dreiecks, sondern drei in der Zeichenfläche gegebene Strecken, sind also durchaus nicht mit den Seiten BC, CA, AB des zu construirenden Dreiecks ABC, welches ja bei der Stellung der Aufgabe überhaupt noch gar nicht vorhanden ist, identisch, sondern die Seiten des zu construirenden Dreiecks ABC sollen nur gleiche Größen mit den Strecken a, b, c haben. Es ist daher durchaus unstatthaft, daß man etwa in der für die Analysis entworfenen Figur die Buchstaben a, b, c an die Seiten BC, CA, AB oder die Buchstaben α, β, γ in die Winkel CAB, ABC, BCA setzt. Was hier von den Seiten und Winkeln gesagt ist, gilt auch für beliebige andere gegebene Stücke des Dreiecks. Nun ist es unmöglich, die Bedingungen, welche ein zu construirendes Dreieck erfüllen soll, einfacher und präciser als dadurch auszudrücken, daß man diejenigen

*) Die Ausdrücke „Gegenwinkel von Seiten eines Dreiecks", „Gegenwinkel eines Vierecks" mögen wohl bei Vielen Anstoß erregen, weil das Wort „Gegenwinkel" schon die bekannte Verwendung bei zwei Geraden, die von einer dritten in zwei Punkten geschnitten werden, gefunden hat; ich meine aber mit Unrecht. Warum soll dasselbe Wort nicht in verschiedenem Sinne gebraucht werden dürfen, wenn nur jede Zweideutigkeit ausgeschlossen ist? Und ist es zweideutig, wenn ich z. B. sage: „An parallelen Geraden sind die Gegenwinkel gleich"; oder: „Wenn zwei Seiten eines Dreiecks gleich sind, so sind auch ihre Gegenwinkel gleich"; oder: „Die Gegenwinkel eines Parallelogramms sind gleich"?

**) Es ist natürlich an sich gleichgültig, ob man die Eckpunkte des Dreiecks durch A, B, C oder durch beliebige andere Buchstaben P, Q, R bezeichnet, doch zur leichteren Verständigung zwischen Lehrer und Schülern empfiehlt es sich, in der Schule auch darüber ein gewisses Uebereinkommen zu treffen.

Stücke, welche eine gegebene Größe oder ein gegebenes Verhältnis haben sollen, durch die für ein *gegebenes* Dreieck vereinbarten Bezeichnungen angiebt. Es kann daher nicht zweifelhaft sein, daß bei der Stellung von Dreiecksaufgaben, wenn es angeht, nur diese Form zu wählen ist. Dann aber halte ich es, um Verwirrung zu vermeiden, für durchaus geboten, bei *Constructionsaufgaben* die für ein *gegebenes* Dreieck vereinbarten Symbole von der Verwendung zur Bezeichnung von Größen, die *nicht* gegeben sind, ganz auszuschließen und die erforderlichen Bezeichnungen dafür nur der Figur zu entnehmen. Was von den *einfachen* Symbolen gilt, gilt namentlich auch von den *zusammengesetzten* für Summen, Differenzen, Verhältnissen von Größen u. s. w. Gehört z. B. der Ueberschuß der Summe zweier Seiten eines Dreiecks über die dritte zu den gegebenen Größen und wird diese, wie gewöhnlich und zweckmäßig ist, durch $a + b - c$ bezeichnet, so bedeutet dieses *unzertrennbare* Symbol $a + b - c$, eigentlich $(a + b - c)$, eine Strecke, und in dem zu construirenden Dreieck soll $BC + CA - AB$ eben dieser Strecke gleich sein. Ist das Verhältnis $a : b$ gegeben, so bedeutet das soviel als: In dem verlangten Dreieck ABC sollen die Seiten BC und CA sich verhalten, wie zwei gegebene Strecken m und n (nicht a und b) oder wie zwei gegebene unbenannte Zahlen m und n. Wenn $a^2 - b^2$ gegeben ist, so soll damit gesagt werden, daß in dem verlangten Dreieck die Differenz der Quadrate über den Seiten BC und CA einer (gewöhnlich in Form eines Quadrats mit gegebener Seite, z. B. q^2, des Quadrats über der gegebenen Strecke q) gegebenen Fläche gleich sein soll. Es ist wohl zu beachten, daß solche Ausdrücke wie $a + b - c$, $b^2 - c^2$, bc u. s. w. unzertrennbare Symbole für *eine* Größe sind, die man unter Umständen zweckmäßig durch besondere Buchstaben ersetzt (was ich jedoch so viel wie möglich vermeide). Wie es nun nicht zulässig ist, die Gleichung $BC + CA = a + b$ zu bilden, wenn zwar $a + b - c$, nicht aber $a + b$ oder a und b gegeben sind, ebensowenig darf man bei Behandlung einer vorliegenden Constructionsaufgabe mit rein geometrischer Analysis (s. unten Seite 10) aus den gegebenen Strecken $a + b$ und $a - b$ die Gleichungen

$$a = \tfrac{1}{2}\left\{(a + b) + (a - b)\right\}, \quad b = \tfrac{1}{2}\left\{(a + b) - (a - b)\right\}$$

ableiten, da die Strecken a und b *nicht gegeben* sind. Bei der Besprechung und Durchnahme der sogenannten Data im Allgemeinen, oder wenn man kurz die Lösung einer Aufgabe andeuten will, mag man sich immerhin des Ausdrucks bedienen: Mit $a + b$ und $a - b$, oder mit $a + b$ und $a : b$ u. s. w. sind die Strecken a und b gegeben, nicht aber halte ich diese Ausdrucksweise für zulässig bei einer vollständigen Bearbeitung einer Aufgabe, wie man sie vom Schüler verlangen muß. Wie ich meine, daß derartige Aufgaben zu behandeln seien, mögen folgende Beispiele zeigen.

Aufgabe 1. Dreieck aus $a + b$, $a - b$, γ.

Analysis (Fig. 1). Es sei ABC das verlangte Dreieck, d. h. es sei $BC + CA = a + b$, $BC - CA = a - b$, $\angle BCA = \gamma$.*) Beschreibt man mit CA um C den Kreis, der die Strecke CB in D und den Gegenstrahl von CB in E schneidet, so ist

$$BE = a + b, \; BD = a - b,$$

*) Es mag an dieser Stelle die Bemerkung Platz finden, daß die Analysis meines Erachtens stets mit einer Einleitung, wie ich es nenne, beginnen muß, welche die Bedingungen enthält, die das *zu construirende Dreieck erfüllen soll*. Ich halte eine solche Einleitung zur Orientirung und scharfen Auffassung der

also sind die Punkte B, E und D bestimmt, und damit auch der Punkt C als Mittelpunkt der Strecke DE. Ein Ort für A ist der Strahl CA, bestimmt durch den Winkel $BCA = \gamma$, ein zweiter der Kreis mit dem Mittelpunkte C und dem Radius CD.

Construction (Fig. 2). Construire die Strecke BE gleich $a + b$, beschreibe um B mit $a - b$ einen Kreisbogen, welcher die Strecke BE im Punkte D schneidet, halbire die Strecke DE durch den Punkt C, lege an den Strahl CB den Winkel γ an, dessen freier Schenkel den mit CD um C beschriebenen Kreis in A schneidet, und ziehe AB.

Behauptung. ABC ist das verlangte Dreieck, d. h. es ist

$$BC + CA = a + b,\ BC - CA = a - b,\ \angle BCA = \gamma.$$

Beweis. Nach der Construction ist

$$BE = BC + CE = a + b,\ CE = CD = CA,$$

also $BC + CA = a + b$. Ferner ist nach der Construction $BD = BC - DC = a - b$, also $BC - CA = a - b$. Endlich ist nach der Construction $\angle BCA = \gamma$.

Determination. Das Dreieck ist möglich und eindeutig bestimmt, wenn $a + b > a - b$ ist.

Aufgabe 2. Dreieck aus $u - v$, $u : v$ $(= m : n)$, h. (u und v bezeichnen die Abschnitte, in welche die Seite a durch die Halbirungslinie des Winkels α getheilt wird; u liegt an C).

Analysis (Fig. 3). Es sei ABC das verlangte Dreieck, d. h. es sei $\angle CAD = DAB$, $DC - BD = u - v$, $DC : BD = m : n$, $AE \perp BC$, $AE = h$. Beschreibt man um D mit DB einen Kreisbogen, der die Strecke DC in F schneidet, so ist $FC = u - v$, also sind die Punkte F und C bestimmt. Es verhält sich ferner $DC : DF = m : n$, also ist der Punkt D als derjenige Punkt bestimmt, welcher die Strecke CF nach dem Verhältnisse $m : n$ in äußere Abschnitte theilt. Ein Ort für B ist der Gegenstrahl von DC, ein zweiter der Kreis mit dem Mittelpunkte D und dem Radius DF. Da $CA : AB = DC : BD$ ist, so ist ein Ort für A der Apollonische Kreis für die Punkte C und B und das Verhältnis $DC : BD$. Ein zweiter Ort für A besteht aus den Parallelen zu BC im Abstande h.

Construction (Fig. 4). Construire die Strecke $CF = u - v$ und theile sie durch den Punkt D so in äußere Abschnitte, daß $DC : DF = m : n$ ist, beschreibe um D mit DF einen Kreisbogen, welcher den Gegenstrahl von DF in B schneidet, construire für die Punkte C und B und das Verhältnis $DC : BD$ den Apollonischen Kreis, welcher von einer im Abstande h zu BC gezogenen Parallelen im Punkte A geschnitten wird, und ziehe CA und AB.

Behauptung. ABC ist das verlangte Dreieck, d. h. es ist $\angle CAD = DAB$, $DC - BD = u - v$, $DC : BD = m : n$ und, wenn $AE \perp BC$ ist, $AE = h$.

Beweis. Nach der Construction ist $DC - DF = u - v$ und $BD = DF$, also $DC - BD = u - v$. Ferner verhält sich $DC : DF = m : n$, also auch $DC : BD = m : n$. Da A ein Punkt des Apollonischen Kreises für die Punkte C und B und das Verhältnis $DC : BD$ ist, so ist $CA : AB = DC : BD$, also $\angle CAD = DAB$. Endlich ist $AE = h$, weil A in einer Parallelen zu BC mit dem Abstande h liegt.

Aufgabe für unumgänglich nothwendig. Kommen darin Stücke vor, welche nicht Seiten oder Winkel sind, z. B. Höhen, Schwerlinien u. s. w., so sind sie als solche zu charakterisiren, ehe von ihnen etwas Anderes (Größe, Verhältnis u. s. w.) ausgesagt wird. Nach der Construction wird in einer Behauptung, der ich am liebsten einen besonderen Absatz eingeräumt sähe, ausgesprochen, daß das construirte Dreieck die gegebenen Bedingungen wirklich erfüllt.

Determination. Es muß $m > n$ und h darf nicht größer als der Radius des Apollonischen Kreises sein. Der Punkt D ist ein Punkt des Apollonischen Kreises; G sei der Gegenpunkt desselben und M der Mittelpunkt der Strecke GD. Nun ist

$$DC : BD = GC : GB = m : n,$$
$$(u - v) : BD = (m - n) : n.$$
$$BC : (u - v) = (m + n) : (m - n),$$
$$GB : BC = n : (m - n),$$
$$GB : (u - v) = (m + n)n : (m - n)^2.$$

$$GB + BD = \left\{ \frac{(m + n)n}{(m - n)^2} + \frac{n}{m - n} \right\} (u - v) = \frac{2mn}{(m - n)^2} (u - v),$$

$$MD = \frac{mn}{(m - n)^2} (u - v).$$

Es ist daher das Dreieck eindeutig oder zweideutig bestimmt, je nachdem

$$h \overline{\overline{<}} \frac{mn}{(m - n)^2} (u - v)$$

ist.

Ganz anders liegt die Frage über Verwendung der vereinbarten Symbole, wenn aus gegebenen Stücken die übrigen durch Rechnung gefunden werden sollen, also besonders bei trigonometrischen Aufgaben. Hier wird gar nicht verlangt, daß ein Dreieck ABC gezeichnet wird, so daß gewisse Stücke desselben eine gegebene Größe oder ein gegebenes Verhältnis haben. Hier kann man sich das Dreieck ABC als gegeben denken und setzt nur die Maßzahlen gewisser Stücke als bekannt voraus, die man etwa durch directe Messungen oder durch Rechnung gefunden hat. Hier handelt es sich zunächst um die Aufgabe, zwischen diesen und den übrigen Stücken Gleichungen aufzustellen, durch deren Auflösung die verlangten Stücke gefunden werden, und es stellen die gegebenen Stücke die bekannten und die gesuchten Stücke die unbekannten Größen in den zu bildenden Gleichungen dar. Hier ist es daher erlaubt, auch die Stücke, welche nicht gegeben sind, durch die vereinbarten Symbole zu bezeichnen und diese Bezeichnungen in der Figur, wenn eine solche erforderlich sein sollte, an die betreffenden Stücke zu setzen. Nur eins halte ich für geboten, worauf schon vor einigen Jahren von Sturm (in der Zeitschrift für mathematischen und naturwissenschaftlichen Unterricht, herausgegeben von Hoffmann, III. S. 22, 23.) hingewiesen worden ist, nämlich auch in der Bezeichnung streng zu unterscheiden zwischen der Maßzahl einer Größe und dieser Größe selbst. Wie es überhaupt im Verlaufe einer mathematischen Untersuchung unstatthaft ist, durch ein und dasselbe Symbol zwei ganz verschiedene Dinge zu bezeichnen, so kann es auch nicht zulässig sein, daß bei der Behandlung einer vorgelegten Aufgabe z. B. das Symbol a bald eine Strecke bald eine Zahl bedeutet. Der von Sturm a. a. O. gemachte Vorschlag, die Strecke BC durch $\bar{a}$ und die Maßzahl dieser Strecke durch a zu bezeichnen, scheint mir durchaus acceptabel zu sein und läßt sich, wie ich aus eigener Erfahrung weiß, in der Schulpraxis mit der größten Leichtigkeit durchführen.

II.

Scharfe Bestimmung geometrischer Oerter.

Man hat schon soviel über die Wichtigkeit der Unterscheidung zwischen Strecke, Strahl und Gerade geschrieben und so triftige Gründe für ihre Nothwendigkeit beigebracht, daß es geradezu unbegreiflich ist, wie man sich noch dagegen sträuben kann, diesen Unterschied zu machen. In sehr vielen Fällen ist es allerdings nicht erforderlich, der Bezeichnung AB das Wörtchen Strecke, Strahl oder Gerade hinzuzufügen, je nachdem man die Strecke, den Strahl oder die Gerade AB meint, da der Zusammenhang oft unzweideutig erkennen läßt, was gemeint ist. Wenn ich z. B. die Gleichung $AB = CD$ bilde oder vom Mittelloth von AB oder von AB als Seite eines Polygons spreche, so ist es unzweifelhaft, daß ich die Strecke AB im Sinne habe; ist von AB als Schenkel des Winkels CAB die Rede, so kann nur der Strahl AB gemeint sein; und gebrauche ich den Ausdruck: AB ist parallel CD, so ist es selbstverständlich, daß AB als Gerade gedacht werden soll. In andern Fällen dagegen, insbesondere bei Punktbestimmungen durch geometrische Oerter, halte ich es für durchaus geboten, sich der größten Schärfe und Genauigkeit zu befleißigen und stets die Bestimmung, ob Strecke, Strahl oder Gerade, hinzuzufügen. Es wäre zu wünschen, daß auch die Unterscheidung zwischen Grundseite und Grundlinie, wie in der Stereometrie zwischen Grundfläche und Grundebene, allgemein würde, und daß man für die Verlängerung des Strahls AB über den Ausgangspunkt A hinaus die Benennung „Gegenstrahl von AB" gebrauchte.

Aber nicht allein bei der Angabe geometrischer Oerter, wenn dieselben Theile von Geraden sind, pflegt man sich ungenau auszudrücken und für Strecken und Strahlen die Geraden, denen sie angehören, zu setzen, sondern man gestattet sich auch, und wie ich meine mit Unrecht, ganze Kreislinien als geometrische Oerter anzugeben, während nur die Punkte von Kreisbogen eine gegebene Bedingung erfüllen. Wenn im eigentlichen Lehr-Cursus geometrische Oerter angegeben werden, so werden freilich meist solche Ungenauigkeiten vermieden. Man sagt z. B.: Der geometrische Ort für den Scheitelpunkt eines Winkels von gegebener Größe, dessen Schenkel zwei gegebene Punkte enthalten, besteht aus zwei Kreisbogen, welche von diesen Punkten begränzt werden. Warum denn aber nicht dieselbe Genauigkeit bei Behandlung einer vorgelegten Constructionsaufgabe? Die Analysis muß so beschaffen sein, daß man, wenn man in der Construction stricte nach den Angaben derselben verfährt, unter allen Umständen eine Figur enthält, welche den gegebenen Bedingungen genügt (vorausgesetzt, daß die zur Construction der einzelnen Punkte angegebenen Oerter sich schneiden). Das würde aber durchaus nicht immer der Fall sein, wenn man die geometrischen Oerter nicht stets scharf umgränzt. (Vergl. unten die Anmerkung zur Analysis der Aufgabe 5). Ist nun ein Strahl der geometrische Ort eines Punktes, so darf man sich nicht mit der Festlegung der Geraden, welcher er angehört, begnügen, sondern es ist unumgänglich nothwendig, auch seinen Ausgangspunkt in der Analysis zu bestimmen und in der Synthesis zu construiren; und sind Strecken und Kreisbogen geometrische Oerter, so ist die Bestimmung ihrer Endpunkte in der Analysis und die Construction derselben in der Synthesis eben so wenig von der Hand zu weisen wie diejenige anderer nothwendiger Punkte der Figur. Die Wichtigkeit einerseits, besonders auch für die Determination, und andererseits die Leichtigkeit einer schärferen

Bestimmung geometrischer Oerter will ich durch einige Beispiele in ein helleres Licht zu setzen suchen.

Aufgabe 3. Dreieck aus $b - c$, t, α.

Analysis (Fig. 5). Es sei ABC das verlangte Dreieck, d. h. es sei $CA - AB = b - c$, $BD = DC$, $AD = t$, $\angle CAB = \alpha$. Verlängert man die Strecke AD um sich selbst bis E, so ist das Viereck ABEC ein Parallelogramm, also $BE = AC$. Beschreibt man ferner um B mit BE einen Kreisbogen, welcher den Gegenstrahl von AB in F schneidet, und zieht die Strecke FE, welche die Strecke AC in G schneidet, so ist $AF = b - c$, $\angle BEF = AGF = GFA$, also $AG = AF$. Durch den Winkel $CAB = \alpha$ sind die Strahlen AC und AB bestimmt. Ein Ort für die Punkte F und G ist der Kreis mit dem Mittelpunkte A und dem Radius $b - c$, ein zweiter für jenen der Gegenstrahl von AB, für diesen der Strahl AC. Ein Ort für E ist der Gegenstrahl von GF, ein zweiter der Kreis mit dem Mittelpunkte A und dem Radius $2t$. Ein Ort für B ist der Strahl AB, ein zweiter EB, bestimmt als Parallele durch E zu AC. Ein Ort für C ist der Strahl AC, ein zweiter EC, bestimmt als Parallele durch E zu AB.

Determination. Da E im Gegenstrahl von GF liegt und der Winkel AGE als Außenwinkel an der Basis eines gleichschenkligen Dreiecks stumpf ist, so muß $AE > AG$ oder $2t > b - c$ sein.

Aufgabe 4. Dreieck aus $b - c$, $p - q$, β, wenn $\beta < R$ ist.

Analysis (Fig. 6). Es sei ABC das verlangte Dreieck, d. h. es sei $CA - AB = b - c$, $AD \perp BC$, $DC - BD = p - q$, $\angle ABC = \beta$, $\angle ABC < R$. Beschreibt man mit DB um D einen Kreisbogen, welcher die Strecke DC in E schneidet, so ist $EC = p - q$. Da A ein Punkt des Mittelloths von BE ist, so ist $AE = AB$. Beschreibt man ferner um A mit AC einen Kreisbogen, der den Gegenstrahl von EA in F schneidet, so ist $EF = b - c$, $\angle CEF = BEA = ABE = \beta$. Durch den Winkel $CEF = \beta$ sind die Strahlen EC und EF bestimmt. Bestimmt man nun zuerst den Punkt C, für welchen ein Ort der Strahl EC, ein zweiter der Kreis mit dem Mittelpunkte E und dem Radius $p - q$ ist, so ist der Strahl EF nicht ein Ort für den Punkt F, da der Winkel EFC als Basiswinkel des gleichschenkligen Dreiecks AFC spitz ist, also der Punkt F, wenn $CG \perp EF$ ist, gar nicht in der Strecke EG liegen kann; vielmehr stellt der Gegenstrahl von GE die Gesamtheit derjenigen Punkte, deren jeder der Punkt F sein kann, d. h. den geometrischen Ort des Punktes F dar, soweit die Bedingungen in Betracht kommen, daß der Winkel ABC des gesuchten Dreiecks spitz sein und eine gegebene Größe und die Projectionen der Seiten CA und AB auf die Seite BC eine gegebene Differenz haben sollen. Der Punkt G, dessen Bestimmung (und nachherige Construction) hiernach nicht als überflüssig erscheint, ist bestimmt als Fußpunkt des von C auf EF gefällten Lothes. Soweit es sich nun um die Bedingung handelt, daß die Differenz der Seiten CA und AB gleich der gegebenen Strecke $b - c$ sein soll, ist ein zweiter Ort für F der Kreis mit dem Mittelpunkte E und dem Radius $b - c$. — Man konnte auch anders verfahren; man konnte, nachdem man die Strahlen EF und EC (aber nicht den Punkt C) bestimmt hatte, zuerst den Punkt F bestimmen, für welchen dann allerdings der Strahl EF ein geometrischer Ort gewesen wäre, und hierauf den Punkt C; dann aber wäre nicht etwa der Strahl EC, sondern, wenn $FH \perp EF$ ist, die Strecke EH ein geometrischer Ort für C gewesen. — Nimmt man ferner, nachdem man die Punkte E, C, F bestimmt hat, als einen Ort für A das Mittelloth von FC, so wird damit, und das ist hier auch völlig ausreichend, nur die Eigenschaft des Punktes A berücksichtigt, daß er die Spitze eines gleichschenkligen Dreiecks mit der Basis FC ist. Giebt man aber als zweiten Ort für A nicht den Strahl FE, sondern den Gegenstrahl von EF an, so findet auch der Umstand, daß die Punkte A und F auf verschiedenen Seiten des Punktes E liegen müssen, seine volle Berücksichtigung; und daß er diese finde, ist durchaus erforderlich. Für B endlich ist ein Ort der Kreis mit dem Mittelpunkte A und dem Radius AE, ein zweiter der Gegenstrahl von DC, dessen Ausgangspunkt D als Fußpunkt des von A auf EC gefällten Lothes bestimmt ist.

Die Determination dieser Aufgabe macht jetzt weiter keine Schwierigkeit. Da A im Gegenstrahl von EF und im Mittelloth von FC liegt, so liegen die Punkte F und E auf derselben Seite dieses Mittelloths, also ist $EF < EC$, $b - c < p - q$; und da F im Gegenstrahl von GE liegt, so ist $EF > EG$, $b - c > (p-q)\cos\beta$. Die Aufgabe ist also stets möglich und das Dreieck eindeutig bestimmt, wenn $p - q > b - c > (p - q)\cos\beta$ ist.

Aufgabe 5. Dreieck aus b, r, $\beta - \gamma$.

Analysis. (Fig. 7a und 7b). Es sei ABC das verlangte Dreieck, d. h. es sei $CA = b$, $AM = BM = CM = r$, $\angle ABC - BCA = \beta - \gamma$. Wenn man den Durchmesser AE zieht, von A auf BC das Loth fällt, welches die Gerade BC in H und den Kreis ABC in D schneidet, und $EF \parallel DA$ construirt, so ist der Winkel HAE gleich dem Peripheriewinkel in dem Kreisabschnitte ABCF (in Fig. 7b ist dieser Winkel das Supplement vom Peripheriewinkel AEF), also $\angle HAE = ABC - FAC$, und da $AF \parallel DE$ ist, $\angle HAE = ABC - BCA = \beta - \gamma$. Die Punkte A und E sind bestimmt als Gegenpunkte des Kreises M mit dem Radius r. Ein Ort für D ist dieser Kreis, ein zweiter die Gerade AH, bestimmt durch den Winkel $HAE = \beta - \gamma$. Ein Ort für den Punkt C ist, wenn G der Mittelpunkt des Bogens BC ist, auf welchem der Peripheriewinkel CAB steht, derjenige Bogen GF, in welchem der Punkt A nicht liegt. Von den Endpunkten dieses Bogens ist der Punkt F als Schnittpunkt des Kreises M mit der Parallelen durch A zu DE, und der Punkt G als derjenige Schnittpunkt des Kreises M mit dem Mittelloth von DE (da $DE \parallel BC$ ist) bestimmt, welcher innerhalb des Winkels HAE liegt. Ein zweiter Ort für C ist der Kreis mit dem Mittelpunkte A und dem Radius b. Der Punkt B ist bestimmt durch denjenigen Bogen GA, in welchem der Punkt C nicht liegt, und durch die Parallele durch C zu DE.

Anmerkung. Hätte man sich in der Analysis so ausgedrückt: Ein Ort für C ist der Kreis M mit dem Radius r, ein zweiter der Kreis mit dem Mittelpunkte A und dem Radius b, so würde man in der Construction berechtigt sein, als den Punkt C denjenigen Schnittpunkt dieser Oerter zu nehmen, welcher nicht in dem Bogen GCF liegt, und würde zwar ein Dreieck (AB'C' in Fig. 7b) erhalten, dasselbe würde aber nicht den gegebenen Bedingungen genügen.

Determination. Zunächst darf b nicht größer als 2r sein. Liegt nun der Punkt M innerhalb des Winkels FAH, und das ist der Fall, wenn $\beta - \gamma < R$ ist, so ist das Dreieck BAC zweideutig bestimmt, wenn die beiden Ungleichungen $AC > AF$ und $AC > AG$ oder

$$b > 2r\sin(\beta - \gamma) \text{ und } b > 2r\cos\tfrac{1}{2}(\beta - \gamma)$$

erfüllt sind, und beide Dreiecke fallen in eins zusammen, wenn $b = 2r$ ist. Ist nur eine der beiden Bedingungen erfüllt, so ist das Dreieck eindeutig bestimmt und ist keine erfüllt, so ist die Aufgabe unmöglich. Wenn der Punkt M in AF oder außerhalb des Winkels FAH liegt, und diese Lage hat der Punkt M, wenn $\beta - \gamma \overline{\overline{>}} R$ ist, so ist das Dreieck eindeutig bestimmt, wenn

$$2\,r\cos\tfrac{1}{2}(\beta-\gamma) < b < 2\,r\sin(\beta-\gamma)$$

ist, dagegen die Aufgabe unmöglich, wenn eine dieser Ungleichungen nicht stattfindet.

(Vergl. Aufgabe 9.)

Man begegnet oft der Ansicht, wenn sie auch nicht immer offen ausgesprochen ist, daß eine geometrische Constructionsaufgabe durch die Analysis als gelöst zu betrachten sei. In sofern die Aufgabe aber die wirkliche Zeichnung einer Figur, gewissen Bedingungen gemäß, verlangt, kann ich einer solchen Ansicht nicht beistimmen, da durch die Analysis der in der Aufgabe gestellten Forderung nicht genügt wird. Die eigentliche Lösung der Aufgabe ist und bleibt unter allen Umständen die Construction, und am allerwenigsten darf man auf dieselbe verzichten, wenn, wie oft geschieht, in der Analysis nur die theoretische Möglichkeit der Construction nachgewiesen, nicht aber die gebührende Rücksicht auf die praktische Ausführbarkeit derselben genommen worden ist. Doch glaube ich, daß man bei einer Behandlung der geometrischen Analysis, wie ich sie in den obigen Ausführungen gefordert habe, den Schülern der obersten Stufe einer höheren Lehranstalt, den Primanern, für gewöhnlich die Construction erlassen kann. Denn wenn in der Analysis durch eine scharfe Angabe der geometrischen Oerter gezeigt worden ist, wie der Reihe nach die einzelnen Punkte der verlangten Figur construirt werden können, so erscheint es mir auf dieser Stufe nur noch von untergeordneter Bedeutung, die Constructionen auch wirklich ausführen zu lassen, vorausgesetzt, daß man in der Analysis zur Lösung nur die Benutzung der allereinfachsten Aufgaben, Grundaufgaben, und der im Lehr-Cursus besprochenen geometrischen Oerter gestattet, unter keinen Umständen aber die Angabe sogenannter Data zuläßt. In Tertia und Secunda freilich wird man stets darauf bestehen müssen, daß aus den gegebenen Stücken die verlangte Figur auch wirklich aufgebaut werde. (Vergl. unten Abschn. IV.)

III.

Vermeidung von Rechnungen bei geometrischen und von Constructionen bei trigonometrischen Aufgaben.

Die geometrische Aufgabe (ich sehe ab von Aufgaben, die durch algebraische Analysis gelöst werden sollen) ist eine Constructionsaufgabe, d. h. sie verlangt, durch Zeichnung eine Figur so herzustellen oder eine gegebene Figur so zu erweitern, daß gewissen, meist ebenfalls durch Zeichnung gegebenen, Bedingungen genügt wird. Die trigonometrische Aufgabe dagegen ist wesentlich eine Rechenaufgabe, sie stellt die Forderung, aus Bedingungen, die in Zahlen gegeben sind, die Maßzahlen von Seiten, Winkeln, Flächen oder sonstigen verlangten Größen zu berechnen. Dieser grundverschiedene Charakter der genannten Arten von Aufgaben bedingt nicht nur äußerlich, wie ich im ersten Abschnitt dargethan zu haben glaube, eine verschiedene Anwendung von Symbolen für gegebene und nicht gegebene Stücke, sondern er verlangt weit mehr noch eine grundverschiedene Behandlung und Durchführung in der Auflösung der Aufgabe: die Lösung einer geometrischen Aufgabe soll rein synthetisch, die einer trigonometrischen rein analytisch sein; mit andern Worten: Die Behandlung einer geometrischen Aufgabe soll alle Rechnung, diejenige einer trigonometrischen alle Construction, soweit sie nicht unerläßlich zur Gewinnung der nöthigen Gleichungen ist, vermeiden. Die Sammlung trigonometrischer Aufgaben von Lieber und v. Lühmann, die vorzüglichste, die mir bis jetzt zu Gesicht gekommen ist (auf die gleichfalls vorzügliche und in der trefflichen Zusammenstellung und Anordnung des Stoffs meines Erachtens bis jetzt unerreichte Sammlung geometrischer Constructionsaufgaben von denselben Verfassern werde ich ebenfalls Gelegenheit haben zu verweisen), steht auf diesem Standpunkte. Die Verfasser sagen in der Vorrede: Wir haben „eine rein analytische Methode angewendet; die Methode auf Grund von geometrischen Constructionen die Aufgaben zu lösen, ist ganz übergangen. Von selbst versteht es sich, daß, um die trigonometrische Lösung anzubahnen, diejenigen Linien, welche unmittelbar gegeben, in der Figur gezogen sein müssen, aber sonst keine Hülfslinien. Befindet sich z. B. ϱ unter den gegebenen Elementen eines Dreiecks, so ist der Radius des eingeschriebenen Kreises zu ziehen; ist aber $a + b$ oder $\varrho_a + \varrho_b$ eins der gegebenen Elemente, so darf bei einer rein analytischen Lösung nicht $a + b$, resp. $\varrho_a + \varrho_b$ wirklich construirt werden, sondern es genügt im letzteren Falle, wenn ϱ_a und ϱ_b gezeichnet werden. Entschieden ist in didactischer Beziehung die Vermengung beider Methoden zu verwerfen, da sie nur dazu geeignet ist, bei den Schülern Unklarheit hervorzurufen." Gegen diese Bemerkungen hätte ich nur einzuwenden, daß mir der rein analytische Charakter noch nicht entschieden genug gewahrt zu sein scheint. Ich würde z. B. $\varrho_a + \varrho_b$ nicht allein nicht construiren, sondern auch die Construction von ϱ_a und ϱ_b (welche übrigens nicht „unmittelbar gegeben" sind, wenn „$\varrho_a + \varrho_b$ eins der gegebenen Elemente" ist) vermeiden, die Construction von ϱ_b neben derjenigen von ϱ_a aber geradezu für logisch fehlerhaft halten. Um mich deutlicher zu erklären, bemerke ich zunächst, daß r den Radius des Kreises ABC, ϱ den Radius des inneren, $\varrho_1, \varrho_2, \varrho_3$ die Radien der äußeren den Seiten a, b, c angeschriebenen Berührungskreise, s_1, s_2, s_3 die von den Eckpunkten A, B, C ausgehenden Tangenten (begränzt von den Eckpunkten und den Berührungspunkten) des inneren Berührungskreises und s die vom Eckpunkte A ausgehende Tangente des äußeren, der Seite a angeschriebenen Berührungskreises bedeuten, daß ferner s_3 und s_2 gleich den von den Eckpunkten B und C ausgehenden Tangenten des zuletzt erwähnten Kreises sind, daß endlich s gleich dem halben Umfange des Dreiecks und $s_1 = s - a$, $s_2 = s - b$, $s_3 = s - c$ ist. Handelt es sich nun darum, eine Relation zwischen $\varrho_1 + \varrho_2$ und r zu gewinnen, so hat man sich zunächst zu fragen, ob man nicht mit dem aus dem trigonometrischen Lehr-Cursus bekannten Formel-Apparat auskommen kann, und nur im äußersten Nothfalle seine Zuflucht zu einer Figur zu nehmen. Die Gleichungen $F = \varrho s = \varrho_1 s_1 = \varrho_2 s_2 = \varrho_3 s_3 = \sqrt{s s_1 s_2 s_3}$, $\varrho = s_1 \operatorname{tg} \frac{1}{2}\alpha = s_2 \operatorname{tg} \frac{1}{2}\beta = s_3 \operatorname{tg} \frac{1}{2}\gamma$ sollten in keinem Lehrbuche der Trigonometrie fehlen. Hieraus ergiebt sich aber für unseren Fall $\varrho_1 = s \operatorname{tg} \frac{1}{2}\alpha$, $\varrho_2 = s \operatorname{tg} \frac{1}{2}\beta$, $\varrho_1 + \varrho_2 = s \dfrac{\cos \frac{1}{2}\gamma}{\cos \frac{1}{2}\alpha \cos \frac{1}{2}\beta}$. Ferner ist

$$s = \tfrac{1}{2}(a + b + c) = r(\sin\alpha + \sin\beta + \sin\gamma) = 4r \cos \tfrac{1}{2}\alpha \cos \tfrac{1}{2}\beta \cos \tfrac{1}{2}\gamma,$$

$$\varrho_1 + \varrho_2 = 4r \cos \tfrac{1}{2}\gamma^2.$$

Sind jene Formeln nicht aus dem trigonometrischen Lehr-Cursus bekannt, so hat man allerdings an einer (sei es im Kopfe oder auf dem Papiere) zu entwerfenden Figur zunächst eine

Gleichung für ϱ_1 zu entwickeln. Man findet $a = \varrho_1 (\mathrm{tg}\frac{1}{2}\beta + \mathrm{tg}\frac{1}{2}\gamma)$,

$2r\sin\alpha = \varrho_1 \dfrac{\cos\frac{1}{2}\alpha}{\cos\frac{1}{2}\beta\ \cos\frac{1}{2}\gamma}$, $\varrho_1 = 4r\sin\frac{1}{2}\alpha\ \cos\frac{1}{2}\beta\ \cos\frac{1}{2}\gamma$. Hiermit ist aber bewiesen, daß $\varrho_2 = 4r\cos\frac{1}{2}\alpha\ \sin\frac{1}{2}\beta\ \cos\frac{1}{2}\gamma$ ist, und den Beweis der Richtigkeit dieser Gleichung noch für nöthig halten enthält einen gewissen logischen Fehler. Durch Addition der beiden letzten Gleichungen erhält man die gesuchte Relation zwischen $\varrho_1 + \varrho_2$ und r. (Vergl. die trigonometrischen Aufgaben in Abschnitt V.)

Wie nun meines Erachtens dem Wesen der trigonometrischen Aufgabe ein Zurückgreifen auf eine Construction wenig angemessen ist, vielmehr die Behandlung derartiger Aufgaben jede unnöthige Zeichnung zurückzuweisen hat, ebenso glaube ich umgekehrt, daß die geometrische Constructionsaufgabe nur dann ihren eigenthümlichen Charakter rein bewahren kann, wenn die ganze Entwickelung sich nur an Größen vollzieht, die man in der Zeichnung wirklich vor Augen hat, daß also jede überflüssige Rechnung zu verschmähen ist, und daß man dabei in der Beurtheilung dessen, was an Rechnung nothwendig oder überflüssig ist, nicht zu peinlich sein kann. Für die Aufgabe: Zwei Strecken zu construiren, deren Summe und Differenz gegeben sind, giebt man gewöhnlich folgende Analysis: Wenn a und b die gesuchten Strecken, also die Strecken $a + b$ und $a - b$ gegeben sind, so ist

$$a = \tfrac{1}{2}\left\{(a + b) + (a - b)\right\},\quad b = \tfrac{1}{2}\left\{(a + b) - (a - b)\right\}.$$

Gegen diese Lösung ist an sich gewiß nichts einzuwenden, die Aufgabe ist aber nicht durch geometrische, sondern durch algebraische Analysis gelöst, und von Aufgaben mit algebraischer Analysis soll hier nicht die Rede sein. Lieber und v. Lühmann scheinen in der schon oben angeführten Aufgabensammlung für die Aufgaben in § 4, nach der Ueberschrift zu schließen, solche Lösungen im Sinne gehabt zu haben. Dann würden sie aber gar nicht hierher gehören, sondern in den fünften Abschnitt ihrer Sammlung („Aufgaben, welche durch algebraische Analysis zu lösen sind") zu verweisen sein. Wie derartige Aufgaben auf rein constructivem Wege zu lösen seien, zeigt schon die oben S. 3 zu einem andern Zwecke behandelte Aufgabe 1; an dieser Stelle mag eine etwas complicirtere Platz finden.

Aufgabe 6. Dreieck aus $a + b - c$, $a - b$, $b + c$.

Analysis. (Fig. 8.) Es sei ABC das verlangte Dreieck, d. h. es sei $BC + CA - AB = a + b - c$, $BC - CA = a - b$, $CA + AB = b + c$. Ist $EA = BC$, $AD = CA$, $FD = AB$, so ist $EF = a + b - c$, also sind die Punkte E und F bestimmt. Ferner ist $EC = a - b$, also der Punkt C bestimmt. Ist endlich $DG = CA$, so ist $FG = b + c$, also der Punkt G bestimmt. Die Punkte A und D sind als diejenigen Punkte bestimmt, welche die Strecke CG in drei gleiche Theile theilen. Mithin ist das Dreieck ABC durch die drei Seiten bestimmt.

Wie man die Analysis solcher Aufgaben am besten einrichtet, erfordert freilich etwas mehr Nachdenken als das Rechnen. Durch Rechnung würde man sofort finden

$$3b = (a + b - c) + (b + c) - (a - b).$$

Zur Bestimmung von Größen durch Rechnung ist man insbesondere geneigt, wenn es sich um Winkel handelt, was wohl darin seinen Grund hat, daß die Summe der Winkel eines Polygons von gegebener Seitenzahl eine gegebene Größe ist. Und doch läßt sich auch in diesen Fällen meist alle Rechnung vermeiden, wie ich an einigen Beispielen zeigen zu können hoffe.

Bei Lieber und v. Lühmann a. a. O. findet man § 16, c die Bemerkung, daß, wenn (Fig. 9) $AC > AB$, $AD = AC$, $AE = AB$ ist, $\angle ADC = R - \frac{1}{2}\alpha$, $\angle CEB = R + \frac{1}{2}\alpha$ ist. Und doch ist diese Wahrheit für keine der folgenden Aufgaben von dem geringsten Interesse, wenn man entweder $BF \parallel AC$ oder $CG \parallel BA$ oder $EH \parallel AB$ zieht. Denn man findet leicht, daß

$$\angle FBD = ECG = CEH = \alpha,\ BF = BD,\ CG = CE,\ \angle BEA = HEB$$

ist. Je nach der vorgelegten Aufgabe benutzt man als Ausgangspunkt für die Analysis die eine oder die andere Hülfslinie oder wählt beliebig zwischen allen dreien. Gehören $b - c$ und α zu den gegebenen Stücken, so ist sowohl das Dreieck BDF als auch das Dreieck ECG, folglich sowohl die Gerade DC als auch die Gerade EB bestimmt. Oder bestimmt man die Punkte E und C und den Strahl EH, so hat man damit die Strahlen EA und EB. Sind zur Construction des Dreiecks $b - c$, h_3, α gegeben, so bestimmt man zunächst das Dreieck AJC, in welchem $CJ \perp AJ$ ist, hierauf den Punkt E, den Strahl CG, den Punkt G (oder den Strahl EH und den Strahl EB) und findet den Punkt B als Schnittpunkt von GE und AJ. Ist h_2 statt h_3 gegeben, so hat man, wenn $BK \perp AC$ ist, zuerst die Punkte A, B, K, dann die Punkte D, F, C zu bestimmen. Analog verfahre ich nun auch bei Aufgaben, in welchen $b + c$ und α gegeben sind, z. B. bei der Aufgabe: Dreieck aus $b + c$, α, β. Nachdem CA um AB bis M verlängert ist (Fig. 9), ziehe ich zu AB durch C die Parallele, welche den Gegenstrahl von BM in O schneidet, und erhalte dadurch das gleichschenklige Dreieck MOC. Ist CX der Gegenstrahl von CM, so sind durch $OCX = \alpha$ die Strahlen CO und CX, also auch der Strahl CM, folglich auch, da $CM = CO = b + c$ ist, die Punkte M und O bestimmt. Durch den Winkel $OCB = ABC = \beta$ ist der Strahl CB und als Schnittpunkt desselben mit der Strecke MO der Punkt B bestimmt. Für den Punkt A endlich ist ein Ort die Strecke CM, ein zweiter das Mittelloth von MB.

Wenn (Fig. 10) $AC > AB$, $AD = AE = AB$ ist, so finden bekanntlich die gewöhnlich ebenfalls durch Rechnung gefundenen Gleichungen $\angle EBC = \frac{1}{2}(\beta - \gamma)$, $\angle DBC = R + \frac{1}{2}(\beta - \gamma)$ statt. Unter den geometrischen Beweisen der Richtigkeit dieser Gleichungen ist folgender wohl der einfachste. Ist F der Schnittpunkt des Kreises DEB mit dem Strahl CB (er liegt im Gegenstrahl von BC, wenn $\beta > R$ ist), so ist der Centriwinkel $CAF = BFA - \gamma = \beta - \gamma$, folglich der Peripheriewinkel $EBC = \frac{1}{2}(\beta - \gamma)$, $\angle DBC = R + \frac{1}{2}(\beta - \gamma)$. (Liegt F im Gegenstrahl von BC, so ist $\angle$ EBC ein Außenwinkel des Sehnenwinkels DEBF und als solcher gleich dem gegenüberliegenden Innenwinkel EDF). Zu analogen Resultaten gelangt man, wenn man (Fig. 10*) den Kreis um A mit AC construirt.

Daß die Höhe AH und die Halbirungslinie AG des Winkels α (Fig. 10) ebenfalls den Winkel $\frac{1}{2}(\beta - \gamma)$ einschließen, folgt daraus, daß sie auf den Schenkeln des Winkels $EBC = \frac{1}{2}(\beta - \gamma)$ lothrecht stehen. Doch läßt sich dieser Satz auch leicht mit Hülfe des Kreises ABC beweisen.

Bei Lieber und v. Lühmann findet sich folgende Beweisführung: Wenn (Fig. 10) $AH \perp BC$, $HF = BH$ (also $AF = AB$) ist, so ist

$$\angle EFC = 2R - BFA - AFE = 2R - \beta - [R - \tfrac{1}{2}(\beta - \gamma)]$$
$$= 2R - \beta - R + \tfrac{1}{2}\beta - \tfrac{1}{2}\gamma = R - \tfrac{1}{2}(\beta + \gamma) = R - (R - \tfrac{1}{2}\alpha) = \tfrac{1}{2}\alpha.$$

Nun ist aber EFC ein Außenwinkel des Sehnenvierecks DEFB, folglich $\angle EFC = CDB = \frac{1}{2}\alpha$. (Liegt F im Gegenstrahl von BC, so sind die Winkel EFC und CDB Peripheriewinkel auf demselben Bogen). Statt des Kreises mit dem Mittelpunkte A und dem Radius AB kann man auch hier den Kreis mit dem Mittelpunkte A und dem Radius AC construiren (Fig. 10*).

Den Beschluß dieser Bemerkungen möge ein Beweis des Satzes machen, daß der Kreis ABC die sechs Centralen der vier Berührungskreise des Dreiecks ABC halbirt (der Feuerbach'sche Kreis oder der Kreis der neun Punkte), und man vergleiche diesen Beweis mit dem von Lieber und v. Lühmann in § 40 gegebenen.

Es seien (Fig. 11) die Punkte M, M_1, M_2, M_3 die Mittelpunkte der vier Berührungskreise des Dreiecks ABC, D Mittelpunkt von MM_1, E der Mittelpunkt von M_1M_2. Da der Winkel MBM_1 recht ist, so ist

$$BD = DM, \text{ also } \angle DMB = MBD = CBD + MBC.$$

Nun ist $\angle MAB + ABM = DMB = CBD + MBC$, $\angle ABM = MBC$, folglich $\angle MAB = CBD$, also auch, da $\angle MAB = CAM_1$ ist, $\angle CBD = CAM_1$. Daher liegt der Punkt D in der Peripherie des Kreises ABC. Ferner ist

$$EB = M_1E, \text{ also } \angle EM_1X = M_3BE = ABE + M_3BA.$$

Nun ist $\angle M_1CB + CBM_1 = EM_1X = ABE + M_3BA$, $\angle CBM_1 = M_3BA$, folglich $\angle M_1CB = ABE$, also auch, da $\angle M_1CB = ACM_2$ ist, $\angle ABE = ACM_2$, folglich liegt der Punkt E in der Peripherie des Kreises ABC. Hiermit ist der Satz bewiesen.

IV.

Zurückführung der Aufgaben auf andere oder auf Data.

„Es scheint, daß man im Allgemeinen bis jetzt noch zu wenig Sorgfalt auf die geometrischen Constructionen verwendet habe. Die hergebrachte, von den Alten uns überlieferte Weise, wonach man nämlich Aufgaben als gelöst betrachtet, sobald nachgewiesen worden, durch welche Mittel sie sich auf andere, vorher betrachtete, zurückführen lassen, ist der richtigen Beurtheilung dessen, was ihre vollständige Lösung erheischt, sehr hinderlich. So geschieht es denn auch, daß auf diese Weise häufig Constructionen, die, wenn man in die Nothwendigkeit versetzt wäre, alles was sie einschließen, wirklich und genau auszuführen, bald aufgegeben würden, indem man dadurch sich gewiß bald überzeugen müßte, daß es eine ganz andere Sache sei, die Constructionen in der That, d. h. mit den Instrumenten in der Hand, oder, um mich des Ausdrucks zu bedienen, bloß mittelst der Zunge auszuführen*). Es läßt sich gar leicht sagen: ich thue dies und dann das, und dann jenes; allein die Schwierigkeit, und man kann in gewissen Fällen sagen die Unmöglichkeit, Constructionen, welche in einem hohen Grade zusammengesetzt sind, wirklich zu vollenden, verlangt, daß man bei einer vorgelegten Aufgabe genau erwäge, welches von den verschiedenen Verfahren bei der gänzlichen Ausführung das einfachste, oder welches unter besonderen Umständen das zweckmäßigste sei, und wie viel von dem, was die Zunge etwas leichtfertig ausführt, zu umgehen sei, wenn

*) „Ich brauche hierbei z. B. nur an die frühere Construction desjenigen Kreises, welcher drei gegebene Kreise berühren soll, zu erinnern. Und daß selbst beim gewöhnlichen Schulunterrichte, bei viel einfacheren Aufgaben ähnliche Beispiele vorkommen, davon wird sich jeder aufmerksame Lehrer leicht überzeugen können."

es darauf ankommt, alle überflüssige Mühe zu sparen, oder die größte Genauigkeit zu erreichen, oder den Plan (das Papier), worauf gezeichnet wird, möglichst zu schonen, u. s. w. Es käme also, mit einem Worte, darauf an: „zu untersuchen, auf welche Weise jede geometrische Aufgabe, theoretisch oder practisch, am einfachsten, genausten oder sichersten construirt werden könne, und zwar 1) welches im Allgemeinen, 2) welches bei beschränkten Hülfsmitteln, und 3) welches bei obwaltenden Hindernissen das zweckmäßigste Verfahren sei."" (Steiner, „die geometrischen Constructionen, ausgeführt mittelst der geraden Linie und eines festen Kreises," Berlin 1833, S. 88 f.)

Ich finde nicht, daß diese Worte unseres Altmeisters der synthetischen Geometrie bis jetzt die Beachtung, die sie verdienen, gefunden haben, soweit ich nach meinen, sowohl an Lehrern als auch an Schülern, die von andern Lehrern unterrichtet waren, gemachten Erfahrungen und nach meiner Kenntnis der in den letzten vierzig Jahren erschienenen zahlreichen, zum Theil trefflichen Aufgabensammlungen zu urtheilen vermag. Die schon mehrfach angeführte Sammlung geometrischer Constructionsaufgaben von Lieber und v. Lühmann macht auch in dieser Beziehung eine rühmliche Ausnahme. Lieber sagt in der Vorrede zur ersten Auflage: „In den meisten der bis jetzt erschienenen Aufgabensammlungen besteht die Anleitung, welche den Schülern gegeben wird, hauptsächlich darin, daß auf früher dagewesene Aufgaben und Lehrsätze verwiesen wird; ich finde diese Methode höchst unpraktisch, da sie nur dazu dient, die Schüler zu verwirren und ihnen die Lust zum Lösen der Aufgaben zu benehmen, denn zur Lösung der eigentlichen Aufgabe müssen erst successive mehrere andere gelöst werden." Es läßt sich in einer Aufgabensammlung, welche ja nur Anleitungen und Andeutungen zur Lösung der vorgelegten Aufgaben geben kann, natürlich nicht vermeiden auf andere Aufgaben zu verweisen, und das ist auch in der Sammlung von Lieber und v. Lühmann vielfach geschehen. Aber wie mir scheint, sind diese Anleitungen mit sorgfältiger Erwägung der Zweckmäßigkeit und praktischen Ausführbarkeit der Constructionen gegeben. —

Es ist nicht genug, in der Analysis durch Zurückführung auf bekannte Aufgaben und durch Angabe bekannter Data die theoretische Möglichkeit der Lösung einer vorgelegten Aufgabe nachzuweisen, vielmehr soll die vollständig ausgeführte Analysis, eingedenk der Hauptforderung, aus den in der Zeichenfläche durch Zeichnung gegebenen Bedingungen die verlangte Figur auch wirklich aufzubauen, die praktische Ausführbarkeit der gefundenen Lösung darthun und nachweisen, wie alle Punkte der Figur, deren Construction zur Lösung erforderlich ist, der Reihe nach auch wirklich construirt werden können. Es ist auch nicht gestattet, die Schwierigkeit complicirter Aufgaben etwa nach dem Princip der Theilung der Arbeit dadurch zu vermindern, daß man einzelne Theile der Figur in sogenannten Nebenconstructionen, gleichsam in besonderen Werkstätten, herstellt und dann in der Central-Werkstätte diese Stücke zu der verlangten Figur zusammensetzt; sondern alle Hülfsmittel der Lösung sollen derart zu einem einheitlichen Ganzen gestaltet werden, daß die Analysis in der möglichst zweckmäßigen Anordnung alle Angaben enthält, wie mit Hülfe der einfachsten Aufgaben, ich nenne sie Grundaufgaben, und der wichtigsten geometrischen Oerter, wie sie im Lehr-Cursus besprochen zu werden pflegen und deren Constructionen als bekannt vorausgesetzt werden, durch eine einheitliche Zeichnung der gestellten Forderung genügt werden kann. (In meinem an unserem Gymnasium eingeführten Lehrbuche*) habe ich die Grundaufgaben — es sind mit Einschluß von sieben Constructionen algebraischer Ausdrücke im Ganzen 25 — auf der letzten Seite zusammengestellt). Nur auf diese Grundaufgaben und geometrischen Oerter gestatte ich meinen Schülern in einer durchgeführten Analysis in Worten bloß hinzuweisen, während in der Figur für die Synthesis auch deren Ausführung sichtbar sein muß. Bei der Durchnahme einer Aufgabe in der Klasse empfiehlt es sich, mitunter am Schluß der Analysis alle zur Lösung der Aufgaben nöthigen Punkte in der Reihenfolge, in welcher sie bestimmt sind, noch einmal zusammenzustellen. (Vergl. unten Aufgabe 8 S. 16). — Die Anführung von Daten muß überhaupt vermieden werden. In einer bloßen Anleitung zur Lösung einer Aufgabe kann wohl auf ein Datum hingewiesen werden, in der Durchführung derselben darf aber nicht z. B. der Ausdruck gebraucht werden: Mit h_1 und m_1 ist $\frac{1}{2}(\beta - \gamma)$ gegeben. Aber auch bei einer Anleitung ist von der Angabe eines Datums mit großer Vorsicht Gebrauch zu machen. Nur die Gewohnheit, sich lediglich mit dem Nachweis der theoretischen Möglichkeit der Lösung einer Aufgabe zu begnügen, macht es erklärlich, daß man vielfach in Aufgabensammlungen als Hülfsmittel zur Lösung ein Datum findet, welches bei der Ausführung anzuwenden niemand in den Sinn kommen wird. Beim Gebrauch der mit Recht sich vielfacher Anerkennung erfreuenden Aufgabensammlung von Gandtner und Junghans habe ich oft Gelegenheit gehabt, diese Bemerkung zu machen. Von den zahlreichen allein auf Seite 157 und 158 sich vorfindenden Belegen hierfür will ich nur zwei hier anführen und eingehender besprechen. Zu der schon oben (Aufgabe 5) behandelten Aufgabe: Dreieck aus r, b, $\beta - \gamma$ findet sich als Anleitung zur Lösung die Angabe des Datums, daß mit r und b der Winkel β gegeben sei. Hieraus kann man nur den Schluß ziehen, daß durch r und b zuerst der Winkel β, dann der Winkel γ mit Hülfe des gegebenen Winkels $\beta - \gamma$ und endlich das Dreieck ABC aus b, β, γ construirt werden soll. Nun ist für viele Aufgaben desselben Paragraphen in Datum 10 bewiesen, daß, wenn (Fig. 12) $AD \parallel BC$ ist, $\angle ACD = \beta - \gamma$ ist. Die einfachste Lösung ist daher die, daß man, nachdem man den Kreis ABC und die Sehne AC construirt hat, den Winkel ACD gleich $\beta - \gamma$ zeichnet und CB parallel zu DA zieht. Was interessirt uns nun jenes Datum? (Oben S. 7 habe ich eine andere Lösung gegeben, die für die Determination, auf die bei der Wahl der Lösung füglich auch Rücksicht zu nehmen ist, sich besser eignet). — Eine andere Aufgabe ist folgende:

Aufgabe 7. Ein Dreieck ABC, in welchem der Winkel ABC spitz ist, aus h, m, $p - q$ zu construiren.

Analysis (Fig. 13). Es sei ABC das verlangte Dreieck, d. h. es sei $AD \perp BC$, $AD = h$, $DC - BD = p - q$, $\angle CAE = EAB$, $AE = m$. Das Dreieck ADE ist durch zwei Seiten und den Gegenwinkel der größeren bestimmt. Ist M der Mittelpunkt des Kreises ABC und G der Schnittpunkt dieses Kreise mit dem Gegenstrahl von EA, so ist $\widehat{BG} = \widehat{GC}$, also MG das Mittelloth von BC, $MG \parallel AD$, $\angle EAD = AGM = MAG$, also der Strahl AM bestimmt. Ist ferner $FC = BD$, so ist $DF = p - q$ und MG auch das Mittelloth von DF. Da nun der Winkel DEG stumpf ist, so schneidet MG den Gegenstrahl von ED, folglich ist $EF > DE$, $DF > 2DE$ oder, wenn $EH = DE$ ist, $DF > DH$. Daher ist ein Ort für F

*) Die Hauptsätze der Elementar-Mathematik von A. F. G. Th. Gauß. Bunzlau 1873.

der Gegenstrahl von HD, ein zweiter der Kreis mit dem Mittelpunkte D und dem Radius $p - q$. GM, ein zweiter Ort für M, ist bestimmt als Mittelloth von DF. Ein Ort für die Punkte B und C ist der Kreis mit dem Mittelpunkte M und dem Radius MA, ein zweiter für jenen der Gegenstrahl von DE, für diesen der Gegenstrahl von FE.

Determination. Es müssen folgende Bedingungen erfüllt sein:

$$1.\ m > h,\quad 2.\ DF > 2DE,\quad 3.\ MA > MD.$$

Die dritte Bedingung ist erfüllt, wenn M und D auf derselben Seite des Mittelloths der Strecke AD liegen. Ist $MJ \perp AD$, so ist diese Bedingung erfüllt, wenn J und D auf derselben Seite des Mittelloths von AD liegen, wenn also der Winkel MAJ oder $2x$ spitz und $AJ > \frac{1}{2}h$ ist. Nun ist $\angle MAJ$ spitz, wenn $\angle EAD < DEA$ oder $DE^2 < AD^2$ oder $m^2 - h^2 < h^2$, $m^2 < 2h^2$ ist. Da $AJ = \frac{1}{2}(p - q)\cot g\, 2x$ ist, so muß $\frac{1}{2}(p - q)\cot g\, 2x > \frac{1}{2}h$ oder, da $\cot g\, 2x$ positiv ist, man also diese Ungleichung mit $2\cot g\, 2x$ multipliciren darf, $p - q > h\, tg\, 2x$ sein. Nun ist

$$tg\, 2x = \frac{2\sin x \cos x}{\cos x^2 - \sin x^2} = \frac{2m\sin x\, m\cos x}{m^2\cos x^2 - m^2\sin x^2} = 2\frac{DE\,.\,h}{h^2 - DE^2} = 2\frac{h\sqrt{m^2 - h^2}}{2h^2 - m^2}.$$

Also ist die dritte Bedingung erfüllt, wenn $2h^2 > m^2$, $p - q > \frac{2h^2\sqrt{m^2 - h^2}}{2h^2 - m^2}$ ist. Wenn aber die letzte Ungleichung stattfindet, so ist, da wegen der ersten Bedingung $h^2 > 2h^2 - m^2$ ist, umsomehr $p - q > 2\sqrt{m^2 - h^2}$ oder $DF > 2DE$. Die Aufgabe ist also möglich und das Dreieck eindeutig bestimmt, wenn

$$1.\ h < m,\quad 2.\ 2h^2 > m^2,\quad 3.\ p - q > \frac{2h^2\sqrt{m^2 - h^2}}{2h^2 - m^2}$$ ist. (Vergl. Aufgabe 10.)

Wie man an der hier gegebenen Auflösung sieht, die an Einfachheit und Zweckmäßigkeit doch gewiß nichts zu wünschen übrig läßt, ist die an sich ganz interessante und vielfach verwendbare Wahrheit, daß der $\angle EAD = \frac{1}{2}(\beta - \gamma)$ ist, für die vorliegende Aufgabe auch nicht von dem geringsten Interesse. Nach der bei Gandtner und Junghans gegebenen Andeutung soll man offenbar zuerst, etwa in einer Nebenconstruction, den Winkel $\beta - \gamma$ und dann (Fig. 12) ein Dreieck aus $p - q$ als Grundseite, $\beta - \gamma$ als gegenüberliegendem Winkel und h als Höhe construiren. Bei Lieber und v. Lühmann finde ich die Zusammenstellung derartiger Aufgaben sowie die Anleitungen zur Lösung derselben unvergleichlich zweckmäßiger gegeben. Doch ist mir auch hier manches aufgefallen, z. B. daß die Aufgaben: Dreieck aus h, m, ϱ; h, m, ϱ_1 unter denen zu finden sind, die mit Hülfe des Umstandes gelöst werden sollen, das von den drei Stücken h, m, $\beta - \gamma$ jedes mit den beiden andern gegeben ist (§ 28); es ist mir durchaus unerfindlich, welche Rolle bei jenen beiden Aufgaben das genannte Datum spielen soll.

Zum Schluß dieser Bemerkungen möge noch die Lösung einer schwierigeren Aufgabe hier eine Stelle finden, um zu zeigen, in welcher Weise, wenn eine Aufgabe auf andere schon an sich nicht einfache Aufgaben sich zurückführen läßt, diese zu einem einheitlichen Ganzen zu verarbeiten sind.

Aufgabe 8. Dreieck aus $b + c$, h, $r:a$ ($= m:2n$). (In der Aufgabensammlung von Hofmann, die ich im Uebrigen recht brauchbar gefunden und auch vielfach benutzt habe, ist die Aufgabe: Dreieck aus $b + c$, h, α auf diejenige: Dreieck aus α, m, a, und diese wieder darauf zurückgeführt worden, eine gegebene Strecke so in äußere Abschnitte zu theilen, daß die mittlere Proportionale zwischen denselben gleich einer gegebenen Strecke sei).

Analysis. (Fig. 14). Es sei ABC das verlangte Dreieck, d. h. es sei $CA + AB = b + c$, $AD \perp BC$, $AD = h$, $AM = BM = CM$, $BM : BC = m : 2n$. Ist, wie in Fig. 14, der Winkel CAB stumpf, so ist $\frac{1}{2} BMC$ das Supplement von CAB. Daher ist, wenn $MP \perp BC$, $\angle ACH = CAB$, $HC = m$, $JH \perp AC$ ist, $\angle BMP = HCJ$, also $\triangle BMP \sim HCJ$, $BM : PB = HC : JH$, folglich, da $BM : PB = m : n$ ist, $JH = n$. Daher ist das Dreieck HCJ durch zwei Seiten und den Gegenwinkel der größeren bestimmt. Verlängert man CA um AB bis E, so ist $CE = b + c$. Ist F der Schnittpunkt des Kreises ABE mit der Geraden BC, so ist $\angle AFC = AEB = EBA = EFA$, also auch $\angle AFC + EFA = AEB + EBA$, mithin $\angle EFC = CAB = ACH$. Ist G der Schnittpunkt des Gegenstrahls von AF und der Halbirungslinie des Winkels ACH, so ist $\angle EFG = ECG$, also das Viereck EFCG ein Sehnenviereck, folglich $CG = GE$, da $\angle GFC = EFG$ ist. Daher ist ein Ort für G das Mittelloth RG von CE, ein zweiter der Strahl CG, bestimmt als Halbirungslinie des Winkels ECH. Da $\angle ACG = GFC$ ist, so ist $\triangle ACG \sim CFG$, also $GA : GC = GC : GF$. Es sei nun $CK = FD$, $KL \perp CE$, dann ist $\triangle FDA \cong CKL$, also $KL = DA$ und $CL = FA$. Der Punkt L ist bestimmt durch den Strahl CL und die Parallele zu CE im Abstande h. Ist ferner $CN \perp CG$, $CN = \frac{1}{2} CL$, $GO = GA$ und $FQ \parallel AO$, so ist $GF = GQ$, $AF = OQ = LC$ und $GO : GC = GC : GQ$. Folglich ist GC eine Tangente des Kreises OCQ, dessen Mittelpunkt, da $CN \perp GC$ ist, im Strahl CN liegt. Da nun $2 CN = OQ$ ist, so muß N dieser Mittelpunkt sein; denn wäre CN der kleinere oder der größere von zwei *ungleichen* Abschnitten eines Durchmessers, so wäre 2 CN kleiner oder größer als jede Sehne des Kreises OCQ, welche den Punkt N enthält, also auch kleiner oder größer als die Sehne OQ. Da $CN \perp GC$ und $CN = \frac{1}{2} CL$ ist, so ist der Punkt N bestimmt. Ein Ort für die Punkte O und Q ist der Kreis mit dem Mittelpunkte N und dem Radius NC, ein zweiter für jenen die Strecke GN, für diesen der Gegenstrahl von NG. Da im Allgemeinen die Seiten CA und AB ungleich sind und keine derselben eine *besondere* Beziehung zu den gegebenen Stücken des Dreiecks ABC hat, so ist es gestattet, CA als die größere Seite anzunehmen. Dann ist ein Ort für A die Strecke RE, ein zweiter der Kreis mit dem Mittelpunkte G und dem Radius GO. Ein Ort für F ist der Gegenstrahl von AG, ein zweiter QF, bestimmt als Parallele durch Q zu AO. Ein Ort für B ist der Strahl CF, ein zweiter der Strahl AB, bestimmt durch den Winkel $CAB = ACH$. Die Construction des Dreiecks ABC erfordert also der Reihe nach die Construction folgender Punkte: C, H, J, E, R, G, L, N, O, Q, A, F, B. (Vgl. oben S. 14.)

Determination. Ist m nicht kleiner als n, so sind die Punkte C, H, J eindeutig bestimmt. (Ist $m = n$, so fällt J mit C und die Gerade CJ mit dem Loth der Geraden CH im Punkte C zusammen). Der Punkt E ist stets construirbar und zweideutig bestimmt, da er sowohl in dem Strahl CJ als auch in dessen Gegenstrahl liegen kann. Hat man den Punkt E, so sind die Punkte R und G stets construirbar und eindeutig bestimmt, ebenso die Punkte L, N, O, Q. Der Punkt A, und damit auch die Punkte F und B, ist, wenn $GC > GO$ und $GR \leqq GO$ ist, stets construirbar und eindeutig bestimmt. Die erste Bedingung ist stets erfüllt, da GC die mittlere Proportionale zwischen GO und GQ ist. Bezeichnet x den Winkel ACG, so ist $GR = \frac{1}{2}(b + c) \operatorname{tg} x$, also $GR \sin 2x = (b + c) \sin x^2$. Ferner ist

$$GO (GO + OQ) = GC^2, \quad OQ = CL = \frac{h}{\sin x}, \quad GC = \frac{b + c}{2 \cos x}, \quad GO^2 + \frac{h \,.\, GO}{\sin x} = \frac{(b + c)^2}{4 \cos x^2},$$

$$4GO^2\sin x^2\cos x^2 + 4h.GO\sin x\cos x^2 = (b+c)^2\sin x^2,$$

$GO^2\sin 2x^2 + 2h.GO\sin 2x\cos x = (b+c)^2\sin x^2$, folglich, da $\sin 2x$ und $\cos x$ positiv, mithin auch $GO\sin 2x + h\cos x$ positiv ist, $GO\sin 2x = -h\cos x + \sqrt{h^2\cos x^2 + (b+c)^2\sin x^2}$. Da $\sin 2x$ positiv ist, so ist die zweite Bedingung erfüllt, wenn $GR\sin 2x \leqq GO\sin 2x$ oder wenn

$$(b+c)\sin x^2 \leqq -h\cos x + \sqrt{h^2\cos x^2 + (b+c)^2\sin x^2} \text{ oder}$$

$$h\cos x + (b+c)\sin x^2 \leqq \sqrt{h^2\cos x^2 + (b+c)^2\sin x^2}$$

ist. Da beide Seiten dieser Gleichung oder Ungleichung positiv sind, so ist die zweite Bedingung erfüllt, wenn $\{h\cos x + (b+c)\sin x^2\}^2 \leqq h^2\cos x^2 + (b+c)^2\sin x^2$ oder

$$2h(b+c)\cos x\sin x^2 + (b+c)^2\sin x^4 \leqq (b+c)^2\sin x^2 \text{ oder}$$

$$2h(b+c)\cos x\sin x^2 \leqq (b+c)^2\cos x^2\sin x^2,$$

oder wenn, da man beide Seiten dieser Gleichung oder Ungleichung durch die positive Zahl $2(b+c)\cos x\sin x^2$ dividiren darf, $h \leqq \frac{1}{2}(b+c)\cos x$ ist. Der Winkel x ist bestimmt durch die Gleichung $\sin 2x = \frac{n}{m}$. Man findet hieraus $\cos 2x^2 = \frac{m^2 - n^2}{m^2}$. Liegt der Punkt E im Strahl CJ, so ist $2x < \frac{1}{2}\pi$, also $\cos 2x > 0$; liegt der Punkt E im Gegenstrahl von CJ, so ist $2x > \frac{1}{2}\pi$, also $\cos 2x < 0$. Daher ist in den folgenden Gleichungen das obere oder untere Zeichen zu nehmen, je nachdem der Punkt E im Strahl CJ oder in dessen Gegenstrahl liegt:

$$\cos 2x = \pm\sqrt{\frac{m^2 - n^2}{m^2}},\quad 1 + \cos 2x = 2\cos x^2 = 1 \pm \sqrt{\frac{m^2 - n^2}{m^2}},$$

$$4\cos x^2 = \frac{m+n}{m} + \frac{m-n}{m} \pm 2\sqrt{\frac{m+n}{m}\cdot\frac{m-n}{m}} = \left(\sqrt{\frac{m+n}{m}} \pm \sqrt{\frac{m-n}{m}}\right)^2,$$

$$2\cos x = \sqrt{\frac{m+n}{m}} \pm \sqrt{\frac{m-n}{m}}.$$

Die Bedingung $GR \leqq GO$ ist also erfüllt, wenn $h \leqq \frac{1}{4}(b+c)\left(\sqrt{\frac{m+n}{m}} \pm \sqrt{\frac{m-n}{m}}\right)$ ist. Das Dreieck ist daher stets construirbar und

I. eindeutig bestimmt, wenn $m = n$ und h nicht größer als $\frac{1}{4}(b+c)\sqrt{2}$ ist; das Dreieck ist bei A rechtwinklig;

II. zweideutig bestimmt, wenn $m > n$ und h nicht größer als $\frac{1}{4}(b+c)\left(\sqrt{\frac{m+n}{m}} - \sqrt{\frac{m-n}{m}}\right)$ ist. Das eine Dreieck ist bei A spitzwinklig, das andere stumpfwinklig;

III. eindeutig bestimmt, wenn $m > n$ und h größer als $\frac{1}{4}(b+c)\left(\sqrt{\frac{m+n}{m}} - \sqrt{\frac{m-n}{m}}\right)$ aber nicht größer als $\frac{1}{4}(b+c)\left(\sqrt{\frac{m+n}{m}} + \sqrt{\frac{m-n}{m}}\right)$ ist; das Dreieck ist bei A spitzwinklig. (Vgl. unten Aufgabe 14).

V.

Determination trigonometrischer Aufgaben.

Man nimmt allgemein an, daß zur vollständigen Lösung einer geometrischen Aufgabe die Erfüllung der Forderung gehört, die Bedingungen nachzuweisen, welchen die gegebenen Stücke genügen müssen, damit aus ihnen die verlangte Figur auch wirklich construirt werden kann, sowie auch die Beantwortung der Frage, wie viel Lösungen die gestellte Aufgabe zuläßt, d. h. eine Determination.

Geht man nun bei der trigonometrischen Aufgabe von dem Gesichtspunkte aus, daß die gegebenen Stücke als an einer gegebenen Figur durch directe Messung oder durch Rechnung gefunden gedacht werden, so ist eine Untersuchung der Möglichkeit der Figur freilich unnöthig, da sie gar nicht in Frage steht; denn die Figur existirt ja faktisch. Doch bleibt einerseits die Frage, die auch praktisch wichtig sein kann, ob die Aufgabe ein- oder mehrdeutig ist, unbeantwortet, andererseits enthält die trigonometrische Determination so viel interessante Momente und ist eine die Verstandesthätigkeit in so hohem Maße in Anspruch nehmende Aufgabe und darum eine so vortreffliche gymnastische Uebung, daß sie an einer höheren Lehranstalt nicht außer Acht gelassen zu werden verdient. Zudem liefert sie namentlich zu Uebungen, für die sich sonst wenig Gelegenheit findet, reiches Material, nämlich zu Uebungen in der Behandlung und Entwickelung von Ungleichungen*) und in der Anwendung der Sätze über die Zunahme und Abnahme eines Winkels und seiner goniometrischen Functionen. Die folgenden Aufgaben sollen einerseits zeigen (und in sofern als Ergänzungen zu den Bemerkungen auf S. 8 ff. dienen), wie trigonometrische Aufgaben überhaupt, andererseits insbesondere, wie ihre Determinationen zu behandeln seien.

Aufgabe 9. Dreieck aus r, b, $\beta - \gamma$.

Auflösung. Durch die Gleichung $\sin\beta = \frac{b}{2r}$ erhält man den Winkel β und in Verbindung mit dem gegebenen Winkel $\beta - \gamma$ die Winkel γ und α. Ferner ist $a = 2r\sin\alpha$, $c = 2r\sin\gamma$, $F = 2r^2\sin\alpha\sin\beta\sin\gamma$.

---

*) So schlimm steht es nun freilich in dieser Beziehung mit der mathematischen Disciplin an unseren höheren Lehranstalten nicht, wie man meinen könnte, wenn man wahrnimmt, daß in einer Zeitschrift für mathematischen Unterricht an Gymnasien, Realschulen u. s. w. (ich meine die in Leipzig bei Teubner erscheinende und von J. C. V. Hoffmann herausgegebene) eine Warnung der Leser, die doch nicht Schüler sind, vor Fehlschlüssen, die man macht, wenn man die Seiten einer Ungleichung ohne Aenderung des Ungleichheitszeichens mit einer negativen Zahl multiplicirt, oder wenn man die Seiten einer Gleichung ohne Weiteres durch Null dividirt, nicht für überflüssig gehalten wird. Was soll man dazu sagen, wenn man in der genannten Zeitschrift unter der Ueberschrift „Mathematische Sophismen" u. A. Folgendes (V. S. 225) liest:

Das Ganze ist gleich der Hälfte:

$$x^2 - x^2 = (x + x)(x - x),\ x(x - x) = (x + x)(x - x),\ x = x + x = 2x \text{ folglich } \frac{x}{2} = x.$$

Jede positive Zahl ist kleiner als Nichts. Wenn n eine ganze positive Zahl ist (!), gilt

$$2n - 1 < 2n, \text{ multiplicirt mit } -a,\ -2an + a < -2an,\ a < 0.$$

Warum macht es sich der Einsender (G. Hellmann in Berlin) dieser „Mathematischen Sophismen" (vielmehr mathematischen Unsinns) nicht bequemer und schreibt einfach: Aus $\frac{x}{2}.0 = x.0$ folgt $\frac{x}{2} = x$; und: Aus $-1 < 0$ erhält man durch Multiplication mit $-a$ die Ungleichung $a < 0$, was freilich auf den Schluß hinausliefe: Aus $a = b$ und $c > d$ folgt $a - c > b - d$. Ein Ober-Tertianer muß schon sehr gedankenlos sein, wenn er ohne Weiteres die Seiten einer Ungleichung mit einer Zahl multiplicirt, ohne sich Gewißheit darüber verschafft zu haben, ob diese Zahl positiv oder negativ ist, oder wenn er die Seiten einer Gleichung durch eine Zahl dividirt, von der er nicht weiß, daß sie von Null verschieden ist. Und solche Sachen finden sich in mehreren Heften jener Zeitschrift! Was soll ein ausländischer Leser von dem Zustande des mathematischen Unterrichts an den höheren Lehranstalten Deutschlands denken?

Determination. Durch die Gleichung $\sin\beta = \frac{b}{2r}$ ist der Winkel β, und damit auch das Dreieck ABC, im Allgemeinen zweideutig bestimmt, wenn b nicht größer als 2r ist. Im Uebrigen müssen die Bedingungen 1. $\beta > \beta - \gamma$ und $\beta + \gamma < \pi$ oder
2. $\beta < \frac{1}{2}\pi + \frac{1}{2}(\beta - \gamma)$ erfüllt sein. Man unterscheidet zwei Hauptfälle.

I. $\beta - \gamma < \frac{1}{2}\pi$.

Nimmt man $\beta < \frac{1}{2}\pi$, so ist die erste Bedingung erfüllt, wenn $\sin\beta > \sin(\beta - \gamma)$ oder $b > 2r\sin(\beta - \gamma)$ ist, während die zweite Bedingung stets erfüllt ist. — Nimmt man $\beta > \frac{1}{2}\pi$, so ist die erste Bedingung stets erfüllt. Da die Winkel β und $\frac{1}{2}\pi + \frac{1}{2}(\beta - \gamma)$ im zweiten Quadranten liegen und in diesem Quadranten der Sinus abnimmt, wenn der Winkel wächst, so ist die zweite Bedingung erfüllt, wenn $\sin\beta > \sin\left\{\frac{1}{2}\pi + \frac{1}{2}(\beta - \gamma)\right\}$ oder $b > 2r\cos\frac{1}{2}(\beta - \gamma)$ ist. Das Dreieck ist daher zweideutig oder eindeutig bestimmt oder unmöglich, wenn von den Ungleichungen

$$b > 2r\sin(\beta - \gamma),\quad b > 2r\cos\tfrac{1}{2}(\beta - \gamma)$$

beide oder nur eine oder keine stattfindet. (Ist $b = 2r$, so fallen beide Lösungen in eine zusammen).

II. $\beta - \gamma \overline{\gtrless} \frac{1}{2}\pi$.

Wegen der ersten Bedingung muß $\angle\beta > \frac{1}{2}\pi$ sein. Da nun die Winkel β, $\beta - \gamma$, $\frac{1}{2}\pi + \frac{1}{2}(\beta - \gamma)$ im zweiten Quadranten liegen, so sind die beiden Bedingungen erfüllt, wenn

$$\sin(\beta - \gamma) > \sin\beta > \cos\tfrac{1}{2}(\beta - \gamma) \text{ oder}$$
$$2r\sin(\beta - \gamma) > b > 2r\cos\tfrac{1}{2}(\beta - \gamma)$$

ist. Das Dreieck ist daher eindeutig bestimmt, wenn diese beiden Ungleichungen stattfinden, dagegen unmöglich, wenn eine derselben nicht stattfindet. (Vergl. Aufgabe 5.)

Aufgabe 10. Ein Dreieck ABC, in welchem der Winkel β spitz ist, aus h, m, p — q zu berechnen.

Auflösung (Fig. 13). Es ist

$$\sin AEH = \sin(\beta + \tfrac{1}{2}\alpha) = \frac{h}{m},\text{ also}$$

$$\sin\left\{\beta + \tfrac{1}{2}\pi - \tfrac{1}{2}(\beta + \gamma)\right\} = \cos\tfrac{1}{2}(\beta - \gamma) = \frac{h}{m}.\quad \text{Ferner ist}$$

$$p - q = h(\operatorname{cotg}\gamma - \operatorname{cotg}\beta) = h\,\frac{\sin(\beta - \gamma)}{\sin\beta\sin\gamma},$$

$$2(p - q)\sin\beta\sin\gamma = 2h\sin(\beta - \gamma),$$

$$(p - q)\left\{\cos(\beta - \gamma) - \cos(\beta + \gamma)\right\} = 2h\sin(\beta - \gamma),$$

$$(p - q)\cos\alpha = 2h\sin(\beta - \gamma) - (p - q)\cos(\beta - \gamma),$$

da $\cos(\beta + \gamma) = -\cos\alpha$ ist. Setzt man

$$2h = (p - q)\operatorname{cotg}\varphi,\text{ also } \operatorname{tg}\varphi = \frac{p - q}{2h},\text{ so ist}$$

$$\cos\alpha = \sin(\beta - \gamma)\operatorname{cotg}\varphi - \cos(\beta - \gamma) = \sin\frac{(\beta - \gamma - \varphi)}{\sin\varphi}.$$

Ferner ist $$b = \frac{h}{\sin\gamma},\ c = \frac{h}{\sin\beta},\ a = \frac{h\sin\alpha}{\sin\beta\sin\gamma},\ F = \tfrac{1}{2}h^2\frac{\sin\alpha}{\sin\beta\sin\gamma}.$$

Determination. Damit die Berechnung der Winkel überhaupt möglich sei, müssen die Brüche $\frac{h}{m}$ und $\frac{\sin(\beta-\gamma-\varphi)}{\sin\varphi}$ echt sein. (Ist $h=m$, so muß $p-q=0$ sein). Ferner müssen, da $\beta < \frac{1}{2}\pi$, also $2\beta < \pi$ oder $2\beta < \alpha+\beta+\gamma$ sein soll, die Bedingungen

1. $\beta-\gamma < \alpha$, 2. $\beta-\gamma < \frac{1}{2}\pi$, und die Bedingung 3. $\beta-\gamma < \beta+\gamma$

erfüllt sein. Da α und $\beta-\gamma$ zwischen 0 und π liegen und in diesem Intervall der Cosinus abnimmt, wenn der Winkel wächst, so ist die erste Bedingung erfüllt, wenn

$$\cos\alpha < \cos(\beta-\gamma) \text{ oder } \frac{\sin(\beta-\gamma-\varphi)}{\sin\varphi} < \cos(\beta-\gamma)$$

ist. Ist nun $\beta-\gamma<\varphi$, so ist der absolute Werth von $\sin(\beta-\gamma-\varphi)$ stets kleiner als $\sin\varphi$, der Bruch $\frac{\sin(\beta-\gamma-\varphi)}{\sin\varphi}$ also stets echt; ist dagegen $\beta-\gamma>\varphi$, so ist jener Bruch echt, wenn die erste Bedingung erfüllt ist. Diese ist erfüllt, wenn

$$\sin(\beta-\gamma-\varphi) < \cos(\beta-\gamma)\sin\varphi,$$
$$\sin(\beta-\gamma)\cos\varphi - \cos(\beta-\gamma)\sin\varphi < \cos(\beta-\gamma)\sin\varphi,$$
$$\sin(\beta-\gamma)\cos\varphi < 2\cos(\beta-\gamma)\sin\varphi$$

oder wenn, da nach der zweiten Bedingung $\cos(\beta-\gamma)$ positiv sein muß, man also die Seiten der letzten Ungleichung durch die positive Zahl $\cos(\beta-\gamma)\cos\varphi$ dividiren darf,

$$2\operatorname{tg}\varphi > \operatorname{tg}(\beta-\gamma) \text{ oder } p-q > h\operatorname{tg}(\beta-\gamma)$$

ist. Die zweite Bedingung ist erfüllt, wenn $\frac{1}{2}(\beta-\gamma) < \frac{1}{4}\pi$, $\operatorname{tg}\frac{1}{2}(\beta-\gamma) < 1$, $\sin\frac{1}{2}(\beta-\gamma)^2 < \cos\frac{1}{2}(\beta-\gamma)^2$, $1-\frac{h^2}{m^2} < \frac{h^2}{m^2}$ oder $m^2 < 2h^2$ ist. Da $\beta+\gamma$ und $\beta-\gamma$ zwischen 0 und π liegen, so ist die dritte Bedingung erfüllt, wenn $\cos(\beta+\gamma) < \cos(\beta-\gamma)$,

$$-\cos\alpha < \cos(\beta-\gamma),\ -\frac{(\sin\beta-\gamma-\varphi)}{\sin\varphi} < \cos(\beta-\gamma),$$
$$-\sin(\beta-\gamma)\cos\varphi + \cos(\beta-\gamma)\sin\varphi < \cos(\beta-\gamma)\sin\varphi$$

ist, und diese Ungleichung findet immer statt. Da nun

$$\operatorname{tg}(\beta-\gamma) = \frac{2\cos\frac{1}{2}(\beta-\gamma)\sqrt{1-\cos\frac{1}{2}(\beta-\gamma)^2}}{2\cos\frac{1}{2}(\beta-\gamma)^2-1} = \frac{2h\sqrt{m^2-h^2}}{2h^2-m^2}$$

ist, so ist die Aufgabe möglich und das Dreieck eindeutig bestimmt, wenn

$$1.\ h<m,\quad 2.\ 2h^2>m^2,\quad 3.\ p-q > \frac{2h^2\sqrt{m^2-h^2}}{2h^2-m^2}$$

ist. (Vergl. Aufgabe 7.)

Aufgabe 11. Dreieck aus a, ϱ_1, $\beta-\gamma$.

Auflösung. Es ist $\operatorname{tg}\frac{1}{2}\alpha = \frac{\varrho}{s_1} = \frac{\varrho_1}{s}$, $\varrho_1 = s\operatorname{tg}\frac{1}{2}\alpha$,

$$s = r(\sin\alpha+\sin\beta+\sin\gamma) = 4r\cos\tfrac{1}{2}\alpha\ \cos\tfrac{1}{2}\beta\ \cos\tfrac{1}{2}\gamma,$$
$$\varrho_1 = 4r\sin\tfrac{1}{2}\alpha\ \cos\tfrac{1}{2}\beta\ \cos\tfrac{1}{2}\gamma,\quad a = 4r\sin\tfrac{1}{2}\alpha\cos\tfrac{1}{2}\alpha,$$
$$\varrho_1\cos\tfrac{1}{2}\alpha = a\cos\tfrac{1}{2}\beta\ \cos\tfrac{1}{2}\gamma,\quad 2\varrho_1\cos\tfrac{1}{2}\alpha = a\left\{\cos\tfrac{1}{2}(\beta-\gamma)+\cos\tfrac{1}{2}(\beta+\gamma)\right\}.$$

Setzt man $2\varrho_1 = a\operatorname{tg}\frac{1}{2}\varphi$, $\operatorname{tg}\frac{1}{2}\varphi = \frac{2\varrho_1}{a}$, so erhält man $\operatorname{tg}\frac{1}{2}\varphi\cos\frac{1}{2}\alpha - \sin\frac{1}{2}\alpha = \cos\frac{1}{2}(\beta-\gamma)$,

$\sin\frac{1}{2}(\varphi - \alpha) = \cos\frac{1}{2}(\beta - \gamma)\cos\frac{1}{2}\varphi$. Durch eine Seite und die Winkel ist das Dreieck bestimmt.

Determination. Da der Winkel $\frac{1}{2}(\varphi - \alpha)$ spitz ist, so ist durch die Gleichung $\sin\frac{1}{2}(\varphi - \alpha) = \cos\frac{1}{2}(\beta - \gamma)\cos\frac{1}{2}\varphi$ der Winkel α eindeutig bestimmt. Es müssen nun die Bedingungen

$$1.\ \beta + \gamma < \pi,\quad 2.\ \beta + \gamma > \beta - \gamma$$

erfüllt sein. Die erste Bedingung ist erfüllt, wenn $\frac{1}{2}\pi - \frac{1}{2}\alpha < \frac{1}{2}\pi$ oder $\frac{1}{2}(\varphi - \alpha) < \frac{1}{2}\varphi$ oder $\sin\frac{1}{2}(\varphi - \alpha) < \sin\frac{1}{2}\varphi$ oder $\cos\frac{1}{2}(\beta - \gamma)\cos\frac{1}{2}\varphi < \sin\frac{1}{2}\varphi$ oder $\cos\frac{1}{2}(\beta - \gamma) < \operatorname{tg}\frac{1}{2}\varphi$ ist. Die zweite Bedingung ist erfüllt, wenn $\frac{1}{2}\pi - \frac{1}{2}\alpha > \frac{1}{2}(\beta - \gamma)$ oder $\frac{1}{2}(\varphi - \alpha) > \frac{1}{2}(\beta - \gamma + \varphi) - \frac{1}{2}\pi$ oder wenn, da der absolute Werth von $\frac{1}{2}(\beta - \gamma + \varphi) - \frac{1}{2}\pi$ kleiner als $\frac{1}{2}\pi$ ist und in dem Intervall von $-\frac{1}{2}\pi$ bis $+\frac{1}{2}\pi$ der Sinus zu- oder abnimmt, wenn der Winkel zu- oder abnimmt, $\sin\frac{1}{2}(\varphi - \alpha) > \sin\left\{\frac{1}{2}(\beta - \gamma + \varphi) - \frac{1}{2}\pi\right\}$ oder

$$\cos\frac{1}{2}(\beta - \gamma)\cos\frac{1}{2}\varphi > -\cos\frac{1}{2}(\beta - \gamma + \varphi) \text{ oder}$$

$$\cos\frac{1}{2}(\beta - \gamma)\cos\frac{1}{2}\varphi > -\cos\frac{1}{2}(\beta - \gamma)\cos\frac{1}{2}\varphi + \sin\frac{1}{2}(\beta - \gamma)\sin\frac{1}{2}\varphi \text{ oder}$$

$2\operatorname{cotg}\frac{1}{2}(\beta - \gamma) > \operatorname{tg}\frac{1}{2}\varphi$ ist. Die Aufgabe ist daher nur dann möglich und das Dreieck eindeutig bestimmt, wenn $\cos\frac{1}{2}(\beta - \gamma) < \frac{2\varrho_1}{a} < 2\operatorname{cotg}\frac{1}{2}(\beta - \gamma)$ ist.

Aufgabe 12. Dreieck aus $a - b$, h, $\alpha - \beta$.

Auflösung. Es ist $a - b = 4r\sin\frac{1}{2}\gamma\sin\frac{1}{2}(\alpha - \beta)$, $h = 4r\sin\beta\sin\frac{1}{2}\gamma\cos\frac{1}{2}\gamma$, $(a - b)\sin\beta\cos\frac{1}{2}\gamma = h\sin\frac{1}{2}(\alpha - \beta)$, $(a - b)\left\{\sin(\beta + \frac{1}{2}\gamma) + \sin(\beta - \frac{1}{2}\gamma)\right\} = 2h\sin\frac{1}{2}(\alpha - \beta)$, also, da $\sin(\beta + \frac{1}{2}\gamma) = \sin\left\{\beta + \frac{1}{2}\pi - \frac{1}{2}(\alpha + \beta)\right\} = \sin\left\{\frac{1}{2}\pi - \frac{1}{2}(\alpha - \beta)\right\} = \cos\frac{1}{2}(\alpha - \beta)$ ist, $(a - b)\sin(\beta - \frac{1}{2}\gamma) = 2h\sin\frac{1}{2}(\alpha - \beta) - (a - b)\cos\frac{1}{2}(\alpha - \beta)$. Setzt man $2h = (a - b)\operatorname{cotg}\frac{1}{2}\varphi$, $\operatorname{tg}\frac{1}{2}\varphi = \frac{a - b}{2h}$, so erhält man $\sin(\beta - \frac{1}{2}\gamma) = \frac{\sin\frac{1}{2}(\alpha - \beta - \varphi)}{\sin\frac{1}{2}\varphi}$.

Durch h und die Winkel ist das Dreieck bestimmt.

Determination. Es müssen die Bedingungen

1. $\alpha + \beta > \alpha - \beta$, 2. $\alpha + \beta < \pi$, 3. $\text{val. abs.}\sin\frac{1}{2}(\alpha - \beta - \varphi) < \sin\frac{1}{2}\varphi$ erfüllt sein. Nun ist $\alpha + \beta - \frac{1}{2}(\alpha - \beta) - (\beta - \frac{1}{2}\gamma) = \frac{1}{2}\pi$, $\alpha + \beta = \frac{1}{2}\pi + \frac{1}{2}(\alpha - \beta) + \beta - \frac{1}{2}\gamma$. Also ist die erste Bedingung erfüllt, wenn $\frac{1}{2}\pi + \frac{1}{2}(\alpha - \beta) + \beta - \frac{1}{2}\gamma > \alpha - \beta$, $\beta - \frac{1}{2}\gamma > \frac{1}{2}(\alpha - \beta) - \frac{1}{2}\pi$ oder wenn, da $\beta < \alpha$, also $\beta < \frac{1}{2}\pi$ und daher der absolute Werth von $\beta - \frac{1}{2}\gamma$, und ebenso der absolute Werth von $\frac{1}{2}(\alpha - \beta) - \frac{1}{2}\pi$, kleiner als $\frac{1}{2}\pi$ ist, $\sin(\beta - \frac{1}{2}\gamma) > -\cos\frac{1}{2}(\alpha - \beta)$, $\sin\frac{1}{2}(\alpha - \beta - \varphi) > -\cos\frac{1}{2}(\alpha - \beta)\sin\frac{1}{2}\varphi$ ist, und diese Ungleichung findet immer statt. Die zweite Bedingung ist erfüllt, wenn $\frac{1}{2}\pi + \frac{1}{2}(\alpha - \beta) + \beta - \frac{1}{2}\gamma < \pi$, $\beta - \frac{1}{2}\gamma < \frac{1}{2}\pi - \frac{1}{2}(\alpha - \beta)$, $\sin(\beta - \frac{1}{2}\gamma) < \cos\frac{1}{2}(\alpha - \beta)$, $\sin\frac{1}{2}(\alpha - \beta - \varphi) < \cos\frac{1}{2}(\alpha - \beta)\sin\frac{1}{2}\varphi$, $\operatorname{tg}\frac{1}{2}(\alpha - \beta) < 2\operatorname{tg}\frac{1}{2}\varphi$ ist. Die dritte Bedingung endlich ist, wenn $\frac{1}{2}(\alpha - \beta) < \frac{1}{2}\varphi$ ist, stets erfüllt. Ist $\frac{1}{2}(\alpha - \beta) > \frac{1}{2}\varphi$, so ist sie erfüllt, wenn die zweite Bedingung erfüllt ist, da nach dieser $\sin\frac{1}{2}(\alpha - \beta - \varphi) < \cos\frac{1}{2}(\alpha - \beta)\sin\frac{1}{2}\varphi$

sein muß. Die Aufgabe ist also nur möglich und das Dreieck eindeutig bestimmt, wenn $\operatorname{tg}\frac{1}{2}(\alpha-\beta)<\frac{a-b}{h}$ ist.

Aufgabe 13. Dreieck aus a, $\varrho+\varrho_1$, β.

Auflösung. Man findet $a=4r\sin\frac{1}{2}\alpha\cos\frac{1}{2}\alpha$,

$$\varrho=4r\sin\tfrac{1}{2}\alpha\sin\tfrac{1}{2}\beta\sin\tfrac{1}{2}\gamma,\quad \varrho_1=4r\sin\tfrac{1}{2}\alpha\cos\tfrac{1}{2}\beta\cos\tfrac{1}{2}\gamma,$$

$$\varrho+\varrho_1=4r\sin\tfrac{1}{2}\alpha\cos\tfrac{1}{2}\beta-\gamma),\quad \frac{\varrho+\varrho_1}{a}=\frac{\cos\frac{1}{2}(\beta-\gamma)}{\cos\left\{\frac{1}{2}\pi-\frac{1}{2}(\beta+\gamma)\right\}},$$

$$\frac{\varrho+\varrho_1+a}{\varrho+\varrho_1-a}=\frac{\cos(\frac{1}{4}\pi-\frac{1}{2}\gamma)\cos(\frac{1}{4}\pi-\frac{1}{2}\beta)}{\sin(\frac{1}{4}\pi-\frac{1}{2}\gamma)\sin(\frac{1}{4}\pi-\frac{1}{2}\beta)},$$

$$\operatorname{tg}(\tfrac{1}{4}\pi-\tfrac{1}{2}\gamma)=\frac{\varrho+\varrho_1-a}{\varrho+\varrho_1+a}\operatorname{cotg}(\tfrac{1}{4}\pi-\tfrac{1}{2}\beta)=\frac{a-(\varrho+\varrho_1)}{a+(\varrho+\varrho_1)}\operatorname{cotg}(\tfrac{1}{2}\beta-\tfrac{1}{4}\pi.$$

Durch eine Seite und die Winkel ist das Dreieck bestimmt.

Determination. Wenn $\beta=\frac{1}{2}\pi$, also $\alpha=\beta-\gamma$ ist, so ist, wie aus der Gleichung $\frac{\varrho+\varrho_1}{a}=\frac{\cos\frac{1}{2}(\beta-\gamma)}{\cos\frac{1}{2}\alpha}$ folgt, die Aufgabe nur dann möglich, wenn $a=\varrho+\varrho_1$ ist, sie ist aber unbestimmt, weil nur zwei Elemente gegeben sind. — Ist $\beta\gtrless\frac{1}{2}\pi$, so ist der Winkel γ eindeutig bestimmt, muß aber die Bedingungen

$$1.\ \gamma>0,\quad 2.\ \beta+\gamma<\pi$$

erfüllen. Die erste Bedingung ist erfüllt, wenn $\frac{1}{4}\pi-\frac{1}{2}\gamma<\frac{1}{4}\pi$ oder wenn, da **beide Seiten dieser Ungleichung spitze Winkel** sind, $\operatorname{tg}(\frac{1}{4}\pi-\frac{1}{2}\gamma)<1$, $\frac{a-(\varrho+\varrho_1)}{a+(\varrho+\varrho_1)}\operatorname{cotg}(\frac{1}{2}\beta-\frac{1}{4}\pi)<1$ ist. Die zweite Bedingung ist erfüllt, wenn

$$\tfrac{1}{4}\pi-\tfrac{1}{2}\gamma>\tfrac{1}{2}\beta-\tfrac{1}{4}\pi \text{ oder wenn } \operatorname{tg}(\tfrac{1}{4}\pi-\tfrac{1}{2}\gamma)>\operatorname{tg}(\tfrac{1}{2}\beta-\tfrac{1}{4}\pi),$$

$\frac{a-(\varrho+\varrho_1)}{a+(\varrho+\varrho_1)}\operatorname{cotg}(\frac{1}{2}\beta-\frac{1}{4}\pi)>\operatorname{tg}(\frac{1}{2}\beta-\frac{1}{4}\pi)$ ist. Die Aufgabe ist daher möglich und das Dreieck eindeutig bestimmt, wenn die Ungleichungen

$$1>\frac{a-(\varrho+\varrho_1)}{a+(\varrho+\varrho_1)}\operatorname{cotg}(\tfrac{1}{2}\beta-\tfrac{1}{4}\pi)>\operatorname{tg}(\tfrac{1}{2}\beta-\tfrac{1}{4}\pi)$$

stattfinden. Ist $\beta>\frac{1}{2}\pi$, also $\operatorname{tg}(\frac{1}{2}\beta-\frac{1}{4}\pi)>0$, so darf man diese Ungleichungen mit $\operatorname{tg}(\frac{1}{2}\beta-\frac{1}{4}\pi)$ **ohne Aenderung der Ungleichheitszeichen** multipliciren. Man erhält dadurch

$$\operatorname{tg}(\tfrac{1}{2}\beta-\tfrac{1}{4}\pi)>\frac{a-(\varrho+\varrho_1)}{a+(\varrho+\varrho_1)}>\operatorname{tg}(\tfrac{1}{2}\beta-\tfrac{1}{4}\pi)^2.$$

In diesem Falle muß also $a>\varrho+\varrho_1$ sein. Ist $\beta<\frac{1}{2}\pi$, also $\operatorname{tg}(\frac{1}{2}\beta-\frac{1}{4}\pi)<0$, so muß man, wenn man jene Ungleichungen mit $\operatorname{tg}(\frac{1}{2}\beta-\frac{1}{4}\pi)$ multiplicirt, die **Ungleichheitszeichen ändern**. Man erhält

$$\operatorname{tg}(\tfrac{1}{2}\beta-\tfrac{1}{4}\pi)<\frac{a-(\varrho+\varrho_1)}{a+(\varrho+\varrho_1)}<\operatorname{tg}(\tfrac{1}{2}\beta-\tfrac{1}{4}\pi)^2.$$

In diesem Falle ist, wenn $a>\varrho+\varrho_1$ ist, die erste, und wenn $a<\varrho+\varrho_1$ ist, die zweite Bedingung stets erfüllt.

Aufgabe 14. Dreieck aus $b + c$, h, α.

Auflösung. Es ist $b + c = 2r(\sin\beta + \sin\gamma) = 4r\cos\frac{1}{2}\alpha\cos\frac{1}{2}(\beta - \gamma)$,

$$h = 2r\sin\beta\sin\gamma = 8r\cos\tfrac{1}{2}\beta\cos\tfrac{1}{2}\gamma\sin\tfrac{1}{2}\beta\sin\tfrac{1}{2}\gamma,$$

$$\frac{b+c}{h} = \frac{2\cos\frac{1}{2}\alpha\cos\frac{1}{2}(\beta - \gamma)}{\left\{\cos\frac{1}{2}(\beta - \gamma) + \cos\frac{1}{2}(\beta + \gamma)\right\}\left\{\cos\frac{1}{2}(\beta - \gamma) - \cos\frac{1}{2}(\beta + \gamma)\right\}},$$

$$(b + c)\left\{\cos\tfrac{1}{2}(\beta - \gamma)^2 - \sin\tfrac{1}{2}\alpha^2\right\} = 2h\cos\tfrac{1}{2}\alpha\cos\tfrac{1}{2}(\beta - \gamma).$$

Setzt man $\cos\frac{1}{2}(\beta - \gamma) = \sin\frac{1}{2}\alpha\,\mathrm{tg}\frac{1}{2}\varphi$, wo $\frac{1}{2}\varphi$ einen positiven spitzen Winkel bedeutet, so erhält man

$$(b + c)(\sin\tfrac{1}{2}\alpha^2\mathrm{tg}\tfrac{1}{2}\varphi^2 - \sin\tfrac{1}{2}\alpha^2) = 2h\cos\tfrac{1}{2}\alpha\sin\tfrac{1}{2}\alpha\,\mathrm{tg}\tfrac{1}{2}\varphi,$$

$$(b + c)\sin\tfrac{1}{2}\alpha(\sin\tfrac{1}{2}\varphi^2 - \cos\tfrac{1}{2}\varphi^2) = 2h\cos\tfrac{1}{2}\alpha\sin\tfrac{1}{2}\varphi\cos\tfrac{1}{2}\varphi,$$

$$-(b + c)\sin\tfrac{1}{2}\alpha\cos\varphi = h\cos\tfrac{1}{2}\alpha\sin\varphi,\ \mathrm{tg}\varphi = -\frac{b+c}{h}\,\mathrm{tg}\tfrac{1}{2}\alpha.$$

Durch diese Gleichung ist φ als stumpfer Winkel, also auch vermöge der Gleichung $\cos\frac{1}{2}(\beta - \gamma) = \sin\frac{1}{2}\alpha\,\mathrm{tg}\frac{1}{2}\varphi$ der Winkel $\beta - \gamma$ eindeutig bestimmt, wenn man $\beta > \gamma$ nimmt. Durch eine Höhe und die Winkel ist das Dreieck bestimmt. Mit Benutzung der Mollweide'schen Gleichung $(b + c)\sin\frac{1}{2}\alpha = a\cos\frac{1}{2}(\beta - \gamma)$ erhält man noch

$$a = (b + c)\,\mathrm{cotg}\tfrac{1}{2}\varphi,\ F = \tfrac{1}{2}ah = \tfrac{1}{2}h(b + c)\,\mathrm{cotg}\tfrac{1}{2}\varphi.$$

Determination. Es müssen die Bedingungen

$$1.\ \sin\tfrac{1}{2}\alpha\,\mathrm{tg}\tfrac{1}{2}\varphi \overline{\overline{<}} 1,\quad 2.\ \beta - \gamma < \beta + \gamma$$

erfüllt sein. Da die Seiten der Gleichung $\mathrm{cotg}\frac{1}{2}\varphi = \dfrac{1 + \cos\varphi}{\sin\varphi}$ oder $\mathrm{cotg}\frac{1}{2}\varphi = \sqrt{1 + \mathrm{cotg}\varphi^2} + \mathrm{cotg}\varphi$ positiv sind, so ist die erste Bedingung erfüllt, wenn $\sin\frac{1}{2}\alpha \overline{\overline{<}} \sqrt{1 + \mathrm{cotg}\varphi^2} + \mathrm{cotg}\varphi$ oder $\sin\frac{1}{2}\alpha - \mathrm{cotg}\varphi \overline{\overline{<}} \sqrt{1 + \mathrm{cotg}\varphi^2}$ ist. Da der Winkel φ im zweiten Quadranten liegt, so ist $\mathrm{cotg}\varphi$ negativ, also $\sin\frac{1}{2}\alpha - \mathrm{cotg}\varphi$ positiv, daher die erste Bedingung erfüllt, wenn $(\sin\frac{1}{2}\alpha - \mathrm{cotg}\varphi)^2 \overline{\overline{<}} 1 + \mathrm{cotg}\varphi^2$ oder $\sin\frac{1}{2}\alpha^2 - 2\sin\frac{1}{2}\alpha\,\mathrm{cotg}\varphi \overline{\overline{<}} 1$ oder $-2\sin\frac{1}{2}\alpha\,\mathrm{cotg}\varphi \overline{\overline{<}} \cos\frac{1}{2}\alpha^2$ oder, da $\mathrm{cotg}\varphi = -\dfrac{h}{b+c}\mathrm{cotg}\frac{1}{2}\alpha$ ist, wenn $\dfrac{2h}{b+c}\cos\frac{1}{2}\alpha \overline{\overline{<}} \cos\frac{1}{2}\alpha^2$ oder $h \overline{\overline{<}} \frac{1}{2}(b + c)\cos\frac{1}{2}\alpha$ ist. Die zweite Bedingung ist erfüllt, wenn $\cos\frac{1}{2}(\beta - \gamma) > \cos\frac{1}{2}(\beta + \gamma)$ oder $\sin\frac{1}{2}\alpha\,\mathrm{tg}\frac{1}{2}\varphi > \sin\frac{1}{2}\alpha$ oder $\mathrm{tg}\frac{1}{2}\alpha > 1$ ist, und diese Ungleichung findet immer statt, weil $\varphi > \frac{1}{2}\pi$, also $\frac{1}{2}\varphi > \frac{1}{4}\pi$ ist. Die Aufgabe ist daher nur dann möglich und das Dreieck eindeutig bestimmt, wenn $h \overline{\overline{<}} \frac{1}{2}(b + c)\cos\frac{1}{2}\alpha$ ist. (Vergl. Aufgabe 8.)

Aufgabe 15. Dreieck aus m, F, α.

Auflösung. Es ist $c:m = \sin(\beta + \frac{1}{2}\alpha):\sin\beta = \cos\frac{1}{2}(\beta - \gamma):\sin\beta$,

$$m^2\cos\tfrac{1}{2}(\beta - \gamma)^2 = c^2\sin\beta^2 = 4r^2\sin\beta^2\sin\gamma^2,$$

$$m^2\{1 + \cos(\beta - \gamma)\} = 8r^2\sin\beta^2\sin\gamma^2,\ 2F = 4r^2\sin\alpha\sin\beta\sin\gamma,$$

$$\frac{m^2\sin\alpha}{2F} = \frac{2\sin\beta\sin\gamma}{1 + \cos(\beta - \gamma)} = \frac{\cos(\beta - \gamma) - \cos(\beta + \gamma)}{1 + \cos(\beta - \gamma)} = \frac{\cos\alpha + \cos(\beta - \gamma)}{1 + \cos(\beta - \gamma)}.$$

Da die Zahlen $\cos\alpha$ und $\cos(\beta-\gamma)$ nicht zugleich negativ sein können und $\cos\alpha < 1$ ist, so ist der Bruch $\dfrac{\cos\alpha + \cos(\beta-\gamma)}{1+\cos(\beta-\gamma)}$, also auch der Bruch $\dfrac{m^2 \sin\alpha}{2F}$ echt. Daher kann man $\dfrac{m^2\sin\alpha}{2F} = \cos\varphi$ setzen und erhält dadurch $\cos\varphi = \dfrac{\cos\alpha + \cos(\beta-\gamma)}{1+\cos(\beta-\gamma)}$,

$$\cos(\beta-\gamma)\,(1-\cos\varphi) = \cos\varphi - \cos\alpha,\ \cos(\beta-\gamma) = \frac{\sin\tfrac{1}{2}(\alpha+\varphi)\sin\tfrac{1}{2}(\alpha-\varphi)}{\sin\tfrac{1}{2}\varphi^2}.$$

Ferner ist $4r^2 = \dfrac{2F}{\sin\alpha\sin\beta\sin\gamma}$, $a = 2r\sin\alpha$, $b = 2r\sin\beta$, $c = 2r\sin\gamma$.

Determination. Es müssen die Bedingungen

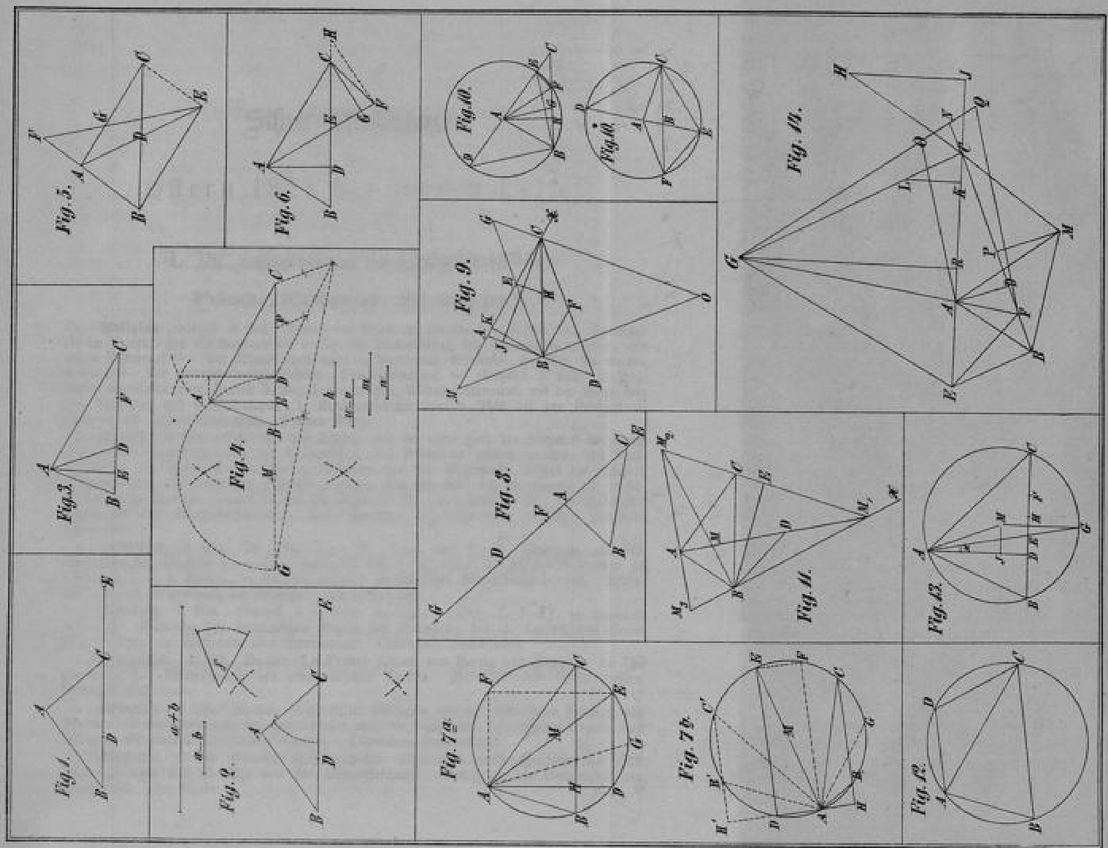
$$1.\ \text{val. abs.}\frac{\cos\varphi - \cos\alpha}{1-\cos\varphi} \leqq 1,\quad 2.\ \tfrac{1}{2}\sin\alpha < \frac{F}{m^2},\quad 3.\ \beta-\gamma < \beta+\gamma$$

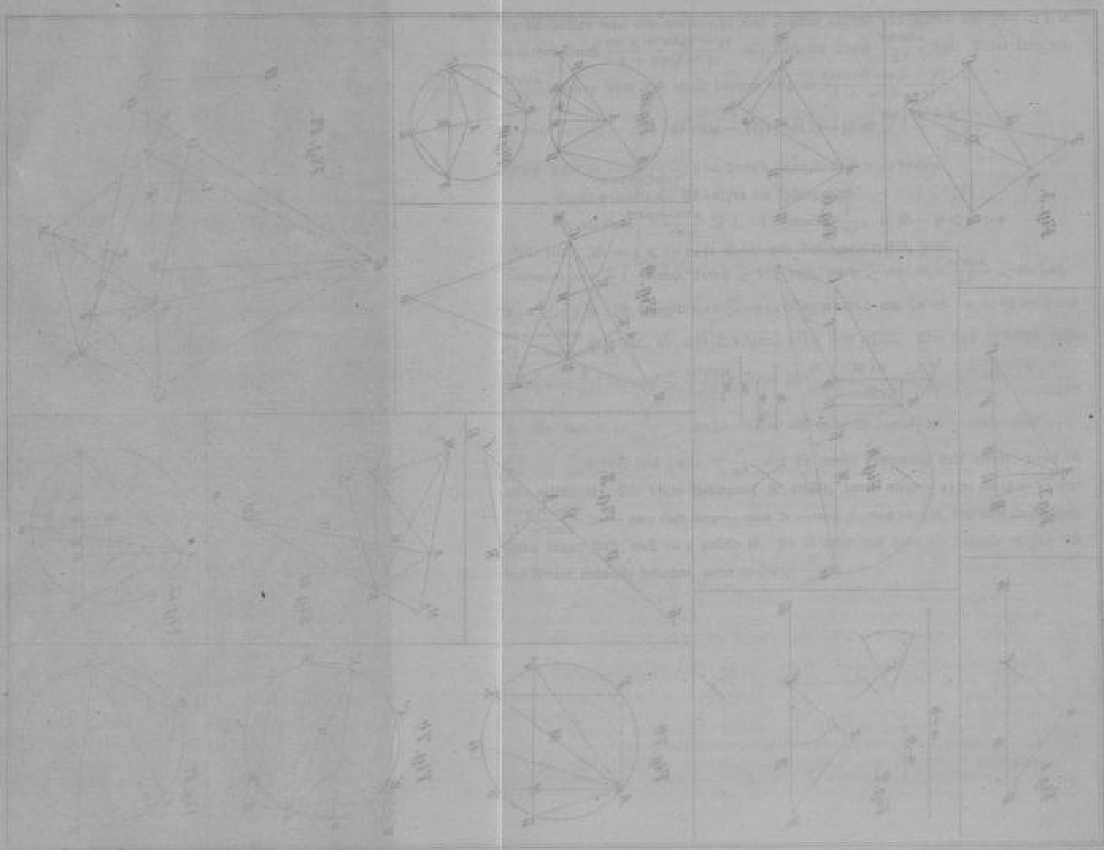
erfüllt sein. Ist $\cos\alpha < \cos\varphi$, so ist die erste Bedingung erfüllt, wenn

$$\cos\varphi - \cos\alpha \leqq 1-\cos\varphi,\ 2\cos\varphi \leqq 1+\cos\alpha,\ \cos\varphi \leqq \cos\tfrac{1}{2}\alpha^2,\ \frac{m^2\sin\alpha}{2F} \leqq \cos\tfrac{1}{2}\alpha^2,$$

$\operatorname{tg}\frac{1}{2}\alpha \leqq \dfrac{F}{m^2}$ ist. Ist dagegen $\cos\alpha \geqq \cos\varphi$, also $\cos\alpha > 0$ und $\frac{1}{2}\alpha < \frac{1}{4}\pi$, so ist der Bruch $\dfrac{\cos\alpha - \cos\varphi}{1-\cos\varphi}$ stets echt, die erste Bedingung daher stets erfüllt. Aber auch in diesem Falle ist $\operatorname{tg}\frac{1}{2}\alpha < \dfrac{F}{m^2}$, da $\cos\alpha \geqq \dfrac{m^2\sin\alpha}{2F}$, $\frac{1}{2}\operatorname{tg}\alpha \leqq \dfrac{F}{m^2}$, $\dfrac{\operatorname{tg}\frac{1}{2}\alpha}{1-\operatorname{tg}\frac{1}{2}\alpha^2} \leqq \dfrac{F}{m^2}$, $\operatorname{tg}\frac{1}{2}\alpha < \dfrac{\operatorname{tg}\frac{1}{2}\alpha}{1-\operatorname{tg}\frac{1}{2}\alpha^2}$ ist. Da nun $\sin\frac{1}{2}\alpha\dfrac{1}{\cos\frac{1}{2}\alpha} > \sin\frac{1}{2}\alpha\cos\frac{1}{2}\alpha$, also $\operatorname{tg}\frac{1}{2}\alpha > \frac{1}{2}\sin\alpha$, und in jedem Falle $\operatorname{tg}\frac{1}{2}\alpha \leqq \dfrac{F}{m^2}$ ist, so ist stets $\frac{1}{2}\sin\alpha < \dfrac{F}{m^2}$, also die zweite Bedingung stets erfüllt, wenn die erste erfüllt ist. Die dritte Bedingung ist erfüllt, wenn $\cos(\beta-\gamma) > \cos(\beta+\gamma)$ oder $\dfrac{\cos\varphi - \cos\alpha}{1-\cos\varphi} > -\cos\alpha$ oder $\cos\varphi - \cos\alpha > -\cos\alpha + \cos\varphi\cos\alpha$ ist, und diese Ungleichung findet immer statt, weil $\cos\varphi$ positiv ist. Es ist daher nur dann die Aufgabe möglich und das Dreieck eindeutig bestimmt, wenn $\operatorname{tg}\frac{1}{2}\alpha \leqq \dfrac{F}{m^2}$ ist.

…icht zugleich negativ sein können und $\cos\alpha < 1$ ist,
…also auch der Bruch $\frac{m^2 \sin\alpha}{2F}$ echt. Daher kann man
…ch $\cos\varphi = \frac{\cos\alpha + \cos(\beta - \gamma)}{1 + \cos(\beta - \gamma)}$,
…$\cos\alpha$, $\cos(\beta - \gamma) = \frac{\sin\frac{1}{2}(\alpha + \varphi)\sin\frac{1}{2}(\alpha - \varphi)}{\sin\frac{1}{2}\varphi^2}$.
…$in\alpha$, $b = 2r\sin\beta$, $c = 2r\sin\gamma$.
… die Bedingungen
… 2. $\frac{1}{2}\sin\alpha < \frac{F}{m^2}$, 3. $\beta - \gamma < \beta + \gamma$
…ie erste Bedingung erfüllt, wenn
…$\overline{\overline{<}}\ 1 + \cos\alpha$, $\cos\varphi \overline{\overline{<}} \cos\frac{1}{2}\alpha^2$, $\frac{m^2\sin\alpha}{2F} \overline{\overline{<}} \cos\frac{1}{2}\alpha^2$,
…$\cos\varphi$, also $\cos\alpha > 0$ und $\frac{1}{2}\alpha < \frac{1}{4}\pi$, so ist der Bruch
…gung daher stets erfüllt. Aber auch in diesem Falle
…$\frac{1}{2}\mathrm{tg}\alpha \overline{\overline{<}} \frac{F}{m^2}$, $\frac{\mathrm{tg}\frac{1}{2}\alpha}{1 - \mathrm{tg}\frac{1}{2}\alpha^2} \overline{\overline{<}} \frac{F}{m^2}$, $\mathrm{tg}\frac{1}{2}\alpha < \frac{\mathrm{tg}\frac{1}{2}\alpha}{1 - \mathrm{tg}\frac{1}{2}\alpha^2}$
…$s\frac{1}{2}\alpha$, also $\mathrm{tg}\frac{1}{2}\alpha > \frac{1}{2}\sin\alpha$, und in jedem Falle
…, also die zweite Bedingung stets erfüllt, wenn die
…g ist erfüllt, wenn $\cos(\beta - \gamma) > \cos(\beta + \gamma)$ oder
…$\cos\alpha > -\cos\alpha + \cos\varphi\cos\alpha$ ist, und diese Ungleichung
…ist. Es ist daher nur dann die Aufgabe möglich und
…$\frac{1}{2}\alpha \overline{\overline{<}} \frac{F}{m^2}$ ist.





Schul-Na

von

Ostern 1874 bi

I. Die Lehrverfassung

Prima. (Ordinari

Religion (evang.). 2 Std. Lectüre der
(I) im Urtext. Im Anschluß an die Lectüre di
neuen Testament. — Die ökumenischen und d
August. — Die Unterscheidungs-Lehren. Der
matik: die Sakramente, speciell Taufe, Firmung
heil. Meßopfer und Bußsakrament. b. Kirchen
nung im 16. Jhdt einschließlich. Pfarrer Kreu

Deutsch. 3 Std. Geschichte der ältesten
Dichter der neuesten Zeit von den Romantikern
lungenlied (mit Auswahl) und Lieder Walthe
Göthe's Tasso, Abschnitte aus Lessing's Laokoo
hochdeutschen Sprache. Uebersicht über die Gesc
Lehren der Logik (Dispositionslehre). Freie Be
Fährmann.

Lateinisch. 8 Std. Cic. Tusc. I. u.
Oberlehrer Dr. Schmidt I. — Hor. carm. II.
Oden des 1. u. 2. Buches. — Stilistik eingeübt
poralien und Besprechung der Aufsätze. Der O

Griechisch. 6 Std. Thucyd. I. — Plat.
Antigone. Einübung der syntactischen Regeln
Alle 14 Tage ein Exercitium oder Extemporale.

Französisch. 2 Std. Lectüre: La Franc
par Corneille. Wiederholung des grammatische
Prorector Fährmann.

Hebräisch. 2 Std. Lectüre ausgewählter
Psalmen; Vervollständigung der Formenlehre u
Rödigers Grammatik; schriftliche Uebungen. O

Geschichte. 3 Std. Römische Kaisergeschi
Wiederholungen und Vorträge aus der alten
Deutschland. Dr. Rhode.