

Airys elementare Theorie der Planeten- und Mondstörungen.

II. Teil*).

Theorie des Mondes.

89) Die störende Kraft im Radius Vektor vermindert die mittlere Entfernung des Mondes von der Erde; die Wirkung der auf dem Radius Vektor senkrechten störenden Kraft ist verschieden.

Betrachten wir die Wirkungen, welche die in 88 genannten störenden Kräfte im allgemeinen, im ganzen hervorbringen. Da die im Radius Vektor liegende störende Kraft, welche von der Erde weg gerichtet ist, grösser ist als die nach der Erde hingerrichtete (80), so lässt sich die Gesamtwirkung dieser Kraft ansehen, als eine Verminderung der Anziehung der Erde. Es verhalten sich nun (38) die Kuben der mittleren Entfernungen zweier Himmelskörper, die sich um verschiedene Centrakörper bewegen, wie die Produkte der Massen der letzteren in die Quadrate der Umlaufzeiten. Die Bewegungen des Mondes um die Erde, ohne und mit Störung, kann man aber ansehen im 1. Falle als eine Bewegung des Mondes um eine Masse M und im 2. Falle als eine um eine kleinere Masse m ; nennt man die Umlaufzeit des Mondes in jedem der zwei Fälle T , die mittlere Entfernung R resp. r , so wird daher nach dem angegebenen Gesetze sein müssen

$$R^3 : r^3 = M \cdot T^2 : m \cdot T^2 \quad \text{oder} \\ R^3 : r^3 = M : m.$$

Ist nun m kleiner als M , wie hier, so muss auch r kleiner sein als R . Die mittlere Entfernung des Mondes von der Erde wird demnach infolge der Störung kleiner ausfallen als sie sein würde, wenn die Sonne keine Störung ausgeübt hätte; vorausgesetzt, dass die Umlaufzeit in beiden Fällen dieselbe ist.

Die auf dem Radius Vektor senkrechte Störung wird den Mond bald beschleunigen, bald verzögern, und daher keine beständige Wirkung hervorbringen.

90) Des Mondes jährliche Gleichung, hervorgebracht durch die Veränderung der Entfernung der Sonne von der Erde.

Da die Erde sich in einer Ellipse um die Sonne bewegt, so ist die Entfernung beider Körper von einander veränderlich. Die Grösse der störenden Kraft ist aber (83) umgekehrt proportional dem Kubus der Sonnenentfernung (d. i. der Entfernung des störenden Körpers); infolgedessen ist sie merklich grösser, wenn die Erde im Perihel, als wenn sie im Aphel ist. Bewegt sich also die Erde vom Perihel nach dem Aphel, so wird die störende Kraft beständig

*) Der I. Teil befindet sich im 22. Jahresberichte der Anstalt (1895. Programm Nr. 561).

abnehmen, aber zunehmen, während sie vom Aphel zum Perihel geht. Als störende Kraft kann allein die von der Erde weg gerichtete, im Radius Vektor liegende, angesehen werden, da die dazu senkrechte keine beständige Wirkung hervorbringt, wie in 89 gesagt ist. Nimmt nun im ersten Teile die Kraft ab, so wird dadurch die Entfernung von Erde und Mond geringer, oder die Bahn verengert sich allmählich, wie auch aus 47 folgt; wächst aber die störende Einwirkung, im zweiten Teile, vom Aphel zum Perihel, so wird sie die Entfernung des Mondes von der Erde vergrössern oder die Bahn wird sich nach und nach erweitern (47). Wenn nun auch diese Änderung der Entfernung von Erde und Mond an sich nicht gross ist, da der grösste und kleinste Wert der so verursachten verschiedenen

Entfernungen sich kaum um $\frac{1}{5000}$ der mittleren Entfernung von einander unterscheiden, so ist doch die Wirkung auf die Winkelbewegung sehr beträchtlich (49). Mit den Dimensionen der Bahn ändert sich nämlich die Umlaufszeit (da sich die Quadrate der Umlaufzeiten wie die Kuben der mittleren Entfernung verhalten; erweitert sich also z. B. die Bahn, so wird die Umlaufszeit grösser) und damit die Winkelgeschwindigkeit, d. h. der Winkel, der in bestimmter Zeit beschrieben wird.

Die Winkelbewegung oder Winkelgeschwindigkeit wird demnach zunehmen, wenn sich die Erde vom Perihel nach dem Aphel, abnehmen, wenn sie sich vom Aphel nach dem Perihel bewegt, und zwar wird im Perihel die Winkelgeschwindigkeit am kleinsten sein, von da bis zum Aphel bis zum grössten Werte anwachsen, und dann wieder kleiner werden u. s. f. Denkt man sich also die mittlere Winkelgeschwindigkeit angegeben, d. i. den Winkel, der im Durchschnitt oder Mittel (etwa in einer Sekunde) beschrieben wird, so wird die Geschwindigkeit im Perihel kleiner als die mittlere sein, sich ihr danach nähern, schliesslich im Aphel grösser sein, und dann abnehmen, bis sie im Perihel wieder kleiner als die mittlere ist. Der Mond wird sich im Perihel, Anfang Januar, wo er weit von der Erde entfernt ist (weil die störende, von der Erde weg gerichtete Kraft gross ist) langsamer um die Erde bewegen als im Aphel, Anfang Juli. Infolge der geringen Geschwindigkeit im Perihel wird vom Perihel an des Mondes wahrer Ort hinter dem mittleren mehr und mehr zurückbleiben, der Zuwachs des Zurückbleibens wird aber immer kleiner, weil die Geschwindigkeit zunimmt, bis schliesslich in der Mitte von Perihel bis zum Aphel die Winkelgeschwindigkeit wieder gleich der mittleren ist. Von da ab wächst die erstere über die letztere, und der Mond holt in dieser zweiten Hälfte der Strecke von Perihel zu Aphel das wieder ein, um was er in der ersten Hälfte zurückbleibt, bis im Aphel selbst der wahre Ort mit dem mittleren zusammenfällt. Vom Aphel an, wo die Geschwindigkeit inzwischen sehr gross geworden ist, eilt der Mond dem mittleren Orte voraus; allein, da die Winkelbewegung kleiner wird, so wird der Zuwachs des Vorausseins immer kleiner, bis schliesslich die Geschwindigkeit so klein ist, dass er sich dem mittleren Orte wieder nähert, und ihn im Perihel erreicht, wo die Geschwindigkeit am kleinsten ist u. s. f. Die grösste Abweichung des wahren Ortes vom mittleren beträgt $11' 12''$, um so viel wird der wahre Ort hinter dem mittleren zurück (im Frühjahr) oder vor dem mittleren voraus sein können (im Herbst). Diese Ungleichheit, und zwar in der Länge des Mondes, weil sie sich mit jedem Erdumlaufe wiederholt, also an die Dauer des Jahres gebunden ist, heisst des Mondes jährliche Gleichung. Dieselbe wurde von Tycho de Brahe um 1590 aus Beobachtungen gefunden.

91) Des Mondes Variation, die unmittelbare Wirkung des Hauptteils der störenden Kräfte.

Wir wollen jetzt die Störungen untersuchen, welche bei jedem Mondumlaufe periodisch wiederkehren, und welche unabhängig von der Excentricität der Mondbahn sind.

Nehmen wir an, die Sonne oder besser die Erde stehe für einige Mondumläufe still: Sonne und Erde stehen also fest, nur der Mond bewege sich. Welcher Art muss nun die Bahn sein, in der sich der Mond unter Einwirkung der störenden Kräfte bewegt?

Die Bahn kann kein Kreis sein.

Die Kraft senkrecht zum Radius Vektor verzögert den Mond, wenn er von B_1 (Fig. 32)*) nach B_2 geht (88 und 84), und seine Geschwindigkeit ist deshalb in B_2 kleiner als in B_1 ; deswegen würde, wenn auch die Anziehung der Erde A auf B_1 und B_2 dieselbe wäre, die Bahn in B_2 stärker gekrümmt sein als in B_1 . Aber da (88) die störende Kraft in B_2 nach A hin, in B_1 von A weg gerichtet ist, so ist es derart, als wäre die Anziehung von A in B_2 grösser als die in B_1 , und daher muss auch in dieser Hinsicht die Krümmung in B_2 grösser sein als in B_1 . Bei einem Kreise müsste aber die Krümmung überall dieselbe sein.

Die Bahn kann auch kein Oval sein mit der Erde im Mittelpunkte, dessen grössere Achse durch die Sonne C geht. Da die Geschwindigkeit in B_2 (Fig. 33) klein ist, weil die störende Kraft senkrecht zum Radius Vektor die Bewegung von B_1 bis B_2 verzögert; da die Anziehung der Erde wegen der grösseren Nähe des B_2 an A gross ist und noch durch die in B_2 nach A hin gerichtete Störung vermehrt wird, so muss die Krümmung in B_2 viel grösser sein als in B_1 , wo ja die Geschwindigkeit gross, der Mond weit von der Erde entfernt ist, und die störende Kraft von der Erde fort gerichtet ist. Bei der angenommenen Form der Bahn würde aber die Krümmung in B_2 geringer sein als die in B_1 . Diese Form der Bahn ist also nicht die wahre.

Den Bedingungen, die erfüllt sein müssen, wird aber genügt, wenn man die Bahn als ein Oval annimmt, dessen kleine Achse nach der Sonne hin gerichtet ist. (Die Erde A ist im Mittelpunkte gedacht). Die Geschwindigkeit in B_2 (Fig. 34) ist vermindert worden, weil die störende Kraft senkrecht zum Radius Vektor die Bewegung von B_1 bis B_2 verzögerte; soll aber die Bahn, wie in der angenommenen Figur, in B_2 stärker gekrümmt sein, so muss wirklich auch die Geschwindigkeit in B_2 kleiner sein als die in B_1 . Freilich ist die Entfernung B_2 A grösser als B_1 A, demnach die Anziehung in B_2 kleiner als in B_1 , aber es wird doch die Anziehung in B_2 , vermehrt um die nach A gerichtete störende Kraft in B_2 , nur um sehr wenig kleiner sein als die in B_1 , durch die von A weg gerichtete störende Kraft verminderte Anziehung von A, sodass die Geschwindigkeit in B_2 viel, die Kraft in B_2 , die nach A gerichtet ist, wenig abgenommen hat, daher die Bahn immer in B_2 stärker gekrümmt sein muss als in B_1 , wie es die Figur verlangt.

Soll also der Zustand unter Einwirkung der störenden Kräfte ein dauernder sein, so muss die Mondbahn ein Oval der zuletzt angegebenen Art sein. Ein solches Oval wird folglich der Mond in den auf einander folgenden Umläufen unverändert beschreiben. Recht wohl lassen sich die Verhältnisse des Ovals so gewählt denken, dass es genau dem entspricht, welches die aus den verschiedenen Geschwindigkeiten folgenden Krümmungen verlangen.**)

92) Es ist vorher vorausgesetzt worden, dass die Erde stillstehe in bezug auf die Sonne. Wollen wir den wirklichen Vorgang, die Bewegung der Erde um die Sonne oder die scheinbare Bewegung der Sonne um die Erde mit berücksichtigen, so brauchen wir nur dem früheren Ovale eine Drehung um die Sonne zu erteilen, und dann ganz die frühere Schlussfolge anzuwenden. Es wird sich dann also das Oval so drehen, dass stets die kleine Achse nach der Sonne zu gewendet ist. (Fig. 35 stellt die vom Monde beschriebene Kurve dar mit Rücksicht auf die scheinbare Bewegung der Sonne.)

Stünde nun aber die Erde still, so würde die Zeit von einem Syzygium (etwa Neumond) bis wieder zu demselben (der sogen. synodische Monat) genau die Zeit sein, die zu einem ganzen Umlauf (siderischer Monat) gehört. Ist aber die Erde in Bewegung oder bewegt sich die Sonne scheinbar fort, so wird, wenn der Mond von M_1 (Fig. 36) bis wieder nach M_1 gekommen ist, die Sonne nicht mehr in S , sondern in S_1 und das Syzygium in M_2 sein (oder in M_3 , wenn man die kleine Achse der Mondbahn stets nach der Sonne hin zeigend annimmt). Der Mond braucht also bei bewegter Erde mehr Zeit von einem Syzygium bis wieder zu demselben, als bei feststehender Erde; daher wird auch im ersten Falle die senkrecht zum Radius

*) Die Richtung der Kräfte ist, wie in 88 angegeben, aus Fig. 31 ersichtlich.

***) Die störenden Kräfte haben somit das Bestreben, den Mond ein Oval beschreiben zu lassen, dessen kleine Achse nach der Sonne hin gerichtet ist.

Vektor stehende störende Kraft in demselben Sinne längere Zeit hindurch wirken als früher, d. h. längere Zeit beschleunigen, aber auch verzögern, und folglich der Unterschied der Geschwindigkeiten in den Syzygien und Quadraturen noch grösser ausfallen als bei stillstehender Erde.

Wenn man sich die Erde beweglich, die Sonne stillstehend denkt, so gestaltet sich die Sache so: Neumond mag bei M_1 (Fig. 37) stattgefunden haben; hat sich die Erde bis A_2 bewegt, so wird, wenn Neumond stattfindet, derselbe nicht in M_1 , sondern in M_3 erfolgen oder in M_2 , wenn man die kleine Achse der Bahn immer nach der Sonne S gerichtet denkt. Dieselbe Schlussweise wie vorher gilt auch hier: Die störende Kraft senkrecht zum Radius Vektor wird längere Zeit wirken als bei stillstehender Erde, da der Mond jetzt längere Zeit braucht von einer Syzygie bis wieder zu derselben.

93) Wie wird sich nun die erwähnte Störung in des Mondes Winkelbewegung zeigen? Wenn der Mond die gefundene Ellipse, deren kleine Achse nach der Sonne gerichtet ist, ohne eine störende Kraft senkrecht zum Radius Vektor beschriebe, so würde der Radius Vektor in gleichen Zeiten gleiche Flächen beschreiben, und es würde daher nach früherem die Winkelbewegung des Mondes nahe B_2 und B_4 (Fig. 34) viel kleiner sein als die nahe B_1 und B_3 . Wie wird diese Abweichung von der gleichförmigen Winkelbewegung nun durch die störende Kraft senkrecht zum Radius Vektor geändert? Diese Kraft*) verzögert den Mond von B_1 bis B_2 und von B_3 bis B_4 , sie beschleunigt ihn von B_2 bis B_3 und von B_4 bis B_1 ; daher wird die Winkelbewegung bei B_2 und B_4 noch mehr vermindert, bei B_1 und B_3 noch grösser sein als es ohne die Kraft sein würde. Die Winkelbewegung wird von B_1 bis B_2 bedeutend abnehmen, von B_2 bis B_3 zunehmen; von da bis B_4 abnehmen, bis B_1 wieder zunehmen.

Die Winkelbewegung des Mondes ist in B_1 und B_3 grösser, in B_2 und B_4 kleiner als die mittlere, und zwar noch viel grösser oder kleiner als diejenige mittlere, die sich ergeben würde, wenn der Mond die genannte Ellipse ohne die Kraft senkrecht zum Radius Vektor beschriebe. Daher ist des Mondes wahrer Ort von B_1 bis B_2 und von B_3 bis B_4 vor dem mittleren voraus, von B_2 bis B_3 und von B_4 bis B_1 hinter demselben zurück. Diese Ungleichheit in der Bewegung, die sich als eine ungleichförmige Änderung der Länge des Mondes kenntlich macht, heisst des Mondes Variation; ihr grösster Wert beträgt $35' 42''$, um welche der wahre Ort des Mondes manchmal vor, manchmal hinter dem mittleren ist. Sie wurde um 1590 von Tycho de Brahe aus Beobachtungen gefunden. Eine Abweichung solcher Grösse tritt von einem Neumonde bis zum folgenden zweimal auf; von B_1 bis B_2 , von B_3 bis B_4 ist der Mond voraus, von B_2 bis B_3 und von B_4 bis B_1 zurück um $35' 42''$. Die Störung kehrt also in jeder Hälfte der Zeit von Neumond zu Neumond wieder; ihre Periode ist der halbe synodische Monat oder $14,8$ Tage. Mit dem genannten grössten Werte tritt die Abweichung auf in den Mitten von Quadraturen und Syzygien, was sich durch eine ähnliche Schlussweise wie in 90 ermitteln lässt. Vom Syzygium an nämlich eilt der Mond infolge der grossen Geschwindigkeit dem mittleren Orte voraus, doch wird der Zuwachs des Vorausseins immer kleiner, bis die Geschwindigkeit in der Mitte zwischen Syzygium und Quadratur so verkleinert ist, dass kein Zuwachs des Vorausseins mehr erfolgt, also das letztere am grössten ist. Die Geschwindigkeit nimmt nun weiter ab, sodass der Mond von nun an zurückbleibt, bis das Voraussein in der Quadratur ganz aufgehoben ist, und von jetzt an ein Zurückbleiben gegen den mittleren Ort erfolgt, das seinen grössten Wert in der Mitte von Quadratur und folgender Syzygie erreicht u. s. f.

Wie wir erkennen, rührt die gefundene Störung, die bei jedem Mondumlauf periodisch wiederkehrt, von dem Hauptteile der störenden Kräfte, von den letzteren im allgemeinen her. Diese letzteren vergrössern also die Geschwindigkeit in den Syzygien, vermindern sie in den Quadraturen, und suchen daher die Mondbahn an den Stellen der Quadraturen stärker zu krümmen, in den Syzygien die Krümmung kleiner zu machen, als sie

*) Diese Kräfte sind in Fig. 31 des 1. Teils der Abhandlung dargestellt.

sein würde ohne Störung; sie streben eben an, die Bahn so zu gestalten, dass ihre kleine Achse nach der Sonne zu gewendet ist.

Es ist von verzögernden und beschleunigenden Kräften geredet worden, aber es ist nicht in Betracht gezogen worden, ob die verzögernden Kräfte z. B. unter einander gleich oder verschieden sind.

94) Die parallaktische Ungleichheit, bewirkt durch den Unterschied der störenden Kräfte in der Konjunktion und in der Opposition.

In 79 erwähnten wir nun, dass die störenden Kräfte auf der der Sonne zugekehrten und auf der von der Sonne entferntesten Seite der Bahn nicht gleich seien, dass vielmehr die ersteren ein wenig grösser seien als die letzteren. Das galt zunächst für die Kräfte im Radius Vektor, doch gilt es auch für die senkrecht zu demselben. Welcher Art werden nun die Störungen sein, die infolge der Verschiedenheit dieser Kräfte auftreten?

Denken wir uns dazu, wir hätten in der vorigen Untersuchung über die Variation einen mittleren Wert der in Rede stehenden störenden Kräfte benutzt. Wir erhalten dann den wirklichen Fall, wenn wir diese mittlere Kraft in der Nähe der Konjunktion vergrössert, in der Nähe der Opposition verringert annehmen. Nach 77, 78, 84 müssen wir, um den wirklichen Fall aus dem mittleren Werte zu erhalten, folgende Änderungen treffen:

In der Nähe der Konjunktion ist eine Kraft im Radius Vektor, von der Erde weg gerichtet, und eine solche senkrecht zum Radius Vektor hinzuzufügen, welche letztere den Mond vor der Konjunktion beschleunigt und nach derselben verzögert; in der Nähe der Opposition müssen diese Kräfte von gerade entgegengesetzter Art gewählt werden. Welche Änderungen erzeugen diese hinzuzufügenden Kräfte?*)

Wir werden wieder ermitteln, welche Gestalt die Bahn haben muss, damit unsere Kräfte allein keine Veränderung derselben hervorbringen können. (Es kommen die Wirkungen der vorher behandelten Kräfte also gar nicht in Frage, wir haben vielmehr gar keine andern störenden Kräfte, als die jedesmal in Rede stehenden zu betrachten und dann zu ermitteln, welcher dauernde Zustand mit der Wirkung dieser Kräfte allein verträglich ist. Ein andrer Zustand als jener eine wird dann nie andauern, und jenen einen, dauernden, werden dann die Kräfte herbeizuführen bestrebt sein.) Die Kräfte selbst sind, wie gesagt, sehr klein, sie werden daher die Bahn nicht merklich von der elliptischen Form abbringen. Soll nun immer dieselbe Art von Bahn beschrieben werden, so muss die Excentricität immer dieselbe sein, und man wird dann angeben können, welches jene konstante Excentricität, und welches die Lage der Apsidenlinie sein muss.

Geht die Apsidenlinie nicht durch die Sonne (Fig. 38), so ergibt sich aus 57, 58, 59, 68, dass die Excentricität der Bahn infolge der störenden Kräfte entweder ab- oder zunimmt. Steht z. B. der störende Körper in C, somit nicht in der Apsidenlinie, so haben wir in B_1 und seiner Nachbarschaft eine von A fort, in B_2 eine nach A hin gerichtete Kraft; vor der Konjunktion B_1 eine beschleunigende, nach dem Durchgange durch B_1 eine verzögernde störende Kraft, ferner eine vor B_2 verzögernde, nach B_2 beschleunigende Kraft.

Diese Kräfte wirken nur in der Nähe der Konjunktion und Opposition. (Die Pfeile deuten die Richtung derselben an.) In B_1 geht der Mond vom Perigäum zum Apogäum; nach 59 wird dann durch die in B_1 im Radius Vektor von A weg wirkende Kraft die Excentricität vergrössert. In B_2 ist die Kraft im Radius Vektor nach A hin gerichtet, und da der Mond hier vom Apogäum nach dem Perigäum geht, so vergrössert sie nach 58 die Excentricität. Die Kraft senkrecht zum Radius Vektor beschleunigt vor B_1 , und zwar geschieht dies in der Nähe des Perigäums — da die Punkte links der kleinen Achse der beschriebenen elliptischen Bahn in der Nähe des Perigäums, die rechts davon nahe dem Apogäum liegen —, sodass sie nach 68 die Excentricität vergrössert; dasselbe gilt von der nach dem Durchgange durch B_2 beschleunigenden Kraft. Die nach dem Passieren von B_1 und die vor dem Durchgange durch B_2 verzögernden Kräfte wirken in der Nähe des Aphels und verursachen daher nach 68

*) In Fig. 38 u. 39 sind diese Kräfte allein durch Pfeile dargestellt.

wieder eine Zunahme der Excentricität. Hat also die Absidenlinie die angenommene Lage, so wird die Excentricität nicht konstant bleiben. In der durch Fig. 39 dargestellten Lage wirkt in B_1 die Kraft im Radius Vektor von A fort, und der Mond bewegt sich vom Perigäum nach dem Apogäum; deshalb wird die Excentricität nach 58 zunehmen. Ebenso erzeugt die in B_3 , wo der Mond vom Apogäum nach dem Perigäum geht, nach A gerichtete Störung ein Wachsen der Excentricität. Der Punkt B_1 , samt benachbarten Punkten, liegt in der Nähe des Perihels, daher wird die beschleunigende Kraft vor B_1 die Excentricität vergrössern, die verzögernde, nach dem Durchgange durch B_1 wirkende Kraft aber dieselbe um nahe ebensoviele verkleinern; Gleiches gilt von den in der Umgebung von B_3 senkrecht zum Radius Vektor wirkenden Kräften, so dass die letzteren im ganzen fast keine Wirkung hervorbringen und daher die Excentricität infolge der im Radius Vektor liegenden Kräfte im Ganzen zunimmt. Ebenso lässt sich für andere Fälle, in denen die Lage der Apsidenlinie die ist, wie sie die Fig. 40, 41, 42 darstellen, zeigen, dass die Excentricität sich ändert.

Ist aber die Apsidenlinie nach der Sonne hin gekehrt (Fig. 43), so werden die störenden Kräfte*) vor B_1 oder vor Neumond, und nach demselben genau gleich sein, und zwar sowohl die im Radius Vektor von A weg gerichteten, als auch die senkrecht dazu wirkenden, vor B_1 beschleunigenden, nach B_1 verzögernden Kräfte; denn dann liegt die Bahn symmetrisch um die Linie $B_1 B_3$. Die Änderungen, welche diese Kräfte nach dem in den genannten Paragraphen Gefundenen in der Excentricität hervorrufen, werden sich dann aufheben. Gleiches gilt von den vor und nach B_3 (Opposition, Vollmond) wirkenden Kräften. — Dies ergibt sich so: „Die Kraft ist über B_1 und B_3 dieselbe wie die in den entsprechenden Punkten unter B_1 und B_3 , da die störende Kraft der Entfernung vom Centalkörper proportional ist; ebenso sind die Kräfte im Radius Vektor und senkrecht dazu von gleicher Grösse. Die ersteren wirken bei B_1 von A fort, und zwar vor B_1 während der Mond nach dem Perigäum geht, nach B_1 aber während er nach dem Apogäum geht, und erzeugen daher nach 59 gleiche und entgegengesetzte Wirkungen in Bezug auf die Excentricität. Ebenso heben sich die Wirkungen der bei B_3 im Radius Vektor liegenden Kräfte auf. 68 lehrt weiter, dass auch die Kräfte senkrecht zum Radius Vektor, die ebenfalls zu beiden Seiten von B_1 wie B_3 gleich sind, die Excentricität im ganzen unverändert lassen.“ — Unsere Bahn soll stets dieselbe Excentricität behalten; wir sehen, dies wird eintreten, wenn wir annehmen, dass die Apsidenlinie durch die Sonne geht. Ist aber das Perigäum oder Apogäum zur Sonne hin gewendet?

Dazu müssen wir beachten, dass doch, wenn die Apsidenlinie immer durch die Sonne gehen soll, diese Linie eben so schnell wie die Sonne vorrücken muss. Wir müssen deshalb diejenige Lage der Apsidenlinie wählen, bei welcher die Kräfte ein Fortschreiten derselben verursachen werden. Ist das Perigäum zur Sonne hin gewendet, so machen die Kräfte auf beiden Seiten der Bahn die Linie der Apsiden rückläufig (siehe 51, 53, 65, 66). Diese Annahme ist also nicht zulässig. Liegt aber das Apogäum nach der Sonne zu, so werden nach denselben Paragraphen, die zu beiden Seiten der Bahn wirkenden Kräfte eine progressive Bewegung der Apsidenlinie hervorrufen. Ja, wenn wir uns für die Excentricität den gehörigen konstanten Wert gewählt denken, so wird das Fortschreiten der Linie genau gleich dem der Sonne sein (56). Ein solcher dauernder Zustand allein ist also mit unseren Kräften verträglich; letztere streben daher dahin, die Bahn in die angegebene Form zu bringen. Wir sehen daher: „Der Unterschied der Kräfte in Konjunktion und Opposition bewirkt das Bestreben der Apsidenlinie sich nach der Sonne hin zu wenden, und zwar — da das Apogäum nach der Sonne hin, das Perigäum gerade entgegengesetzt liegt — sucht dieser Unterschied die Bahn nach der Sonne zu zu verlängern, auf der entgegengesetzten Seite zusammenzudrücken, oder er will die Bahn nach der Sonne hin mehr zuspitzen oder krümmen, auf der entgegengesetzten Seite abplatteln. Man sieht, die Variation wird durch diese Störung etwas vermindert in Konjunktion und vermehrt in Opposition (siehe 96), da eben unsere Störung in Konjunktion das entgegengesetzte, in Opposition dasselbe erzeugen will wie die Variation.**“)

*) Sie sind in Fig. 38 und 39 durch Pfeile dargestellt.

**) Siehe die Bemerkung zu 91.

Man nennt diese Störung die *parallaktische Ungleichheit**); sie ändert ebenfalls des Mondes mittlere Länge. Ihr grösster Betrag ist $2' 2,1''$, um welche der wahre Ort hinter dem mittleren (im ersten Viertel) zurück oder vor ihm voraus ist im (letzten Viertel). Da nämlich die Bahn nach der Sonne zu stärker gekrümmt wird, der grösseren Krümmung eine geringere Geschwindigkeit entspricht (siehe 96), so wird von Konjunktion an der Mond hinter dem mittleren Orte zurück sein, ein Zurücksein, das im ersten Viertel den grössten Wert erreicht hat u. s. w.

In den folgenden Abschnitten (98, 99, 100) werden wir zeigen, dass, wenn der Mond sich in einer Bahn bewegt, wie sie vorher erwähnt worden ist, deren Apsidenlinie also durch die Sonne geht, die Wirkungen von anderen noch nicht erwähnten störenden Kräften der Apsidenlinie eine beträchtliche fortschreitende Bewegung erteilen werden. Die hier betrachteten Kräfte, welche die parallaktische Ungleichheit erzeugen, brauchen daher nur ein geringeres Fortschreiten der Apsidenlinie hervorzurufen, welches zu dem, von den später zu behandelnden Kräften erzeugten hinzugefügt, ein Fortschreiten ergibt derart, dass die Linie der Apsiden stets nach der Sonne gerichtet ist, ein Fortschreiten also, das mit der scheinbaren Bewegung der Sonne gleichen Schritt hält.

Die betrachteten Kräfte sollen also nur eine geringere progressive Bewegung erzeugen. Nach 56 sind die Wirkungen kleiner, wenn die Excentricität grösser ist. Dieselben Kräfte haben nur einen Teil der fortschreitenden Bewegung der Apsidenlinie zu erzeugen; damit dies geschieht, muss die Excentricität der Bahn grösser angenommen werden, und zwar grösser als man sie hätte annehmen müssen, wenn die hier behandelten Kräfte das ganze Fortschreiten hätten bewirken sollen. Durch das Dazukommen der später zu betrachtenden Kräfte wird also bewirkt, dass für die Excentricität der Bahn ein grösserer (konstanter) Wert genommen werden muss, dass die Bahn mehr zugespitzt ist, als wenn diese Kräfte nicht vorhanden wären. Wenn dann die Apsidenlinie fortschreitet, so wird die Verlängerung der Bahn nach der Sonne zu noch grösser sein als früher. So wird die parallaktische Ungleichheit vermehrt durch die Wirkung der anderen störenden Kräfte.

95) Die Grösse der hier behandelten Kräfte, welche die parallaktische Ungleichheit erzeugen, ist beiläufig ungefähr $\frac{1}{135}$ von der der Kräfte, welche die Variation hervorriefen, und in 91 u. f. betrachtet wurden (die störenden Kräfte in Konjunktion und Opposition waren nach 79 das $\frac{799}{159201}$ und $\frac{801}{160801}$ fache der Anziehung der Sonne auf die Erde oder das 0,005018 und 0,004981fache; die Differenz dieser Kräfte ist das 0,000037fache derselben Anziehung; nehmen wir für die störenden Kräfte in Konjunktion wie Opposition den abgerundeten oder mittlern Wert $\frac{1}{200}$, wie wir es früher bei der Variation gethan haben, sodass also die mittlere störende Kraft $\frac{1}{200}$, die Differenz der störenden Kräfte in Konjunktion und Opposition 0,000037 ist, so ergibt sich, dass diese Differenz das $0,000037 : \frac{1}{200}$ fache oder $\frac{1}{135}$ der mittleren störenden Kraft ist); die Wirkungen beider dagegen verhalten sich nahe wie 1 : 17 (die Variation beträgt $35' 42''$, die parallaktische Ungleichheit $2' 2,1''$). Es ist das ein auffallendes Beispiel des Unterschiedes im Verhältnisse der Grössen und der Wirkungen der Kräfte; die Differenz rührt her von der verschiedenen Wirkungsweise derselben.

Die parallaktische Ungleichheit ist deshalb bemerkenswert, weil man aus ihrer Grösse das Verhältniss der Entfernungen der Sonne und des Mondes von der Erde mit grosser Genauigkeit bestimmen kann (vergleiche damit die Bemerkung am Ende der Seite).

96) Wie schon erwähnt, wird sich die hier behandelte Störung mit der in 91 u. f. behandelten Variation kombinieren. (Siehe die Anmerkung zu 134; darnach ist die wirkliche

*) Zur Erklärung des Ursprunges dieses Wortes: „Das Verhältniss der verschiedenen grossen Abziehungen in Neu- und Vollmond hängt vom Verhältnisse zwischen den Entfernungen des Mondes und der Sonne von der Erde ab; und da letzteres Verhältniss einerlei mit dem zwischen den Horizontalparallaxen der Sonne und des Mondes ist, so heisst jene Störung auch parallaktische Gleichung.“ Möbius, Elemente der Mechanik des Himmels.

Abweichung im Radius Vektor gleich der Summe der einzelnen Abänderungen.) Die Folge davon ist, dass die Mondbahn auf der der Sonne zugekehrten Seite weniger, auf der abgewendeten mehr abgeplattet sein wird, als wir in 91 und 92 fanden. Das gleichförmige Beschreiben von Flächen wird durch die jetzt behandelten Kräfte kaum beeinflusst, es wird daher der Flächensatz gelten, und es wird deshalb infolge der etwas verminderten Abplattung oder vergrösserten Krümmung in Konjunktion die Geschwindigkeit daselbst etwas kleiner ausfallen oder die Variation wird in der Nähe der Konjunktion etwas vermindert, und in der Nähe der Opposition etwas vermehrt.

97) Die Variation hängt nicht von der Excentricität ab.

Zeigen wir jetzt, dass die Unregelmässigkeit, Variation genannt, in irgend einer elliptischen Bahn ebenso wie in einer Kreisbahn erzeugt wird, dass also die störenden Kräfte in jeder Bahn die Geschwindigkeit in den Syzygien vergrössern, in den Quadraturen vermindern, oder die Bahn in den Syzygien abplatteten und in den Quadraturen zuspitzen.

Der Mond, so werde angenommen, wolle die Kreisbahn $B_1 b_2 B_3 b_4$ beschreiben (Fig. 44); treten die störenden Kräfte hinzu, so wird er eine andere Bahn beschreiben müssen, wie wir früher gesehen haben, nämlich das Oval $B_1 B_2 B_3 B_4$, welches aber den Kreis in B_1 und B_3 berührt. Diese Kräfte wirken in B_1 und B_3 von A fort, in B_2 und B_4 nach A hin; sie machen die Anziehung der Erde in B_1 und B_3 kleiner, in B_2 und B_4 grösser als sie sonst, ohne Störung, gewesen wäre. Die auf dem Radius Vektor senkrechte störende Kraft macht die Geschwindigkeit in B_2 kleiner, als sie sonst in b_2 gewesen sein würde. Hätte der Mond in B_1 dieselbe Geschwindigkeit wie bei der Bewegung im Kreise, so würde durch die infolge der grösseren Anziehung erzeugte starke Krümmung und durch die verminderte Geschwindigkeit in B_2 der Mond viel näher nach A kommen als der Punkt B_3 ist. Allein die Geschwindigkeit ist in B_1 , mit Berücksichtigung der Störung, viel grösser als ohne Störung in der Kreisbahn. Daher wird infolge dieser grösseren Geschwindigkeit in B_1 , trotz der grösseren Anziehung und der geminderten Geschwindigkeit in B_2 der Mond sich über b_2 hinaus bis B_2 von A entfernen und infolge der grösseren Krümmung genau durch B_3 gehen. Mit der in B_3 erlangten grossen Geschwindigkeit wird dann der Körper bis hinaus zu B_4 und von da nach B_1 kommen.*)

Nehmen wir ferner an, der Mond hätte ohne Störung die Ellipse $B_1 b_2 B_3 b_4$ (Fig. 45) beschreiben wollen, so wird die Wirkung der störenden Kräfte dieselbe sein wie vorher. Wie vorher würde die geminderte Geschwindigkeit und grössere Anziehung in B_2 den Mond näher an A bringen als B_3 ist. Da die Geschwindigkeit in B_1 aber grösser ist als die ohne Störung in der Bahn $B_1 b_2 B_3 b_4$, so wird der Körper über b_2 hinaus bis B_2 gehen, und die grössere Anziehung und verminderte Geschwindigkeit in B_2 werden seine Bahn dann so krümmen, dass er die ursprüngliche elliptische Bahn gerade in B_3 berühren kann u. s. w. Die ganze Erklärung beruht im einen wie im anderen Falle auf der Differenz der Kräfte, die ohne Störung und mit Berücksichtigung der Störung vorhanden sind. In jedem Falle ist die Wirkung die, die Bahn an den Stellen der Syzygien B_1 und B_3 flacher zu machen.

B. Störungen, die von der Excentricität abhängen.

Bisher haben wir die Störungen nur betrachtet, so weit sie vom Stande der Sonne abhängen. Allein es giebt auch Störungen, welche davon abhängen, ob der Mond sich im Perigäum oder Apogäum, d. h. im einen oder andern Endpunkte der grossen Achse seiner Bahn, und ferner, ob er sich in einem Endpunkte der kleinen Achse befindet. Von Perigäum oder Apogäum lässt sich nur reden, wenn der Centalkörper nicht im Mittelpunkte der Bahn steht, also letztere eine Excentricität hat. So haben wir die Störungen noch zu behandeln, die von der Lage des Perigäums oder Apogäums oder von der Excentricität abhängen, und

*) B_1 u. B_3 sind Syzygien. Die störenden Kräfte sind die in Fig. 31.

die natürlich von den bisher schon behandelten Kräften erzeugt werden. Sprechen wir da zuerst von der Bewegung des Perigäums. Nehmen wir das Perigäum oder, was dasselbe ist, die Apsidenlinie in bestimmten Lagen an.

a. Bewegung des Perigäums oder der Apsidenlinie.

98) Fällt die Linie der Apsiden mit der der Syzygien zusammen, so verursachen die störenden Kräfte ein Vorschreiten der Apsidenlinie.

Das Perigäum B_1 (Fig. 43) sei der Sonne zugekehrt. Betrachten wir zunächst die Wirkungen der im Radius Vektor liegenden Kräfte*). In der Nähe von B_1 ist die störende Kraft von A fort gerichtet; die Apsidenlinie geht folglich, nach 51, rückwärts. Ist der Mond in der Nähe von B_3 , d. h. nahe beim Apogäum, so ist die störende Kraft ebenfalls von A weg gerichtet, und die Apsidenlinie bewegt sich deshalb nach 54 direkt. Nunmehr fragt es sich: Ist die direkte oder die retrograde Bewegung die grössere? Da jetzt der störende Körper weit absteht, so folgt aus 82, dass die störende Kraft in B_3 sich zu der in B_1 verhält wie $AB_3 : AB_1$. AB_3 ist grösser als AB_1 , folglich auch die störende Kraft in B_3 grösser als in B_1 (auch die gesamten von A weg gerichteten störenden Kräfte in der Umgebung von B_3 sind grösser als alle bei B_1 , die die retrograde Bewegung erzeugen); deshalb ist die erstere Kraft viel grösser als diejenige Kraft, welche eine progressive Bewegung erzeugen würde, die gleich ist dem bei B_1 hervorgerufenen Rückschreiten. Es überwiegen die Wirkungen der störenden Kraft bei B_3 und die Apsidenlinie schreitet vorwärts. Die nach A hin gerichteten störenden Kräfte in der Nähe von B_2 und B_4 erzeugen kaum eine Wirkung, da die letztere auf den beiden Seiten von B_2 und B_4 von gerade entgegengesetzter Art ist und die Kräfte nahe gleich sind, weil B_2 und B_4 gleich weit vom Centalkörper entfernt sind; es liegen nämlich die Punkte links von B_2 und B_4 in der Nähe des Perigäums, die rechts davon in der Nähe des Apogäums (50, 53; siehe hierzu auch 55).**)

99) Wirkungen der auf dem Radius Vektor senkrechten Kraft. Die von A weg gerichtete störende Kraft ist in den Punkten B_1 und B_3 selbst die einzige störende Kraft, nicht aber in der Nähe dieser Punkte; es ist da auch noch eine Kraft senkrecht zum Radius Vektor vorhanden. Diese beschleunigt den Mond, während er sich B_1 nähert, und nach 65 wird deshalb, da B_1 der Ort des Perigäums ist, die Apsidenlinie rückwärtsgehen; entfernt sich der Mond von B_1 , so verzögert ihn die Kraft, und die Apsidenlinie geht nach 66 wieder rückwärts. Nähert sich aber der Mond B_3 , dem Orte des Apogäums, so beschleunigt ihn die Kraft senkrecht zum Radius Vektor, und es bewegt sich die Apsidenlinie nach 65 direkt. Ebenso bewegt sie sich direkt nach dem Durchgange durch B_3 (66), wo die Kraft den Mond verzögert. Wiederum fragt es sich, ob die bei B_3 erzeugte progressive Bewegung grösser ist, als die bei B_1 erzeugte retrograde.

Wie schon in 98 erwähnt wurde, ist die störende Kraft, da sie der Entfernung vom Centalkörper proportional ist, von B_2 bis B_3 und von B_3 bis B_4 grösser als die von B_4 bis B_1 und B_1 bis B_2 ; dieselbe wirkt im ersten Falle längere Zeit als im zweiten, weil der Mond von B_2 bis B_3 bis B_4 eine längere Zeit braucht als von B_4 bis B_1 bis B_2 , was sich aus dem Gesetze ergibt: Der Radius Vektor beschreibt in gleichen Zeiten gleiche Flächenräume.

Nun ist die Grösse des Vor- oder Rückschreitens ganz von dem Verhältnisse abhängig, in welchem die durch die störende Kraft erzeugte Geschwindigkeit zu derjenigen steht, die der Mond an der betreffenden Stelle hat; da die Geschwindigkeit beim Durchgange von B_2 über B_3 bis B_4 kleiner ist, als die beim Durchlaufen der Strecke B_4 über B_1 bis B_2 , und da

*) Die Kräfte sind wieder die in Fig 31.

***) Verhielten sich die von A weg gerichteten störenden Kräfte umgekehrt wie die Quadrate der Entfernungen, so wäre das Resultat ganz dasselbe, als wenn man die Anziehung von A in gegebenem Verhältnisse geändert oder die Masse von A verkleinert hätte; durch letzteres würden freilich auch die Kräfte bei B_2 und B_4 geändert werden, aber da diese keine Wirkung auf die Apsidenlinie hervorbringen, so dürfte man in der That die Anziehung von A im ganzen verkleinert denken. Dann aber würde der Mond stets dieselbe Bahn, also eine Bahn beschreiben, deren Apsidenlinie sich nicht ändert.

im ersten Falle, nach dem soeben Behandelten, die Kraft stärker und länger einwirkt als im zweiten Falle, so wird die von der Störung erzeugte Geschwindigkeit im Vergleich zu der Geschwindigkeit an der betreffenden Stelle im ersten Falle viel grösser sein, als das Verhältnis dieser Geschwindigkeiten im zweiten Falle. Es wird deshalb das Vorschreiten das Rückschreiten überwiegen. Die Kraft senkrecht zum Radius Vektor erteilt also der Apsidenlinie ebenfalls eine progressive Bewegung.

100) Wenn demnach das Perigäum der Sonne zugekehrt ist, so führt die Apsidenlinie im ganzen eine direkte Bewegung aus. Dieselbe Schlussweise, wie in den vorherigen Paragraphen, lässt sich in jeder Hinsicht auch dann anwenden, wenn das Perigäum von der Sonne weg gewendet ist. Die störenden Kräfte im Radius Vektor, wie die senkrecht dazu, bewirken wieder eine progressive Bewegung der Apsidenlinie.

101) Die Apsidenlinie fällt mit der Linie der Quadraturen zusammen; die störenden Kräfte verursachen ein Rückschreiten der Apsidenlinie.

Es sei die Apsidenlinie senkrecht zur Verbindungslinie von Erde und Sonne (Fig. 46). Die störende Kraft im Radius Vektor ist jetzt in den beiden Apsiden zur Erde hin gerichtet und veranlasst deshalb nach 50 und 52 ein Fortschreiten der Apsidenlinie, während der Mond in der Nähe des Perigäums, und ein Rückschreiten, während er nahe dem Apogäum ist. Nun ist die störende Kraft der Entfernung von der Erde proportional; daher ist sie in der Nähe des Apogäums grösser als im Perigäum, folglich die Wirkung im ersten Falle grösser als im letzteren, d. h. die retrograde Bewegung der Apsidenlinie ist grösser als die progressive. Die störenden Kräfte in den Syzygien B_1 und B_2 erzeugen kaum eine Wirkung; es gilt hier dasselbe, was vorher, in 98, von den in B_2 und B_4 wirkenden Kräften gesagt worden ist.

102) Betrachten wir die Kräfte senkrecht zum Radius Vektor. Aus früherem ergibt sich, dass dieselben den Mond verzögern, während er sich einer Apside nähert (von B_3 bis B_4 z. B.), und ihn beschleunigen, wenn er sich von einer solchen entfernt. Aus 65 und 66 folgt dann, dass die Apsidenlinie, wenn der Mond in der Nähe des Perigäums ist, vorschreitet, aber in der Nähe des Apogäums rückschreitet. Denn, nach dem Passieren von B_4 beschleunigt die Kraft, die Apsidenlinie bewegt sich daher direkt (65), vor B_4 verzögert die Kraft, die Apsidenlinie bewegt sich wieder direkt (66); entsprechendes erhält man für die Umgebung von B_2 . Wendet man dieselbe Schlussweise an, wie in 99, so ergibt sich, dass das Rückschreiten das Vorschreiten überwiegt. Dieses Resultat, im Verein mit dem in 101 gefundenen, lässt erkennen, dass die Apsidenlinie infolge der behandelten Kräfte bedeutend zurückgeht.

103) In 56 wurde erwähnt, dass die Wirkungen der Kräfte grösser werden, wenn die Excentricität kleiner wird. Dies gilt hier nicht. Wird die Excentricität kleiner, so wird freilich die Bewegung der Apsidenlinie grösser, wie es eben in 56 angegeben ist. Allein die störende Kraft hängt von der Excentricität ab, ist z. B. die Excentricität Null, so ist auch die Wirkung der störenden Kraft Null. Die wirklich in Betracht kommende störende Kraft ist ja die Differenz der Kräfte in Perigäum und Apogäum, und die Kräfte selbst verhalten sich wie die Entfernungen vom Centalkörper, also hier wie die Entfernungen des Peri- und Apogäums von der Erde; letztere sind gleich, wenn die Excentricität Null ist, folglich sind es dann auch die störenden Kräfte, und ihre Differenz ist Null. Überhaupt aber ist die störende Kraft — weil sie die Differenz der Kräfte in Peri- und Apogäum ist, und weil diese wieder den Entfernungen von der Erde proportional sind — selbst der Differenz dieser Entfernungen, d. h. der Excentricität proportional. Bei kleiner Excentricität ist daher die störende Kraft kleiner, und infolge davon die Bewegung der Apsidenlinie langsamer als bei grösserer Excentricität. Wird also durch verminderte Excentricität allein die Bewegung der Apsidenlinie vergrössert, im Vergleich zu der bei der ursprünglichen Excentricität, so wird, infolge der gleichzeitig verringerten störenden Kraft, die Bewegung langsamer werden. Die Vermehrung und Verminderung der Bewegung heben sich auf; die Bewegung

der Apsidenlinie bleibt auch bei sich ändernder Excentricität nahe dieselbe wie früher bei ungeänderter.

104) Die Apsidenlinie geht im ganzen vorwärts, da ihre retrograde Bewegung kleiner ist als die progressive.

Für die Bewegung des Perigäums hat sich aus dem Bisherigen das Folgende ergeben: Geht die Apsidenlinie durch die Sonne, so erteilen ihr die störenden Kräfte eine progressive Bewegung; steht sie senkrecht zur Verbindungslinie von Sonne und Erde, so wollen dieselben Kräfte die Apsidenlinie rückwärts bewegen. Es lässt sich nun denken, dass es zwischen den genannten beiden Lagen eine solche Lage der Apsidenlinie geben wird, in welcher die störende Kraft gar keine Wirkung ausübt. Von Interesse ist es nun, zu untersuchen, ob das erwähnte Vorschreiten das Rückschreiten an Grösse übertrifft.

Betrachten wir zunächst die Kräfte senkrecht zum Radius Vektor. Die in 99 betrachtete Kraft dieser Art (dort war die Apsidenlinie nach der Sonne gerichtet, Fig. 43) ist genau gleich der in 102 behandelten (wo die Apsidenlinie senkrecht zur Linie Sonne—Erde stand, Fig. 46), denn die störende Kraft ist dem Abstände vom Centalkörper proportional, und diese Abstände sind bei beiden Bahnen gleich, also auch die beschleunigende Kraft von B_4 bis B_1 in 99 genau gleich der verzögernden von B_3 bis B_4 in 102, die verzögernde von B_1 bis B_2 in 99 gleich der beschleunigenden von B_4 bis B_1 in 102 u. s. f. Demnach ist das von jener Kraft erzeugte Vorschreiten der Apsidenlinie, falls letztere durch die Sonne geht, gleich dem Rückschreiten, welches die Kraft erzeugt, wenn die Apsidenlinie senkrecht ist zur Verbindungslinie von Sonne und Erde. Die Kraft senkrecht zum Radius Vektor kann also als eine solche betrachtet werden, die im ganzen keine Wirkung auf die Bewegung der Apsidenlinie ausübt (abgesehen von einer indirekten, von der wir später sprechen werden). Wäre also bei einem Mondumlaufe die Apsidenlinie durch die Sonne gegangen, bei einem andern senkrecht zu dieser Lage gewesen, so würde die in Rede stehende Kraft keine Änderung der Lage der Apsidenlinie herbeigeführt haben.

Es kommt nun noch in Frage die im Radius Vektor von der Erde weg (98) und zur Erde hin gerichtete Kraft (101). Aus 79 folgt, dass die von der Erde weg wirkende Kraft in 98 nahezu $\frac{1}{200}$ ist von der Anziehung der Sonne auf die Erde. 80 aber ergibt, dass die zur Erde hin gerichtete störende Kraft in 101 nur $\frac{1}{400}$ der Anziehung auf die Erde ist. Die erstere störende Kraft ist also fast das Doppelte der letzteren und demnach wiegt auch die Wirkung der ersteren vor, d. h. die Apsidenlinie wird infolge der Wirkung der im Radius Vektor liegenden Kräfte im ganzen vorwärtsgehen (98).

In der That beträgt das Vorschreiten der Apsidenlinie, wenn sie durch die Sonne geht, ungefähr 11° bei jedem Mondumlauf, das Rückschreiten dagegen, wenn die Apsidenlinie senkrecht zur Verbindungslinie von Erde und Sonne steht, nur etwa 9° bei jedem Mondumlauf.

105) Das Vorschreiten der Apsidenlinie wird noch vergrössert durch die Änderung der Wirkungsdauer der verschiedenen Kräfte, die von der Bewegung der Sonne herrührt.

Die progressive Bewegung der Apsidenlinie ist beträchtlich grösser als die bisherigen Betrachtungen erwarten lassen, und zwar aus folgenden Gründen:

106) Erstens. Die Erde bewegt sich um die Sonne oder letztere scheint sich um die Erde zu bewegen in derselben Richtung, in der sich der Mond bewegt. Dies verlängert die Zeit, in welcher die Sonne in irgend einer Weise auf den Mond wirkt, aber es verlängert diese Zeit mehr, wenn der Mond sich langsam, als wenn er sich schnell bewegt, da der Mond, der sich ja überhaupt schneller als die Sonne bewegt, im ersten Falle länger in der Nähe der Sonne bleibt.

So ist des Mondes Winkelbewegung im Perigäum das 14fache von der der Sonne, im Apogäum dagegen nur das 10fache. Bewegt sich also die Sonne um 1° fort, so rückt der Mond im Perigäum um 14° weiter oder entfernt sich um 13° von der Sonne, von der Erde aus gesehen. Die ganze Bewegung des Mondes beträgt 14° , die in Bezug auf die Sonne 13° , sodass der Mond mit $\frac{13}{14}$ seiner ganzen Bewegung an der Sonne vorübergeht, während er im Apogäum nur mit $\frac{9}{10}$ derselben der Sonne vorausseilt. Da also der Mond sich nur mit $\frac{13}{14}$ seiner ganzen Bewegung von der Sonne entfernt, so beträgt die Zeit, in welcher er sich um einen gewissen Winkel von der sich bewegenden Linie der Syzygien entfernt, oder in welcher der Winkel zwischen Sonne und Mond um ein Bestimmtes wächst, $\frac{14}{13}$ von der Zeit, in welcher er denselben Winkel durchlaufen hätte, wenn die Sonne nicht in Bewegung gewesen wäre. In der Nähe des Apogäums ist die erstere Zeit $\frac{10}{9}$ von der zuletzt erwähnten. Die letztere Zahl $\frac{10}{9}$ ist grösser als die frühere $\frac{14}{13}$, d. h. die störende Kraft wirkt im Apogäum (infolge der scheinbaren Bewegung der Sonne) längere Zeit ein als im Perigäum; daher wird auch die Wirkung dieser Kräfte (durch die Bewegung der Sonne) im Apogäum in stärkerem Masse vergrössert als im Perigäum. Die wirkliche, resultierende Bewegung der Apsidenlinie wird aber doch erzeugt durch den Überschuss der Wirkungen im Apogäum über die Wirkungen im Perigäum; daher wird also ein geringer Zuwachs der Wirkung im Apogäum, wie er hier vorhanden ist, die wirkliche Bewegung der Apsidenlinie merklich vergrössern.

107) Zweitens. Ist die Apsidenlinie zur Sonne hin gerichtet, so besteht die Gesamtwirkung der Kräfte darin, diese Linie fortschreiten zu machen, d. h. in derselben Richtung zu bewegen, in der die Sonne fortgeht. Nun bewegt sich die Sonne während eines Mondumlaufs ungefähr 27° fort, die Apsidenlinie im selben Sinne, nach 104, um 11° . Die Sonne entfernt sich daher nur um $27^\circ - 11^\circ = 16^\circ$ von der Apsidenlinie während eines Mondumlaufes. Dadurch, dass beide im selben Sinne sich bewegen, wird also bewirkt, dass die Apsidenlinie längere Zeit in der Nähe der Sonne bleibt, als es der Fall sein würde, wenn die Apsidenlinie sich nicht bewegte; es wird daher auch die Kraft längere Zeit in derselben Weise einwirken.

Steht die Apsidenlinie senkrecht zur Verbindungslinie von Sonne und Erde, so besteht die Gesamtwirkung der Kräfte in einer rückläufigen Bewegung der Apsidenlinie, deren Grösse nach 104 etwa 9° für einen Mondumlauf beträgt. In dieser Zeit schreitet die Sonne im entgegengesetzten Sinne um 27° fort; folglich vergrössert sich in diesem Falle der Winkel zwischen Sonne und Apsidenlinie in jeder Mondrevolution um $27^\circ + 9^\circ = 36^\circ$, und die Apsidenlinie verlässt daher schnell diese Lage, schneller als wie ohne störende Kräfte. Die Zeit, in welcher die Kräfte auf diese Lage einwirken, ist daher kürzer, die Wirkung selbst geringer als es der Fall sein würde, wenn die Apsidenlinie sich nicht fortbewegte. In der ersten Lage, wo die Apsidenlinie durch die Sonne ging, ist also die Wirkung der Kräfte länger dauernd als in der zweiten Lage. Weil nun weiter die Apsidenlinie aus der ersten Lage sich langsam, aus der zweiten schnell entfernt, so wird die erste Lage vorherrschen. Aus beiden Gründen ergibt sich ein Überwiegen derjenigen Wirkung, die in der zuerst behandelten Lage der Apsidenlinie erzeugt wird. Beide Umstände, das längere Verweilen der Apsidenlinie in der ersten Lage wie das Vorherrschen dieser Lage, vergrössern das Fortschreiten der Apsidenlinie.

108) Durch die vereinten Wirkungen der in 106 und 107 angegebenen Ursachen wird das Vorschreiten der Apsidenlinie nahe doppelt so gross wie dasjenige, das sich herausstellen würde, wenn die verschiedenen Teile der Bahn der störenden Kraft der Sonne während der auf einander folgenden Mondumläufe gleichmässig ausgesetzt wären.

109) Im ganzen führt also die Apsidenlinie eine progressive Bewegung aus (das Perigäum schreitet vor), und zwar, wie Rechnung und Beobachtung übereinstimmend zeigen, mit einer Winkelgeschwindigkeit, infolge deren sie während eines jeden Mondumlaufes im Durchschnitt 3° beschreibt, und welche sie demnach in nahezu 9 Jahren eine volle Umdrehung ausführen

lässt. Freilich bewegt sich manchmal Monate hintereinander die Apsidenlinie direkt oder monatelang retrograd, sodass ihre Bewegung eine sehr unregelmässige ist, aber, wie gesagt, im ganzen ist doch das Vorschreiten grösser als das Rückschreiten, und zwar um durchschnittlich 3° für jeden Mondumlauf. Die Bewegung der Apsidenlinie im allgemeinen ist seit den ältesten Zeiten der Astronomie bekannt.*)

b. Störungen der Excentricität der Mondbahn.

110) Die Excentricität bleibt ungeändert, wenn die Linie der Apsiden mit der der Syzygien zusammenfällt oder auf ihr senkrecht steht.

Es gehe die Apsidenlinie durch die Sonne (Fig. 43). Bewegt sich der Mond vom Perigäum B_1 nach dem Apogäum B_3 , so ist die Kraft in Richtung des Radius Vektors bald von der Erde fort, bald zu ihr hin gerichtet; nach 59 und 57 vergrössert und verringert sich dementsprechend die Excentricität. Geht der Mond aber von B_3 nach B_1 , so sind die in diesem Teile der Bahn auftretenden störenden Kräfte genau gleich den früheren, welche von B_1 bis B_3 da waren, und zwar sind an den sich entsprechenden Punkten der Halbbahnen, welche symmetrisch zur grossen Achse liegen, die Kräfte gleich. (Diese Punkte, B_2 und B_4 , sind z. B. solche, welche zu zweien symmetrisch zur Linie der Syzygien liegen, sind vom Centalkörper gleich weit entfernt, weshalb auch die störenden Kräfte auf der einen Bahnhälfte eben so gross wie die für die entsprechenden Punkte der andern sind.) Nach 58 bringen dann diese Kräfte genau entgegengesetzte Wirkungen hervor. Im ganzen haben also die Kräfte, die in Richtung des Radius Vektors wirken, keinen Einfluss auf die Excentricität.

Betrachten wir die Kräfte senkrecht zum Radius Vektor. Dieselben vergrössern die Geschwindigkeit des Mondes, wenn er von B_4 nach B_1 , und machen sie um eben so viel kleiner, wenn er von B_1 nach B_2 geht. Nach 68 wird dann die Excentricität wachsen, während sich der Mond von B_4 nach B_1 bewegt, und um ebensoviel abnehmen während der Bewegung von B_1 nach B_2 .

In gleicher Weise ergiebt sich, dass die Excentricität während der Bewegung von B_2 nach B_3 kleiner, von B_3 nach B_4 aber um ebensoviel grösser wird. Auch die Kraft senkrecht zum Radius Vektor hat im ganzen keinen Einfluss auf die Excentricität.

Es ergiebt sich also, dass die Excentricität der Bahn durch die störenden Kräfte im ganzen nicht geändert wird, wenn die Apsidenlinie durch die Sonne geht.

111) Die Apsidenlinie stehe senkrecht zur Linie der Syzygien (Fig. 46). Auch jetzt bleibt die Excentricität trotz der störenden Kräfte im ganzen ungeändert. Es ist nämlich auch jetzt $B_3 B_4 = B_4 B_1$ und $B_1 B_2 = B_2 B_3$. Da ferner die störende Kraft der Entfernung von der Erde proportional ist, und diese Entfernungen für die Punkte zwischen $B_4 B_1$ und $B_1 B_2$ gleich denen der Punkte zwischen $B_3 B_4$ und $B_2 B_3$ sind, so sind auch die Kräfte auf den Strecken $B_4 B_1$ und $B_1 B_2$ gleich denen längs $B_3 B_4$ und $B_2 B_3$, sodass sich die Wirkungen derselben auf verschiedenen Seiten von Perigäum und Apogäum, wie früher, aufheben.**)

112) Ist die Linie der Syzygien gegen die der Apsiden geneigt, und geht der Mond früher durch letztere, als durch die erstere, so wird die

*) Im Laufe der von der Sonne scheinbar ausgeführten Bewegung wird die Apsidenlinie freilich in alle möglichen Lagen zur Sonne kommen, allein die Wirkungen in den hier behandelten Lagen sind die überwiegenden; giebt es ja zwischen beiden, nach 104, solche Lagen, in denen gar keine Wirkung auf die Apsidenlinie stattfindet.

**) Die Kraft im Radius Vektor ist bei B_4 und B_2 nach der Erde hin gerichtet und erzeugt auf der Strecke von B_4 bis B_1 , nach 57, ein Vermindern der Excentricität, von B_2 bis B_3 eine eben so grosse Zunahme (58); die von der Erde fort gerichtete störende Kraft bei B_1 und B_3 vergrössert die Excentricität von B_1 bis B_2 und verkleinert sie um dasselbe von B_3 bis B_4 . Die Kraft senkrecht zum Radius Vektor wird nach 68 von B_3 bis B_4 die Excentricität verkleinern, von B_4 bis B_1 , nach 67, um dasselbe vergrössern, ebenso von B_1 bis B_2 vergrössern, von B_2 bis B_3 um ein Gleiches verkleinern.

Excentricität bei jedem Mondumlauf kleiner oder grösser, je nachdem die Linie der Syzygien auf der einen oder andern Seite der zur Apsidenlinie senkrechten Geraden liegt.

Nehmen wir die Apsidenlinie geneigt an gegen die Linie AC der Syzygien (wie in Fig. 39*); der Mond erreiche das Perigäum eher wie das Syzygium. Jetzt halten sich die Wirkungen der störenden Kräfte nicht mehr das Gleichgewicht.

Ist der Mond in der Nähe von B_4 und B_2 , so ist die störende Kraft in Richtung des Radius Vektor nach der Erde hin gerichtet; da in B_4 der Mond sich nach dem Perigäum hin, in B_2 von ihm fort bewegt, so wird nach 58 und 57 die Excentricität in B_4 vergrössert, in B_2 vermindert. Nun erfolgt die Bewegung bei B_2 langsam, die störende Kraft kann also längere Zeit einwirken; ferner ist diese Kraft in B_2 grösser als in B_4 , da B_2 weiter von A entfernt ist als B_4 , und die störenden Kräfte sich wie die Entfernungen von A verhalten. Daher überwiegt die Wirkung in B_2 , und infolge der vereinten Einwirkungen bei B_4 und B_2 wird deshalb die Excentricität im ganzen abnehmen.

In B_1 und B_3 ist die Kraft in Richtung des Radius Vektor von der Erde fort gerichtet. In B_1 bewegt sich der Mond vom Perigäum fort, in B_3 nach ihm hin; nach 59 wird dann infolge der störenden Kraft die Excentricität in B_1 zunehmen, in B_3 kleiner werden. Wieder erfolgt die Bewegung in B_3 langsamer, in B_1 schneller oder die Kraft wirkt längere Zeit in B_2 als in B_1 ; B_3A ist grösser als B_1A , daher die Kraft in B_3 die grössere. Beides bewirkt, dass die Wirkung in B_3 vorwiegt; die vereinigten Wirkungen in B_1 und B_3 bringen also eine Verminderung der Excentricität hervor. Dieses Ergebnis mit dem vorigen zusammen lehrt, dass die gesamten Kräfte in Richtung des Radius Vektor die Excentricität im ganzen kleiner zu machen bestrebt sind.

Die Kraft senkrecht zum Radius Vektor verzögert den Mond von B_1 bis B_2 . Da nun der erste Teil des Bahnstückes B_1B_2 nahe dem Perigäum, der übrige Teil nahe dem Apogäum liegt, oder als in der Nähe dieser Orte liegend angesehen werden kann, so wird die Kraft die Excentricität im ersten Teile vermindern, im zweiten vergrössern (68), und die von diesen Kräften von B_1 bis B_2 erzeugte Wirkung wird im ganzen sehr klein sein.

Ebenso ist die Gesamtwirkung der Kräfte von B_3 bis B_4 sehr gering.

Von B_4 bis B_1 aber beschleunigt die Kraft den Mond, und da der Mond hier ausserdem in der Nähe des Perigäums ist, so nimmt nach 68 die Excentricität zu. Von B_2 bis B_3 wird der Mond ebenfalls beschleunigt, doch da dies in der Nähe des Apogäums geschieht, so nimmt die Excentricität (68) längs dieser Strecke ab.

Nun ist die Wirkung der Kräfte zwischen B_2 und B_3 viel grösser als zwischen B_4 und B_1 , weil von B_2 bis B_3 die Bewegung langsamer erfolgt als von B_4 bis B_1 , also auch die Kraft länger einwirkt, und weil ferner die Punkte zwischen B_3 und B_2 von A weiter entfernt sind, als die zwischen B_4 und B_1 , und deshalb die Kraft, die ja der Entfernung von A proportional ist, im ersten Falle die grössere ist.

Die vereinte Wirkung der Kräfte senkrecht zum Radius Vektor erzeugt demnach eine Verminderung der Excentricität. Dasselbe Resultat ergab sich vorher für die Kräfte im Radius Vektor.

Die Ergebnisse zusammenfassend erhält man folgendes Resultat:

Wenn die Apsidenlinie gegen die Linie der Syzygien derart geneigt ist, dass der Mond durch die erstere früher geht als durch die letztere, so wird die Excentricität der Mondbahn bei jedem Umlaufe kleiner, falls die Linie der Syzygien, wie die Figur ergibt, links der zur Apsidenlinie in A errichteten Senkrechten liegt.

113) Es habe jetzt die Linie der Syzygien die Lage wie in Fig. 40; die Sonne stehe in C. Wieder wird die Apsidenlinie eher passiert als die der Syzygien, aber letztere später als die Gerade senkrecht zur Apsidenlinie. Entfernt sich jetzt der Mond vom Perigäum oder Apogäum, so ist die störende Kraft im Radius Vektor nach der Erde

*) Als Kräfte hat man sich natürlich nicht die in dieser Figur, sondern die von Fig. 31 zu denken.

hin gerichtet, weil jetzt z. B. in B_4 , das dem Perigäum nahe liegt, die Kraft nach A gerichtet ist. Bewegt sich der Mond nach Perigäum oder Apogäum hin, also von B_1 oder B_3 fort, oder in der Nähe dieser Punkte nach den beiden Apsiden hin, so ist die störende Kraft von der Erde weg gerichtet. Die Richtung der Kräfte ist also gerade entgegengesetzt zu der der Kräfte in Fig. 39.)*

Die Kraft senkrecht zum Radius Vektor verzögert den Mond in der Nähe des Perigäums und Apogäums, da sie von B_3 bis B_4 und von B_1 bis B_2 verzögert; auch diese Kräfte wirken gerade entgegengesetzt wie die in 112 (Fig. 39) behandelten.

Die Wirkung auf die Excentricität wird daher die entgegengesetzte der früheren (in 112) sein, d. h. die Excentricität wird bei jedem Mondumlaufe zunehmen.

114) Der Mond geht früher durch die Linie der Syzygien als durch die der Apsiden. Die Verbindungslinie AC von Erde und Sonne habe die Lagen wie in Fig. 41 und 42. Die Wirkung der Kräfte ist dann dieselbe wie in den in 112 und 113 behandelten zwei Fällen, d. h. dieselbe wie in den zur Apsidenlinie gerade entgegengesetzt liegenden Stellungen der Linie der Syzygien.

115) Zusammenfassung der Resultate von 112 bis 114.

Es bewegt sich die Erde um die Sonne oder die Sonne scheint sich um die Erde zu bewegen; die Linie der Syzygien wird demnach nacheinander wirklich alle die Lagen einnehmen, die in den behandelten sechs Fällen (Fig. 39, 40—43, 46) angegeben sind. Die Excentricität wird sich deshalb nach und nach in der Reihenfolge ändern, wie sie von 112 bis 114 erwähnt ist, und zwar:

„Steht die Sonne in der Linie der Apsiden, so ändert sich die Excentricität der Mondbahn nicht; schreitet die Sonne fort, so vermindert sich nun die Excentricität, bis die Sonne unter rechtem Winkel zur Apsidenlinie erscheint (112). In dieser letzteren Lage ändert sich die Excentricität nicht; darnach vergrößert sie sich, bis die Sonne die Apsidenlinie auf der anderen Seite erreicht, wo keine Änderung eintritt; weiterhin nimmt sie wieder ab, bis die Sonne abermals unter rechtem Winkel zur Apsidenlinie erscheint. Hier bleibt sie un geändert, und nimmt dann bis zur ersten Apside wieder zu. (Fig. 47 veranschaulicht, bei welchen Stellungen der Sonne die Excentricität konstant ist, ab- oder zunimmt.) Hiernach ist die Excentricität der Mondbahn am grössten, wenn die Apsidenlinie durch die Sonne geht, und am kleinsten, wenn sie senkrecht zur Verbindungslinie von Erde und Sonne steht.

Diese Änderung der Excentricität der Mondbahn beträgt mehr als $\frac{1}{5}$ von ihrem mittleren Werte; um jenes $\frac{1}{5}$ ist die wahre Excentricität manchmal grösser, manchmal kleiner als die mittlere. Nennt man die mittlere Excentricität 1, so ist also die grösste $1\frac{1}{5}$, die kleinste $\frac{4}{5}$, sodass die grössten und kleinsten Excentricitäten nahezu im Verhältnis von 6 : 4 oder 3 : 2 stehen.

116) Die wichtigsten Ungleichheiten in der Mondbewegung sind demnach die folgenden:

- 1) Die elliptische Ungleichheit oder Mittelpunktsgleichung (siehe 31), welche daher rührt, dass die Bahn kein Kreis ist, welche demnach auch vorhanden wäre, wenn es keine Störung gäbe.
- 2) Die jährliche Gleichung (siehe 90), welche von der Stellung der Erde in ihrer Bahn abhängt.
- 3) Die Variation (93) und parallaktische Ungleichheit (94), welche von der Stellung des Mondes in Bezug auf die Sonne abhängen.
- 4) Das Vorschreiten des Mondperigäums im allgemeinen. (Das allgemeine Resultat in 104.)

*) An dieser Fig. 39 und 40 denke man sich aber die Kräfte nach Fig. 31 angebracht. Deckt man dann die Fig. 40 auf 39, so erkennt man sofort, dass die Kräfte an den aufeinander fallenden Punkten entgegengesetzt sind.

- 5) Die Unregelmässigkeiten in der Bewegung des Perigäums, welche von der Stellung des Perigäums gegen die Sonne abhängen (109).
- 6) Das abwechselnde Wachsen und Abnehmen der Excentricität, welches von der Stellung des Perigäums gegen die Sonne abhängt (115).

Diese Ungleichheiten wurden zuerst, teilweise freilich unvollkommen, von Newton um das Jahr 1680 auseinandergesetzt.

117) Die Wirkungen der beiden letzten Ungleichheiten fasst man zusammen unter dem Namen „Evektion“. Von allen Ungleichheiten ist die Evektion die, welche den grössten Einfluss auf den Ort des Mondes hat. Infolge der Evektion erscheint nämlich die Länge des Mondes manchmal um $1^{\circ} 15'$ vergrössert oder vermindert. Diese Ungleichheit wurde von Ptolemäus um das Jahr 140 aus Beobachtungen erkannt.

118) Wir haben hier nur die vorzüglichsten Ungleichheiten betrachtet. Es giebt noch viele andere, welche hauptsächlich von kleinen Fehlern in den gemachten Voraussetzungen herrühren. Einige rühren her von den Veränderungen, welche die störende Kraft erleidet; so wird z. B. die Ungleichheit oder der Unterschied der störenden Kräfte in Konjunktion und Opposition, deren hauptsächlichste Wirkung in 94 besprochen worden ist, auch eine merkliche Ungleichheit in der Schnelligkeit des Vorschreitens der Apsidenlinie und in den Dimensionen der Mondbahn hervorbringen (in 101 am Schlusse, ebenso in 111 z. B. sind diese Kräfte als gleichgros angeommen). Ferner: die Veränderungen der von der Excentricität der Erdbahn abhängenden störenden Kraft (90) verursachen auch Veränderungen in der Grösse der Variation und Evektion; die Veränderung der in 94 behandelten Kraft bringt eine andere merkliche Wirkung hervor, die von dem Winkel abhängt, welchen der Radius Vektor des Mondes (die Verbindungslinie von Erde und Mond) mit der Apsidenlinie der Erdbahn bildet (Fig. 48). Alle diese und andere Störungen sind sehr klein, freilich immerhin doch noch so gross, dass man für astronomische Zwecke deren dreissig bis vierzig berücksichtigen muss.

119) Beschleunigung des Mondes, hervorgebracht durch die Veränderungen, welche die Excentricität der Erdbahn durch die Planeten erleidet.

Versuchen wir es noch, uns einen allgemeinen Begriff zu machen von einer Ungleichheit der Mondbewegung, welche besonders historisches Interesse hat.

Wir sagten in 89, die Wirkung der störenden Kraft sei im ganzen eine Verminderung der Schwere des Mondes gegen die Erde; in 90 erwähnten wir weiter, dass diese Wirkung grösser ist, wenn die Erde in der Nähe des Perihels ist, als wenn sie nahe beim Aphel steht. Da man nun durch genaue Untersuchungen gefunden hat, dass die halbe Summe der Wirkungen im Perihel und Aphel die Wirkung in mittlerer Entfernung um eine kleine Grösse übersteigt, die von der Excentricität der Erdbahn abhängt, so erkennt man, dass jene halbe Summe, und damit die Wirkung der störenden Kraft der Sonne um so grösser ist, je grösser die Excentricität der Erdbahn ist, vorausgesetzt, dass die mittlere Entfernung dieselbe bleibt.

Die mittlere Entfernung der Erde wird nun im Laufe der Jahrhunderte durch die Störungen der Planeten nicht merklich geändert, wohl aber wird durch letztere die Excentricität der Erdbahn bedeutend vermindert, und zwar so, dass sie nach etwa 25 000 Jahren, von wo ab wieder eine Zunahme eintritt, auf $\frac{1}{4}$ ihres gegenwärtigen Wertes gesunken sein, und die Erdbahn sich also der Kreisform mehr genähert haben wird. Mit der Excentricität wird nach dem Vorherigen auch die Wirkung der Störung der Sonne auf den Mond kleiner; da diese Wirkung in einer Verminderung der Schwere des Mondes zur Erde bestand, so wird jetzt diese Verminderung Jahrhunderte hindurch verkleinert, d. h. die Schwere des Mondes gegen die Erde wird immer grösser werden. Ist letzteres der Fall, so folgt aus 47, dass sich die Bahn des Mondes allmählich, wenn auch unmerklich, verengt oder ihr Umfang kleiner wird. Ist diese Änderung auch unmerklich, so ändert sich des Mondes Ort in seiner Bahn merklich, denn des Mondes Winkelbewegung wird, infolge des Engerwerdens der Bahn, nach 49 beständig