

beschleunigt. Diese Beschleunigung beträgt im Jahrhundert 6 Bogensekunden; um soviel wird in jedem Jahrhundert die mittlere Bewegung des Mondes schneller werden.

Noch ehe diese Störung theoretisch durch Laplace im Jahre 1787 begründet wurde, war sie den Astronomen bekannt unter dem Namen *Acceleration* der mittleren Bewegung des Mondes (säkulare Beschleunigung der Mondbewegung).

Nimmt man auch auf diese Störungsform Rücksicht, so stellt die Theorie die ältesten wie die neuesten Beobachtungen gleich gut dar.

Die Ursache, durch welche diese neue Störung erzeugt wird, bewirkt zugleich noch eine Verringerung des Fortschreitens der Apsidenlinie des Mondes.

VI. Abschnitt.

Theorie der Jupitermonde.

120) Jupiter hat vier Satelliten*), welche sich in derselben Weise um ihn bewegen, in welcher der Mond um die Erde läuft; es könnte daher scheinen, als wäre die Theorie der Unregelmässigkeiten in der Bewegung dieser Satelliten ähnlich der Theorie der Ungleichheiten in der Mondbewegung. In Wirklichkeit aber sind sie beide gänzlich verschieden voneinander.

Der vierte Satellit, dessen Bahn die grösste ist, hat eine kleine Unregelmässigkeit analog der Variation des Mondes, ebenso eine andere Unregelmässigkeit ähnlich der Evektion und eine entsprechend der jährlichen Gleichung. Die letztere beläuft sich nur auf 2 Minuten, und die andern zwei Ungleichheiten sind noch viel kleiner. Diese eben genannten Ungleichheiten sind für die drei andern Satelliten noch kleiner als bei dem vierten.

Aber diese Satelliten stören sich selbst gegenseitig so bedeutend und in einer Weise, wie es in unserem Sonnensysteme kein zweites Beispiel giebt; ausserdem sind die Bewegungen dieser Körper, wie wir später sehen werden, in höchst merkwürdiger Weise von der Gestalt Jupiters abhängig.

121) Dessenungeachtet wird die Theorie dieser Satelliten sehr vereinfacht durch die folgenden Umstände:

- 1) Man darf, ausgenommen bei den genauesten Berechnungen, die von der Sonne hervorgerufenen Störungen völlig vernachlässigen.
- 2) Die Bahnen der zwei inneren Satelliten haben keine Excentricität, die von der Störung unabhängig ist, d. h. sie zeigen keine Abweichung von der Kreisbahn, besitzen also sonst keine Excentricität, ausser etwa einer durch die Störung erzeugten.
- 3) Es besteht eine sehr merkwürdige, und wie wir noch zeigen werden, notwendige Beziehung zwischen den Bewegungen der drei ersten Satelliten.

Ehe wir jedoch mit der Theorie der drei ersten Satelliten beginnen, wollen wir einen allgemeinen Satz herleiten, der sich auf alle diese drei Körper anwenden lässt.

Betrachten wir deshalb

A. Die Bewegung zweier Satelliten, von denen der eine eine Umlaufszeit hat, die ein wenig grösser ist als die doppelte des andern.

122) Es mögen sich also zwei Satelliten um denselben Planeten (etwa Jupiter) bewegen; die Umlaufszeit des einen sei nur wenig grösser als die doppelte des andern.

Ist nun unter Einwirkung der störenden Kräfte ein dauernder Zustand möglich, so werden ihn die Kräfte herzustellen suchen. Wenn wir nun aber voraussetzen, dass der Zustand

*) Gegenwärtig kennt man deren fünf. Im folgenden soll immer nur von den vier längst bekannten gesprochen werden.

ein dauernder sein soll, d. h. bei jedem Umlaufe eine gleichartige krumme Linie beschrieben werden soll, so fragt es sich, welche Gestalt wird die Bahn haben, in der sich ein jeder Satellit dann bewegt?

123) Da die Störung, welcher ein kleiner Satellit auf einen andern, während eines Umlaufes desselben, ausübt, die Gestalt der Bahn nicht bedeutend ändern kann, so wird diese Bahn zunächst merklich elliptisch sein. (Kreisförmig kann die Bahn nicht mehr sein, wenn die Störung hinzukommt, da letztere die Geschwindigkeit ungleich ändert.) Nun haben wir vorausgesetzt, dass die Bahn dieselbe Gestalt, die sie mit Rücksicht auf die Störung angenommen hat, beibehält; wir haben mit andern Worten vorausgesetzt, dass die grosse Achse der Bahn und die Excentricität unveränderlich, daher nur die Lage der Apsidenlinie oder grossen Achse veränderlich ist.

Jetzt fragt es sich weiter: „Wenn bei jedem Umlaufe eine Kurve derselben Art beschrieben werden soll, wie gross muss man dann die unveränderliche Excentricität annehmen, und welcher Art muss dann die Änderung der Lage der Apsidenlinie sein?“ Für die in 122 erwähnten Satelliten lässt sich hierzu zunächst zeigen:

124) Die Linie der Konjunktion schreitet langsam zurück.

Es sei B_3, B_2, B_1 die Bahn des Satelliten B; C_3, C_2, C_1 die des zweiten Satelliten C (Fig. 49). Nehmen wir an, es befinde sich C in C_1 , wenn B in B_1 ist, wo A, B_1, C_1 in derselben Geraden liegen, oder es mögen B und C in B_1 und C_1 in Konjunktion stehen. Wenn die Umlaufszeit von C genau doppelt so gross als die von B ist, d. h. wenn B zwei Umläufe macht in der Zeit, in der C gerade einen ausführt, so werden beide Satelliten die nächste und so jede folgende Konjunktion wieder in B_1 und C_1 haben. Allein die Umlaufszeit von C ist ein wenig grösser als die doppelte von B, oder C bewegt sich etwas langsamer als soeben angenommen worden ist; ist also B wieder in B_1 , so ist C noch nicht bis C_1 gekommen, sondern ist zurück. Es wird deshalb auch die Konjunktionsstellung nicht in B_1, C_1 sein, sondern weiter rückwärts, da B dem Satelliten C früher schon gegenübergestanden hat; sie wird etwa in B_2, C_2 sein. Es hat auch zwischen der vorigen und der jetzigen Konjunktion keine andere stattgefunden; denn eine Konjunktion kann erst dann wieder eintreten, wenn der eine Satellit einen ganzen Umlauf vor dem andern voraus hat. Zum Beispiel: Die Monde seien in B_1, C_1 in Konjunktion. B eilt nun dem C voraus; hat B einen Umlauf ausgeführt, so ist er wieder in B_1 , C dagegen ist immer hinter B gewesen und hat jetzt noch nicht ganz einen halben Umlauf beschrieben, steht daher noch nicht ganz in Opposition. Von jetzt ab nähert sich B dem C wieder, erreicht ihn in C_2 und steht mit ihm in B_2, C_2 in Konjunktion. Findet also die erste Konjunktion in der Linie AB_1, C_1 statt, so erfolgt die zweite in der Linie AB_2, C_2 , die dritte noch weiter rückwärts, etwa in AB_3, C_3 , sodass die Linie der Konjunktion langsam rückwärts geht. Man erkennt zugleich, dass dieselbe um so langsamer rückwärts gehen muss, je näher die Umlaufszeit des einen Satelliten der doppelten des andern kommt.

125) Sind die Satelliten in der Nähe der Konjunktion, so ist ihre Entfernung am kleinsten; daher wird hier die grösste Störung stattfinden, die letztere wird überwiegen. Diese letztere hat nun Einfluss auf die Lage der Apsidenlinie; es lässt sich daher wohl denken, dass diese Lage von der der Linie der Konjunktion abhängen, dass die Bewegung beider Linien dieselbe sein muss. Ja wir werden im folgenden Paragraphen nicht nur dies, sondern auch noch das nachweisen, dass beide Linien stets zusammenfallen müssen, falls der Zustand ein dauernder sein soll. Dabei wird es sich nun fragen, welche Werte man für die unveränderlichen Excentricitäten annehmen muss, und welche Stellungen die Perijovien haben müssen, damit wirklich auch die Bewegung der Apsidenlinie dieselbe ist wie die der Linie der Konjunktion.

126) Fällt die Apsidenlinie des ersten, inneren Satelliten nicht mit der Linie der Konjunktion zusammen, so wird er zur Zeit der Konjunktion sich entweder vom Perijovium zum Apojovium oder vom Apojovium zum Perijovium bewegen. Nun ist in Konjunktion und in ihrer Umgebung die störende Kraft nach früherem vom Centalkörper weg-

gerichtet*) (sie wird vom äusseren Satelliten ausgeübt, hat dieselbe Richtung, wie die, welche die Störung der Sonne auf den Mond erzeugt, falls letzterer zwischen Sonne und Erde steht, 77); nach 59 wird diese Kraft, die als die überwiegende allein in Frage kommt, im ersten Falle ein Wachsen, im zweiten Falle ein Abnehmen der Excentricität verursachen. Da wir aber letztere als unveränderlich annehmen, so kann keiner von diesen Fällen möglich sein; d. h. der erste Satellit muss sich zur Zeit der Konjunktion im Apo- oder Perijovium selbst befinden oder die Linie der Apsiden muss mit der der Konjunktionen zusammenfallen. Beide müssen daher die gleiche rückwärtsgehende Bewegung haben.

127) Fallen aber diese Linien zusammen, so fragt es sich weiter: liegt das Apojovium oder das Perijovium des ersten Satelliten in der Richtung AB_1C_1 der Punkte der Konjunktion? Angenommen es sei das erstere der Fall. Aus 54 folgt dann, dass die im Apojovium in Richtung des Radius Vektor vom Centalkörper weggerichtete störende Kraft ein Vorschreiten der Apsidenlinie verursacht. Betrachten wir die auf dem Radius Vektor senkrechte Kraft; ehe der erste Satellit B die Konjunktion erreicht (Fig. 50), beschleunigt ihn diese Kraft, denn der zweite Satellit C, von dem doch die Kraft ausgeht, bewegt sich langsamer als B, muss sich daher näher bei dem Punkte der Konjunktion befinden als B, wie es die Figur zeigt. Das im vorigen Abschnitte Angegebene lehrt dann, dass in dieser Lage von B und C die störende Kraft B beschleunigt. Nach dem Durchgange durch die Konjunktion ist B wieder voraus, die von C ausgehende Störung verzögert B. Vor der Konjunktion bewegt sich B vom Perijovium zum Apojovium, die beschleunigende Kraft lässt nach 65 die Apsidenlinie vorschreiten; nach der Konjunktion geht B vom Apojovium fort, die verzögernde Kraft verursacht wieder ein Vorschreiten der Apsidenlinie (nach 66). Liegt also das Apojovium in Richtung der Punkte der Konjunktion, so ergibt sich, dass infolge der störenden Kraft vor und nach der Konjunktion die Linie der Apsiden fortschreitet. Wir haben angegeben, dass die Linie der Apsiden sich in gleicher Richtung mit der der Konjunktion bewege, d. h. zurückschreite; demnach kann das Apojovium des ersten Satelliten nicht in der Richtung der Punkte der Konjunktion liegen. Wir wollen vielmehr zeigen, dass dasselbe auf gerade entgegengesetzter Seite liegen muss.

128) Der innere (erste) Satellit muss sich in einer Ellipse bewegen, deren Perijovium gegen die Punkte der Konjunktion hin liegt, vorausgesetzt, dass diese Ellipse keine unabhängige Excentricität hat (das heisst, dass sie keine ursprüngliche Excentricität hat, dass vielmehr die letztere und also auch das Perijovium erst durch die störende Kraft erzeugt wird). Nehmen wir nun an, es liege das Perijovium des ersten Satelliten in der Richtung der Punkte der Konjunktion, so kommt alles in Übereinstimmung.

Die störende Kraft in Richtung des Radius Vektor, die vom Centalkörper weggerichtet ist, wird nach 51 ein Rückschreiten der Apsidenlinie veranlassen; die Kraft senkrecht zum Radius Vektor, welche vor der Konjunktion beschleunigt und nach derselben verzögert, erzeugt, wieder nach 65 und 66, ebenfalls ein Rückschreiten dieser Linie.

Hier gilt aber das, was in 56 gesagt ist, d. h. diese retrograde Bewegung wird grösser sein, wenn die Excentricität der Bahn kleiner ist; in 103 freilich galt das nicht, weil dort die störende Kraft der Excentricität proportional war. Hier aber ist die hauptsächlichste, allein in Betracht kommende, störende Kraft die in der Konjunktion auftretende, und diese hängt nicht von der Excentricität ab. Es lässt sich daher wohl ein solcher Wert der Excentricität denken, für welchen die Apsidenlinie ebenso rasch wie die Linie der Konjunktion zurückgehen wird, für welchen also beide Linien immer zusammenfallen werden. Diese Excentricität, welche die Bahn haben muss, wird sich nun auch nicht weiter ändern (nach 59 und 68); denn wenn dieselbe auch vor und nach dem Perijovium ab- und zunimmt

*) Die Kraft senkrecht zum Radius Vektor kommt nicht in Frage, da sie vor der Konjunktion beschleunigt, nach derselben verzögert, und daher gerade entgegengesetzte Wirkungen auf die Excentricität hervorbringt. Siehe auch 130.

und umgekehrt, infolge der Kraft im und senkrecht zum Radius Vektor, wie in den genannten Paragraphen angegeben ist, so heben sich doch Ab- und Zunahme auf. Die Excentricität also bleibt nun unverändert dieselbe, und die Gestalt der Bahn bleibt daher ebenfalls in jeder folgenden Revolution im allgemeinen dieselbe.

129) Wir werden später erwähnen, dass die Gestalt Jupiters eine derartige ist, dass infolge derselben allein das Perijovium des ersten Satelliten, wenn es nicht vom zweiten gestört wäre, mit einer Geschwindigkeit vorwärts bewegt würde, die nicht von der Excentricität abhängt. Die einzige Änderung, welche dadurch in unseren früheren Schlüssen hervorgebracht wird, ist die, dass wir die Excentricität der Bahn so wählen müssen, dass die vorher behandelte störende Kraft ein so grosses Rückschreiten der Apsidenlinie verursacht, welches gleich ist der Summe aus der von Jupiters Gestalt erzeugten fortschreitenden Bewegung und aus der rückschreitenden Bewegung der Linie der Konjunktion. Es muss also mit Berücksichtigung der von Jupiters Gestalt erzeugten Störung ein stärkeres Rückschreiten der Apsidenlinie da sein, wie ohne dieselbe. Dieses stärkere Rückschreiten wird aber, wie wir im vorigen Paragraphen bereits erwähnten, eintreten, sobald wir die Excentricität der Bahn kleiner annehmen.

Die einzige Wirkung der Gestalt Jupiters ist demnach eine Verminderung der Excentricität der Bahn.

130) Das Apojovium des äusseren Satelliten muss nach den Punkten der Konjunktion hin liegen.

Welches muss nun die Gestalt und Lage der Bahn des zweiten Satelliten sein? Wie früher, so findet auch hier die hauptsächlichste Störung in der Nähe der Konjunktion statt, so dass nur diese Kraft, da sie überwiegt, in Betracht zu ziehen ist. Für diesen Satelliten ist, da jetzt der störende Körper (der erste Satellit) innerhalb der Bahn des gestörten liegt, die im Radius Vektor liegende störende Kraft in der Nähe der Konjunktion zum Centralkörper hin gerichtet. Vor der Konjunktion ist der erste Satellit hinter dem zweiten zurück; die Kraft senkrecht zum Radius Vektor verzögert daher den zweiten Satelliten in dieser Stellung (nach 86). Nach 86 würde dazu freilich erforderlich sein, dass die Entfernung des ersten Satelliten vom zweiten in der Nähe der Konjunktion kleiner ist als die Entfernung des ersten vom Centralkörper. Dies ist aber hier der Fall, was sich wie folgt zeigen lässt: „Die Umlaufzeit des zweiten ist nahe doppelt so gross als die des ersten Satelliten. Nun verhalten sich die Quadrate der Umlaufzeiten wie die Kuben der Entfernungen vom Centralkörper; die Quadrate der Umlaufzeiten verhalten sich nahezu wie 1^3 zu 2^3 oder wie 1 zu 8. In demselben Verhältnisse müssen die dritten Potenzen der Entfernungen stehen. Da sich die dritten Potenzen von 7 und 11 nahezu wie 1 zu 4 verhalten, so stehen die mittleren Entfernungen vom Hauptplaneten im Verhältnis von 7 zu 11. Nennt man daher die Entfernung des ersten Satelliten vom Hauptplaneten 7, so ist dieselbe des zweiten gleich 11, demnach die Entfernung der Satelliten von einander gleich 4“. Der erste Satellit hat die Entfernung 7 vom Centralkörper und den Abstand 4 vom zweiten Satelliten; hiermit ist die obige Behauptung bewiesen: „Nach 86 wird der zweite Satellit vor der Konjunktion verzögert“. Ebenso wird die störende Kraft nach der Konjunktion den zweiten Satelliten beschleunigen.

Auf demselben Wege wie beim ersten Satelliten wird man dann finden, dass die Apsidenlinie des zweiten mit der Linie der Konjunktion zusammenfallen muss, wie in 126. Denn wäre dies nicht der Fall, so würde die nach A gerichtete Störung, falls C in der Konjunktion nach dem Perijovium oder Apojovium hin ginge, nach 58 die Excentricität vergrössern oder verkleinern; während die Kraft senkrecht zum Radius Vektor, die vor der Konjunktion verzögert, nach derselben beschleunigt, nach 68 die Excentricität verkleinern und auch vergrössern, also fast keine Wirkung hervorbringen würde, sodass die Excentricität im ganzen zunahme oder abnahme. Da sie nun konstant sein soll, so ist unsere Annahme nicht möglich; der zweite Satellit kann in der Konjunktion weder nach dem Apojovium noch nach dem Perijovium gehen, die beiden letzteren müssen mit der Linie der Konjunktion zusammenfallen. Liegt das Apojovium in Richtung der Punkte der Konjunktion, so wird die

im Radius Vektor liegende, nach A gerichtete störende Kraft ein Rückschreiten der Apsidenlinie des zweiten Satelliten erzeugen (nach 53). Desgleichen wird die Kraft senkrecht zum Radius Vektor, welche vor dem Apojovium, d. i. vor der Konjunktion verzögert, nach demselben beschleunigt, nach 65 und 66 der Apsidenlinie eine rückschreitende Bewegung geben, wie es ja auch sein muss. Darnach muss das Apojovium, da die Apsidenlinie mit der Linie der Konjunktion zusammenfallen, also auch mit ihr zurückgehen muss, in Richtung der Punkte der Konjunktion fallen. Es lässt sich dann auch denken, dass es einen bestimmten konstanten Wert der Excentricität dieser Bahn giebt, für welchen dieses Rückschreiten der Linie der Apsiden genau gleich dem der Linie der Konjunktion ist.

131) Zusammenfassung der gefundenen Resultate. Wir haben hiernach folgendes gefunden: Bewegen sich zwei Monde um einen Hauptplaneten, etwa um Jupiter, und ist die Umlaufzeit des einen nur wenig grösser als die doppelte des andern, und nimmt man an, dass die beschriebenen Bahnen immer dieselbe Gestalt behalten, dass sie also keine von der Störung unabhängige Excentricität haben, d. h. dass die Excentricität erst durch die störende Kraft hervorgerufen wird (und dann konstant bleibt), so werden die Bahnen nicht merklich von Ellipsen abweichen, und die Apsidenlinien beider Bahnen werden stets mit der Linie der Konjunktionen zusammenfallen; ferner wird das Apojovium der Bahn des zweiten und das Perijovium der Bahn des ersten Satelliten immer nach den Punkten der Konjunktion hin gewendet sein.

Wir haben auch gesehen, dass diese Bedingungen für die Lage von Perijovium und Apojovium hinreichen, wenn die Linien der Apsiden gleichmässig mit der der Konjunktionen zurückgehen sollen, sobald wir eben für die Excentricitäten die erforderlichen Werte gewählt denken, welche letzteren passend gewählten Werte sich dann auch nicht ändern werden. Wir haben also aufgefunden, unter welchen Umständen der Zustand bleibend sein wird. Diesen Zustand werden die Kräfte in der That herbeiführen wollen; er stellt uns daher die von den Kräften angestrebte Wirkung dar.

Näherte sich das Verhältnis der Umlaufzeiten mehr dem Werte 1:2, so würde die Linie der Konjunktion langsamer zurückgehen als vorher, und man müsste dann für die Excentricitäten der Bahnen grössere Werte annehmen, die aber auch konstant bleiben würden.

132) Die Perijovien liegen den vorher gefundenen gerade entgegengesetzt, wenn die Umlaufzeit des einen Satelliten sehr wenig kleiner ist als die doppelte des andern.

Wie früher, so wird man auch in dem Falle, wo die Umlaufzeit des einen Satelliten ein wenig kleiner als die doppelte des andern ist, finden, dass, wenn in jeder Revolution Bahnen derselben Gestalt, d. h. solche von konstanter Excentricität beschrieben werden sollen, notwendig die Apsidenlinien mit der Linie der Konjunktion zusammenfallen müssen; ferner dass das Apojovium des ersten wie das Perijovium des zweiten Satelliten immer nach der Seite der Punkte der Konjunktion hin liegen müssen. Entsprechend dem am Schlusse des vorigen Paragraphen Angegebenen liesse sich hier sagen, dass die Excentricitäten um so grösser genommen werden müssten, je näher das Verhältnis der Umlaufzeiten dem Werte 1:2 kommt. Je näher nämlich dieser Wert erreicht ist, um so langsamer schreitet die Linie der Konjunktion, also auch die der Apsiden, fort; damit letzteres geschieht, muss die Excentricität grösser genommen werden (56).

133) Genau dasselbe gilt, wenn die Umlaufzeiten sich sehr nahe wie 2:3 oder 3:4 verhalten. Diese Annahmen lassen sich jedoch nicht auf die Satelliten Jupiters anwenden.

134) Die Ungleichheiten im Radius Vektor, welche die störende Kraft hervorbringt, sind nahezu dieselben, wenn die ungestörte Bahn keine, wie wenn sie wirklich selbst schon eine Excentricität besitzt.

Wir haben vorher die Wirkungen der störenden Kraft in Bahnen betrachtet, deren Excentricität von der Störung abhing, d. h. die keine ursprüngliche Excentricität besaßen, welche letztere vielmehr erst durch die Störung bestimmt wurde. Es lässt sich wohl denken, dass

dieselbe Wirkung eintritt, wenn die Bahn auch nicht nahezu kreisförmig ist, sondern schon ohne Störung eine Excentricität besitzt, d. h. dass die Ungleichheiten im Radius Vektor, die Änderungen des letzteren, in beiden Fällen dieselben sein werden.

Ist die Bahn ohne ursprüngliche Excentricität, so wird durch die Störung das Perijovium nach den Punkten der Konjunktion hin gelegt (für den ersten Satelliten); ist aber die Bahn ohne Störung schon excentrisch, so hat das Perijovium eine andere durch die ursprüngliche Excentricität bestimmte Lage. In beiden Fällen aber wird, wie gesagt, die durch die Störung erzeugte Ungleichheit oder Änderung des Radius Vektor dieselbe sein; erweitert sich durch die Störung die Bahn im einen Falle nach einer Seite, so wird dasselbe auch im andern Falle geschehen.*)

Wenden wir die gefundenen Sätze auf Jupiters drei erste Satelliten an.

*) Um das Behauptete durch die Anschauung verständlich zu machen, kann man folgenden Weg einschlagen. Es sei A (Fig. 51) der Hauptplanet, AC die Linie der Konjunktion des ersten und zweiten Satelliten, BDE die elliptische Bahn des ersten Satelliten ohne Störung, D sein Perijovium. (Es ist also letzteres in der Linie der Konjunktion liegend angenommen oder es ist dasselbe, als hätten wir keine ursprüngliche, sondern eine abhängige Excentricität vorausgesetzt, welche letztere durch die Störung erst erzeugt worden wäre und somit jenes bestimmte Perijovium ergeben hätte; nach Aufhören der Störung würde fortan die Bahn mit dem Perijovium D beschrieben werden.) Zur Vereinfachung der Figur wollen wir nun annehmen, dass die Anziehung des zweiten Satelliten nur für eine bestimmte Zeit einwirke, etwa während der erste Satellit von F nach H geht. Die im Radius Vektor von A weg gerichtete Störung wird den ersten Satelliten aus der Bahn, in welcher er sich bewegt haben würde, herausziehen, sodass er die Ellipse H e b d beschreiben wird, (er wird nämlich, wenn in H die Störung aufhört, auch nach H zurückkehren,) die ähnlich BDE ist, mit dem Unterschiede, dass das Perijovium nicht mehr in D, sondern weiter rückwärts in d ist. (Gleiches ergibt sich aus 122 bis 131, wonach die Apsidenlinie, also auch das Perijovium zurückgeht.) Dass der Satellit wirklich in der Bahn H e b d einhergehen wird, lässt sich (aus 122 bis 131) folgendermassen begründen:

„Die störende Kraft senkrecht zum Radius Vektor beschleunigt vor der Konjunktion und verzögert nach derselben, ändert also die Geschwindigkeit im ganzen nicht; infolge der störenden Kraft im Radius Vektor, welche also den Satelliten nach aussen gezogen hat, ohne die Geschwindigkeit zu ändern, bewegt sich der Satellit in einer Kurve F G H ausserhalb der Ellipse FD. Hat die störende Kraft in H aufgehört, so fährt der Satellit fort von der alten Bahn abzuweichen, bis seine Geschwindigkeit (26) genügend vermindert ist und dadurch die Bahn stärker gekrümmt wird, sodass der Mond schliesslich bei E sich der alten Bahn wieder annähert und in L dieselbe schneidet, um darnach sich innerhalb der alten Bahn zu bewegen. Infolge der Vergrösserung der Geschwindigkeit nach dem Durchgange durch b (25) wird die Bahn sich wenig krümmen und daher die alte wieder, zwischen d und D, durchschneiden. Die neue Bahn liegt so, dass nicht mehr D, sondern ein weiter rückwärts liegender Punkt, etwa d dem Centralkörper am nächsten, also das Perijovium ist.

Es habe zweitens die Bahn BFE (Fig. 52) desselben Satelliten eine von der Störung unabhängige Excentricität, es sei also auch ein ursprüngliches, unabhängiges, nicht erst von der Störung erzeugtes Perijovium da; letzteres liege jetzt nicht nach den Punkten AC der Konjunktion hin, sondern in irgend einem Punkte D₁. Der Satellit wird sich in einer Kurve FGH ausserhalb der Bahn FE bewegen, wie vorher, wobei wieder angenommen ist, die störende Kraft fange in F an und höre in H auf einzuwirken. Die neue Bahn wird sich schliesslich bei e so stark krümmen, dass der Satellit sich der alten wieder annähert, sie in L schneidet — wo L nahezu entgegengesetzt mit C liegt —, dann sich innerhalb der alten Bahn bewegt, bis die Vergrösserung der Geschwindigkeit (25) bei b die Bahn so wenig gekrümmt macht, dass die alte Bahn wieder zwischen F und H geschnitten wird.

Man ziehe nun in einer bestimmten Richtung einen Radius Vektor, derselbe sei AK in der alten, Ak in der neuen Bahn und zwar im ersten Falle (Fig. 51), wie im zweiten (Fig. 52), so ist die Änderung kK dieses Radius Vektor im ersten Falle nahe dieselbe wie im zweiten (oder: wird die Bahn in einem Falle verengert oder erweitert nach einer Seite hin, so geschieht dasselbe auch im andern). Dies ist die ganze Änderung die während einer Revolution des Satelliten erzeugt wird; sie ist in den beiden behandelten Fällen, gleichviel also wo das Perijovium liegt, nahe die gleiche. Da sich das Gesagte auf jeden Umlauf anwenden lässt, so folgt, dass stets die Ungleichheit oder Änderung des Radius Vektor im zweiten Beispiele nahe dieselbe ist wie im ersten, und so sieht man, dass die durch die Störung erzeugten Ungleichheiten dieselben sind bei abhängigen wie unabhängigen Excentricitäten oder Perijovien.“

Wäre die Excentricität im zweiten Falle sehr bedeutend, so würde die Ungleichheit im Radius Vektor freilich um etwas verschieden von der im ersten Falle ausfallen, und zwar aus folgenden Gründen: 1. ist die Bahn im zweiten Falle sehr excentrisch, so ist auch die Geschwindigkeit in den einzelnen Teilen der Bahn nicht mehr nahezu die gleiche und es wird deshalb auch die Konjunktion nicht mehr wie früher, wo die Bahn wenig excentrisch war, in der Linie AC erfolgen, sondern in einer andern Linie, sodass die in beiden Fällen parallel gezogenen Radien Vektoren nicht mehr gleiche Winkelentfernungen von den Konjunktionen haben würden und deshalb der Unterschied im Radius Vektor in beiden Fällen nicht derselbe wäre; 2. werden bei

B. Anwendung des Gefundenen auf die Satelliten Jupiters.

135) Anwendung des Gefundenen auf Jupiters ersten und zweiten Satelliten.

Die Umlaufzeit von Jupiters erstem Satelliten beträgt $1^d 18^h 27^m 34^s$, die des zweiten $3^d 13^h 13^m 42^s$, die des dritten $7^d 3^h 42^m 32^s$.*) Die Umlaufzeit des zweiten ist also nur wenig grösser als die doppelte des ersten, sodass sich die vorhergehenden Untersuchungen ohne weiteres auf die Bewegung dieser zwei Satelliten anwenden lassen. In der That führt der erste Satellit 275 Umläufe aus in der Zeit, in welcher der zweite deren 137 macht.

Denken wir uns nun, die zwei Satelliten ständen in Konjunktion, so wissen wir aus dem Vorherigen, dass beide wieder in Konjunktion treten werden, wenn der zweite Satellit nahezu einen Umlauf oder der erste nahezu zwei ausgeführt hat, und zwar an Orten, die den vorigen Orten der Konjunktion nahe liegen; kurz, wir wissen, dass die Linie der Konjunktion zurückschreitet. Hat nun, vom Orte der angenommenen ersten Konjunktion aus, der erste Satellit 275 Umläufe gemacht, so hat der zweite deren 137 beschrieben, ist aber, wie der erste, wieder am Orte dieser ersten Konjunktion, oder die Linie der Konjunktion hat eine ganze Umdrehung ausgeführt. Beide stehen also wieder am selben Orte in Konjunktion, wenn der erste Satellit 275 Umläufe oder einen mehr als die doppelte Zahl der Umläufe des zweiten gemacht hat, was in $486\frac{1}{2}$ Tagen geschieht.

136) Aus früherem folgt ferner, dass, da die Bahnen der zwei ersten Satelliten keine von der Störung unabhängige Excentricität haben (also ohne Störung keine Excentricität haben würden), dieselben elliptisch sein werden, und dass die Apsidenlinie jeder Bahn wie die Linie der Konjunktion zurückschreiten, und wie letztere in $486\frac{1}{2}$ Tagen eine ganze Umdrehung ausführen wird; weiter, dass, wenn die zwei Satelliten in Konjunktion stehen, der erste stets im Perijovium, der zweite im Apojovium sich befinden wird.

137) Anwendung des früher Gefundenen auf den zweiten und dritten Satelliten.

Die Umlaufzeit des dritten Satelliten ist ebenfalls nur um wenig grösser als die doppelte des zweiten; die Linie der Konjunktion beider Körper wird also langsam zurückgehen. Da ausserdem die ursprüngliche Excentricität der Bahn des dritten Satelliten gering ist, so wird die Ungleichheit im Radius Vektor dieselbe sein wie bei ursprünglich kreisförmiger Bahn, oder diese Ungleichheit ist beim dritten Satelliten dieselbe, wie wenn seine Bahn keine ursprüngliche Excentricität, also auch kein ursprüngliches Perijovium besessen hätte. Hinsichtlich dieser Ungleichheit verhalten sich also diese zwei Satelliten zueinander wie der erste und zweite. Betrachten wir nun den zweiten und dritten Satelliten genauer

stärker excentrischer Bahn die Entfernungen zwischen den Satelliten in den Konjunktionen und folglich auch die störenden Kräfte in der Nähe der Konjunktionen nicht immer dieselben sein; es wird daher die Konjunktion auch aus diesem Grunde nicht mehr in der Linie AC erfolgen; 3. weil die Wirkung einer gegebenen Kraft bei excentrischer Bahn wesentlich verschieden ist, je nach dem Teile der Bahn, in welchem sie wirkt.

Wenn aber die Excentricität so klein ist wie in der Bahn des dritten Satelliten Jupiters oder in denen der alten Planeten, so ist der Unterschied im Radius Vektor, der durch die Störung bei der Bahn mit unabhängiger Excentricität (Perijovium) auftritt, derselbe wie er bei der Bahn dieses Körpers sein würde, falls sie eine abhängige Excentricität (Perijovium) besässe.

Das gefundene Resultat kann mit entsprechenden Rücksichten auf jede Störung angewendet werden, welche durch eine störende Kraft hervorgebracht wird, die von der Gestalt der Bahn nahezu unabhängig ist. Da dies von jeder einzelnen solchen störenden Kraft gilt, so gilt dasselbe auch, wenn mehrere derartige Kräfte gleichzeitig wirken. Man erhält so den Satz: Wenn mehrere störende Kräfte auf einen Planeten oder Satelliten einwirken, dessen Bahn eine unabhängige, d. h. eine auch ohne Störung schon vorhandene Excentricität besitzt, so ist die Ungleichheit im Radius Vektor, welche diese Kräfte zusammen erzeugen, gleich der Summe derjenigen Ungleichheiten, welche diese Kräfte einzeln hervorrufen würden in dem Falle, in welchem die Bahn eine abhängige Excentricität besässe (in welchem die Excentricität erst durch die Störung erzeugt wird).

*) Die Umlaufzeit des im Jahre 1892 entdeckten fünften (innersten) Satelliten beträgt $11^h 57^m 22.647^s$.

und beachten wir das in 130 Gesagte: „Das Apojovium des äusseren Satelliten liegt gegen die Punkte der Konjunktion hin, d. h. die Bahn des äusseren Satelliten wird nach diesen Punkten hin verlängert“. Im jetzigen Falle ist das Apojovium des dritten Satelliten unabhängig von der Störung, aber da die Ungleichheit im Radius Vektor für abhängiges wie unabhängiges Apo- oder Perijovium die gleiche ist, so wird, wenn auch das Apojovium des dritten Satelliten nicht nach den Punkten der Konjunktion hin liegt, doch die Abweichung vom Radius Vektor nach diesen Punkten hin so gross sein, wie bei abhängigem Perijovium, d. h. die Bahn des dritten Satelliten wird nach diesen Punkten hin erweitert, auf der entgegengesetzten Seite also zusammengedrückt werden. Nach 128 wird für den zweiten (jetzt inneren) Satelliten die störende Kraft des dritten das Perijovium nach den Punkten der Konjunktion von zweitem und drittem hin verlegen wollen, d. h. die Bahn des zweiten wird auf der Seite der Punkte der Konjunktion zusammengedrückt, auf der entgegengesetzten erweitert.

138) Die Linie der Konjunktion des zweiten und dritten Satelliten schreitet genau so rasch zurück, wie die des ersten und zweiten.

Wir kommen nun zu dem ausserordentlichsten Teile dieser Theorie. Wir erwähnten vorher, dass 275 Umläufe des ersten Satelliten in fast genau derselben Zeit ausgeführt werden, wie 137 des zweiten; die für die Umlaufzeiten angegebenen Zahlen lehren aber weiter, dass 137 Umläufe des zweiten wieder fast genau in derselben Zeit beendet werden, wie 68 des dritten, und dass also zu allen diesen Umläufen ein Zeitraum von $486\frac{1}{2}$ Tagen gehört. In 135 zeigten wir nun, dass nach diesen $486\frac{1}{2}$ Tagen — nach welchen ja der erste einen Umlauf mehr ausgeführt hat, als die doppelte Zahl Umläufe des zweiten beträgt — die Linie der Konjunktion eine ganze Umdrehung ausgeführt hat. In denselben $486\frac{1}{2}$ Tagen führt nun aber der zweite ebenfalls einen Umlauf mehr aus, als die doppelte Zahl der Umläufe des dritten in dieser Zeit ausmacht; es wird daher auch die Linie der Konjunktion des zweiten und dritten Satelliten in $486\frac{1}{2}$ Tagen in ihrer retrograden Bewegung ein ganzes Mal herumkommen.

Wir erhalten also das merkwürdige Resultat: Das Rückschreiten der Linie der Konjunktion des zweiten und dritten Satelliten geschieht mit derselben Geschwindigkeit wie das der Linie der Konjunktion des ersten und zweiten.

Dies Gesetz ist so genau, dass man in den Tausenden von Umläufen, die man seit der Entdeckung der Satelliten beobachtet hat, auch nicht die geringste Abweichung davon gefunden hat, ausser einer, die von der elliptischen Gestalt der Bahn des dritten Satelliten abhängt.

139) Die Punkte der Konjunktion des zweiten und dritten Satelliten liegen stets entgegengesetzt mit denen des ersten und zweiten.

So sonderbar das im vorigen Paragraphen aufgestellte Gesetz erscheinen mag, das folgende ist es nicht weniger:

Die Linie der Konjunktion des zweiten und dritten Satelliten liegt stets mit der Linie der Konjunktion des ersten und zweiten in einer einzigen Geraden, und zwar liegt letztere gerade entgegengesetzt der ersteren, da die Konjunktionen des zweiten und dritten Satelliten in Punkten stattfinden, die gerade entgegengesetzt liegen mit den Punkten, in welchen die Konjunktionen des ersten und zweiten Satelliten stattfinden.

Durch dieses Gesetz ist die relative Lage der Linie der Konjunktionen vom ersten und zweiten, resp. zweiten und dritten Satelliten bestimmt; da nach dem Gesetze in 138 beide Linien sich mit gleicher Winkelgeschwindigkeit bewegen, so bleibt diese relative Lage unverändert dieselbe. Auch dieses neue Gesetz hat sich, soweit die Beobachtungen reichen, bei jedem Umlaufe seit der Entdeckung der Satelliten als genau wahr erwiesen.

Wir werden in 142 zeigen, dass die störenden Kräfte bestrebt sind, diese Gesetze herzustellen und ihr Fortbestehen zu sichern.

140) Die durch den ersten und dritten Satelliten in der Bewegung des zweiten hervorgerufenen Ungleichheiten kombinieren sich unzertrennlich und erzeugen **eine** grosse Ungleichheit.

Die schlagendste Wirkung dieser Gesetze in den Störungen der Satelliten findet man in den Bewegungen des zweiten Satelliten. Die störende Kraft des ersten bewirkt, dass das Apojovium des zweiten nach den Punkten der Konjunktion beider hin liegt (130), sie erzeugt also ein Erweitern der Bahn des zweiten nach diesen Punkten hin, und folglich ein Zusammendrücken auf der entgegengesetzten Seite. Die störende Kraft des dritten Satelliten wird, wie am Schlusse von 137 gezeigt ist, die Bahn des zweiten auf der Seite der Konjunktion des zweiten und dritten zusammendrücken. Da nun die Punkte der Konjunktion des zweiten und dritten entgegengesetzt liegen zu denen des ersten und zweiten, so wird die störende Kraft des ersten Satelliten genau dort ein Zusammendrücken erzeugen, wo es auch die Kraft des dritten hervorbringt. Beide Kräfte bewirken also auf dieser einen Seite ein starkes Zusammendrücken der Bahn, und ebenso ein starkes Verlängern derselben auf der entgegengesetzten Seite.

Die Excentricität, die sonach gänzlich von der Störung abhängt, kann dadurch so gross werden, dass sie merklich die der Venusbahn überschreitet.

Die Ungleichheiten in den Bewegungen der Satelliten, welche von diesen Excentricitäten hervorgerufen werden, wurden zuerst, und zwar aus Beobachtungen, von Bradley um das Jahr 1740 gefunden, und zuerst aus der Theorie nachgewiesen von Lagrange im Jahre 1766.

141) Das Sonderbare dieser Gesetze und die Genauigkeit, mit welcher sie befolgt werden, lassen wohl vermuten, dass sie nicht ganz zufällig sind. Es scheint natürlich, zu fragen, ob nicht in den gegenseitigen Störungen der Satelliten ein Grund gefunden werden kann für die Aufrechterhaltung dieser einfachen Verhältnisse.

In der That können wir zeigen, dass, wenn man die Satelliten zu irgend einer Zeit in Bewegung versetzt denkt zwar nicht genau, aber doch nahezu nach diesen gefundenen Gesetzen, ihre gegenseitige Anziehung immer bestrebt ist, die Bewegungen so zu ändern, dass sie genau diesen Gesetzen entsprechen.

Wir wollen dies beweisen, indem wir annehmen, dass die Bewegungen eine geringe Abweichung von den Gesetzen zeigen, und indem wir dann die Natur derjenigen Kräfte untersuchen, welche aus dieser Abweichung hervorgehen.

142) Sobald die rückläufigen Bewegungen der Linien der Konjunktionen nahezu gleich sind, sind die gefundenen zwei Gesetze nicht zufällig, sondern eine notwendige Folge der gegenseitigen Anziehung der Satelliten.

Nehmen wir z. B. an, dass der dritte Satellit hinter dem aus dem Gesetze bestimmten Orte zurückbleibe, d. h. nehmen wir an, der zweite Satellit befinde sich an dem am meisten zusammengedrückten Teile seiner Ellipse (dieses Zusammendrücken nur durch die Wirkung des ersten Satelliten hervorgerufen gedacht), und der dritte Satellit stehe hinter diesem Orte. Die Konjunktion des zweiten und dritten Satelliten wird dann erfolgen vor der Linie AC (Fig. 53), also bevor die Apsidenlinie AC der Bahn des zweiten (diese Linie nur durch die Wirkung des ersten erzeugt gedacht) erreicht wird.

Im folgenden haben wir nun die Kräfte zu schätzen, welche jetzt auf den dritten Satelliten wirken, und ihre Veränderungen, welche von der Veränderung der Lage der Linien der Konjunktionen abhängen. Bei dieser Schätzung ist es nun nicht nötig, den Einfluss zu betrachten, welchen die Ellipticität der Bahn des zweiten, soweit sie durch den dritten erzeugt ist, oder den die Ellipticität des dritten (diese durch den zweiten allein erzeugt gedacht) auf den dritten Satelliten ausübt. Denn die von der Wirkung des dritten hervorgerufene Abplattung der Bahn des zweiten (140), und die vom zweiten erzeugte Verlängerung der Bahn des dritten liegen immer nach den Punkten der Konjunktion des zweiten und dritten hin; durch diese Abplattung und Verlängerung tritt allerdings eine

Modifikation der Wirkung ein, aber diese Modifikation bleibt dieselbe, die Linien der Konjunktionen vom ersten und zweiten einerseits, vom zweiten und dritten Satelliten andererseits, mögen zusammenfallen oder nicht.

Es sei nun C (Fig. 54) das Perijovium der Bahn des zweiten Satelliten, und zwar hervorgebracht durch die Wirkung des ersten allein, D derjenige Punkt der Bahn des dritten, welcher in der Verlängerung von AC liegt. Ist der dritte Satellit in D, wenn der zweite gleichzeitig in C ist, so verzögert die senkrecht zum Radius Vektor stehende Kraft des zweiten den dritten Satelliten, bevor letzterer nach D gelangt (der zweite ist ja dann gegen den dritten zurück), und beschleunigt ihn nach früherem um ebensoviel, wenn er durch D gegangen ist (der zweite ist dann dem dritten voraus).

Nach unserer Annahme erfolgt aber die Konjunktion beider in der Linie AC_1D_1 , also vor C; die Verzögerung des dritten, herrührend von der Anziehung des zweiten, findet also jetzt statt noch bevor der zweite in sein Perijovium kommt. Im Punkte C_1 der Konjunktion ist nun die Entfernung beider Satelliten voneinander am kleinsten; da der zweite vor seinem Perijovium C ist, so bewegt er sich nicht so schnell als z. B. in C — wo die Geschwindigkeit am grössten ist — und gleich nach dem Durchgange durch C. Durch beides wird bewirkt, dass die verzögernde Kraft stark und eine geraume Zeit wirkt. Von C_1 an wird die Entfernung beider Körper grösser, und der zweite Satellit bewegt sich schneller wie vorher; folglich ist die beschleunigende Kraft nach der Konjunktion, die auf den dritten vom zweiten ausgeübt wird, schwach und wirkt kürzere Zeit. Aus der Grösse der Kraft vor und nach der Konjunktion folgt also, dass die Verzögerung grösser ist als die Beschleunigung, und ihre Wirkung daher überwiegt. Eine zum Radius Vektor senkrecht gerichtete verzögernde Wirkung verkürzt aber, nach dem am Schlusse von 48 Gesagten, die Umlaufszeit des dritten Satelliten, und macht daher seine Winkelbewegung schneller. Die Folge davon ist, dass, wenn ihn der zweite Satellit wieder erreicht, er weiter als bis D_1 gekommen sein wird oder dass die Linie der nächsten Konjunktion dem Orte des Perijoviums C vom zweiten (oder der Linie der Konjunktion vom ersten und zweiten) näher liegt als vorher.

Würden wir annehmen, dass der dritte Satellit vor dem aus dem Gesetze bestimmten Orte liege, dass also die Konjunktion nicht in einem Punkte D_1 vor dem Perijovium C, sondern in einem über C hinaus stattfindende, oder dass der dritte Satellit sich rascher bewege, als aus dem obigen Gesetze folgt, so würden wir auf dem eben behandelten Wege finden, dass die Gesamtwirkung der störenden Kräfte des zweiten Satelliten (vor und nach der Konjunktion) die sein würde, den dritten zu beschleunigen, und damit, wieder nach 48, seine Umlaufszeit zu verlängern, und somit seine Winkelbewegung langsamer zu machen, die Linie der nächsten Konjunktion näher dem Orte C zu legen*).

In beiden Fällen ist das Bestreben der Einwirkung des zweiten Satelliten das, die Linie der Konjunktion des zweiten und dritten zusammenfallen zu lassen mit der Linie der Apsiden des zweiten oder mit der der Konjunktion des ersten und zweiten, indem die Kräfte das eine Mal ein Vorschreiten, das zweite Mal ein Rückschreiten der Linie der Konjunktion des zweiten und dritten erzeugen.

Durch dieselbe Schlussfolge kann man sich überzeugen, dass es Kräfte giebt, die auf den ersten Satelliten vom zweiten ausgeübt werden, und durch die elliptische Ungleichheit erzeugt werden, welche der dritte in der Bahn des zweiten hervorbringt, welche die Winkelbewegung des ersten verzögern oder beschleunigen, je nachdem der erste vor dem aus dem

*) Denn ist der dritte vor dem aus dem Gesetze bestimmten Orte voraus, so wird die Konjunktion nicht in C, sondern darüber hinaus, etwa in C_2 stattfinden; der zweite ist dann in der Nähe des Perijoviums, bewegt sich also schnell. Vor der Konjunktion verzögert der zweite den dritten; nach der Konjunktion, wo dann der zweite sich noch weiter von seinem Perijovium entfernt hat, sich also langsamer bewegt als vorher, beschleunigt er den dritten. Es wirkt hiernach die Beschleunigung auf den dritten für längere Zeit als die Verzögerung oder sie überwiegt. Durch eine beschleunigende Kraft senkrecht zum Radius Vektor wird aber die Umlaufszeit vergrössert, und dadurch die Winkelbewegung langsamer. Daher wird, wenn der zweite Satellit den dritten wieder erreicht, der letztere nicht so weit wie D_2 gekommen sein oder die Linie der Konjunktion wird näher der Linie CD liegen als vorher.

Gesetze bestimmten Orte voraus (also die Konjunktion früher eintritt) oder hinter demselben zurück ist (oder die Konjunktion später eintritt), und somit die Linie der Konjunktion vom ersten und zweiten Satelliten entweder vor- oder rückwärts bewegen, bis sie mit der Apsidenlinie des zweiten (diese nur durch den dritten erzeugt gedacht) oder mit der Linie der Konjunktion vom zweiten und dritten zusammenfällt.*)

Auf dieselbe Weise wird man finden können, dass in jedem der behandelten zwei Beispiele sowohl der dritte wie der erste Satellit Kräfte auf den zweiten ausüben, welche seine Winkelbewegung verzögern (1. Fall vom 1. Beispiel) oder beschleunigen (2. Fall vom 1. Beispiel), und damit die Linie der Konjunktion zwischen dem dritten und zweiten oder dem ersten und zweiten so vor- oder rückwärts bewegen (und umgekehrt), dass schliesslich beide zusammenfallen.**)

Alle diese Wirkungen streben also dahin, das erwähnte Gesetz durch Vor- und Rückwärtsbewegen der Linien der Konjunktionen so lange zu erhalten, bis beide aufeinander fallen. Es sei nochmals bemerkt, dass hier und im folgenden nur die Kraft in Konjunktion, als die überwiegende, in Frage kommt.

143) Vielleicht giebt es kein theoretisches Fortdauern in den Elementen, auf das man sich mit so grosser Sicherheit verlassen kann, wie auf das Beharren dieses Gesetzes. Die grössten und unregelmässigsten Störungen Jupiters oder seiner Satelliten werden, vorausgesetzt, dass sie nur stufenweise eintreten, die Beziehungen zwischen diesen Bewegungen der Satelliten nicht ändern; auch die Wirkungen eines widerstehenden Mittels werden ohne Einfluss sein (da eben die gegenseitigen Einwirkungen der Satelliten auf Erhaltung dieses Gesetzes gerichtet sind), obschon jede dieser Ursachen die Bewegungen aller Satelliten stören würde, und obschon ähnliche Ursachen die Schlüsse gänzlich untergraben können, welche die Mathematiker für die Stabilität des Sonnensystems in Bezug auf die Elemente der Planeten-

*) Es sei M das Apojovium der Bahn des zweiten (Fig. 55), hervorgebracht durch die Wirkung des dritten Satelliten, L der Punkt der Bahn des ersten, welcher auf der Linie AM liegt. Angenommen der erste sei noch nicht in L, wenn der zweite in M steht (AM ist zugleich Linie der Konjunktion vom zweiten und dritten Satelliten), so wird die Konjunktion über L hinaus in der Linie $L_1 M_1$ erfolgen. Vor der Konjunktion beschleunigt dann der zweite den ersten und zwar für kurze Zeit, da der zweite vom Apojovium kommt, sich daher langsam bewegt, und ihn der erste somit schnell einholen kann; nach der Konjunktion verzögert der zweite und zwar für längere Zeit, da der zweite weiter von seinem Apojovium entfernt ist als vor der Konjunktion, sich daher schneller bewegt, ihm deshalb der erste nicht so rasch vorausseilen kann oder beide länger in grösserer Nähe bleiben. Es überwiegt hiernach die Verzögerung, welche eine Verkürzung der Umlaufszeit oder eine Vergrösserung der Winkelbewegung erzeugt, sodass der erste nicht mehr so weit zurück sein wird gegen den zweiten wie vorher oder dass die nächste Konjunktion nicht in der Linie $L_1 M_1$, sondern näher der Linie LM erfolgen wird.

Wäre der erste dem Orte L voraus, falls der zweite in M steht, so hätte die Konjunktion vor LM, etwa in $L_2 M_2$ stattgefunden. Vor der Konjunktion wird der erste vom zweiten beschleunigt und zwar für längere Zeit, da der zweite sich vor seinem Apojovium schneller bewegt wie in demselben, und ihn deshalb der erste nicht so bald einholt. Nach der Konjunktion dagegen wird der erste verzögert; da sich jetzt der zweite langsamer bewegt als vorher, weil er seinem Apojovium näher steht, so kann der erste ihm rasch vorausseilen oder die Verzögerung erfolgt für kürzere Zeit. Darnach wird jetzt die Beschleunigung überwiegen, durch welche die Umlaufszeit des ersten Satelliten vergrössert, seine Winkelbewegung verkleinert wird. Weil der erste sich nunmehr langsamer bewegt, so wird er den zweiten nicht so rasch wieder einholen oder die nächste Konjunktion wird nicht in der Linie $L_2 M_2$, sondern in einer anderen erfolgen, die der Linie LM näher liegt. In jedem Falle sind also die Kräfte bestrebt, die Linie der Konjunktion vom ersten und zweiten Satelliten zusammenfallen zu lassen mit der Apsidenlinie des zweiten, diese durch den dritten erzeugt gedacht.

**) Desgleichen sucht umgekehrt der dritte den zweiten in derselben Weise zu beeinflussen, in welcher es der zweite mit dem dritten thut. In dem ersten der behandelten Fälle fand z. B. die Konjunktion beider Satelliten vor AC in AC, (Fig. 54) statt. Der dritte beschleunigt vor der Konjunktion und zwar für längere Zeit, da der zweite Satellit vor seinem Perijovium ist, sich daher noch nicht so schnell bewegt, wie in diesem selbst und so den dritten nicht so bald einholt. Nach der Konjunktion wird der zweite eine kürzere Zeit hindurch verzögert, weil er seinem Perijovium näher ist, sich also schneller bewegt als vorher und sich daher auch rasch vom dritten entfernt. Die überwiegende Beschleunigung vergrössert die Umlaufszeit, verkleinert die Winkelbewegung des zweiten, sodass er das nächste Mal nicht schon in der Linie AC, sondern in einer näher bei AC liegenden Linie mit dem dritten in Konjunktion stehen wird. u. s. w.

bahnen gezogen haben. Die physische Erklärung dieses Gesetzes wurde zuerst von Laplace im Jahre 1784 gegeben.

144) Wir haben nun den wichtigsten Teil der Theorie dieser Satelliten beendet; es giebt jedoch noch einige andere Punkte, die der Beachtung wert sind teils um ihrer selbst willen, teils als Einführung in die Theorie der Planeten.

145) Wie wir erwähnten, hat die Bahn des dritten Satelliten eine kleine von der Störung unabhängige (ursprüngliche) Excentricität, als auch ein von der Störung unabhängiges (von vornherein der Lage nach schon gegebenes) Perijovium. Findet nun die Konjunktion mit dem zweiten nahe diesem unabhängigen Perijovium des dritten statt, so wird die Wirkung der Störung auf den zweiten grösser als zu irgend einer anderen Zeit sein, grösser als zu jeder anderen Konjunktion; dies verursacht eine Unregelmässigkeit in der Excentricität des zweiten und in der Bewegung seiner Apsiden,*) welche also von der Entfernung der Linie der Konjunktion des zweiten und dritten Satelliten von dem unabhängigen Perijovium des dritten abhängt.

Die Abweichung von der Gleichförmigkeit in der Winkelbewegung des dritten (infolge seiner elliptischen Bahn) erzeugt wieder eine Abweichung von der Gleichförmigkeit der rückläufigen Bewegung der Linie der Konjunktion, und dies trägt wieder zu derselben soeben erwähnten Unregelmässigkeit bei.

146) Die von einem inneren Satelliten ausgeübte, in Richtung des Radius Vektor liegende störende Kraft ist manchmal nach dem Centralkörper hin, manchmal von ihm fort gerichtet, im ganzen aber übertrifft nach 86 die erste die letzte, und zwar ist die nach dem Centralkörper hin gerichtete Kraft in Konjunktion am grössten (86). Die Hauptwirkung wird stattfinden, wenn die Satelliten in der Nähe ihrer Konjunktion stehen; folglich ist, wenn die Linie der Konjunktion vom zweiten und dritten Satelliten nahe bei dem unabhängigen Perijovium des dritten Satelliten vorbeigeht, die Kraft, durch welche der dritte zum Hauptplaneten getrieben wird, grösser als zu irgend einer anderen Zeit, und da die Linie der Konjunktion sich dreht, so wird diese Kraft abwechselnd wachsen und abnehmen (in der erwähnten Stellung aber den grössten Wert haben). Dies bewirkt eine Unregelmässigkeit in der Länge der grossen Achse, und folglich in der Bewegung des dritten Satelliten (47). Diese Unregelmässigkeit hängt also von der Entfernung der Linie der Konjunktion von dem Perijovium des dritten Satelliten ab.

147) Die von einem äusseren Satelliten erzeugte, im Radius Vektor liegende, störende Kraft ist manchmal nach dem Centralkörper hin, manchmal von ihm weg gerichtet, aber im ganzen überwiegt (nach 80, Schluss) die letztere die erste. Aus den in 146 angegebenen Gründen giebt es daher in der Bewegung des zweiten Satelliten eine Unregelmässigkeit, welche von der Entfernung der Linie der Konjunktion des zweiten und des dritten von dem unabhängigen Perijovium des dritten abhängt, ihrer Natur nach aber der entsprechenden Ungleichheit des dritten entgegengesetzt ist; denn in 146 war die auf den einen, dritten Satelliten wirkende überwiegende Kraft nach dem Centralkörper hin gerichtet, während die jetzt auf den zweiten (inneren) vom dritten (äusseren) ausgeübte überwiegende störende Kraft vom Hauptplaneten fort gerichtet ist.

148) Jede dieser Unregelmässigkeiten in der Bewegung eines dieser Satelliten erzeugt eine Unregelmässigkeit in der Bewegung der anderen, und so wird die ganze Theorie sehr verwickelt, wenn wir alle kleinen Unregelmässigkeiten berücksichtigen wollen.

149) Die Bewegung des vierten Satelliten steht zu den Bewegungen der drei anderen nicht in solchem Zusammenhange, in welchem diese untereinander stehen. Seine Umlaufszeit steht zu der des dritten nahezu im Verhältnisse von 7 : 3. Einige der Unregelmässigkeiten, die er erfährt, sind fast denen in den Bewegungen der Hauptplaneten gleich. Dieselben sind jedoch klein; die bedeutendsten unter ihnen sind die, welche von den Änderungen

*) Es ergibt sich dies aus dem im III. Abschnitt behandelten Einflusse störender Kräfte auf die Excentricität (z. B. 59) und auf die Apsidenlinie (z. B. 50 bis 54).

der Elemente abhängen. Diese Änderungen erfordern eine Reihe von Revolutionen der Satelliten, ehe alle ihre verschiedenen Zustände durchlaufen werden; sie sind aber dessenungeachtet beobachtet worden, seit man die Satelliten entdeckt hat. Wir werden jetzt zu diesen übergehen.

150) Nehmen wir zuerst an, dass der dritte Satellit keine von der Störung unabhängige, der vierte aber eine merkliche Excentricität habe, und dass seine Apsidenlinie hauptsächlich infolge der Gestalt Jupiters, sich so langsam rückläufig bewegt, dass sie in 11000 Umläufen des Satelliten noch nicht eine vollständige Umdrehung ausgeführt hat.

Wenn jeder Satellit einige hundert Male um Jupiter gegangen ist, werden ihre Konjunktionen fast an allen Stellen ihrer Bahnen stattgefunden haben. Wenn nun die Bahn des vierten sowohl wie die des dritten keine unabhängige Excentricität hätte, so würde durch die Störung keine bemerkbare Änderung der Gestalt der Bahn eintreten, da ohne ursprüngliche Excentricität die Wirkung der beiden Satelliten aufeinander dann bei jeder Konjunktion (und die hier auftretende Kraft kommt, als die überwiegende, nur in Frage) die gleiche ist, und die Satelliten doch in allen verschiedenen Punkten der Bahn in Konjunktion kommen.

Allein die Bahn des vierten (die ungestörte schon) ist excentrisch, folglich ist die Wirkung eines jeden der zwei Satelliten auf den andern am grössten, wenn die Konjunktion nahe beim Perijovium des vierten stattfindet, wo beide Körper die grösste Annäherung erreicht haben. Wir haben also jetzt zu beachten, dass die überwiegende Kraft in diesem Teile der Bahn auftritt, und müssen nun nachsehen, welche Gestalt die Bahn des dritten Satelliten haben muss, damit, unter alleiniger Einwirkung dieser überwiegenden Störung, ihre Excentricität bei jedem Umlaufe dieselbe bleibt. Diesen konstanten Zustand, wenn er überhaupt möglich ist, sucht dann auch jene überwiegende störende Kraft herbeizuführen. Man muss sich hierbei erinnern, dass die Wirkung der Gestalt Jupiters der Apsidenlinie des dritten Satelliten, wenn seine Bahn excentrisch ist, eine rechtläufige Bewegung erteilt, die schneller ist als die progressive Bewegung der Apsidenlinie des vierten (236).

151) Die Excentricität der Bahn des vierten Satelliten verursacht eine kleine Excentricität derselben Art in der Bahn des dritten.

Die überwiegende Kraft tritt nach dem soeben Gesagten auf, wenn die Konjunktion beim Perijovium des vierten Satelliten stattfindet; die überwiegende störende Kraft auf dem dritten Satelliten ist hier vom Centalkörper fort nach dem Perijovium des vierten hin gerichtet. Die überwiegende störende Kraft senkrecht zum Radius Vektor beschleunigt den dritten Satelliten vor Erreichung dieses Ortes (der dritte ist hinter dem vierten zurück) und verzögert ihn nach dem Durchgange durch diesen Ort (der dritte ist dem vierten dann voraus).

Aus allen diesen Angaben folgt, mit Rücksicht auf das in 51, 65 und 66 Gesagte, dass, wenn das Perijovium des dritten Satelliten (das aber erst durch Störung erzeugt gedacht wird*) in dieser Stellung ist, die genannten drei Kräfte der Apsidenlinie des dritten eine rückläufige Bewegung erteilen werden; die Kraft im Radius Vektor nämlich macht diese Linie rückläufig (51), die senkrecht zum Radius Vektor macht sie vor dem Perijovium des dritten (65) und nach demselben (66) rückläufig. Diese rückläufige Bewegung kann bedeutend werden, wenn die Excentricität des dritten klein ist (56), obschon das Überwiegen der Kraft, durch welches ja diese Bewegung verursacht wird, sehr klein ist. Sie kann der von Jupiters Gestalt erzeugten rechtläufigen Bewegung so nahe kommen, dass die wirkliche Bewegung der Apsidenlinie beliebig nahezu gleich kommt der Bewegung der Apsidenlinie des vierten, welche letztere ja viel langsamer erfolgt als die von der Gestalt Jupiters hervorgebrachte (siehe 150, Schluss) Bewegung derselben Linie des dritten Satelliten.

Aber die Bewegung der Apsidenlinie des vierten wird, wenn auch nur wenig, selbst beeinflusst durch die stärkere Wirkung des dritten an dem erwähnten Orte der Konjunktion. Die im Radius Vektor liegende Kraft wirkt auf den vierten Satelliten in seinem Perijovium

*) Denn kreisförmig kann die Bahn nicht mehr sein, da die Störung die Geschwindigkeit in den einzelnen Punkten der Bahn verschieden macht.

zum Centalkörper hin, während die auf dem Radius Vektor senkrechte ihn vor dem Perijovium verzögert, und nach demselben beschleunigt, sodass dadurch eine kleine Vergrößerung der progressiven Bewegung seiner Apsidenlinie entsteht. (50, 65, 66.)

Soll der Zustand der Dinge bleibend sein, soll die Bahn des dritten Satelliten immer dieselbe Gestalt behalten unter Einwirkung dieses Überschusses der Kraft in Konjunktion, so darf sich die Excentricität nicht ändern. Letzteres wird nun in der That der Fall sein, wie wir z. B. schon in 128 gezeigt haben, wenn eben das Perijovium des dritten Satelliten, stets bei dem des vierten liegt. Dazu ist nötig, dass die Apsidenlinie beider Bahnen sich gleich schnell bewegen, oder dass das durch die Störung vermehrte Vorschreiten der Apsiden des vierten Satelliten gleich kommt dem durch die Störung verminderten Vorschreiten der Apsiden des dritten (vergl. damit den Schluss von 150), was sich aber für einen bestimmten konstanten Wert der Excentricität des dritten Satelliten sicher wird herstellen lassen. Diesen möglichen, bleibenden Zustand werden unsere Kräfte allein stets herzustellen bestrebt sein. Da zu demselben die angegebene Lage des Perijoviums des dritten erforderlich ist, so wird das Bestreben der Störung (d. i. der überwiegenden Kraft in den Konjunktionen, die beim Perijovium des vierten Satelliten stattfinden) darin bestehen, das Perijovium des dritten nach dem des vierten hin zu bringen, also die Bahn des dritten hier zusammendrücken und auf der entgegengesetzten Seite, dem Orte des Apojoviums, zuzuspitzen oder zu erweitern. Der dritte Satellit hat keine ursprüngliche Excentricität, — so nahmen wir an —, die Störung erzeugt aber eine Excentricität, da sie ein Perijovium des dritten hervorzubringen strebt; da dieses letztere dem des vierten zugewendet ist, beide Perijovien somit nach derselben Richtung hin liegen, so erzeugt also die Excentricität der Bahn des vierten Satelliten eine Excentricität in der Bahn des dritten, die derselben Art ist wie sie selbst.

Dies würde der Fall sein, wenn, wie wir bisher angenommen haben, der dritte Satellit keine von der Störung unabhängige Excentricität hätte; aber wie in anderen Fällen, so liesse sich auch hier zeigen, dass die Art der Änderung der Bahn dieselbe sein wird, wenn er eine unabhängige Excentricität besitzt (134). Die Störung sucht also in jedem Falle die Bahn nach dem Perijovium des vierten hin abzuplatten, auf der entgegengesetzten Seite zu erweitern.

152) Die Excentricität der Bahn des dritten Satelliten erzeugt eine Excentricität der entgegengesetzten Art in der Bahn des vierten.

Nehmen wir nun zweitens an, der vierte Satellit habe keine von der Störung unabhängige Excentricität, aber der dritte besitze eine solche, d. h. ohne Störung sei die Bahn des vierten ein Kreis, die des dritten eine Ellipse. Dann liegt das Apojovium des dritten der Bahn des vierten am nächsten (Fig. 56), und die grösste Wirkung wird daher stattfinden, wenn die Konjunktion hier erfolgt. Diese überwiegende Kraft wird jetzt der Apsidenlinie des dritten eine, wenn auch nur langsame, progressive Bewegung erteilen, durch welche die von Jupiters Gestalt hervorgebrachte vermehrt wird. Denn die störende Kraft im Radius Vektor ist vom Centalkörper fort gerichtet und erzeugt nach 54 ein Vorschreiten der Apsidenlinie; die senkrecht zum Radius Vektor beschleunigt vor der Konjunktion (die im Apojovium des dritten erfolgt), und verzögert nach derselben den dritten Satelliten, weshalb nach 65 und 66 die Apsidenlinie wieder vorwärts geht. Wieder wollen wir wissen, welcher dauernde Zustand unter Einwirkung unserer überwiegenden Kraft allein sich herstellen wird oder wir wollen diejenige Gestalt der Bahn des vierten Satelliten finden, die bei jedem Umlaufe dieselbe Excentricität behält. Die Bahn des vierten kann infolge der Störung natürlich nicht mehr kreisförmig bleiben, sondern muss elliptisch werden, da doch die Geschwindigkeit in den verschiedenen Punkten der Bahn nicht mehr die gleiche sein kann. Diese Excentricität bleibt nun konstant, wenn die Apsidenlinie des vierten mit der Linie der Konjunktion vom dritten und vierten zusammenfällt. Die auf den vierten wirkende Kraft im Radius Vektor ist dann vor und nach der Konjunktion (im Peri- oder Apojovium des vierten) nach dem Centalkörper gerichtet und erzeugt nach 57 und 58 im ganzen keine Änderung der Excentricität, da ihre Wirkungen auf letztere vor und nach

dieser Stellung gleich sind; gleiches gilt nach 68 von der Kraft senkrecht zum Radius Vektor, welche vor der Konjunktion, also bevor der vierte die eine Apside erreicht hat, verzögert, darnach aber beschleunigt.

Soll der Zustand dauernd sein, so muss demnach die Apsidenlinie stets durch das Apojovium des dritten gehen oder stets mit der des dritten zusammenfallen. Dazu ist nötig, dass die Apsidenlinie des vierten so schnell vorschreitet wie die des dritten Satelliten. Die des vierten bewegt sich infolge der Wirkung der Gestalt Jupiters nur sehr langsam vorwärts, soll sie schneller fortschreiten, so müssen wir das Perijovium des vierten Satelliten nach dem Apojovium des dritten hin liegend annehmen; nach 50, 65, 66 wird dann die Apsidenlinie des vierten vorschreiten und zwar sowohl infolge der im Radius Vektor wie der senkrecht dazu wirkenden Kräfte (die in den im Apojovium des dritten erfolgenden Konjunktionen auftreten). Soll sie ebenso schnell wie die des dritten vorschreiten (150, am Schlusse), so wird man nur den Wert der Excentricität der Bahn des vierten klein genug annehmen müssen, wodurch ja nach früherem die Wirkungen grösser werden. Dieser mögliche konstante Zustand, den wir gefunden haben, wird von unseren überwiegenden Kräften allein herzustellen gesucht; dieselben wollen das Perijovium des vierten nach dem Apojovium des dritten hin legen, oder wollen an dieser Stelle die Bahn des vierten zusammendrücken, auf der entgegengesetzten Seite verlängern. Da dieses Perijovium des vierten dem des dritten entgegengesetzt liegt, so wollen also die überwiegenden störenden Kräfte des dritten (die von der Excentricität des dritten herrühren) in der Bahn des vierten eine Excentricität entgegengesetzter Art hervorrufen.

Wir haben auch in dieser Untersuchung den einen, hier den vierten Satelliten ohne selbständige Excentricität angenommen, es werden aber auch hier wieder die über die Änderungen in den Bahnen gezogenen Schlüsse ebenso gelten, wenn wir dem vierten Satelliten eine unabhängige, ursprüngliche Excentricität beilegen.

153) In der That haben der dritte und vierte Satellit unabhängige Excentricitäten, und die beiden gefundenen Resultate sind daher auf beide anwendbar. Der vierte Satellit bekommt nach dem Gefundenen zu seiner unabhängigen Excentricität eine neue, die nach ihrer Art der des dritten Satelliten entgegengesetzt ist, und der dritte erhält ausser seiner ursprünglichen Excentricität eine ihrer Art nach mit der des vierten gleiche Excentricität. Ebenso erhalten die Bahnen des ersten und zweiten Satelliten kleine Excentricitäten, die ähnlich denen des dritten und vierten sind. Denn der erste und zweite erfahren vom dritten und vierten Wirkungen ähnlicher Art wie die, welche der dritte vom vierten erfährt.

154) Man sieht wohl ein, dass die Excentricitäten der Bahn des dritten Satelliten Einfluss ausüben werden auf die grosse Ungleichheit (137), welche er in der Bewegung des zweiten erzeugt, und dass ebenso die Ungleichheit in der Bewegung des dritten, welche von der Anziehung des zweiten herrührt, die Wirkung des dritten auf den vierten beeinflussen wird. Wir wollen darauf nicht weiter eingehen, sondern nur bemerken, dass diese Einflüsse gering sind.

155) Wir haben nun die hauptsächlichsten Ungleichheiten in den Bewegungen der Jupitersatelliten behandelt. Sie hängen so sehr mit einander zusammen und sind derart verwickelt, dass wir sie auf dem von uns angegebenen Wege wohl erklären, aber kaum berechnen können. Nur ein mathematisches Verfahren der obstrusesten Art, welches zu gleicher Zeit die Bewegungen aller umfasst, reicht für einen solchen Zweck aus.

Dessenungeachtet werden wir das uns hier gesteckte Ziel für erreicht halten dürfen, wenn wir dem Leser einen allgemeinen Begriff gegeben haben von den Störungen in diesem merkwürdigsten und verwickeltsten Systeme, welches je der Rechnung unterworfen worden ist.