VII. Abschnitt.

Theorie der Planeten.

156) Die Theorie der Planeten nimmt in gewisser Hinsicht eine Mittelstellung ein zwischen der Theorie unseres Mondes und der der Jupitersatelliten. Bei unserem Monde sind die hauptsächlichsten Ungleichheiten derart, dass sie bei jedem Umlaufe oder längstens in einem Umlaufe der Erde um die Sonne, nahezu in derselben Ordnung wiederkehren; dies rührt daher, dass diese Ungleichheiten lediglich von der gegenseitigen Lage der Sonne, des Mondes und der Apsidenlinien abhängen. Bei den Satelliten Jupiters hängen einige der hauptsächlichsten Ungleichheiten, wie die des dritten und vierten Satelliten, ganz und gar nicht von der gegenseitigen Stellung der Körper ab, wohl aber von der Lage der Apsidenlinien, deren Umläufe, wenn sie auch langsam erfolgen, doch vollständig beobachtet werden können. Bei den Planeten sind die Störungen, welche denen des Mondes analog sind, nur klein; die Änderungen der Elemente, die durch sie erzeugt werden, sind zwar bemerklich, aber sie erfolgen doch so langsam, dass mehrere Jahrtausende notwendig sind, um sie vollständig zu beobachten. Die bemerkenswertesten Unregelmässigkeiten sind die, welche hervorgebracht werden durch Änderungen der Elemente, die mehrere Umläufe der Planeten umfassen. Diese Störungen sind unter den bisher behandelten Fällen am ähnlichsten denen der drei ersten Jupitermonde; von den letzteren unterscheiden sie sich jedoch dadurch, dass für den grössten Teil von ihnen unabhängige Excentricitäten durchaus wesentlich sind.

Ungleichheiten, die früher behandelten ähnlich sind.

157) Einige Ungleichheiten, die der Variation, der parallaktischen Ungleichheit, der Evektion und der jährlichen Gleichung des Mondes ähnlich sind.

Wie wir schon sagten, giebt es einige Störungen, die den in der Theorie des Mondes behandelten ähnlich sind. Betrachten wir z. B. die Störungen Merkurs durch Jupiter. Die Entfernung des letzteren von der Sonne ist fast 13 mal so gross wie dieselbe Entfernung für Merkur, also die erstere sehr gross im Vergleich zur letzteren. Es ist deshalb dieser Fall fast genau derselbe wie der des durch die Sonne gestörten Mondes. Wie früher die Mondbahn, so wird jetzt die Bahn Merkurs an den Stellen, welche Jupiter am nächsten und von ihm am weitesten entfernt liegen, etwas zusammengedrückt; die Störung ist der Variation ähnlich. Diese Wirkung wird jedoch sehr modificiert durch die Wirkungen derjenigen Kräfte, welche den in 94 erwähnten analog sind und hier bedeutend überwiegen (parallaktische Ungleichheit). Nach dem in 98 Gesagten wird die Apsidenlinie Merkurs bei jedem Umlaufe ein wenig vorschreiten, wenn Jupiter nahe in dieser Apsidenlinie steht, sie wird aber etwas zurückschreiten (101), wenn sich Jupiter in der darauf senkrechten Linie befindet. Nach 115 (am Schlusse) ist die Excentricität im ersten Falle am grössten, im letzteren am kleinsten, oder die Merkurbahn ist im ersten Falle etwas mehr, im zweiten etwas weniger excentrisch. Aus 90 folgt ferner, dass sich die Bahn des Merkur etwas weiter ausdehnt, wenn Jupiter im Perihel steht, als wenn er sich im Aphel befindet (die Bahn verengert sich, während Jupiter vom Perihel zum Aphel geht und erweitert sich vom Aphel bis zum Perihel).

Wie auf Merkur, so lassen sich die früher für den Mond gefundenen Resultate auch ausdehnen auf die Störungen, welche Venus, Erde und Mars durch Jupiter erfahren.

158) Das soeben behandelte Beispiel Merkurs und Jupiters ist freilich eines der extremsten im Planetensystem, sofern eben die Planeten sehr weit voneinander entfernt sind. Betrachten wir dagegen die Störungen zweier Planeten, die einander näher sind, so müssen wir unsere Schlüsse bedeutend modificieren. Es wird alsdann dort, wo die Planeten in der Nähe ihrer Konjunktion sind, die störende Kraft viel grösser sein als an irgend einer anderen Stelle, und deshalb wird auch die Bahn an dieser Stelle viel mehr als in irgend einem anderen Teile geändert (beim Monde war die störende Kraft in Konjunktion und Opposition nahezu die gleiche, weil die Entfernung des störenden Körper sehr gross war, 82). Indessen wird die Schlussweise, auf welche wir in 91 die Gestalt der Mondbahn gründeten (wenn wir von der Betrachtung einer selbständigen Excentricität absehen), bis zu einem gewissen Grade auch hier gelten. Die Bahn wird also in verschiedenen Fällen (91) auf der Seite, auf der die Konjunktion stattfindet, und auf der ihr entgegengesetzten zusammengedrückt werden, am meisten aber auf der letzteren (96)*); sie wird ferner an den Teilen sich erweitern, wo die störende Kraft vollständig die Gravitation gegen die Sonne hin zu vergrössern strebt.

Diese Schlussweise gilt für die Anziehung eines äusseren Planeten, aber sie wird uns auch in vielen Fällen behilflich sein, um diejenige Gestalt der Bahn zu finden, welche durch die Anziehung eines inneren Planeten hervorgebracht wird.

159) Die Analogie muss mit grosser Vorsicht benutzt werden.

Die Betrachtung einzelner Fälle wird uns zeigen, wie vorsichtig man in der Anwendung dieser Schlüsse sein muss. Angenommen, wir untersuchten die gegenseitigen Störungen von Erde und Mars. Die Umlaufzeit des Mars ist nahezu doppelt so gross, wie die der Erde; wir treffen also hier auf eine Ungleichheit der Art, wie die in 122 und den folgenden Paragraphen betrachtete Ungleichheit der Satelliten Jupiters. Obgleich die Umlaufszeit des Mars nicht sehr nahe das doppelte von der der Erde ist, so dass die Änderungen, die durch dieses Verhältnis der Umlaufszeiten in den Bahnen von Erde und Mars entstehen (die Abstände der Punkte der Konjunktion voneinander sind dann grösser als die früher bei den Jupitersatelliten), nicht sehr auffallend sind, so sind sie doch unter den bloss von der Stellung der Planeten abhängigen die grössten, welche die zwei Körper gegenseitig in ihren Bewegungen hervorbringen.

Obwohl man also auf den ersten Blick bemerkt, dass diese Störung zwischen Erde und Mars analog der Variation des Mondes ist, so erhält sie doch, wegen des geringen Unterschiedes der Distanzen, und wegen der nahen Kommensurabilität der Umlaufszeiten weit mehr Ähnlichkeit mit der bei den Jupitersatelliten auftretenden, d. h. mit der langsamen Variation der Elemente der Bahn als mit der Variation des Mondes.

160) Es ist kaum möglich einen Begriff von den Rechnungen zu geben, durch welche man in allen den verschiedenen Fällen die von den Excentricitäten unabhängigen Störungen bestimmen kann. Wir müssen uns damit begnügen, anzugeben, dass diese Methoden für alle gelten, und dass sie viel einfacher sind als andere, die sich auf Punkte beziehen, von denen wir durch eine allgemeine Erörterung einen Begriff geben wollen.

161) Allgemeiner Grundsatz für die Erklärungen der bedeutenderen Störungen, welche von den Excentricitäten und Neigungen der Bahnen abhängen.

Betrachten wir nun die Ungleichheiten der Bewegung, welche von den Excentricitäten und den Neigungen der Planetenbahnen abhängen. Der Leser wird wahrscheinlich zuerst an folgendes denken:

„Wenn die Störungen der Planeten, falls man ihre Bahnen ohne unabhängige Excentricitäten annimmt, nur wenige Sekunden betragen, wie können dann die kleinen Ortsänderungen, welche entstehen, sobald wir uns die unbedeutenden wirklich ursprünglich vorhandenen Excentricitäten und Neigungen der Bahnen hinzugefügt denken, die Kräfte, mit denen die Planeten aufeinander wirken, so sehr verändern, dass daraus irgend merkliche Unterschiede in der Grösse der Unregelmässigkeiten entstehen?“

Als Antwort hierauf kann man sagen:

„Es sind thatsächlich diese Kräfte oder die erwähnten Änderungen der Kräfte (die man bei abhängiger Excentricität anzubringen hat, sobald man den Fall einer ursprünglichen

*) Weil eben der Unterschied der Kräfte in Konjunktion und Opposition jetzt gross ist, und die daraus entstehende, der parallaktischen Ungleichheit des Mondes ähnliche Störung in Opposition die der Variation ähnliche Störung vermehrt, in Konjunktion aber vermindert (96).

Excentricität haben will) ausserordentlich klein, und diejenigen Teile derselben, welche in derselben Richtung eine kurze Zeit hindurch, z. B. während eines Bruchteiles der Umlaufszeit eines Planeten wirken, bringen keine merkliche Wirkung hervor. Aber es giebt auch Teile, die nicht bloss eine kurze Zeit hindurch wirken, sondern die während vieler Umläufe in derselben Weise fortwirken; die Wirkungen dieser Störungen werden im Laufe der Zeit merklich; insbesondere bringen jene, welche die mittlere Entfernung und die Umlaufszeit ändern, nach und nach Änderungen in der Länge des Planeten hervor (49), die weit fühlbarer sind als die Änderung der Dimensionen der Bahn."

162) In dieser Betrachtung ist die ganze allgemeine Theorie derjenigen Ungleichheiten begriffen, welche man unter dem Namen „Ungleichheiten von langer Periode" kennt. Ausser denjenigen Ungleichheiten, die der Evektion des Mondes ähnlich sind, sind sie unter den von den Excentricitäten abhängigen Ungleichheiten die einzigen, welche Bedeutung haben.

Die Ungleichheiten von langer Periode, insbesondere die für Jupiter und Saturn.

163) Um näher in die Erörterung einzugehen, wollen wir das Beispiel der langen Ungleichheit von Jupiter und Saturn wählen. Diese letztere Ungleichheit ist wegen ihrer Grösse, wegen der Zeit, in welcher die Kräfte in derselben Art wirken, aber auch wegen der Schwierigkeit, welche sie den Astronomen bot, ehe sie durch die Theorie begründet war, die merkwürdigste, die man seit der ersten Erklärung der Ungleichheiten des Mondes kennen gelernt hat.

164) Die Umlaufszeiten von Jupiter und Saturn betragen $4332{,}_{5888}$ Tage und $10759{,}_{2198}$ Tage, sie verhalten sich also zu einander nahezu wie 2:5, oder die Anzahl Grade, welche beide Planeten in derselben Zeit in Länge beschreiben, abgesehen von ihren Excentricitäten, stehen nahezu im Verhältnis von 5:2. Nehmen wir an, dieses Verhältnis habe genau den Wert 2:5, und Jupiter und Saturn gehen von einer Konjunktion aus (die Bahnen seien nicht excentrisch). Hat Saturn 240 Grade beschrieben, so wird Jupiter 600 Grade zurückgelegt haben, da diese Zahlen sich wie 2:5 verhalten oder da Jupiter $\frac{5}{2}$ mal so viel zurücklegt. Da nun 360 Grad einen Umlauf geben, so wird also Jupiter ein ganzes Mal (von der ursprünglichen Stellung in Konjunktion aus gerechnet) herum gegangen sein und überdies noch 240 Grade beschrieben haben; er wird daher mit Saturn wieder in Konjunktion stehen, weil dieser gleichfalls vom früheren Orte der Konjunktion um 240 Grade sich entfernt hat.

Hat Saturn nochmals 240 Grad beschrieben, d. h. im ganzen 480 Grade oder einen ganzen Umlauf und noch 120 Grade darüber, so wird Jupiter im ganzen 1200 Grade oder drei Umläufe und noch 120 Grade darüber durchlaufen haben, wird folglich wieder mit Saturn in Konjunktion stehen.

Wenn Saturn ein drittes Mal 240 Grade zurücklegt, also im ganzen 720 Grade oder genau zwei Umläufe durchmessen hat, wird Jupiter $600 \times 3 = 1800$ Grad zurückgelegt oder genau 5 Umdrehungen gemacht haben, und die Planeten werden wieder in Konjunktion stehen.

Wir haben jetzt drei auf einander folgende Konjunktionsstellungen gefunden: in 240^0, 120^0, 0^0 Abstand von der ersten Konjunktion. Man sieht daher: verhalten sich die Umlaufszeiten genau wie 2:5, so wird eine beständige Folge von Konjunktionen in denjenigen Punkten stattfinden, deren Längen die Länge des Ortes der ersten Konjunktion um 240^0, 120^0, 0^0, darnach wieder um 240^0, 120^0, 0^0 u. s. w. übertreffen.

Sind z. B. B_1 und C_1 (Fig. 57) die Orte von Jupiter und Saturn bei der ersten Konjunktion, von der wir ausgehen, so wird Jupiter ganz herumgegangen und noch darüber, um 240^0, bis B_2 gekommen sein, wenn Saturn nur einen Teil seines Umlaufes, 240^0, bis C_2 beschrieben hat. Hat Jupiter wieder einen Umlauf ausgeführt, von B_2 aus gerechnet, und ist er noch überdies um 240^0 darüberhinaus bis B_3 gekommen, so hat Saturn auch wieder nur einen Teil seines Umlaufes, von C_2 bis C_3 oder 240° gemacht. Dann wird Jupiter neuerdings ein ganzes Mal herum und noch überdies bis B_1 (240°) gehen, während Saturn einen Teil seines Umlaufes von C_3 bis C_1 (240°) macht, und so zum dritten Male mit Jupiter in Konjunktion kommt. Hierauf werden die Konjunktionen in derselben Ordnung aufeinander folgen.

Stehen also die Umlaufszeiten genau im Verhältnisse von 2:5, so werden die Konjunktionen stets in denselben drei Punkten der Bahn stattfinden. Dieser Schluss hat auch Gültigkeit, wenn man die Bahnen excentrisch annimmt; denn wenn auch die Orte der Konjunktion dann etwas verändert werden, so werden doch diese Orte nach der dritten Konjunktion, wenn Saturn genau zwei und Jupiter fünf Umläufe gemacht hat, in derselben Ordnung und an denselben Plätzen wie zuvor wiederkehren.

165) Die Umlaufszeiten von Jupiter und Saturn stehen nahezu im Verhältnisse von 29:72, und deshalb fallen ihre Konjunktionen nahezu auf drei Punkte, die gleich weit voneinander abstehen, und die bei jeder Rückkehr langsam vorwärts gehen.

Die Umlaufszeiten verhalten sich nun aber nicht genau wie 2:5, sondern nahezu wie 29:72. Dies ändert die Entfernung der Orte der Konjunktion. Wir müssen jetzt den Saturn $242{,}_{79}°$ beschreiben lassen, nicht wie vorher 240°, wenn Jupiter mit ihm wieder in Konjunktion kommen soll, denn dann wird Jupiter $\frac{72}{29} \,.\, 242{,}_{79}° = 602{,}_{79}°$ oder einen Umlauf und überdies $242{,}_{79}°$ gemacht haben, sodass thatsächlich beide nunmehr wieder in Konjunktion stehen. Die nächste Konjunktion wird stattfinden, wenn Saturn den doppelten Wert oder $485{,}_{58}°$ beschrieben hat; die dritte wird eintreten, wenn Saturn durch $3 \,.\, 242_{79}° = 728{,}_{37}°$ gegangen ist oder 2 Umläufe und noch $8{,}_{37}°$ darüber zurückgelegt hat. Die nun folgenden 3 Konjunktionen werden nicht an den früheren Punkten erfolgen, sondern gegen diese um $8{,}_{37}°$ vorausliegen; überhaupt werden die Orte von je 3 Konjunktionen $8{,}_{37}°$ den Orten vorausliegen, an welchen die zunächst vorangegangenen 3 Konjunktionen stattfanden.

Wendet man dies auf die Figur 57 an, so findet man, dass die Orte der aufeinander folgenden Konjunktionen etwa sein werden: $B_1\,C_1$, $b_2\,c_2$, $b_3\,c_3$, $b_4\,c_4$, $b_5\,c_5$, $b_6\,c_6$ u. s. w. Dieses Verschieben der Orte der Konjunktion wird nahezu in derselben Weise vor sich gehen, die Bahnen mögen excentrisch sein oder nicht.

166) Hieraus ergiebt sich:

1) Verhalten sich die Umlaufszeiten genau wie 2:5, so finden die aufeinander folgenden Konjunktionen in drei nahezu gleich weit voneinander entfernten Punkten der Bahnen statt.
2) Ist das Verhältnis nicht genau das von 2:5, sondern ein weniger ungleiches, wie das von 29:72, das etwa gleich $2:4{,}_{97}$ ist, so gehen die Punkte der Konjunktion vorwärts, sodass jede Folge von Konjunktionen in Punkten der Bahnen stattfindet, welche um $8{,}_{37}°$ vorausliegen in Bezug auf die Punkte der zunächst vorangegangenen Folge von Konjunktionen.

167) Untersuchen wir nun, wenn die Konjunktionen wieder an demselben Orte wie zuerst stattfinden werden.

Letzteres wird der Fall sein, wenn die Punkte $b_2\,c_2$, $b_5\,c_5$, $b_8\,c_8$ u. s. w. bis $B_1\,C_1$ reichen. Nach welcher Zeit werden diese Punkte so weit vorgerückt sein? Es seien $B_2\,C_2$, $B_3\,C_3$ die Punkte, welche um 120° voneinander und von $B_1\,C_1$ abstehen. Die erste Konjunktion erfolgte, von $B_1\,C_1$ an gerechnet, in $b_2\,c_2$ und zwar um $2{,}_{79}°$ von $B_2\,C_2$ entfernt, nämlich im Abstande $242{,}_{79}°$ von $B_1\,C_1$; die letzte der nun folgenden drei Konjunktionen findet dann in $b_5\,c_5$, um $8{,}_{37}°$ von $b_2\,c_2$ entfernt, statt, während von den nun weiter folgenden nächsten drei Konjunktionen die letzte in $b_8\,c_8$ erfolgt, und zwar wieder um $8{,}_{37}°$ von $b_5\,c_5$ entfernt; denn in drei Konjunktionen rücken ja die Punkte um $8{,}_{37}°$ vorwärts. Nun sind es von $b_2\,c_2$ bis $B_1\,C_1$ im ganzen $120° - 2{,}_{79}° = 117{,}_{21}°$. Von diesen $117{,}_{21}°$ werden also je $8{,}_{37}°$ in drei Konjunktionen durchlaufen; es fragt sich, wievielmal drei Konjunktionen dazu gehören, damit

$117{,}_{21}{}^{0}$ beschrieben werden. Jedenfalls sovielmal 3 Konjunktionen wievielmal $8{,}_{37}{}^{0}$ enthalten ist in $117{,}_{21}{}^{0}$. Es ist $117{,}_{21} : 8{,}_{37} = 14$; also werden die Punkte $b_2\,c_2$, $b_5\,c_5$, $b_8\,c_8$ u. s. w. von $b_2\,c_2$ bis $B_1\,C_1$ gelangen nach 14 mal 3 oder nach 42 Konjunktionen. Da nun $b_2\,c_2$ selbst die nächste Konjunktion nach $B_1\,C_1$ ist, so wird also die Reihe der Punkte $b_2\,c_2$, $b_5\,c_5$, $b_8\,c_8$ u. s. w. bis $B_1\,C_1$ rücken nach $42 + 1 = 43$ Konjunktionen, von der in $B_1\,C_1$ stattfindenden aus gerechnet. Darnach wird die Konjunktion wieder, wie am Anfang, in $B_1\,C_1$, darauf in $b_2\,c_2$, $b_3\,c_3$ u. s. w. stattfinden.

Nun wissen wir, dass nach einer Konjunktion die folgende stattfindet, wenn Saturn sich um $242{,}_{79}{}^{0}$ fortbewegt hat, und da 43 Konjunktionen nach der in $B_1\,C_1$ verfliessen müssen, damit dieselben wieder in $B_1\,C_1$ und den früheren Punkten stattfinden, so werden die Konjunktionen wieder an denselben Orten wie zuerst statthaben, wenn Saturn $242{,}_{79}{}^{0} \times 43 = 10\,439{,}_{97}{}^{0}$ oder rund $10\,440^{0}$ zurückgelegt oder 29 Umläufe gemacht hat. In derselben Zeit wird Jupiter, da sich die Umlaufszeiten wie 29 : 72 verhalten, $29 \times \frac{72}{29}$ oder 72 Umläufe gemacht haben. Die Zeit also, nach welcher die Konjunktionen wieder auf dieselben Punkte fallen, beträgt das 29fache der Umlaufszeit Saturns oder das 72fache von der des Jupiter, oder endlich nahezu 855 Jahre, da zu einem Saturnumlauf $10\,759{,}_{2198}$ Tage gehören.

Die gefundenen Zahlen sind nicht genau, weil das Verhältnis 29 : 72 nicht genau das richtige ist.

168) Betrachten wir nun

die Wirkungen dieser langsamen Bewegung der Punkte der Konjunktion auf die Kräfte, mit denen die beiden Körper einander stören.

169) Haben die Bahnen keine unabhängige Excentricität, sind sie also ohne Störung kreisförmig, so wird der einzige Einfluss auf die Bahnen die periodische Änderung sein, die bei jeder Konjunktion stattfinden wird. Es wird dann bei einer wie bei der andern Folge von Konjunktionen das, was die Dimensionen der Bahn beeinflussen kann, dasselbe sein.

170) Dieses Vorrücken der Punkte der Konjunktion verursacht eine kleine Variation der störenden Kräfte, mit denen der eine Planet auf den andern wirkt, sodass diese Kräfte zu ihren früheren Werten nur dann zurückkehren, wenn die Punkte der Konjunktion um 120^{0} vorgerückt sind.

Sind aber die Bahnen nicht kreisförmig, so gilt das im vorigen Paragraphen Gesagte nicht mehr. Es ist dann nicht einerlei (Fig. 58), ob die Konjunktionen in $B_1\,C_1$, $B_2\,C_2$ und $B_3\,C_3$ erfolgen, oder in $b_1\,c_1$, $b_2\,c_2$ und $b_3\,c_3$. Die Entfernungen der Planeten voneinander sind jetzt nicht immer dieselben, und folglich sind auch die Kräfte, mit denen sie aufeinander in den Konjunktionen einwirken, nicht immer die gleichen; ebenso sind dann ihre Geschwindigkeiten in verschiedenen Teilen der Bahnen oder in den verschiedenen Punkten der Konjunktion verschieden, sodass infolge davon auch die Zeiten, während welcher sie aufeinander in den Punkten der Konjunktion und ihrer Umgebung wirken können, nicht immer dieselben sind.

In der Figur ist z. B. allerdings $b_2\,c_2$ kleiner als $B_2\,C_2$, während $b_3\,c_3$ grösser als $B_3\,C_3$ ist (wo $B_1\,C_1$, $B_2\,C_2$, $B_3\,C_3$ die um je 120^{0} voneinander entfernten früher betrachteten Punkte sind), sodass durch die verschiedenen Wirkungen in den verschiedenen Punkten der Bahn eine teilweise Kompensation in den Änderungen der Wirkungen, die infolge der vorhandenen Excentricitäten eintreten, stattfindet. Allein nur durch sehr genaue Berechnungen kann man sich überzeugen, ob die Kompensation eine vollständige oder teilweise ist, die hierzu nötigen Berechnungen sind vielleicht die verwickeltsten, zu welchen je die physikalischen Wissenschaften Veranlassung gegeben haben, und der Leser kann nicht erwarten, dass ihrer hier auch nur im geringsten Erwähnung gethan werde. Nur das kann hier als Resultat hingestellt werden, dass es im Planetensystem kein Beispiel einer vollständigen Ausgleichung giebt, und dass die Wahrscheinlichkeit einer solchen vollständigen Kompensation in irgend einem Falle unendlich klein ist.

171) Wir haben soeben den veränderlichen Einfluss eines Körpers auf den andern in der Konjunktion betrachtet, und haben uns dabei gedacht, derselbe hänge lediglich von den Excentricitäten ab. Aber es giebt einen andern Umstand, der diesen Einfluss zu verändern strebt; die Bahnen nämlich sind gegeneinander geneigt (bisher dachten wir uns die Bahnen alle in einer Ebene liegend). Ziehen wir diese Neigung in Betracht, so wird sowohl die Entfernung der Planeten voneinander, als auch die Richtung, in welcher sie aufeinander wirken, in den verschiedenen Punkten eine andere sein als früher.

172) In dem Falle von Jupiter und Saturn wirken nun die beiden Planeten aufeinander mit Kräften, welche bei jeder dritten Konjunktion zwar nahezu, aber nicht genau dieselben sind, und deren Änderungen eine Periode von etwa 850 Jahren umfassen (nach 167 finden ja nach 855 Jahren die Konjunktionen an denselben früheren Punkten statt oder sind die Punkte der Konjunktion um 120° vorgerückt). Von diesen Kräften wirken nun einige Teile in der Richtung des Radius Vektor, und diese suchen unmittelbar die grossen Achsen der beschriebenen Bahnen zu beeinflussen (siehe z. B. 46); andere Teile dieser Kräfte sind senkrecht zum Radius Vektor gerichtet, und suchen bald zu beschleunigen, bald zu verzögern, und streben (siehe z. B. 48), wenn auch auf entgegengesetzte Arten, die grossen Achsen zu beeinflussen. Es giebt also Kräfte, welche die grossen Achsen der Bahnen zu ändern suchen, welche alle ihre möglichen Grössen in 850 Jahren durchlaufen. In der einen Hälfte dieser Zeit suchen sie die grosse Achse der Jupiterbahn zu verkleinern, die der Saturnbahn zu vergrössern, während sie in der andern Hälfte das umgekehrte Bestreben zeigen. Dieses Zusammenfallen der Zeiträume des Wachstums der einen grossen Achse und der Abnahme der andern ist freilich das Resultat einer Untersuchung, in die wir hier nicht eingehen können.

173) Die mittleren Entfernungen der Planeten erfahren nach dem vorigen zwar unbedeutende Änderungen, aber diese letzteren erzeugen merkliche Änderungen der Länge.

Wir erwähnten in 170, dass die Änderungen der Kräfte, die auftreten, sobald die Bahnen excentrisch sind, sich zum Teil ausgleichen; es wird also die wirklich übrigbleibende Kraft, welche die im vorigen Paragraphen angegebenen Wirkungen hervorbringt, nur sehr klein sein. In der That ist sie so klein, dass sie nach einer Wirksamkeit von mehr als 400 Jahren (der Hälfte von 855 Jahren), die grosse Achse Saturns nur um $\frac{1}{1350}$, und die Jupiters um $\frac{1}{8560}$ vergrössert oder verkleinert. Solche Änderungen würde man kaum mit unseren besten Instrumenten bemerken können. Allein, wenn die grosse Achse etwa 400 Jahre hindurch zunimmt, also dementsprechend auch die mittlere Entfernung wächst und darnach abnimmt, so wird auch die jährliche Winkelbewegung die einen 400 Jahre hindurch beständig kleiner, und durch die nächsten 400 Jahre beständig grösser werden als ihr Mittelwert (da $T^2 : T_1^2 = R^3 : R^3_1$, — wo T, T_1 die Umlaufszeiten bei den mittleren Entfernungen R, R_1 bedeuten — und deshalb T_1 grösser als T sein wird, wenn R_1 grösser als R ist oder die Winkelbewegung kleiner sein wird für die mittlere Entfernung R_1 als für die von der Grösse R); in dieser langen Periode aber kann die Ungleichheit in Länge eine sehr bedeutende Grösse erreichen (49). So beträgt z. B. diese Ungleichheit in Länge bei Saturn 48 Minuten, um welche also sein wahrer Ort manchmal vor dem mittleren Orte voraus, manchmal hinter demselben zurück ist. Bei Jupiter beläuft sich dieselbe Ungleichheit auf 21 Minuten, während ihr grösster Wert für keinen der übrigen Planeten 3 Minuten übersteigt, und für die unter Jupiter befindlichen Planeten nicht einmal über 25 Sekunden kommt.

Die theoretische Erklärung dieser Ungleichheiten wurde zuerst von Laplace im Jahre 1785 gegeben.

174) Die Grösse dieser Ungleichheiten in den Bewegungen von Jupiter und Saturn hängt also, wie wir gesehen haben, hauptsächlich von der Länge der Zeit ab, während welcher die Kräfte im gleichen Sinne wirken, und zwar 1) weil sie in dieser langen Zeit einen bedeutenden Einfluss auf die Länge der grossen Achse und auf die jährliche Winkelbewegung ausüben, und 2) weil die Planeten dann ja eine geraume Zeit hindurch mit der so geänderten Winkelbewegung einhergehen. Allein man muss dabei auch in Betracht ziehen, dass diese Planeten die grössten des Systems sind, da Jupiter nahezu 300, Saturn nahezu 100 mal so viel Masse hat als die Erde.

175) Dieselben Ursachen erzeugen periodische Änderungen der Excentricitäten und der Orte der Perihelien.

Durch dieselbe Schlussweise, welche uns das Vorhandensein einer periodischen Ungleichheit der grossen Achse jeder dieser Bahnen lehrte, lässt sich auch zeigen (50 u. s. f.), dass es eine periodische Ungleichheit in der Excentricität und dem Orte des Periheliums giebt. Ebenso erhellt, dass auch diese Wirkungen die Überbleibsel sind, die nach der teilweisen Ausgleichung der Wirkungen in den verschiedenen Teilen der Bahn noch vorhanden sind.

Findet z. B. eine Konjunktion statt, wenn sich Jupiter auf das Aphel zu bewegt, so wird die störende Kraft Saturns, die den Jupiter von der Sonne wegzieht, nach 59 die Excentricität der Jupiterbahn vergrössern wollen. Sicher aber wird dann die nächste oder übernächste oder es werden beide diese Konjunktionen an einem Teile der Bahn erfolgen, wo Jupiter zum Perihel hin geht, und somit nach 59 die Excentricität seiner Bahn vermindert wird.

Ähnliches gilt auch von Saturn.

Sache der Rechnung ist es nun, zu entscheiden, ob die Ausgleichung zwischen beiden soeben angegebenen Wirkungen eine vollständige oder nur eine teilweise ist. Diese Kompensation ist nun keine vollständige. Wir können jedoch hier nur sagen: während die Punkte der Konjunktion um nahezu 120° vorrücken, besteht die Wirkung des unausgeglichenen Teils in der einen Hälfte der dazu gehörigen Zeit darin, die Excentricität zu vergrössern, in der zweiten Hälfte darin, sie zu verkleinern.

Es erhellt, dass hier auch kein notwendiger Zusammenhang stattfindet zwischen der Zeit, zu welcher die Excentricität am grössten oder kleinsten ist, und der, wo die grosse Achse ihren grössten oder kleinsten Wert hat, sodass wir nicht behaupten können, die Excentricität sei am grössten, wenn die grosse Achse am grössten oder umgekehrt, und ebenso nicht behaupten können, die Excentricität der einen Bahn sei dann am grössten, wenn die der andern ihren grössten Wert hat. Nur soviel können wir sagen: die Zeit, in welcher die Excentricität jeder Bahn alle ihre möglichen Werte, vom grössten bis zum kleinsten, durchläuft, ist dieselbe wie die, in welcher die grosse Achse alle ihre möglichen Grössen annimmt.

Die Entfernung des Planeten von der Sonne wird durch die Änderung der Excentricität weit mehr beeinflusst, als durch die Änderung der grossen Achse; die Wirkung der ersteren Änderung beträgt nämlich für Jupiter $\frac{1}{1230}$, für Saturn $\frac{1}{314}$ seiner ganzen Entfernung (vergl. hiermit die Werte in 173).

176) Ähnliche Betrachtungen lassen sich in jeder Hinsicht auf die Bewegungen des Perihels jeder Bahn anwenden. Es wird das Perihel während etwa 425 Jahren vor- und 425 Jahre lang zurückschreiten, doch ohne dass ein notwendiger Zusammenhang bestünde zwischen der Zeit, zu welcher das eine und das andere am meisten vorgeschritten ist. Wohl aber findet eine notwendige Beziehung statt zwischen der Änderung der Excentricität und der Bewegung des Perihels jeder Bahn, nämlich:

„Die Excentricität jeder Bahn hat ihren mittleren Wert, wenn das Perihel derselben am meisten vor- oder rückwärts gegangen ist. Ist die Excentricität am grössten oder kleinsten, so ist das Perihel an seinem mittleren Orte.“

177) Weitere ähnliche Fälle im Sonnensystem.

Wir haben zur eingehenden Behandlung die lange Ungleichheit von Jupiter und Saturn gewählt, weil sie infolge ihrer Grösse die auffallendste ist, aber auch weil sie die bekannteste ist durch ihre Geschichte, da sie, ehe ihre Ursache theoretisch erklärt war, durch ihre merkwürdigen Unregelmässigkeiten die Astronomen verwirrte.

Es giebt aber noch andere theoretisch gleich merkwürdige Ungleichheiten.

Das 8fache der Umlaufszeit der Erde ist sehr nahe gleich der 13fachen Umlaufszeit der Venus, und dies bringt in den Bewegungen von Erde und Venus eine geringe Ungleichheit hervor, welche in 239 Jahren durch alle ihre Werte geht (s. Bemerkung zu 178).

Vier Umlaufszeiten Merkurs kommen nahezu der Umlaufszeit der Erde gleich, und dies erzeugt eine Ungleichheit, deren Periode beinahe 7 Jahre beträgt.*)

Die Umlaufszeit des Mars ist beinahe doppelt so gross wie die der Erde; dadurch entsteht eine bedeutende Ungleichheit, welche von den Excentricitäten abhängt u. s. w., nebst der in 159 erwähnten, die von den Excentricitäten unabhängig war.

Die doppelte Umlaufszeit der Venus ist nahezu gleich der 5fachen des Merkur; drei Umlaufszeiten der Venus kommen einer des Mars gleich, und drei Umlaufszeiten des Saturn endlich unterscheiden sich nur wenig von der Umlaufszeit des Uranus. Jede solche Annäherung zur Gleichheit liefert in der Bewegung je zweier Planeten eine Gleichung, d. i. Abweichung vom mittleren Werte, von merklicher Grösse und langer Periode.

178) Die Ungleichheiten sind am grössten, wenn der Unterschied zwischen den zwei Zahlen, welche das Verhältnis der Umlaufszeit derselben sind, klein ist.

Es lässt sich wohl einsehen, dass der Mangel der Ausgleichung, von welchem die behandelten Ungleichheiten abhängen, im einen Falle grösser sein kann als im andern.

Die Konjunktionen von Erde und Mars erfolgen während mehrerer Umläufe in einem ganz bestimmten Punkte und seiner nächsten Umgebung; die von Venus und Mars treten in zwei entgegengesetzt liegenden Punkten und deren nächster Umgebung ein, weil jede nächste Konjunktion stattfindet, wenn Mars eine halbe, und Venus daher eine und eine halbe Revolution beschrieben hat. Die Konjunktionen endlich von Jupiter und Saturn geschehen, wie wir von früher wissen, in drei Punkten, die von Venus und Erde in fünf Punkten.**)

---

*) Die Umlaufszeiten von Merkur und Erde verhalten sich nahezu wie 1 : 4, sodass Merkur 4 Umläufe macht, wenn die Erde einen ausführt. Beschreibt die Erde 1°, so Merkur deren 4, oder für 1°, den die Erde durchläuft, kommt Merkur um 3° voraus (die Bahnen kreisförmig vorausgesetzt); letzterer wird daher um 360° voraus sein, wenn die Erde 120° beschrieben hat; beide werden dann wieder in Konjunktion stehen, wenn dies vorher der Fall war, da von einer solchen Konjunktion aus gerechnet die nächste erfolgt, wenn der eine 360° voraus ist. Erfolgt eine Konjunktion in $E_1 M_1$ (Fig. 59), so wird die nächste stattfinden, wenn Merkur 360° voraus ist, also 120° von $E_1 M_1$ entfernt in $E_2 M_2$. Die folgenden sodann in $E_3 M_3$, wieder 120° von der vorigen weg liegend. Beide Körper stehen demnach an 3 bestimmten Punkten in Konjunktion. Allein das Verhältnis 4 : 1 ist nicht genau, die Umlaufszeiten verhalten sich vielmehr wie $365_{,256} : 87_{,969}$. Die Division ergiebt nahezu $4_{,15}$ sodass sich die Zeiten wie 415 : 100 oder wie 83 : 20 verhalten. Macht die Erde 20°, so beschreibt Merkur 83°, oder er kommt um 63° voraus; um 360° wird er voraus sein, wenn die Erde $\frac{360 \cdot 20}{63} = 114_{,3}{}^{\circ}$ (abgerundet) beschrieben hat. Findet die erste Konjunktion also in $E_1 M_1$ statt, so wird die zweite $114_{,3}{}^{\circ}$ davon entfernt in $e_2 m_2$, also $5_{,7}{}^{\circ}$ vor $E_2 M_2$ erfolgen, die dritte um $114_{,3}{}^{\circ}$ von $e_2 m_2$ in $e_3 m_3$ und zwar $2 \cdot 5_{,7}{}^{\circ}$ vor $E_3 M_3$; die nächste $3 \cdot 5_{,7}{}^{\circ}$ vor $E_1 M_1$. Von $E_1 M_1$ bis $e_2 m_2$ sind es $114_{,3}{}^{\circ}$ und da $e_4 m_4$ um $3 \cdot 5_{,7}{}^{\circ}$ vor $E_1 M_1$ liegt, so wird die folgende Konjunktion auch $3 \cdot 5_{,7}{}^{\circ}$ vor $e_2 m_2$ liegen, die nun folgende $3 \cdot 5_{,7}{}^{\circ}$ vor $e_3 m_3$ u. s. f.; kurz die jetzt folgenden Konjunktionen werden um $3 \cdot 5_{,7}{}^{\circ}$ verschoben sein gegen die vorherigen. Die Konjunktionen werden wieder in der früheren Folge: $e_2 m_2$, $e_3 m_3$ u. s. w. erfolgen, wenn die Punkte $e_2 m_2$, $e_5 m_5$ u. s. f. bis $E_1 M_1$ zurückgegangen sind. Nun ist es von $e_2 m_2$ bis $e_5 m_5$ $3 \cdot 5_{,7}{}^{\circ}$, um welche die Punkte nach je 3 Konjunktionen zurückgehen; da es von $e_2 m_2$ bis $E_1 M_1$ aber $114_{,3}{}^{\circ}$ sind, so werden zu dem Zurückgehen von $e_2 m_2$ bis $E_1 M_1$ sovielmal 3 Konjunktionen gehören, wievielmal $3 \cdot 5_{,7}{}^{\circ}$ enthalten sind in $114_{,3}{}^{\circ}$. Es ist $\frac{114_{,3}}{3 \cdot 5_{,7}} = 6{,}68$ oder abgerundet 7; nach nahezu 7mal 3 Konjunktionen werden die letzteren in derselben Reihenfolge wie ursprünglich stattfinden, von $e_2 m_2$ aus gerechnet, oder, da $e_2 m_2$ selbst die erste Konjunktion von $E_1 M_1$ aus ist, nach 22 Konjunktionen von $E_1 M_1$ aus. Von einer Konjunktion bis zur folgenden legt die Erde $114_{,3}{}^{\circ}$ zurück, nach 22 Konjunktionen somit $114_{,3} \cdot 22 = 2514_{,6}{}^{\circ}$. Da zu einem Umlaufe 360° gehören, so macht dies $\frac{2514_{,6}}{360.} = 7$ Umläufe (nahezu), sodass die Konjunktionen in derselben Reihenfolge stattfinden werden nach etwa 7 Umläufen der Erde oder nach beinahe 7 Jahren.

**) Dass die Konjunktionen von Venus und Erde in 5 Punkten erfolgen, lässt sich auf folgendem Wege zeigen. Stehen beide (Fig. 60) in $B_1 C_1$ in Konjunktion, so wird die nächste stattfinden, wenn die Venus 360° voraus ist. Nun verhalten sich die Umlaufszeiten nahezu wie 8 : 13; macht also die Erde 8°, so die Venus

Im ersten dieser Beispiele hat — eben weil der Ort der Konjunktion immer nahezu an einer und derselben Stelle ist, und wir nur die Wirkung in Konjunktion, als die überwiegende, betrachten — die *ganze* Wirkung, die durch die Änderung eines Punktes der Konjunktion entsteht, auf die Dimensionen der Bahn Einfluss, während im zweiten nur *der Unterschied zweier Wirkungen*, im dritten *die Mischung dreier Effekte*, von denen einer den andern zu beeinflussen sucht, und schliesslich im vierten Beispiele *eine Mischung von fünf Effekten* da ist und die Dimensionen der Bahn beeinflusst. Je kleiner nun die Zahl dieser Effekte ist, d. h. je kleiner die Zahl der Punkte der Konjunktionen ist, desto günstiger sind, vorausgesetzt, dass für die Ungleichheiten gleich lange Perioden angenommen werden, die Umstände zum Entstehen einer grossen Ungleichheit. Die Zahl dieser Punkte ist immer gleich dem Unterschiede zwischen denjenigen zwei kleinsten Zahlen, welche das Verhältnis der Umlaufszeiten genähert ausdrücken. Es wird daher eine grosse Ungleichheit auftreten, wenn die Umlaufszeiten zweier Planeten beinahe in demselben Verhältnisse stehen, wie zwei sehr wenig voneinander verschiedene Zahlen.

Die säkularen Variationen der Elemente der Planetenbahnen.

179) Wir gehen nun über zu den **säkularen** *Variationen der Elemente der Planetenbahnen*. Darunter versteht man diejenigen Variationen, welche nicht von der Stellung der Planeten in ihren Bahnen, auch nicht von den Orten der Konjunktion, sondern nur von den gegenseitigen Entfernungen und Excentricitäten der *Bahnen* und den Stellungen ihrer Apsidenlinien abhängen. Es sind dies demnach die Variationen, welche von der mittleren oder durchschnittlichen Wirkung eines Planeten auf den andern, wie sie für den Verlauf langer Zeiträume gilt, herrühren. Alle merklichen Abweichungen von der säkularen Variation (welche selbst von der *mittleren* Wirkung herrührt), welche durch die Unregelmässigkeit der Einwirkungen der Planeten aufeinander entstehen, werden als in den vorher schon behandelten Ungleichheiten enthalten vorausgesetzt.

A. Über die säkulare Variation der mittleren Entfernung.

180) *Die gegenseitige Einwirkung der Planeten ändert im Laufe der Zeiten die mittlere Entfernung nicht.*

Sehen wir nun *zuerst* nach, ob sich die mittlere Entfernung der Planeten im Laufe der Zeiten ändert, und *betrachten wir* zu diesem Zwecke *einen äusseren Planeten, der einen inneren stört*, wie Saturn den Jupiter.

Welches wird der *Erfolg der im Radius Vektor liegenden störenden Kraft* im Laufe der Zeit sein?

Nach 77 u. f. ist diese Kraft manchmal von der Sonne weg, manchmal zu ihr hin gerichtet, aber die erste Wirkung ist, wie schon mehreremal erwähnt, die grössere (80) und überwiegt, sodass wir im ganzen die störende Kraft als eine die Anziehung der Sonne vermindernde ansehen können. Dies ändert nach 46 das Verhältnis zwischen der Umlaufszeit und der mittleren Entfernung, sodass die letztere kleiner ist, als sie ohne Störung *bei derselben Umlaufszeit* gewesen wäre.

Betrachten wir einen inneren Planeten, der einen äusseren stört, wie Jupiter den Saturn, so ist die nach der Sonne hin gerichtete störende Kraft die über-

13°, oder wenn die Erde um 8° fortrückt, kommt die Venus 5° voraus. Um 360° wird sie dann voraus sein, wenn die Erde $\frac{360 \cdot 8}{5} = 72 \cdot 8 = 576°$ beschrieben oder einen Umlauf und noch $216° = 3 \cdot 72°$ gemacht hat; dann wird also die nächste Konjunktion etwa in $B_2\,C_2$ sein. Die nun folgende tritt ein in $B_3\,C_3$ wieder um $3 \cdot 72°$ von $B_2\,C_2$ oder um 72° von $B_1\,C_1$ entfernt; die spätere in $B_4\,C_4$, von $B_3\,C_3$ um $3 \cdot 72°$ oder von $B_2\,C_2$ um 72° weg; die fünfte in $B_5\,C_5$ und zwar $3 \cdot 72°$ von $B_4\,C_4$, oder $2 \cdot 72°$ von $B_1\,C_1$, oder 72° von $B_3\,C_3$, ab. Die nun folgende sechste wird $3 \cdot 72°$ von $B_5\,C_5$, d. i. wieder in $B_1\,C_1$ erfolgen. In der That also fallen die Konjunktionen auf 5 verschiedene Punkte. Diese Punkte werden sich freilich ändern, wenn das Verhältnis 8 : 13 nicht genau ist, aber die Konjunktionen werden doch in der Nähe dieser Punkte erfolgen.

wiegende (86), und demnach die mittlere Entfernung grösser, als sie bei derselben Umlaufszeit ohne Störung gewesen wäre; wir können die störende Kraft als eine die Anziehung der Sonne vergrössernde ansehen.

Wir wissen nun aus 46, dass, so lange als diese allgemeinen Wirkungen der durch die Sonne gehenden Kraft unverändert fortdauern, sich die mittleren Entfernungen nicht ändern werden. (Es ist ja so gut, als wäre eine andere Sonnenanziehung, aber doch eine solche von immer gleicher Stärke da.) Sehen wir nach, ob dies hier erfüllt ist.

Nehmen wir einen sehr langen Zeitraum, von etwa einigen Jahrtausenden an und teilen wir ihn in zwei oder drei Teile oder Perioden, so werden die zwei Planeten in jedem dieser langen Zeitabschnitte auf allen Stellen ihrer Bahnen in Konjunktion gestanden und jede mögliche relative Lage gehabt haben.

Denkt man sich, der störende Körper führe einen Umlauf aus und der gestörte sei fest an einer bestimmten Stelle, so wäre die gesamte Störung also eine Verminderung der Anziehung der Sonne im einen (für den inneren Planeten), eine Vermehrung derselben im anderen Falle (für den äusseren Planeten). Diese Verminderung oder Vermehrung bleibt unverändert dieselbe, wenn der störende einen Umlauf ausführt und der gestörte an derselben bestimmten Stelle bleibt.

Die Planeten werden nun, wie gesagt, in langer Zeit, also in jeder der Perioden, alle möglichen relativen Lagen gehabt haben. Ist z. B. der eine (der gestörte) wieder und wieder an dieselbe Stelle gekommen, so wird der andere (störende) eine immer andere Stelle und so jeden möglichen Ort seiner Bahn innegehabt und in jedem mit anderer Stärke auf den ersten gewirkt haben, im Durchschnitt aber eben mit solcher Kraft, die das Mittel ist aus allen den Kräften, die er von jeder einzelnen Stelle seiner Bahn aus auf jene bestimmte Stelle der ersten Bahn ausübt. (Diese Kraft ist also zugleich das Mittel aus allen den Kräften, die der störende Planet, wenn er einen Umlauf ausführt, ausübt auf den dabei immer an derselben Stelle stehenden gestörten Planeten.) Dieses Mittel ist für jede der Perioden dasselbe (d. h. in jeder der Perioden ist die mittlere Wirkung, die der störende auf jede bestimmte Stellung des gestörten Körpers ausübt, die gleiche), somit auch die Verminderung oder Vermehrung der Sonnenanziehung dieselbe.

Die mittlere Wirkung des einen Planeten auf den andern ist also für jede bestimmte Stelle der Bahn des gestörten in jeder Periode dieselbe; somit wird auch, da die Gesamtwirkung der störenden Kraft immer eine Verminderung oder Vermehrung der Sonnenanziehung ist, diese Verminderung oder Vermehrung bei jeder Periode dieselbe sein oder es wird so sein, als wäre in jeder Periode die Sonnenanziehung — wenn sie auch grösser oder kleiner wäre ohne Störung — dieselbe. Der gestörte Planet wird daher im ganzen in jeder Periode eine Bahn von konstanter Grösse und Gestalt beschreiben, oder die mittlere Entfernung wird sich nicht ändern.

181) Betrachten wir jetzt die Wirkungen der Kraft senkrecht zum Radius Vektor; hinsichtlich dieser Kraft liegt die Sache anders als vorher. Vorher, von der im Radius liegenden Kraft, konnte man sagen, dass die mittlere Distanz nicht geändert werde, so lange die Kraft im Radius Vektor unverändert fortdauere. Jetzt dagegen genügt die blosse Existenz einer solchen Kraft senkrecht zum Radius Vektor, ohne Variation derselben, um eine Änderung der mittleren Entfernung hervorzubringen (48).*) Wir müssen daher notwendig zeigen, dass die Natur und die Variationen der Kraft solche sind, dass im Laufe der Zeiten die Geschwindigkeit des gestörten Planeten durch sie nicht geändert wird.

Zu diesem Zwecke wollen wir nicht die Kraft senkrecht zum Radius Vektor allein betrachten, sondern die ganze Kraft, welche der Planet auf die Sonne, und die ganze Kraft, welche er auf den gestörten Körper ausübt.

*) Eine solche Kraft, wenn sie auch konstant wirkte, würde beständig die Dimensionen der Bahn — die mittlere Entfernung — ändern; so würde eine beschleunigende Kraft die Bahn erweitern, eine verzögernde sie verengen.

Die Kraft nun, welche er auf die Sonne ausübt, sucht die Sonne nacheinander in allen möglichen Richtungen fortzuziehen und bringt daher im ganzen keine dauernde Ortsveränderung der Sonne hervor, kann also gleich vernachlässigt werden.

Die Kraft, welche ein Planet auf den andern ausübt, hat gewirkt, während — für irgend eine beliebige Stellung des störenden Planeten — der gestörte in jedem Punkte seiner Bahn war. Die ganze Beschleunigung während einer langen Zeit ist gleich der Summe aller einzelnen Beschleunigungen vermindert um die Summe aller Verzögerungen in dieser Zeit; teilen wir nun in Gruppen, bringen wir z. B. in eine Gruppe alle Beschleunigungen und Verzögerungen, die bei einer gewissen Stellung des störenden Körpers überhaupt auftreten können. Hat dieser Körper in sehr langer Zeit dieselbe Stelle oft genug eingenommen, so wird der gestörte an allen möglichen Orten seiner Bahn gewesen sein; in eine Gruppe sollen also jetzt alle die Beschleunigungen und Verzögerungen kommen, die in dieser Zeit der gestörte Körper erfährt. Diese Bewegungsänderungen einer solchen Gruppe sind aber ja ganz dieselben wie die, welche auftreten werden, sobald man den störenden Körper fest und den gestörten einen ganzen Umlauf ausführend denkt, also wie die, welche vorkommen, wenn der gestörte von einem Orte seiner Bahn bis wieder zu demselben kommt und der störende fest ist. Nun sagt aber ein Satz der Mechanik: „Bewegt sich ein Körper in einer Kurve, und ist er der Anziehung eines festen Körpers unterworfen, so ist seine Geschwindigkeit, sobald er den Punkt erreicht, von dem er ausging, genau dieselbe, wie am Anfangspunkte, indem sich Beschleunigung und Verzögerungen genau das Gleichgewicht halten.“ Demnach heben sich alle Beschleunigungen und Verzögerungen einer Gruppe auf. Dasselbe gilt von jeder Gruppe. In langer Zeit treten alle möglichen relativen Stellungen auf; also werden wir in dieser alle Gruppen erhalten, in denen der störende Körper an bestimmter, aber in jeder Gruppe anderer Stelle, der gestörte an allen Stellen seiner Bahn zu denken ist. Es werden sich also überhaupt alle Beschleunigungen und Verzögerungen aufheben, und die Geschwindigkeit wird sich im ganzen nicht ändern. Da sich nun im Laufe der Zeiten des Planeten Geschwindigkeit nicht ändert, und da nach 180 die durch die Sonne gehende, im Radius Vektor liegende Kraft dieselbe bleibt, so wird auch die mittlere Entfernung des Planeten sich nicht ändern.

Natürlich ist dabei nicht ausgeschlossen, dass die Geschwindigkeit an besonderen Orten der Bahn zu- oder abnimmt, sodass die Excentricität und die Apsidenlinie sich ändern können, aber das gefundene Resultat zeigt, dass, wenn auf einer Seite eine Zunahme erfolgt, auf der andern eine Abnahme eintritt, die jene aufhebt; es zeigt weiter, dass die Geschwindigkeit in dem Punkte nicht geändert wird, in welchem sich die Bahn beim Beginne einer langen Periode und die Bahn am Ende derselben schneiden, welcher Punkt beinahe in der mittleren Entfernung sich befindet. In unserem Beweise haben wir freilich vorausgesetzt, dass die Kurventeile, welche in verschiedenen Umläufen bei einer und derselben Stellung des störenden Planeten beschrieben werden, Teile einer und derselben Bahn sind; wir haben also nicht Rücksicht genommen auf die Änderung der Grösse der störenden Kraft, die aus der Änderung des Ortes, welche diese Kraft bewirkt, hervorgeht. Bis zu einem gewissen Grade haben einige Mathematiker dies in Rechnung gebracht, und es zeigte sich dabei, soweit als sie eingingen, dass dadurch keine Änderung in unserem gefundenen Resultate herbeigeführt wird.

B. Die säkulare Variation des Perihels oder der Lage der Apsidenlinie.

182) Die gegenseitige Einwirkung zweier Planeten erzeugt im Laufe der Zeiten ein Vorschreiten der Apsidenlinie, ausser wenn die Bahn des störenden Planeten sehr excentrisch ist, und die Orte ihrer Perihelien nahe zusammenfallen.

Untersuchen wir nun an zweiter Stelle, ob sich der Ort des Perihels oder die Lage der Apsidenlinie ändert. Die Bewegung der letzteren hängt wesentlich von der Excentricität der Bahn des störenden Körpers ab. Nehmen wir z. B. die

Bahn der Venus elliptisch, die der Erde kreisförmig an (Fig. 61), so wird, da die Entfernung dieser Planeten voneinander in Konjunktion wenig mehr als $\frac{1}{4}$ der Entfernung der Erde von der Sonne beträgt, die Venus in ihrem Aphel, wegen der Ellipticität ihrer Bahn, der Erdbahn so nahe gebracht, dass bei weitem die grösste Wirkung auftreten wird, wenn beide hier in Konjunktion kommen. (Denn da die Planeten sich überhaupt nahe sind, so wird eine geringe Annäherung schon, wie sie im Aphel der Venusbahn da ist, gross sein im Vergleich zur Entfernung der Planeten voneinander, also auch eine grosse Änderung in der Einwirkung der Planeten aufeinander statthaben.) Diese überwiegende Kraft im Aphel der Venusbahn ist von der Sonne fort gerichtet und erteilt nach 54 der Apsidenlinie der Venusbahn eine vorschreitende Bewegung.

Ist aber die Erdbahn elliptischer als die Venusbahn, wie es thatsächlich der Fall ist, und liegen die Perihelien beider Bahnen auf derselben Seite der Sonne (Fig. 62), so kann die Hauptwirkung im Perihel stattfinden. Dann würde nach 51 die Apsidenlinie sich rückwärts bewegen.

Diese Wirkungen werden fortbestehen, solange die relative Lage der Apsidenlinien und das Verhältnis der Excentricitäten nahezu dieselben bleiben. Da im Laufe der Zeiten überall Konjunktionen stattfinden werden, so wird die überwiegende Gesamtwirkung der grössten (in Konjunktion) ähnlich, und folglich die säkulare Bewegung der Apsidenlinie konstant sein (im Sinne der grössten Wirkung), bis die Lagen der Apsidenlinien und das Verhältnis der Excentricitäten sich bedeutend geändert haben; die Grösse und Richtung der Apsidenlinie wird von den Excentricitäten der Bahnen beider Körper abhängen.

Ist aber der gestörte Planet ein innerer, und ist die Bahn des andern nicht excentrisch, so wird die Apsidenlinie vorschreiten (54), weil dann, wie wir eingangs sahen, die Wirkung im Aphel überwiegt. Dasselbe gilt, wenn der gestörte Körper ein äusserer ist, indem dann die grösste Wirkung im Perihel eintritt, — falls die innere Bahn nicht excentrisch ist — und nach der Sonne hin gerichtet ist (50).

C. Die säkulare Variation der Excentricität.

183) Die Excentricität der Bahn des störenden Planeten verursacht eine Zu- oder Abnahme der Excentricität der Bahn des gestörten Planeten, je nach der relativen Lage der Apsidenlinien.

Wenden wir uns drittens der Excentricität zu. Ist die Bahn des störenden Körpers kreisförmig, so wird die Wirkung auf die Excentricität, welche hervorgebracht wird, wenn die Konjunktion an dem Orte stattfindet, wo die Bahnen einander am nächsten sind, sowohl hinsichtlich der im Radius Vektor liegenden, als der darauf senkrecht stehenden Kraft, vor der Konjunktion von gerade entgegengesetzter Art sein wie nach derselben. Die Excentricität wird deshalb in diesem Falle nicht geändert werden (58, 59, 68). Z. B.: „In Fig. 61 sei V die Venus, E die Erde. Vor der Konjunktion wird V hinter E_1 zurück sein, in V_1, da V sich schneller bewegt; V_1 wird durch E_1 beschleunigt. Nach der Konjunktion ist V voraus, etwa in V_2, und wird verzögert. Die Kraft im Radius Vektor ist beide Male von A fort gerichtet. Durch letztere Kraft wird die Excentricität von V_1 bis V vergrössert, von V bis V_2 um ebensoviel verkleinert (59). Die Kraft senkrecht zum Radius Vektor vergrössert die Excentricität von V bis V_2, verkleinert sie um dasselbe von V_1 bis V (68)."

Dasselbe wird gelten, wenn beide Bahnen excentrisch sind, vorausgesetzt nur, dass ihre Apsidenlinien zusammenfallen (Fig. 62).

Man sieht also, dass die Excentricität sich nur ändern wird, wenn die Bahn des störenden Körpers excentrisch ist, und seine Apsidenlinie nicht mit der des gestörten zusammenfällt.

Denken wir uns die letzten Bedingungen erfüllt, wie es thatsächlich bei jeder Planetenbahn der Fall ist, so kann man einen allgemeinen Begriff erlangen von der eintretenden Wirkung, indem man den Ort aufsucht, an welchem sich die Bahnen am nächsten sind, und die Wirkungen untersucht, welche die Kräfte vor und nach der an dieser Stelle erfolgenden Konjunktion hervorrufen; denn die überwiegende Einwirkung geschieht ja dann, wenn die Konjunktion an den sich am nächsten liegenden Orten stattfindet, und die Gesamtwirkung ist der grössten ähnlich.

Betrachten wir die Störung, die ein innerer Planet erfährt. Die Konjunktion erfolge also an den Punkten der Bahn, die den kleinsten Abstand voneinander haben. Kommt an dieser Stelle der innere Planet vom Perihel, so nimmt die Excentricität zu, da die störende Kraft ihn von der Sonne weg zieht; geht er nach dem Perihel, so treibt ihn dieselbe Kraft wieder von der Sonne fort und die Excentricität wird folglich abnehmen.

Für den äusseren Planeten ist die Kraft vor und nach der Konjunktion nach der Sonne hin gerichtet, und es gilt daher für ihn gerade das Umgekehrte wie für den inneren. Die Kraft senkrecht zum Radius Vektor bringt für beide Planeten im ganzen keine Wirkung hervor (68).

Diese Wirkungen sind konstant, bis die Excentricitäten und Lagen der Apsidenlinien sich merklich geändert haben.

Der Ort, an welchem zur Zeit der Konjunktion die Wirkung auf die Excentricität am grössten ist, ist streng genommen nicht der Ort, wo die Bahnen einander am nächsten sind, sondern er liegt nur in dessen Nähe.

Sind die beiden Planeten an dem Orte, wo sich die Bahnen am nächsten kommen, so bewegen sich im allgemeinen beide vom Perihel fort oder beide zu demselben hin, sodass die eine Excentricität zunimmt, wenn die andere kleiner wird (da die störende Kraft für den einen nach der Sonne hin, für den andern von ihr fort gerichtet ist).

184) Für die allgemeine Stabilität des Planetensystems sind die Lagen der Apsidenlinien nicht von Wichtigkeit, wohl aber ist von Bedeutung das Gleichbleiben der grossen Achsen und der Excentricitäten.

Wir haben in 181 gezeigt, dass durch die störende Einwirkung eines einzigen Planeten eine säkulare Variation der grossen Achse nicht erzeugt wird. Da dasselbe nun auch für die Störungen gilt, welche mehrere Planeten hervorbringen, so können wir behaupten, dass die grossen Achsen der Planetenbahnen überhaupt keiner säkularen Variation unterworfen sind.

Die Excentricitäten erleiden allerdings eine säkulare Variation, aber auch diese verbessert sich selbst in hinreichend grossem Zeitraume. Führt man die Untersuchung vollständig durch, so findet man nämlich, dass jede Excentricität durch eine Anzahl von periodischen Gliedern ausgedrückt wird, deren Perioden Jahrtausende umfassen. So hat sich die grosse Achse der Erdbahn, trotz ihrer häufigen kleinen Variationen, in vielen Jahrtausenden nicht merklich geändert, und wird sich auch nicht ändern; und was die Excentricität der Erdbahn betrifft, so hat diese zwar viel kleine Variationen erfahren, ist deshalb seit mehreren Jahrtausenden beständig kleiner geworden, und wird auch ferner noch Jahrtausende hindurch abnehmen, wird aber dann auch wieder zunehmen.

185) Ein merkwürdiger Zusammenhang zwischen den Variationen der Excentricitäten aller Planeten.

Ein einfaches Beispiel über merkwürdige Beziehungen zwischen den Excentricitäten zweier Planeten ist am Schlusse von 183 angegeben worden. Für die Variationen der Excentricitäten aller Planeten gilt aber ein anderer merkwürdiger Satz, der sich auf die Grösse der Excentricitäten zu irgend einer bestimmten Zeit bezieht; derselbe heisst:

„Die Summe der Produkte aus dem Quadrate jeder Excentricität, aus der Masse des Planeten und der Quadratwurzel aus der grossen Achse ist stets dieselbe.“