

VIII. Abschnitt.

Störung der Neigung und der Lage der Knoten.

186) Wir sind bisher so verfahren, als bewegten sich Sonne, Mond und Planeten in derselben Ebene, als wäre z. B. die Sonne im Mittelpunkte einer Tafel befestigt, und als bewegten sich alle Planeten mit ihren Satelliten in dieser Ebene. Allein diese Voraussetzung ist nicht richtig. Nehmen wir an, die Erde bewege sich in dieser Tafel, so wird die eine Hälfte der Mondbahn oberhalb, die andere unterhalb der Tafel liegen; sie wird daher die letztere in zwei Punkten schneiden, welche, von der Erde aus gesehen, gerade entgegengesetzt liegen. Ebenso wird die eine Hälfte der Venusbahn über, die andere unterhalb der Tafel liegen und wird die letztere in zwei Punkten schneiden, welche in Bezug auf die Sonne genau entgegengesetzt liegen; überhaupt wird für jeden der Planeten und Satelliten die eine Hälfte seiner Bahn auf der einen, die andere auf der andern Seite der Tafel liegen, und jede solche Bahn wird die letztere in zwei solchen Punkten schneiden, welche in Bezug auf den Centalkörper gerade entgegengesetzt liegen. Bei manchen Untersuchungen ist es nötig, die Neigung der Bahn gegen verschiedene solche Tafeln oder Grundebenen zu betrachten. Die Linie, in welcher die Bahn die Grundebene durchschneidet, heisst die Knotenlinie der Bahn in dieser Ebene, und der Winkel, welchen die Bahnebene mit der Grundebene bildet, wird die Neigung der Bahn gegen diese Ebene genannt. Die Grundebene muss immer so angenommen werden, dass sie durch den Centalkörper geht.

187) Die Neigungen aller Bahnen, ausgenommen die der kleinen Planeten, sind so gering (ist ja die zweitgrösste, nämlich die der Mondbahn gegen die Erdbahn, im Mittel nur 5° ; die der Merkurbahn ist 7°), dass man sie bei der Bestimmung der Störungen der Planeten untereinander im allgemeinen ganz vernachlässigen darf. In einigen Fällen freilich, wie bei den Ungleichheiten von langer Periode, wo die eigentlich wirksame Kraft nur der kleine Rest ist, der nach einer mehr oder weniger vollständigen Ausgleichung übrigbleibt, darf keine Änderung der Kräfte vernachlässigt werden; hier muss dann auch, wie wir in 171 schon andeuteten, die Änderung der Kräfte, welche durch die Neigung der Bahn entsteht, in Rechnung gezogen werden.

188) Obleich aber die Änderung, welche die Neigung in denjenigen Kräften erzeugt, welche den Planeten in der Ebene seiner Bahn zu stören suchen, in den meisten Fällen vernachlässigt werden darf, so darf man doch keinesfalls die Kraft unberücksichtigt lassen, welche den Körper über oder unter die Ebene seiner Bahn zu ziehen sucht. Es ist diese letztere Kraft zwar immer kleiner als die in der Ebene der Bahn wirkende Störung, aber sie ist doch viel grösser als die Änderung, welche die Neigung in der in der Bahnebene wirkenden störenden Kraft hervorbringt. Wir wollen nun in dem vorliegenden Abschnitte die Wirkungen untersuchen, die von den Kräften erzeugt werden, welche bestrebt sind, den Körper aus der Ebene seiner Bahn herauszuziehen.

A. Allgemeine Sätze über die Änderungen des Knotens und der Neigung durch Kräfte, die zur Ebene der Bahn des gestörten Körpers senkrecht stehen, und über die zur Ebene der Bahn senkrechte Störung, welche ein Himmelskörper auf den andern ausübt.

189) Eine Kraft, welche den sich bewegenden Körper gegen eine Grundebene hinzieht, ehe er den grössten Abstand über oder unter dieser Ebene erreicht hat, verursacht eine Rückschreiten der Knotenlinie und eine Abnahme der Neigung.

Betrachten wir zuerst die Wirkungen einer Kraft, die senkrecht zur Ebene der Bahn wirkt; eine Kraft, die in der Ebene der Bahn wirkt, wird natürlich keine Änderung in der Lage derselben hervorbringen. Es sei Fig. 63 eine perspektivische

Darstellung einer Bahn und einer Grundebene; es sei ferner MAN die Knotenlinie, in welcher die Bahn NB_1B_2 die Grundebene schneidet, und in welcher der Centalkörper A liegt. Der ausgezogene Teil der Bahn liege über, der punktierte unter der Grundebene. Gesetzt, der Planet bewegt sich von N nach B_1 , und ehe er den höchsten Punkt über der Ebene DE erreicht, etwa in B_1 , ziehe ihn eine Kraft abwärts nach der Grundebene hin. Nach einer kurzen Zeit würde der Körper ohne die störende Kraft das Stück B_1B_2 beschrieben haben, allein infolge der Störung wird er in derselben Zeit etwa das Stück B_1b_2 zurücklegen*). Offenbar könnte die Bahn, in welcher er ohne störende Kraft den Weg B_1b_2 gemacht hätte, nicht mehr NB_1 , sondern müsste eine Kurve sein wie etwa nB_1 , welche die Ebene DE in n schneidet. Wirkt nun keine störende Kraft weiter ein, so wird der Planet, der das Stück B_1b_2 so beschrieben hat, als käme er ohne Störung von n, nun auch weiterhin eine Bahn beschreiben, als wäre er ohne Störung von n gekommen, d. h. er wird sich in einer Bahn nb_2m bewegen, welche die Ebene DE in den Punkten n und m durchschneidet. Die Knotenlinie MAN ist auf diese Weise übergegangen in mAn .

190) Die Knotenlinie hat sich also in einer Richtung bewegt, die der Bewegungsrichtung des Planeten entgegengesetzt ist, oder sie ist zurückgegangen. Die Neigung der neuen Bahnebene ist augenscheinlich kleiner als die der alten, da sie durch denselben Punkt B_1 geht, und die Grundebene in einer Linie schneidet, welche von B_1 um B_1n , also weiter entfernt ist, als die Linie war, in welcher die alte Bahn DE schnitt, die den Abstand B_1N von B_1 hatte. Wir finden somit:

Die Knotenlinie ist zurückgegangen, die Neigung hat abgenommen.

191) Wirkt eine ähnliche Kraft ein, nachdem der Körper die grösste Entfernung von der Grundebene passiert hat, so verursacht dieselbe ein Rückschreiten der Knotenlinie und eine Zunahme der Neigung.

Der Planet habe den höchsten Punkt über der Grundebene passiert, und es ziehe ihn in B_3 (Fig. 64) eine Kraft nach DE hin, so wird der Planet anstatt nach B_4 nach b_4 gehen, und die Ebene DE nicht in M, sondern in m schneiden. Wird er nicht weiter gestört, so wird er folglich fortan in einer Bahn sich bewegen, von der $B_3 b_4 m$ ein Teil ist, und welche die Ebene DE in den Punkten m und n schneidet.

Die neue Knotenlinie ist also zurückgegangen im Vergleich zur alten, die Neigung ist grösser geworden.

192) Wir haben demnach das folgende allgemeine Resultat:

Eine Kraft, welche senkrecht zur Ebene der Bahn nach der Grundebene hin wirkt, verursacht stets ein Rückschreiten der Knotenlinie; sie verkleinert die Neigung, während sich der Planet von einem Knoten nach dem am höchsten über der Grundebene liegenden Punkte hin bewegt, und vergrössert sie, während er vom höchsten Punkte nach einem Knoten zu geht.

193) Ganz auf dem bisherigen Wege findet man das Folgende:

Wirkt eine Kraft senkrecht zur Bahnebene, und zwar von der Grundebene fort gerichtet, so bewegt sich die Knotenlinie vorwärts; die Neigung nimmt zu, wenn der Planet von einem Knoten nach dem höchsten Punkte geht, und nimmt ab, wenn er vom höchsten Punkte nach einem Knoten zu läuft.

194) Ähnliche Resultate erhält man, wenn man die Wirkungen dieser Kräfte untersucht, während der Planet sich unter der Grundebene DE befindet. Eine nach letzterer hin gerichtete Kraft verursacht ein Rückschreiten der Knoten und eine Abnahme der Neigung, wenn der Planet nach dem tiefsten Punkte zu geht, und ein Rückschreiten der Knotenlinie, aber eine Zunahme der Neigung, wenn der Planet vom tiefsten Punkte fort geht; das Umgekehrte gilt, wenn die Kraft von der Grundebene fort gerichtet ist. Im folgenden wollen wir diejenige zur Ebene der Bahn senkrecht stehende Kraft betrachten, welche von der Anziehung eines störenden Körpers herrührt.

*) B_1b_2 ist Diagonale des Parallelogramms aus B_1B_2 und der Störung.

195) Wenn Centalkörper und umlaufender Körper gleich weit vom störenden entfernt sind, so giebt es keine zur Ebene der Bahn senkrechte Störung. Es ist eine nach dem störenden Körper hin oder von ihm fort gerichtete störende Kraft vorhanden, wenn der umlaufende Körper dem störenden näher ist oder weiter von ihm absteht als der Centalkörper.

Steht der störende Körper in der Ebene der Bahn, so wird er weder den Centalkörper noch den Planeten aus dieser Ebene zu entfernen suchen, es wird also keine störende Kraft senkrecht zur Bahnebene geben. Nehmen wir nun an, der störende Körper C stehe ausserhalb der Ebene der Bahn (Fig. 65), die wir der Einfachheit halber stets als eine kreisförmige ansehen wollen. Von den 3 Punkten B_1, B_2, B_3 der Bahn sei B_1 von C ebensoweit entfernt als A, B_2 liege näher an C, B_3 weiter von C als A. Die Anziehung von C bringe in einer gewissen kleinen Zeit den Körper A von A nach a, und den Planeten, wenn er in B_1, B_2, B_3 ist, in derselben Zeit nach b_1, b_2, b_3 . Nach 71 würde dann die Anziehung von C auf die zwei Körper A und B keine Störung in ihren relativen Bewegungen hervorbringen, wenn sie dieselben um gleiche Strecken in derselben Richtung fortzöge. Man ziehe nun B_1d_1, B_2d_2, B_3d_3 jedes gleich und parallel zu Aa; hätte dann die Anziehung B_1 nach d_1 gezogen, so gäbe es keine Störung. Da aber B_1 in Wirklichkeit in b_1 ist, so ist die wirkliche Störung dargestellt durch eine Kraft, die den Planeten von d_1 nach b_1 bewegen kann. Ebenso sind die wirklichen Störungen in B_2 und B_3 durch Kräfte dargestellt, welche den Planeten von d_2 nach b_2 , und von d_3 nach b_3 bewegen können. Da nun $CA = CB_1$, angenommen worden ist, so sind die Kräfte von C auf A und B_1 , und deshalb auch die Stücke, um welche A und B_1 fortgezogen werden, einander gleich, d. h. $B_1b_1 = Aa$. Hieraus folgt, dass ab_1 parallel AB_1 ist (weil Dreieck AB_1C gleichschenkelig ist, und ab_1 von den gleichen Schenkeln AC und B_1C gleiche Stücke aA, b_1B_1 abschneidet), und dass b_1d_1 mit ab_1 in einer Geraden liegt. (Es geht B_1d_1 durch den Punkt B_1 der Ebene AB_1C und ist parallel Aa; daher liegt B_1d_1 und somit auch d_1b_1 in der Ebene AB_1C . Die Dreiecke $aCb_1, b_1d_1B_1$ sind gleichschenkelig, da $aC = b_1C$ und $d_1B_1 = b_1B_1$; ihre Winkel an der Spitze sind gleich: $\sphericalangle d_1B_1b_1 = \sphericalangle ACb_1$ als Wechselwinkel an Parallelen, somit sind auch ihre Basiswinkel gleich: $\sphericalangle d_1b_1B_1 = \sphericalangle ab_1C$, was nur möglich ist, wenn ab_1 und b_1d_1 in einer Geraden liegen.) Die ganze störende Kraft, deren Richtung ja d_1b_1 oder wie man auch sagen kann, B_1A ist, liegt also parallel zum Radius Vektor oder parallel zur Ebene der Bahn, und es giebt keine auf der Ebene der Bahn senkrechte Störung.*)

In B_2 steht der Planet näher bei C, die störende Kraft wirkt stärker auf ihn, und es ist demnach B_2b_2 grösser als Aa oder B_2d_2 ; weil ferner auch noch B_2b_2 der Senkrechten zur Bahnebene (in B_2 etwa errichtet gedacht) näher liegt, d. h. einen kleineren Winkel mit ihr bildet als B_2d_2 , so ist b_2 von der Ebene der Bahn weiter entfernt als d_2 (siehe auch Fig. 66**), die störende Kraft d_2b_2 ist daher von einem Punkte d_2 nach einem von der Ebene weiter ab liegenden Punkte b_2 , also nach der Seite des störenden Körpers hin gerichtet; sie ist von der Ebene der Bahn fort nach der Seite hin gerichtet, auf welcher C liegt.

Befindet sich dagegen der Planet in B_3 , so ist er weiter von C entfernt als A, die Kraft auf ihn ist kleiner; B_3b_3 ist kleiner als Aa oder B_3d_3 . B_3d_3 liegt jetzt näher an der Senkrechten (in B_3 errichtet) als B_3b_3 , und da noch B_3b_3 kleiner als B_3d_3 ist, so heisst das, d_3 ist weiter von der Ebene entfernt als b_3 , oder die störende Kraft, die doch von d_3 nach der Ebene näheren Punkte b_3 gerichtet ist, wirkt von der Seite, auf welcher C steht, weg, nach dem der Ebene der Bahn (siehe auch Fig. 66).

*) Denkt man sich etwa durch b_1 eine Parallele zu B_1d_1 gezogen, die AB_1 in D schneiden mag (Fig. 65), so hat man, um einen andern Ausdruck zu gebrauchen, die Bewegung B_1b_1 in die zwei: B_1d_1 und B_1D zerlegt. Infolge B_1d_1 allein giebt es keine Störung, da B_1d_1 gleich und parallel Aa ist; nur B_1D stellt die Störung dar, und diese liegt in der Bahnebene, im Radius Vektor.

**) AB_2 stelle die Bahn im Durchschnitt dar; B_2C ist kleiner als AC (Fig. 66), B_2b_2 bildet mit der Senkrechten B_2L zur Bahn einen kleineren Winkel als B_2d_2 und B_2b_2 ist grösser als B_2d_2 , daher ist der Abstand des Punktes b_2 von der Ebene AB_2 grösser als der des Punktes d_2 .

Wir erhielten folgende Resultate:

- 196)** a. Wenn Centralkörper und umlaufender Körper gleich weit vom störenden entfernt sind, giebt es keine zur Ebene der Bahn senkrechte störende Kraft.
- 197)** b. Steht der revolvierende Körper dem störenden näher als der Centralkörper, so sucht die zur Ebene der Bahn senkrecht stehende Störung den revolvierenden Körper aus dieser Ebene heraus nach der Seite des störenden Körpers zu ziehen.
- 198)** c. Ist der umlaufende Körper weiter vom störenden entfernt, als der Centralkörper, so sucht die zur Ebene der Bahn senkrechte Störung den umlaufenden Körper aus dieser Ebene vom störenden fort zu treiben.*)

Wir wollen nun die so gefundenen Resultate anwenden auf die Änderung des Knotens und der Neigung der Mondbahn durch die Anziehung der Sonne. Als Grundebene wollen wir dabei die Erdbahn annehmen.

B. Änderung des Knotens und der Neigung der Mondbahn durch die Anziehung der Sonne.

199) Wenn die Knotenlinie der Mondbahn in den Syzygien liegt, giebt es keine Änderung des Knotens oder der Neigung.

Nehmen wir erstens an, die Knotenlinie der Mondbahn gehe durch die Syzygien oder durch die Sonne, dann steht die Sonne in der Ebene der Mondbahn, und es giebt daher nach 195 keine zur Ebene der Mondbahn senkrechte störende Kraft.

200) Geht die Knotenlinie durch die Quadraturen, so schreitet sie schnell zurück, aber die Neigung bleibt ungeändert.

Nehmen wir zweitens an, die Knotenlinie gehe durch die Quadraturen oder stehe senkrecht zur Verbindungslinie von Erde und Sonne. Die Sonne soll jetzt als unter der Ebene der Mondbahn stehend angenommen werden, wie es mit Figur 67 übereinstimmt. Da die Entfernung des Mondes von der Erde klein ist im Vergleich zur Entfernung der Sonne, so werden die Punkte, in denen Mond und Erde von der Sonne gleich weit entfernt sind, nahe mit den Punkten der Quadraturen, also im vorliegenden Falle mit den Knoten zusammenfallen (81). Während also der Mond sich von B_4 über B_1 nach B_2 bewegt, steht er der Sonne näher als die Erde, und die störende Kraft sucht ihn daher, nach 197, aus der Ebene seiner Bahn abwärts zu ziehen, nach der Grundebene hin; während er von B_2 über B_3 nach B_4 geht, ist er weiter von der Sonne entfernt als die Erde, und die störende Kraft wird ihn aus der Ebene seiner Bahn, von der Seite, auf welcher die Sonne steht, fort, also aufwärts treiben (198), nach der Grundebene hin. Bedenkt man nun, dass die Störung, wie wir soeben gefunden haben, stets nach der Grundebene hin gerichtet ist, und wendet man das in 192 und 194 Gesagte an, so ergibt sich:

Bewegt sich der Mond von B_4 nach B_1 , wo B_1 der höchste Punkt über der Grundebene ist, so geht die Knotenlinie zurück, die Neigung nimmt ab; geht er von B_1 nach B_2 , so schreitet die Knotenlinie zurück, die Neigung wird grösser. Während der Bewegung von B_2 nach B_3 bewegt sich die Knotenlinie rückwärts, die Neigung wird geringer, und endlich während der Bewegung von B_3 nach B_4 geht die Knotenlinie zurück, die Neigung wird vergrössert.

Während eines Umlaufes wird also die Neigung nicht merklich geändert, da sie abwechselnd zu- und abgenommen hat,**) die Knotenlinie aber geht beständig zurück.

*) Die ganze störende Kraft d_3b_2 , d_3b_3 ist nicht notwendig senkrecht zur Ebene, aber man kann sie doch immer in zwei Kräfte zerlegen, von denen die eine senkrecht dazu ist, die andere in der Ebene selbst liegt.

**) Die Strecken B_4B_1 , B_1B_2 , B_2B_3 , B_3B_4 , auf denen die Neigung ab- und zunimmt, sind nahezu gleich, werden beinahe in gleichen Zeiten durchlaufen, sodass die Kraft die gleiche ist, und Ab- und Zunahme der Neigung beinahe gleich sind.

201) Wenn der Mond die Knotenlinie passiert, während er von einer Quadratur nach einer Syzygie geht, so nimmt die Neigung ab, passiert er sie, während er von einer Syzygie nach einer Quadratur geht, so nimmt die Neigung zu; in beiden Fällen bewegt sich der Knoten rückwärts.

Es seien B_2, B_4 die Quadraturen, B_1, B_3 die Syzygien (Fig. 68), NM die Knotenlinie. Nehmen wir also drittens die Knotenlinie in solcher Lage an, dass der Mond sie passiert, während er von einer Quadratur nach einer Syzygie geht. Wieder wollen wir die Sonne als unter der Ebene der Bahn des Mondes stehend betrachten. Wie im vorigen Paragraphen erwähnt wurde, ist der Mond, während er von B_4 über B_1 nach B_2 geht, näher bei der Sonne als die Erde, sodass ihn die störende Kraft aus der Ebene seiner Bahn abwärts zu ziehen sucht; er ist ferner auf der Strecke $B_2B_3B_4$ weiter von der Sonne entfernt als die Erde, weshalb ihn die störende Kraft aufwärts aus seiner Bahnebene zu bringen sucht. Daraus folgt, dass, während der Mond sich von B_4 nach N bewegt, die störende Kraft ihn von der Grundebene wegtreibt (eben abwärts), und deshalb nach 193 ein Vorschreiten der Knotenlinie und eine Abnahme der Neigung verursacht. Es folgt weiter: geht der Mond von N nach dem höchsten Punkte O, so zieht die Kraft den Mond (abwärts) nach der Grundebene hin, und bewirkt daher ein Rückschreiten der Knoten und eine Abnahme der Neigung (192); vom höchsten Punkte O bis B_2 zieht die Kraft den Mond immer noch (abwärts) zur Grundebene hin, verursacht daher abermals ein Rückschreiten der Knoten, aber eine Zunahme der Neigung. Während der Mond also von B_4 nach N geht, erhält die Knotenlinie von der störenden Kraft eine vorschreitende, und während er von N nach B_2 sich bewegt, eine rückschreitende Bewegung. Ebenso kann man finden, dass dieselbe Kraft der Knotenlinie eine direkte Bewegung erteilt, während der Mond das Stück B_3M zurücklegt, aber eine retrograde, während er von M nach B_4 geht. Hatte die Knotenlinie die Lage B_1B_3 , so änderte sie sich nicht; ging sie durch B_2B_4 , so führte sie eine starke retrograde Bewegung aus; hat sie die Lage NM, zwischen den beiden vorigen Lagen, so führt sie nicht nur eine rückschreitende, sondern zum Teil auch eine vorschreitende Bewegung aus, aber sie wird doch im ganzen zurückgehen, wenn auch nicht so rasch wie vorher in 200. Denn die rückschreitende Bewegung ergibt sich für die Strecken NB_1OB_2 und MB_3PB_4 , die vorschreitende für B_4N und B_2M ; aber die ersteren sind viel grösser als die letzteren, da z. B. schon B_1B_3 ein Viertel der Bahn ist, dieselbe kreisförmig gedacht, daher NB_1OB_2 und MB_3PB_4 zusammen viel grösser als die halbe Bahn sind, und die störende Kraft also auf grösserer Strecke und für viel längere Zeit das Rückschreiten hervorbringt als das Vorschreiten.

Für die Neigung ergibt sich:

Geht der Mond von B_4 nach O, so nimmt die Neigung ab, geht er von O nach B_2 , so nimmt sie zu; bewegt er sich von B_2 nach P, dem tiefsten Punkte unter der Grundebene, so wird die Neigung kleiner, und bewegt er sich von P nach B_4 , so wird sie grösser, im ganzen aber nimmt die Neigung ab. Denn die Abnahme erfolgt von B_4 bis O und von B_2 bis P, die Zunahme von O bis B_2 und von P bis B_4 , wobei wieder die ersteren Strecken weitaus die grösseren sind, also die Abnahme erzeugende Kraft auf längerer Strecke und längere Zeit einwirkt.

202) Es liege viertens die Knotenlinie so, dass der Mond durch sie geht, wenn er von einer Syzygie nach einer Quadratur geht. B_2, B_4 seien (Fig. 69) die Orte der Quadraturen, B_1, B_3 die Syzygien. B_4 liegt jetzt oberhalb der Grundebene. Denken wir uns abermals die Sonne unter der Ebene der Mondbahn stehend, so sucht die Kraft den Mond, während er die Strecke $B_4B_1B_2$ durchläuft, aus seiner Bahn abwärts, und während er von B_2 über B_3 nach B_4 geht, aufwärts zu ziehen. Daraus folgt:

„Während der Bewegung von B_4 bis M und von B_2 bis N, wo die Kraft zur Grundebene hin wirkt, geht die Knotenlinie zurück; von M bis B_2 und von N bis B_4 , wo die Kraft von der Grundebene weg gerichtet ist, schreitet dieselbe Linie vor. Die-

selben Schlüsse wie in 201 ergeben, dass das Rückschreiten überwiegt, also die Knotenlinie im ganzen zurückgeht.

Die Neigung wird von B_1 bis O abnehmen, von O bis B_2 zunehmen, von B_2 bis P ab- und von P bis B_1 zunehmen. OB_2 und PB_1 sind die grösseren Strecken und werden in längerer Zeit beschrieben, die Wirkung hier wird überwiegen, d. h. die Neigung nimmt im ganzen zu.“

Dieselbe Schlussweise lässt sich anwenden und führt auf in jeder Hinsicht gleiche Resultate, wenn wir die Mondbahn in der entgegengesetzten Richtung geneigt voraussetzen, wo dann die Sonne oberhalb der Bahn stünde.

203) Es fragt sich nun, ob die Knotenlinie in der That alle die angegebenen Lagen haben kann. Das ist der Fall; denn die Erde bewegt sich um die Sonne oder die letztere bewegt sich scheinbar in demselben Sinne um die erstere, in welchem der Mond um die Erde läuft. Gehen wir jetzt von dem Stande der Sonne aus, wo die Knotenlinie durch die Sonne geht, und wo nach früherem weder die Knotenlinie noch die Neigung eine Änderung erfährt, und denken wir uns nun also, dass die Sonne sich um die Erde bewegt von der eben angenommenen Stellung in der Knotenlinie aus. Ist die Sonne so bis S_1 gekommen (Fig. 70), so sind Q_1, Q_2 die Punkte der Quadraturen, M ist eine Syzygie; wir kommen also zunächst zu der Lage, wo der Mond die Knotenlinie K_1K_2 passiert, während er von einer Quadratur zu einer Syzygie geht, wo nach dem dritten Falle, in 201, die Knotenlinie zurückgeht und die Neigung abnimmt.

Hat sich die Sonne scheinbar weiter bewegt bis S_2 , so kommen wir zu der Lage, in welcher die Knotenlinie mit der Linie der Quadraturen zusammenfällt, wo nach dem zweiten Falle, in 200, der Knoten schnell zurückschreitet, und die Neigung ungeändert bleibt.

Darnach kommen wir zu der Lage S_3 der Sonne, in welcher der Mond durch die Knotenlinie geht, während er sich von einer Syzygie — das würde z. B. Q_1 sein — nach einer Quadratur L bewegt, wo nach dem vierten Falle, in 202, der Knoten rückwärts schreitet, und die Neigung zunimmt. Schliesslich kommen wir wieder zu einer Stellung S_4 der Sonne, in welcher die Knotenlinie abermals durch die Sonne geht. Dies geschieht, wenn die Sonne einen halben scheinbaren Umlauf um die Erde, oder eigentlich, wegen des Rückschreitens des Knotens, etwas weniger gemacht hat. In dem folgenden halben Umlaufe werden in jeder Hinsicht dieselben Veränderungen in derselben Reihenfolge eintreten.

Es ergibt sich also, dass infolge der Umlaufsbewegung der Erde um die Sonne oder infolge der scheinbaren Bewegung der Sonne um die Erde, die Knotenlinie der Mondbahn nach und nach wirklich in alle die Lagen kommt, welche wir in den obigen vier Fällen, in 199 bis 201, betrachtet haben.

Die Veränderungen, die während eines solchen Umlaufes die Knotenlinie und die Neigung erfahren, lassen sich demnach so zusammenfassen:

„Die Knotenlinie der Mondbahn geht beständig zurück. Die Neigung ist am grössten, wenn die Knotenlinie durch die Sonne geht oder mit der Linie der Syzygien zusammenfällt, und am kleinsten, wenn die Knotenlinie durch die Quadraturen geht,“ da sie beständig abnimmt von der ersten Lage bis zur letzteren (während die Sonne von S bis S_2 geht), und beständig grösser wird von der letzteren Lage bis wieder zur früheren (während die Sonne von S_2 bis S_4 geht).

Die angegebene Ungleichheit ist die hauptsächlichste in der Neigung der Mondbahn; alle übrigen sind sehr klein.

204) Das Rückschreiten der Knotenlinie ist etwas kleiner als aus einer ersten Berechnung folgt.

Wie wir wissen, schreitet die Knotenlinie beständig zurück, ausgenommen, wenn sie durch die Sonne geht. Die jährliche Bewegung dieser Linie, welche wir anfangs erwarten sollten, wird durch den folgenden Umstand etwas verkleinert.

Hat die Knotenlinie (Fig. 71) die Lage K_1K_2 , während die Sonne in S_3 steht, ist sie also in der Stellung, in welcher die Wirkung die grösste ist, so bewegt sich die Knotenlinie

rasch rückwärts, sie entfernt sich somit schnell wieder von dieser Lage der grössten Wirksamkeit. Freilich, auch wenn sie nicht zurückginge, so würde doch durch die Bewegung der Sonne die Linie der Quadraturen fortrücken, z. B. von K_1K_2 nach Q_1Q_2 , und somit die Knotenlinie rasch von der Linie Q_1Q_2 der grössten Wirksamkeit entfernt werden. Aber wenn die Knotenlinie selbst noch rasch zurückgeht, so kommt sie noch viel schneller und weiter von der Lage Q_1Q_2 der grössten Wirkung fort (etwa um den Winkel $K_1'EQ_1$, wenn sie selbst um den Winkel $K_1'EK_1$ rückwärtsgegangen ist, während die Linie der Quadraturen bis Q_1Q_2 vorgerückt ist), als es eben infolge der Bewegung der Sonne allein der Fall sein würde. So wird die Dauer der grössten Wirkung durch das rasche Rückschreiten, und damit das, was durch diese Wirkung hervorgebracht wird, nämlich das Rückschreiten selbst, verringert.

Da aber die Knotenlinie niemals vorwärts geht, so wird diese Verminderung ihrer Bewegung viel kleiner als die in 107 erwähnte Zunahme der Bewegung der Apsidenlinie, welche letztere Linie ja vor- und rückwärts geht. Weil ferner die Kraft auf entgegengesetzten Punkten der Bahn, wie wir sahen, Wirkungen derselben Art hervorbringt, eben weil die Knotenlinie stets zurückgeht, so wird es hier keine Ungleichheit geben, die der in 106 behandelten ähnlich ist. Daher weicht die wirkliche rückschreitende Bewegung der Knotenlinie, obgleich sie etwas kleiner ist, als man beim ersten Anblicke hätte erwarten sollen, von diesem erwarteten Werte doch nur um eine Grösse ab, die viel kleiner ist, als die, um welche sich die wirkliche Bewegung der Apsidenlinie von der auf den ersten Blick erwarteten unterscheidet. Die Knotenlinie führt in etwas mehr als 19 Jahren einen ganzen Umlauf aus.

205) Die Wirkungen der Unregelmässigkeiten im Rückschreiten der Knoten, welche letztere ja bald schneller, bald langsamer zurückgehen, und die Wirkung des abwechselnden Zu- und Abnehmens der Neigung vermischen sich mit einer Ungleichheit der Breite, welche von den Längen der Sonne, des Mondes und des Mondknotens abhängt. Diese Ungleichheit wurde um das Jahr 1590 von Tycho de Brahe aus Beobachtungen entdeckt. Sie steht zur Neigung im ähnlichen Verhältnisse, wie die Evektion zur Excentricität, und wie die Evektion die grösste Ungleichheit in Länge ist, so ist sie die grösste in Breite. Sie ist jedoch viel kleiner als die Evektion, da ihre grösste Wirkung auf die Mondbreite einen Wert von $8'$ erreicht, um welche die mittlere Neigung der Mondbahn bald vergrössert, bald verkleinert wird.

206) Es giebt noch andere Ungleichheiten in der Breite des Mondes, welche entstehen theils aus den Änderungen, welche Knoten und Neigung erleiden, die in jedem Mondumlaufe mehreremal stattfinden (siehe 200 am Schlusse u. f.), theils aus den Excentricitäten der Erd- und Mondbahn, theils von der die Variation begleitenden Änderung, und theils von der Veränderlichkeit der Neigung selbst. Wir können jedoch nicht auf die Erklärung aller dieser Dinge eingehen.

C. Störungen der Planeten in Breite.

207) Neigung und Knoten eines inneren Planeten werden durch einen entfernten äusseren Planeten nahezu in derselben Weise beeinflusst wie Neigung und Knoten des Mondes durch die Sonne.

Wir wollen uns nun zu den Störungen wenden, welche die Planeten in Breite erfahren.

Beim Monde sahen wir als Grundebene an die Ebene der Erdbahn oder die der scheinbaren Sonnenbahn, also die scheinbare Bahn des störenden Körpers. Auch bei den jetzigen Untersuchungen eignet sich als Grundebene am besten die Ebene der Bahn des störenden Planeten. Betrachten wir zuerst den Fall, wo Merkur oder Venus durch Jupiter gestört wird. Für diese zwei Planeten ist die Sonne Centralkörper, und da Jupiter, weil er weit entfernt ist, lange Zeit braucht, um einen Umlauf auszuführen (viel

längere Zeit als Merkur und Venus), so bringt derselbe eben die Wirkungen hervor, welche die Sonne beim Monde hervorbringt, für welchen die Erde Centalkörper ist; die Sonne nämlich vollendet auch erst in längerer Zeit ihren scheinbaren Umlauf, und zwar in viel längerer Zeit als der Mond. Die störende Kraft Jupiters bewirkt also, dass die Knoten der Merkur- und Venusbahn auf der Bahn des Jupiter, die jetzt Grundebene ist, zurückschreiten, bewirkt ausserdem eine Unregelmässigkeit in der Bewegung jedes Knotens, und verursacht eine Änderung in der Neigung. Alle diese Wirkungen kombinieren sich, können also in eine vereinigt werden, und diese ist die einzige merkliche Ungleichheit, welche in der Breite beider Planeten durch Jupiter hervorgebracht wird.

208) Die anderen Ungleichheiten in Breite, welche von der gegenseitigen Lage der Planeten abhängen, bieten kein besonderes Interesse, aber einen allgemeinen Begriff von ihnen kann man aus den Bemerkungen gewinnen, die wir bei der Untersuchung der Bewegung der Mondknoten gemacht haben. Ein Fall jedoch lässt sich hier leicht erörtern.

Wenn ein äusserer Planet durch die Anziehung eines inneren gestört wird, dessen Entfernung von der Sonne kleiner ist als die halbe Entfernung des äusseren von der Sonne, und dessen Umlaufszeit daher viel kürzer ist (da die Quadrate der Umlaufzeiten sich wie die Kuben der mittleren Entfernung verhalten), so ist der äussere Planet stets vom inneren weiter entfernt als es die Sonne ist, und es giebt deshalb nach 195 stets eine von der Seite, auf welcher der störende Körper steht, fort gerichtete Kraft, welche ihn, den äusseren Planeten, von der Grundebene fort treibt, sobald die Planeten in Konjunktion stehen, z. B. in a_2 und i (Fig. 72), und zu dieser Ebene hin zieht, wenn sie in Opposition sind, in a_1 und i . (In der Figur bedeutet Si die Bahn des inneren, also die Grundebene, a_2Sa_1 die Bahn des äusseren Planeten, wobei die Pfeile die Richtung der Kräfte andeuten.) So wird der äussere Planet von Konjunktion zu Konjunktion abwechselnd auf und ab getrieben, d. h. von der Grundebene fort und zu ihr hin getrieben. Steht er jedoch in der Knotenlinie seiner Bahn, also in der Durchschnittsline seiner Bahn mit der des störenden inneren Planeten, so verschwindet die Störung nach 195 am Anfang.

209) Sind die Umlaufzeiten zweier Planeten nahezu kommensurabel, so werden in der Neigung und Lage der Knoten lange Ungleichheiten hervorgebracht.

Die nahezu erreichte Kommensurabilität der Umlaufzeiten, welche die grosse Achse, die Excentricität, und den Ort des Perihels so auffallend beeinflusst, übt auch bedeutende Wirkungen auf die Knoten und die Neigung aus. Die Schlussweise in 175 und 176 lässt sich in jeder Hinsicht auch auf den vorliegenden Fall anwenden: „Die grösste Wirkung auf die Bewegung des Knotens sowohl wie auf die Änderung der Neigung findet statt, wenn die Planeten in Konjunktion sind; die stufenweise Änderung der Punkte der Konjunktion (z. B. B_1C_1 , b_4c_4 , b_7c_7 u. s. w. bei Saturn und Jupiter) bewirkt eine stufenweise Änderung dieser Wirkungen, welche jedoch, wie z. B. in dem Falle von Jupiter und Saturn, durch die stufenweise Änderung der anderen Punkte der Konjunktion (wie b_2c_2 , b_5c_5 , b_8c_8 und b_3c_3 , b_6c_6 . . . bei Jupiter und Saturn, Fig. 57) teilweise aufgehoben werden; der nicht ausgeglichene Teil bringt jedoch in vielen Jahren eine sehr merkliche Ungleichheit in den Elementen hervor. Alles in 175 u. f. Gesagte gilt ohne Änderung auch hier, wenn wir dort für die Worte Apsidenlinie und Excentricität setzen Knotenlinie und Neigung.“

210) Im Laufe der Zeit verursacht die Einwirkung des einen Planeten ein Rückschreiten der Knoten des andern; die Neigung aber ändert sich nur, wenn eine der Bahnen excentrisch ist.

Für die säkulare Variation der Lage der Bahn scheinen die folgenden Betrachtungen hinreichend.

Im Laufe einer langen Zeit ist der gestörte Planet in jedem Punkte seiner Bahn eine grosse Anzahl Male gewesen, während der störende beinahe auf jedem Teile seiner Bahn war, sodass der störende jedesmal an anderer Stelle, und so nach und nach an allen Stellen seiner Bahn sich befunden hat, wenn der gestörte wieder und wieder zu demselben bestimmten

Orte seiner Bahn gekommen ist. Die störende Kraft ist immer der Unterschied der Kräfte, welche auf Sonne und Planet wirken. Da der störende Planet, in seinen verschiedenen Stellungen, auf die Sonne in allen möglichen Richtungen in der Ebene seiner Bahn wirkt, so kann seine Wirkung auf die Sonne ganz vernachlässigt werden (181). Es wird also nicht mehr die erwähnte Differenz der Kräfte als Störung gelten, sondern es bleibt vielmehr im ganzen nur die Wirkung als Störung übrig, welche der störende Planet überhaupt auf den gestörten ausübt. (Diese Wirkung ist dann dieselbe wie die, welche hervorgeht, wenn man sich den gestörten an bestimmter Stelle fest, und den störenden einen Umlauf ausführend denkt.) Da der erstere nun stets den letzteren aus der Ebene seiner Bahn herauszuziehen sucht, so wird die vereinigte Wirkung der Kräfte, welche der störende in allen denjenigen Punkten ausübt, für welche der gestörte jedesmal an demselben bestimmten Orte ist, die sein, den gestörten Planeten aus der Ebene seiner Bahn heraus nach der des störenden zu ziehen. Denn die störende Kraft ist am grössten und überwiegt (und die Gesamtwirkung ist ja dieser überwiegenden ähnlich), wenn der störende Planet am nächsten steht (in Konjunktion), wenn also beide Körper die Stellung a_2i in 208 haben oder überhaupt auf derselben Seite von S aus stehen, in welchem Falle aber immer die Kraft nach i hin gerichtet ist, und daher ein Teil von ihr senkrecht zu Sa_2 nach Si hin wirkt. Ist der gestörte also wieder und wieder an dieselbe bestimmte Stelle gekommen, und hat der störende dabei nach und nach jede Stelle seiner Bahn inne gehabt, so ist die gesamte, überwiegende störende Kraft eine zur Bahn des gestörten senkrechte, nach der des störenden hin gerichtete. Im Laufe der Zeit werden beide Körper alle möglichen Stellungen zueinander gehabt haben, man wird deshalb Gruppen von Orten bilden können, in deren jeder der gestörte an bestimmter aber in jeder Gruppe anderer Stelle seiner Bahn und der störende an jedem Orte seiner Bahn ist. Der Vorgang in langer Zeit ist dann genau so, als hätten wir verschiedene Umläufe des störenden um den gestörten, und als wäre bei jedem dieser Umläufe der gestörte an einem anderen bestimmten Orte. Für jeden solchen Umlauf, so haben wir vorher gefunden, ist die überwiegende Wirkung der Störung eine zur Ebene der Bahn des gestörten Körpers senkrechte, nach der des störenden hin gerichtete Kraft; folglich ist auch während der ganzen Bewegung des gestörten Körpers im Laufe langer Zeit die gesamte überwiegende Störung eine Kraft solcher Art. Aus 192 folgt dann, dass infolge derselben die Knotenlinie der Bahn des gestörten stets auf der des störenden, welche ja die Grundebene ist, zurückschreitet. Dies wird gelten, gleichviel ob der störende Planet ein äusserer oder innerer ist im Vergleich zu dem gestörten.

Wir dürfen also, während sich der gestörte Planet bewegt, die Sache im ganzen immer so ansehen, als wirkte stets eine Kraft senkrecht zu seiner Bahnebene nach der Grundebene hin. Es ergibt sich nun weiter, dass eine Änderung der Neigung im ganzen nicht eintreten wird, falls die Bahnen kreisförmig sind. Im letzteren Falle wird stets der oberhalb der Grundebene liegende Teil der Bahn des gestörten (Fig. 73) gleich dem unterhalb liegenden sein, und der höchste Punkt wird die Bahnhälfte genau halbieren. Man denke sich nun zwei Punkte S, R oder S_1, R_1 , die vom höchsten Punkte O gleich weit entfernt sind; macht der störende einen der früher erwähnten Umläufe, während man den gestörten vielleicht in S denkt, so ist die Gesamtwirkung die schon genannte Kraft senkrecht zur Bahnebene. Die gleich grosse Kraft wird aber auch R erfahren, wenn der eine Körper revolviert, der andere in R fest ist, eben weil beide Bahnen kreisförmig sind, sie zu MN oder zur Grundebene symmetrisch liegen, von MN und der Grundebene halbiert werden. Bei der Bewegung des gestörten Körpers ist somit im Laufe langer Zeit die durchschnittliche Wirkung an Punkten, die vom höchsten Punkte O gleich weit entfernt sind, gleich gross; nach 192 wird dann die Neigung das eine Mal vergrössert, z. B. in S, das andere Mal um eben so viel verkleinert — in R — oder die Neigung wird sich im ganzen nicht ändern. Sind die Bahnen elliptisch, so giebt es einen Punkt, wo die Wirkung der Kraft auf die Neigung grösser ist als irgend anderswo; die Gesamtwirkung auf die Neigung ist dann dieser grösseren ähnlich.

211) Es ist als Grundebene bisher die Bahn des störenden Planeten angenommen worden; wählt man als solche eine andere Ebene, etwa die Bahn eines anderen Planeten, so kann es sich ereignen, dass die Knotenlinie vorschreitet.

Wenn wir vorher sagten, die Knotenlinie gehe im Laufe der Zeit rückwärts, so gilt dieses Zurückschreiten nur als ein solches in der Bahn des störenden Planeten. In Bezug auf eine andere Grundebene kann die Knotenlinie auch eine direkte Bewegung ausführen. Betrachten wir z. B. Jupiter und Saturn, und denken wir uns die Bahnen dieser zwei Körper und die der Erde auf einer Himmelskugel aufgezeichnet. EC sei die Erdbahn, IE die Bahn des Jupiter, ST die Saturns (Fig. 74). Infolge der Störung Saturns gehen also die Knoten Jupiters in der Ebene des Saturn rückwärts. Die Knoten der Bahnen von Jupiter und Saturn in der Erdbahn liegen nicht sehr weit voneinander entfernt, aber die Neigung der Saturnbahn gegen die der Erde ist grösser als die der Jupiterbahn. Geht nun die letztere in der Saturnbahn rückwärts, wie es ja wirklich der Fall ist, so kommt sie aus der Lage EI in die Stellung der punktierten Linie ej; der Knoten I mit der Saturnbahn ist nach j rückwärts gegangen, aber der Knoten E der Jupiterbahn in der Erdbahn ist von E nach e vorgeschritten. Damit ist die eingangs aufgestellte Behauptung bewiesen.

212) Merkwürdiges Verhältnis zwischen den Neigungen mehrerer Planeten, die sich einander stören.

Zwischen den Neigungen aller Bahnen unseres Planetensystems gegen eine feste Grundebene besteht ein merkwürdiger Zusammenhang, der sich während aller säkularen Variationen erhält, und welcher dem Zusammenhang zwischen den Excentricitäten der Planeten ähnlich ist. Es ist nämlich die Summe der Produkte aus jeder Masse in die Quadratwurzel der grossen Achse ihrer Bahn, und in das Quadrat der Neigung gegen eine feste Ebene konstant.

D. Störungen der Breite der Jupitersatelliten.

213) Die Störungen, welche die Satelliten Jupiters in Breite erleiden, sind nicht minder beachtenswert als die Störungen in Länge, welche wir früher betrachtet haben.

Die Massen dieser Körper sind so klein, und ihre Bahnen so wenig gegeneinander geneigt, dass man die kleinen Ungleichheiten, welche während eines Umlaufes erzeugt werden, vernachlässigen kann. So klein sind die gegenseitigen Neigungen der Bahnen, dass selbst diejenige Ungleichheit keine merkliche Grösse erreicht, welche von der langsamen Bewegung der Linie der Konjunktion der drei ersten Satelliten abhängt.

Wir werden daher nur jene Änderungen in der Lage der Bahnebenen betrachten, welche während einer geringen Zahl von Umläufen sich nicht merklich ändern.

Zu diesem Zwecke müssen wir einen neuen Ausdruck einführen.

214) Bedeutung des Ausdruckes „Fundamentalebene“.

Wenn der Mond sich um die Erde in derselben Ebene bewegte, in welcher die Erde um die Sonne geht, so würde die Anziehung der Sonne den Mond nie aus jener Ebene zu ziehen suchen. In Wirklichkeit aber bewegt sich der Mond in einer Ebene, die gegen die Erdbahnebene geneigt ist, weshalb die Knotenlinie auf letzterer zurückschreitet, während die Neigung beider Ebenen im ganzen ungeändert bleibt. Man nennt nun die Ebene der Erdbahn eine Fundamentalebene der Mondbahn. Durch diesen Ausdruck soll angedeutet werden, dass, wenn der Mond sich in dieser Ebene bewegte, die störende Kraft ihn nie aus derselben ziehen würde, und dass, wenn der Mond sich in einer gegen sie geneigten Ebene bewegt, die Neigung stets nahezu dieselbe bleibt, obgleich die Knotenlinie sich merklich ändert. Das Letztere ist im allgemeinen eine Folge des Ersteren.

215) Bestimmung der Fundamentalebene der Jupitersatelliten.

Um die Fundamentalebene der Jupitermonde zu ermitteln, muss man bedenken, dass auf diese Körper ausser der Sonnenanziehung noch eine andere stärkere störende Kraft ein-

wirkt, nämlich die Unregelmässigkeit der Anziehung, welche durch die Abplattung Jupiters erzeugt wird. Wie wir später sehen werden, geht die Wirkung der letzteren dahin, die Satelliten nach der Ebene des Jupiteräquators hin zu ziehen (238). Hätte Jupiter Kugelgestalt, so wäre die einzige störende Kraft die Anziehung der Sonne, welche im ganzen die Satelliten gegen die Ebene der Jupiterbahn zu ziehen suchen würde (210 letzter Abschnitt; jetzt ist die Sonne der störende Körper, der sich, scheinbar, um Jupiter bewegt), und dann würde diese letztere die Fundamentalebene sein. Ist aber Jupiter abgeplattet, und stört die Sonne die Satelliten nicht, so wird die Unregelmässigkeit in der Gestalt Jupiters die Satelliten stets nach der Ebene des Jupiteräquators hin ziehen, und dann ist dieser Äquator die Fundamentalebene für die Satelliten.

Da nun beide Störungen da sind, so wird weder die Ebene der Bahn noch des Äquators von Jupiter diese Fundamentalebene sein können, wir müssen sie vielmehr erst aus folgender Betrachtung bestimmen.

Wir müssen eine Ebene suchen, aus welcher die Sonne die Satelliten im ganzen abwärts, Jupiters Abplattung um ebensoviel aufwärts zieht, und umgekehrt (Figur 75), je nachdem wir den Teil rechts oder links in Fig. 75 betrachten; diese Ebene wird die Fundamentalebene sein. Sie muss zwischen den Ebenen der Bahn und des Äquators von Jupiter liegen, weil nur so die störenden Kräfte in Bezug auf dieselbe entgegengesetzt wirken und sich aufheben können; sie muss ferner durch die Durchschnittslinie beider Ebenen gehen, weil sonst an dieser Stelle beide Ebenen unten oder beide oben wären, und die beiden Störungen dann im gleichen Sinne (eben nach den beiden Ebenen hin) wirkten, sich also nicht aufheben, sondern verstärken würden.

216) Die störende Kraft der Sonne ist nach 82 u. f. um so grösser, je weiter der Satellit vom Centalkörper entfernt ist; wie wir nachher sehen werden (238, am Schlusse), ist aber gerade dann die störende Kraft, welche von der Gestalt Jupiters abhängt, kleiner. Wenn also der Satellit weit entfernt ist, so ist die Wirkung der Störung der Sonne gross, die Wirkung der von der Gestalt Jupiters herrührenden Störung klein. Die Störung der Sonne ist Null, wenn der Satellit in der Jupiterbahn liegt; ist er ausserhalb dieser Bahn, so hat sie einen bestimmten Wert, und zwar einen um so grösseren, je grösser der Abstand von der Ebene der Bahn ist*), oder die Störung der Sonne wird kleiner, je näher der Satellit der Jupiterbahn steht, eben weil er in dieser Ebene selbst gar keine Störung erfährt. Ebenso ist die von Jupiters Gestalt herrührende Störung um so kleiner, je näher der Satellit dem Jupiteräquator steht. Wären nun für einen Satelliten die störenden Kräfte von Sonne und Jupitergestalt gleich gross, so würde die Fundamentalebene dieses Satelliten in der Mitte zwischen Jupiterbahn und Äquatorebene liegen. Überwiegt aber die Kraft der Sonne, so wird die Fundamentalebene mehr nach der Sonne oder nach der Jupiterbahn hin liegen, da dann die Wirkung der Sonne auf diese neue Lage um soviel kleiner, die der Abplattung um soviel grösser geworden ist, dass sich beide wieder das Gleichgewicht halten. Für einen entfernteren Satelliten wird also die Fundamentalebene näher an der Jupiterbahn liegen, wie für einen nicht soweit abstehenden. Der erste Satellit ist dem Jupiter am nächsten, es ist die Störung durch die Gestalt Jupiters die grössere, seine Fundamentalebene fällt beinahe in den Äquator Jupiters; der zweite Satellit ist weiter entfernt, die genannte Ebene wird nicht so nahe an dem Äquator liegen; noch mehr werden für die übrigen Satelliten die Fundamentalebenen vom Äquator abweichen. Wenn also die vier Satelliten einander nicht störten, so dass nur die behandelten zwei Störungsursachen vorhanden wären, so würde jeder von ihnen seine eigene Fundamentalebene haben, und die Lagen dieser Ebenen würden nur von der Entfernung eines jeden Satelliten von Jupiter abhängen.

217) In der That aber stören die Satelliten einander. Welcher Art werden diese Störungen sein? Als wir in 210 von den Planeten sprachen, erwähnten wir, dass die

*) Zerlegt man die aus der Bahnebene ziehende Kraft in Komponenten in und senkrecht zu dieser Ebene, so ergiebt sich, dass die senkrechte Komponente um so grösser ausfällt, je höher der gestörte Körper über der Bahn des störenden steht, bei gleicher Entfernung des störenden Körpers.

Wirkung der Anziehung eines Planeten auf den andern im Laufe der Zeit darin besteht, den gestörten (in irgend einem Teile seiner Bahn) in die Ebene der Bahn des störenden zu ziehen. Dies gilt für irgend einen umlaufenden Körper, der von einem andern gestört wird; es gilt also auch für die Satelliten Jupiters: „jeder derselben wird den andern aus seiner Bahnebene in die Ebene der Bahn des störenden zu ziehen suchen“.

In Wirklichkeit sind die Bahnen der Satelliten gegen ihre Fundamentebenen geneigt, wenn auch nicht stark. Im Laufe der Zeit aber, wenn die Knoten viele Male ihren Umlauf vollendet haben, können wir die Bewegung als in der Fundamentelebene vor sich gegangen betrachten; denn denkt man sich, die Knoten haben wiederholt ihre Umläufe vollendet, so wird die Bahn auf der einen Seite ebensooft über als unter der Fundamentelebene gelegen haben, oder es wird im Mittel ihre Lage, in langer Zeit, die der Fundamentelebene sein (siehe 220). Wir wollen nun auch vorläufig annehmen, die Satelliten bewegten sich in ihren Fundamentebenen selbst.

Nunmehr fragt es sich: welches werden diese vier Fundamentebenen der Satelliten sein, wenn wir die gegenseitigen Einwirkungen der letzteren berücksichtigen? Eine solche Ebene soll derart sein, dass, wenn der Satellit sich in ihr bewegt, sich alle Kräfte auf ihn im Laufe der Zeit das Gleichgewicht halten, also gar keine Änderung der Neigung und des Knotens erzeugt wird. In dieser Ebene wird der Satellit gegen die Ebene der Jupiterbahn durch die störende Kraft der Sonne gezogen, während ihn ferner die Abplattung Jupiters nach dem Äquator des letzteren, und die störenden Kräfte der drei andern Satelliten nach den Bahnen dieser drei Körper hin ziehen; alle diese Kräfte müssen sich in der Fundamentelebene im Laufe der Zeit das Gleichgewicht halten.

218) Die Bestimmung der neuen Lagen dieser Ebenen ist nicht sehr schwierig, wenn für die Grösse jeder dieser Kräfte allgemeine algebraische Ausdrücke gefunden sind. Die allgemeine Natur der Resultate ist leicht zu erkennen; die einzelnen Fundamentebenen, wie sie da sein würden, wenn nur Sonne und Jupiters Gestalt störten, werden einander näher gebracht werden, weil jeder Satellit nach den Ebenen der drei andern hin gezogen wird (in 216 zeigten wir, dass, wenn die Wirkung nach der einen Seite grösser wird, auch die Fundamentelebene mehr nach dieser Seite rückt); für den ersten, zweiten, dritten Satelliten, für welche die Fundamentebenen von dem Jupiteräquator der Reihe nach immer grössere Abstände hatten, nähern sich diese Ebenen der Bahn des Jupiter, während die des vierten näher nach dem Äquator des Jupiter hin gezogen wird. Die vier Ebenen gehen stets durch die Durchschnittslinie von Äquator und Bahn des Jupiter, wie wir schon erwähnten. Denken wir das Auge in dieser Durchschnittslinie in grosser Entfernung stehend, und bedeuten in Fig. 76 die punktierten Linien die Fundamentebenen, wenn die Satelliten sich gegenseitig nicht störten, so werden dann, nach den vorigen Bemerkungen, die ausgezogenen Linien die Lagen dieser Ebenen darstellen für den Fall, dass die Satelliten störend aufeinander wirken*). Der Äquator des Jupiter ist gegen die Jupiterbahn nur ungefähr um $3^{\circ} 6'$ geneigt, und die Wirkung der Abplattung ist so gross, dass die Fundamentelebene des ersten Satelliten gegen den Äquator des Jupiter nur um $7''$ geneigt ist, die des zweiten ungefähr um $1'$, die des dritten um etwa $5'$, und die des vierten beinahe um $24\frac{1}{2}'$. Ohne gegenseitige Störungen der Satelliten wären diese Neigungen $2''$, $20''$, $4'$, $48'$.

219) Nachdem wir so die Lagen der Fundamentebenen betrachtet haben, wollen wir nun die Bewegung eines Satelliten untersuchen, der in einer gegen seine Fundamentelebene geneigten Bahn einhergeht.

220) Die Knotenlinien schreiten auf den Fundamentebenen zurück, ohne Änderung der Neigung gegen diese Ebenen.

*) Dass die Fundamentebenen der Satelliten gerade so liegen wie in Fig. 76, rührt von der verschiedenen Grösse der Massen und der Entfernungen der Satelliten her; so ist die Masse des dritten die grösste, nach ihr kommt die des vierten.

Nehmen wir nun also an, irgend einer der Satelliten bewege sich in einer gegen seine Fundamentalebene geneigten Bahn. Die allgemeine Wirkung wird derselben Art sein wie beim Monde. Die störende Kraft, welche den Satelliten aus seiner Bahn zu ziehen sucht, ist ja nach der Grundebene hin gerichtet, und die Knotenlinie wird deshalb (192) auf der Fundamentalebene rückwärts gehen.

Dass die störende Kraft thatsächlich die angegebene Richtung hat, ergibt sich aus folgender Betrachtung: Die Bahn des Satelliten liege zwischen Fundamentalebene und Äquator, so ist die Bahn dem Äquator näher als die Fundamentalebene. Fiele die Bahn in den Äquator (Fig. 75), so wäre die Störung durch die Abplattung Null, die der Sonne (wenn wir die Wirkung der übrigen Satelliten unbeachtet lassen) allein da; läge sie in der Fundamentalebene selbst, so würden beide Störungen gleich sein und sich aufheben. Liegt die Bahn aber zwischen Äquator und Fundamentalebene, so werden die Störungen nicht mehr gleich sein, die Störung durch die Abplattung wird kleiner sein als die der Sonne, die letztere wird überwiegen; denn der Satellit ist dann von der Jupiterbahn weiter entfernt, als es der Fall ist, wenn er in der Fundamentalebene steht, somit die Störung durch die Sonne grösser als im letzten Falle. Die Wirkung davon ist eine grössere Anziehung nach der Sonne oder nach der Jupiterbahn hin, also nach der Seite hin, auf welcher die Fundamentalebene von der angenommenen Lage der Bahn aus liegt, d. h. eben die Störung ist nach der Fundamentalebene hin gerichtet. Ähnliches gilt, wenn man die Bahn nach der andern Seite geneigt annimmt, wo dann die Wirkung der Abplattung überwiegt und die Knoten zurückschreiten lässt. Gleiches ergibt sich auch, wenn man die Wirkung der übrigen Satelliten berücksichtigt. Nehmen wir z. B. an, die Bahn des dritten, dessen Fundamentalebene in Fig. 76 bestimmt worden ist, liege zwischen dieser Ebene und dem Äquator des Jupiter. Fällt die Bahn mit der Fundamentalebene zusammen, so halten sich alle Kräfte das Gleichgewicht; liegt sie mehr nach dem Äquator hin, so ist sie letzterem, wie den Bahnen des ersten und zweiten näher, so dass die Wirkungen von Abplattung und erstem und zweitem Satelliten kleiner sind als in dem Falle, wo Gleichgewicht ist; sie ist aber ferner weiter entfernt von der Jupiterbahn und der Bahnebene des vierten, so dass deren Wirkungen grösser sind als im Gleichgewichtsfalle und somit überwiegen, oder eine Anziehung auf den dritten nach dieser Seite hin übrig bleibt, d. h. eine nach der Seite hin, auf welcher die Fundamentalebene von der Bahn des dritten aus liegt, oder eine nach der Fundamentalebene des dritten hin gerichtete.“

Die Neigung wird zunehmen und abnehmen, aber **im ganzen** nicht geändert werden (192). Infolge der verschiedenen Neigungen wird die Abplattung, aber auch die Sonne in ihrer Wirkung überwiegen können. Schreiten nämlich die Knoten zurück, so ist auf der einen Seite die Bahn nach der einen, nach einem halben Umlaufe nach der entgegengesetzten Seite geneigt (Fig. 77), so dass in der That abwechselnd die Wirkung der Abplattung und die der Sonne überwiegen wird. Derjenige Teil der rückschreitenden Bewegung der Knoten nun, welcher von der störenden Kraft der Sonne abhängt, wird für die weiter entfernten Satelliten grösser sein als für die näheren; der aber, welcher von der Gestalt Jupiters abhängt — und dies ist der wichtigere — ist für die näheren Satelliten grösser, als für die entfernteren. Im ganzen werden also die Knotenlinien der inneren Satelliten schneller zurückgehen als die der äusseren. In der That hat die jährliche rückschreitende Bewegung für die vier Satelliten, wenn wir mit dem zweiten beginnen, die Grössen: 12° , $2^{\circ} 32'$, $41'$.

221) Die Neigung der Bahn eines äusseren Satelliten erzeugt eine ähnliche Neigung der Bahn eines inneren.

Die störende Kraft eines Satelliten auf die andern wird durch den Umstand sehr modificiert, dass seine Bahn nicht mit seiner Fundamentalebene zusammenfällt, und die Bahn bleibt lange genug in nahezu derselben Lage, um eine sehr merkliche Unregelmässigkeit hervorzubringen. In 220 haben wir die Bewegung eines Satelliten für sich allein untersucht, falls seine Bahn gegen seine Fundamentalebene geneigt ist; welche Wirkung wird aber weiter dieser Satellit auf die andern ausüben? Nehmen wir also jetzt an, der eine

Satellit bewege sich in seiner Fundamentalebene, der andere nicht; welche Unregelmässigkeit wird der letztere im ersteren hervorrufen? Um die Natur derselben zu erforschen, müssen wir beachten, dass die von einem Satelliten auf einen andern senkrecht zu dessen Bahn ausgeübte Kraft ganz von der Neigung der beiden Bahnen abhängt, sodass durch Vergrössern der Neigung die störende Kraft geändert wird. Fielen die Bahnen zusammen, so wäre die genannte störende Kraft Null, ist ein Abstand beider da, so gilt das nicht mehr, sondern die Störung ist um so grösser, je grösser der Abstand ist.

Nehmen wir nun einen bestimmten Fall an: Der zweite Satellit bewege sich in einer gegen seine Fundamentalebene geneigten Ebene; welcher Art wird die Störung sein, die er in der Breite des ersten hervorrufft?

Bemerken wir dabei zuerst, dass, wenn beide Körper sich in ihren Fundamentalebenen bewegten, die von der Neigung dieser Ebenen, also zugleich der Bahnen, abhängenden störenden Kräfte vollständig dadurch in Rechnung gezogen wären, dass wir eben die Lage dieser Ebenen bestimmten; denn in den so bestimmten Bahn- oder Fundamentalebenen könnten sie sich fortan ohne Störung bewegen, oder der Zustand würde ein bleibender sein. Hat daher der eine Satellit eine gegen seine Fundamentalebene geneigte Bahn, so werden wir die dadurch auf den andern Satelliten hervorgebrachten Ungleichheiten ermitteln können, indem wir nur die Änderungen betrachten, welche durch die Ortsänderung des zweiten Satelliten gegen seine Fundamentalebene erzeugt werden. Wir werden, um die Einwirkung auf den ersten zu finden, in derselben Weise verfahren, wie bei mehreren früheren Beispielen, so nämlich, dass wir diejenige Bewegung des ersten Satelliten aufsuchen, welche, bezogen auf die Bewegung des zweiten, fortdauernd mit dieser Neigung des zweiten bestehen kann, oder dass wir die Bewegung des ersten suchen, für welche, trotz der Neigung der Bahn des zweiten, der Zustand ein dauernder ist.

Die wirkliche Bahn des zweiten liege etwa auf der einen Seite höher über, auf der andern demnach tiefer unter der Bahn des ersten als die Fundamentalebene des zweiten (Fig. 78). Liegt die Bahn des zweiten in der Fundamentalebene, so ist die aufziehende Wirkung des zweiten auf den ersten, auf der linken Seite in Fig. 78, so gross, dass sich alle auf- und abziehenden Kräfte das Gleichgewicht halten; liegt die Bahn des zweiten in der Bahn des ersten, so ist seine Wirkung auf den ersten Null, letztere ist aber um so grösser, je grösser die Neigung seiner Bahn gegen die des ersten ist; liegt seine Bahn also auf der linken Seite noch höher über der Bahn des ersten als die Fundamentalebene, so ist die aufziehende Kraft des zweiten grösser als sie sein würde, wenn der zweite in seiner Fundamentalebene läge. Die Kräfte insgesamt werden sich nicht mehr aufheben, es wird vielmehr in Wirklichkeit eine aufwärts ziehende Kraft da sein und auf die Bahn des ersten wirken, wie dann ebenso auf der rechten Seite eine von der Bahn des ersten fort gerichtete, also abwärts wirkende Kraft da ist.

Liegt die Bahn des zweiten auf der linken Seite näher der Bahn des ersten als die Fundamentalebene (Fig. 79), so wird die aufziehende Kraft des zweiten kleiner sein als sie sein würde, wenn er in der Fundamentalebene stünde, oder die Kräfte werden sich nicht mehr das Gleichgewicht halten; es wird die Summe der aufwärts gerichteten Kräfte kleiner sein als die der abwärts wirkenden oder es ist im ganzen eine abwärts gerichtete Kraft vorhanden, während auf der rechten Seite entsprechend eine aufwärts gerichtete da ist. Auf jeden Fall sehen wir, die Bahn des zweiten mag nach irgend welcher Seite gegen seine Fundamentalebene geneigt sein, dass auf den ersten Satelliten in den verschiedenen Punkten seiner Bahn eine Kraft nach derselben Seite hin wirkt, auf welcher die Bahn des zweiten Satelliten von ihrer Fundamentalebene aus liegt, und dass die Grösse dieser Kraft der Entfernung von Bahn- und Fundamentalebene des zweiten proportional ist.

Nun ist die Ungleichheit in der Bewegung des ersten Satelliten eine kleine Neigung seiner Bahn gegen seine Fundamentalebene, und diese einzige Ungleichheit der Satelliten Jupiters betrachten wir hier. Nunmehr fragt es sich, welche Lage muss die Bahn des ersten

haben, damit ihre Ungleichheit, jene kleine Neigung, wirklich bestehen bleibt, also der Zustand ein dauernder ist?

Untersuchen wir zunächst, welche Lage die Knoten der Bahn des ersten haben müssen.

Diese Knoten des ersten in seiner Fundamentalebene können nicht nach der Seite hin liegen, wo der zweite am weitesten von seiner Fundamentalebene entfernt ist, z. B. nicht in B oder C; denn dann würde die störende Kraft gross sein, und zwar vor und nach dem Durchgange durch diese Knoten (eben weil der zweite dann grossen Abstand von seiner Fundamentalebene hat), wozu noch kommt, dass vor und nach dem Durchgange die Kraft in derselben Richtung wirkt — da sie stets nach der Seite gerichtet ist, auf welcher die Bahn des zweiten von seiner Fundamentalebene aus liegt — sodass dadurch der Ort des Knotens ungeändert bleibt (202, siehe auch die Fig. 69; wenn vor dem Durchgange ein Rückgehen der Knoten M und N erfolgt, so gehen sie darnach vorwärts), während die Neigung bedeutende Änderungen erleidet, da sie vor wie nach dem Durchgange durch jeden der Knoten entweder beide Male zunimmt oder abnimmt, je nachdem eben die Bahn des zweiten Satelliten nach der einen oder andern Seite ihrer Fundamentalebene geneigt ist (siehe wieder 202). Dadurch würde aber das Gleichbleiben der erwähnten Ungleichheit in der Neigung sehr gestört werden. Wir dürfen daher die Knoten nicht dort annehmen, wo der zweite Satellit weit von seiner Fundamentalebene absteht, sondern vielmehr dort, wo der zweite seiner Fundamentalebene am nächsten steht (da dann die Einwirkung auf den ersten in seinen Knoten gering und somit auch der Einfluss auf die Neigung des ersten gering ist), d. h. dort, wo seine Bahn die Fundamentalebene schneidet oder dort, wo die Knoten der Bahn des zweiten in der Fundamentalebene des zweiten liegen; mit andern Worten: die Knoten der Bahn des ersten Satelliten in seiner Fundamentalebene müssen auf derselben Seite liegen, auf welcher die Knoten des zweiten in seiner Fundamentalebene liegen.

Diese Bedingung muss erfüllt sein, soll der Zustand ein bleibender sein. In welchem Sinne wird nun aber weiter die Neigung der Bahn des ersten gelten? Wird diese Bahn auf der einen oder der andern Seite von der Fundamentalebene des ersten liegen? Um dies zu beantworten, müssen wir bedenken, dass die Einwirkung der Gestalt Jupiters die Knoten des ersten Satelliten schneller rückwärts gehen macht als die des zweiten. Nun haben wir aber soeben gesehen, dass die Knoten der Bahnen des ersten und zweiten stets auf gleichen Seiten liegen, sich also bei ihren Umläufen begleiten, d. h. sich beide gleich schnell bewegen müssen; damit dies möglich ist, muss die vom zweiten Satelliten abhängige störende Kraft einen Teil des schnelleren Rückschreitens aufheben oder sie muss für sich ein Vorschreiten der Knotenlinie des ersten erzeugen. Dazu ist nötig, dass die vom zweiten ausgehende störende Kraft den ersten Satelliten von seiner Fundamentalebene wegzuziehen sucht (193). Hieraus lässt sich die Lage der Bahn des ersten bestimmen: „Die vom zweiten bewirkte Störung hat dieselbe Richtung wie die Entfernung des zweiten Satelliten von seiner Fundamentalebene (Fig. 78 und 79), liegt er z. B. oberhalb der letzteren, so ist die Kraft aufwärts gerichtet; soll nun diese Störung den ersten von seiner Fundamentalebene fortziehen, so muss die Bahn des ersten auch oberhalb ihrer Fundamentalebene liegen (denn läge sie unterhalb, so würde die aufwärts gerichtete Störung den ersten nach seiner Fundamentalebene hin ziehen). Es muss also die Bahn des ersten in Bezug auf ihre Fundamentalebene dieselbe Lage haben, welche die Bahn des zweiten zu ihrer Fundamentalebene hat, wenn der Zustand ein dauernder sein soll.

Dieselbe Schlussfolge lässt sich in jedem andern Falle anwenden, wo ein innerer Satellit durch einen äusseren gestört wird, und so erhalten wir den Satz:

Wenn die Bahn eines Jupitersatelliten gegen seine Fundamentalebene geneigt ist, so sucht er in der Bahn jedes inneren Satelliten eine Neigung derselben Art und mit denselben Knoten zu erzeugen.

222) Die Neigung der Bahn eines inneren Satelliten ruft eine entgegengesetzte Neigung in der Bahn eines äusseren Satelliten hervor.