Untersuchen wir nun, welcher Art die Ungleichheit in der Breite des dritten Satelliten sein wird, welche der zweite erzeugt. Dieselbe Schlussweise wie vorher gilt wörtlich auch hier, nur muss man bedenken, dass das durch Jupiters Gestalt hervorgebrachte Rückschreiten der Knoten des dritten Satelliten langsamer ist als das des zweiten, und deshalb die auf den dritten einwirkende störende Kraft dieses Rückschreiten seiner Knoten beschleunigen, und diese Kraft somit gegen seine Fundamentalebene hin gerichtet sein muss (192). Dazu aber würde nötig sein, dass die Bahn des dritten auf der Seite ihrer Fundamentalebene liegt, welche entgegengesetzt der ist, auf welcher der zweite in Bezug auf seine Fundamentalebene sich befindet (die Störung des zweiten ist immer nach der Seite gerichtet, auf welcher seine Bahn von ihrer Fundamentalebene aus liegt, nach 221). Daraus folgt dann als allgemeines Resultat, dass wenn die Bahn eines Satelliten Jupiters gegen seine Fundamentalebene geneigt ist, er in der Bahn der äusseren Satelliten eine Neigung entgegengesetzter Art und mit demselben Knoten anstrebt.

**223)** Die Bahn des ersten Satelliten hat keine merkliche Neigung gegen seine Fundamentalebene; die des zweiten, dritten und vierten aber sind gegen ihre Fundamentalebenen geneigt, und zwar die des zweiten um 25′, die des dritten und vierten um etwa 12′, und diese Neigungen bewirken wirklich in den andern Satelliten Ungleichheiten solcher Art, wie wir sie eben untersucht haben.

**224)** Wir müssen noch hinzufügen, dass die Störung des ersten durch den zweiten eine Änderung in der Einwirkung des ersten auf den zweiten hervorbringt, die den zweiten von seiner Fundamentalebene zu entfernen, und folglich das Rückschreiten der Knoten des zweiten um etwas zu verringern sucht (193).

Ebenso sucht die geänderte Wirkung des dritten auf den zweiten den letzteren gegen seine Fundamentalebene hin zu ziehen, und deshalb das Rückschreiten der Knoten des zweiten um etwas zu vergrössern (192).*)

Wir haben hier dieselbe Art von Verwickelung hinsichtlich der Störungen dieser Körper in Breite, wie wir sie früher, in 150, in Bezug auf die Störungen in Länge erwähnt haben.

**225)** Die einzige noch vorhandene merkliche Ungleichheit in Breite ist die, welche von der Stellung der Sonne abhängt, mit Rücksicht auf die Knoten der Bahnen in der Ebene der Jupiterbahn (d. h. mit Rücksicht auf die Knoten von Jupiters Äquator auf der Ebene von Jupiters Bahn), und diese beläuft sich nur auf wenige Sekunden. Sie ist der des Mondes, welche wir in 205 erwähnt haben, völlig analog.

## IX. Abschnitt.

## Wirkung der Abplattung der Planeten auf die Bewegungen ihrer Satelliten.

**226)** In den Betrachtungen über die Bewegung um einen Centralkörper nahmen wir den letzteren als kugelförmig an. Diese Voraussetzung macht die Untersuchung ausserordentlich

*) Betrachten wir z. B. Fig. 78. Der zweite Satellit legt die Bahn des ersten nach oben (in der Figur links), näher der Fundamentalebene und der Bahn des zweiten; daher ist die Wirkung des ersten auf den zweiten kleiner als ohne diese Ablenkung, also die abziehende Kraft kleiner als früher oder es ist, gegen früher, jetzt eine Kraft da, die den zweiten aufwärts treibt, von seiner Fundamentalebene fort. In Figur 79 legt der zweite Satellit die Bahn des ersten (links in der Figur) unter die frühere Ebene, unter seine Fundamentalebene, also weiter von der Fundamentalebene des zweiten, so dass die vom ersten ausgeübte Abziehung grösser wird, und so den zweiten Satelliten von seiner Fundamentalebene zu entfernen sucht. Für die Wirkung des dritten auf den zweiten ergiebt sich das Behauptete, auf demselben Wege, wenn man bedenkt, dass der zweite Satellit eine entgegengesetzte Neigung der Bahn des dritten erzeugt.

ziehung, welche die gesamte Materie einer Kugel auf einen Körper ausübt, der sich ausserhalb in beliebiger Entfernung befindet, ist genau dieselbe, als wenn die ganze Materie im Mittelpunkte vereinigt wäre.“ Ist also der anziehende Körper kugelförmig, so können wir bei der Betrachtung der Bewegung um denselben seine Grösse ganz unbeachtet lassen; es ist dann so gut, als wäre er ein Punkt, der mit gleicher Stärke anzieht.

**227)** Allein die Planeten sind nicht kugelförmig. Mögen sie nun jemals flüssig gewesen sein oder nicht, sicher ist doch ein grosser Teil ihrer Oberfläche — bei der Erde wenigstens ist es so — mit Flüssigkeit bedeckt; diese letztere aber wird durch die Rotation des Planeten eine ganz bestimmte Gestalt annehmen. Die Flüssigkeit wird dort am meisten hindrängen, wo die drehende Bewegung am schnellsten ist, d. h. nach dem Äquator. So ergiebt sich schon aus der Theorie, und Messungen bestätigen es, dass die Erde keine Kugel, sondern ein Sphäroid ist, welches am Nord- und Südpol abgeplattet ist und rings um den Äquator einen Wulst hat. Die Halbachsen dieses Sphäroids, d. h. die Radien nach Pol und Äquator verhalten sich nahe wie 299:300, so dass eine durch den Erdmittelpunkt im Äquator gezogene Linie um nahe 44 km länger ist als die durch die Pole gehende Linie.

**228)** Die Abplattung des Jupiter ist noch viel grösser als die der Erde. Das Verhältnis seiner Achsen ist nämlich sehr nahe das von 16:17, so dass die Differenz seiner Durchmesser, des im Äquator liegenden und des nach den Polen gehenden, etwa 8054 km beträgt. In der That fällt dem durch ein Fernrohr beobachtenden Auge diese elliptische Gestalt Jupiters sofort auf.

**229)** In diesem Abschnitte wollen wir uns die Aufgabe stellen, die allgemeinen Wirkungen dieser Gestalt der Planeten auf die Bewegungen ihrer Satelliten zu ermitteln. Die Übereinstimmung, welche in diesem Punkte zwischen Beobachtung und Rechnung besteht, ist einer der schlagendsten Beweise für die Richtigkeit des Satzes: „jedes materielle Teilchen zieht jedes andere an nach dem Gesetze der allgemeinen Schwere“.

**230)** Die Anziehung eines abgeplatteten Sphäroids auf einen Körper in der Ebene seines Äquators ist grösser, als wenn seine ganze Masse in seinem Mittelpunkte vereinigt wäre.

Beginnen wir damit, die Wirkung zu untersuchen, welche ein abgeplatteter Planet auf einen in der Ebene seines Äquators stehenden Satelliten ausübt.

Das durch die ausgezogene Linie dargestellte Sphäroid (Fig. 80) können wir uns aus der durch punktierte Linien angedeuteten Kugel entstanden denken durch Abschneiden einer Quantität Materie von den Polen. Um die Betrachtung zu vereinfachen, wollen wir annehmen, die ganze so abgeschnittene Materie befinde sich in einem einzigen Klumpen an jedem Pole, also in den Punkten D und E. Die Anziehung der ganzen Kugel auf den Satelliten B ist, wie wir sagten, dieselbe, als wenn die ganze Materie der Kugel in A vereinigt wäre. Aber die Anziehung des abgeschnittenen Teiles ist nicht dieselbe, als wenn seine Masse sich in A befände; denn seine Entfernung von B ist grösser als AB, und seine Anziehung ist nach D oder E, aber nicht nach A gerichtet.

Nehmen wir, um dies noch besser einzusehen, etwa an, es sei $AD = 1, AB = 10$.

Da die Kräfte sich umgekehrt verhalten wie die Quadrate der Entfernungen der anziehenden Massen, so kann man die Anziehung des Klumpens D, wenn er in A stünde, wo seine Entfernung von $B = 10$ wäre, mit $\frac{1}{100}$ bezeichnen; ist er aber in D selbst, so ist seine Anziehung nur gleich $\frac{1}{101}$ zu setzen, denn es ist das Quadrat von BD gleich der Summe der Quadrate von AB und AD, d. h. gleich der Summe von 100 und 1. Man sieht also, die Anziehung der Masse am Pole D ist eine andere, wenn sie in A, als wenn sie in D ist.

Ebenso ist auch die Richtung der Anziehung schuld daran, dass die Anziehung des Klumpens in D eine andere ist, als wenn er sich in A befindet; denn, wenn die Anziehung von D den Satelliten um das Stück Bb fortziehen würde, so wäre die wirkliche Annäherung, die B nach A hin erfahren hätte, das Stück Bc — wenn bc senkrecht zu AB steht*) —, welches kleiner ist als Bb, und zwar kleiner im Verhältnis von BA:BD oder von $10:\sqrt{101}$. Da wir nun die Anziehung der Masse D nach D hin durch $\frac{1}{101}$ bezeichneten, so wird die wirkliche Anziehung von D, geschätzt nach der Strecke, durch welche sie den Satelliten nach A hin zieht, die Grössen $\frac{10}{\sqrt{101}} \cdot \frac{1}{101}$ haben. Denn $\frac{1}{101}$ ist die Anziehung, wenn sie um das Stück Bb fortbewegt; bewegt sie um das Stück Bc fort, welches nur $\frac{10}{\sqrt{101}} \cdot$ Bb ist, so ist dann die Anziehung $\frac{10}{\sqrt{101}} \cdot \frac{1}{101}$. Das ist aber in der That die ganze Wirkung der Anziehungskraft von D, denn obgleich die Anziehung von D allein den Satelliten noch um das Stück cb über AB zu bringen sucht, so wird ihn doch die Anziehung von E um genau ebensoviel nach der entgegengesetzten Seite von AB ziehen, so dass sich die auf AB senkrechten Wirkungen der anziehenden Kräfte aufheben.

Wir haben demnach folgendes Ergebnis. Die Anziehung der Masse D, wenn man sie sich nach A gesetzt denkt, ist $= \frac{1}{100} = 0{,}01$, wenn man sie aber wirklich in D selbst annimmt $= \frac{10}{101 \cdot \sqrt{101}} = 0{,}0098518$ (nach A hin). Der Unterschied beträgt $0{,}0001482$ oder beinahe $0{,}0001500$ oder das $\frac{0{,}0001500}{0{,}01}$fache oder das $\frac{1500}{100000}$fache der ganzen Anziehung von D, letzteres in A vereint gedacht. Dasselbe gilt für die Masse E. Wir sehen also, wenn wir alles berücksichtigen: „dass D weiter von B entfernt ist als A, und dass DB und EB andere Richtung haben als AB, wodurch bewirkt wird, dass z. B. nicht Bb, sondern nur die kleinere Strecke Bc die Wirkung der Anziehung ist“, so ergiebt sich, dass die Massen D und E in der That eine kleinere Anziehung auf B ausüben, als wenn sie in A vereinigt wären. Da aber die ganze Kugel, Sphäroid samt Klumpen, so wirkt, als wenn ihre ganze Masse im Mittelpunkte A vereinigt wäre, diese Anziehung aber doch dieselbe ist, als wenn Sphäroid und Klumpen jedes für sich wirkten, und da ferner die Massen D und E an diesen Orten D und E auf B schwächer wirken, als wenn man sie in A vereinigt denkt, so muss die Masse des „ausgezogenen Sphäroids“ allein eine stärkere Wirkung ausüben, als sie sein würde, wenn seine ganze Masse im Mittelpunkte A vereinigt wäre.

**231)** Das Verhältnis, in welchem die Anziehung eines abgeplatteten Sphäroids grösser ist, als wenn seine Masse im Mittelpunkte vereinigt wäre, nimmt ab, wie das Quadrat der Entfernung wächst.

Wir sahen soeben, dass die Anziehung eines Sphäroids grösser ist als die, die man erhielte, wenn man sich die ganze Masse desselben im Mittelpunkte vereinigt dächte. Es fragt sich nun, ob dieser Unterschied zwischen beiden Anziehungen in anderer Entfernung des Satelliten noch derselbe ist oder ob er von der Entfernung abhängt.

Um dies zu ermitteln, wollen wir jetzt die Entfernung des Satelliten = 20 annehmen, also das frühere AB = 20 setzen. Auf dem früheren Wege finden wir, dass die Anziehung von D, dessen Masse aber in A gedacht dargestellt ist durch $\frac{1}{400} = 0{,}0025$, dass aber die Anziehung des D, die Masse jedoch in D selbst gedacht, $= \frac{20}{401 \cdot \sqrt{401}} = 0{,}002490653$.**) Der Unter-

---

*) Man kann sich die Anziehung Bb in zwei zerlegt denken: in Bc nach Richtung BA und in eine Komponente senkrecht zu AB.

**) Es ist jetzt $BD^2 = AB^2 + AD^2 = 400 + 1 = 401$, somit die Anziehung der Masse D in D $= \frac{1}{401}$. Die wirklich in Betracht kommende Anziehung von D (nach A hin) ist aber, da bc aufgehoben wird, dargestellt durch $Bc = \frac{AB}{BD} \cdot Bb = \frac{20}{\sqrt{401}} \cdot Bb$ (weil Bc : Bb = BA : BD). Bb stellt die Anziehung von D in D dar, sie ist $\frac{1}{401}$, somit ist Bc oder die wirkliche Anziehung von D (nach A hin): $\frac{20}{\sqrt{401}} \cdot \frac{1}{401}$.

schied beträgt $0{,}000009347$ oder das $\frac{0{,}000009347}{0{,}0025}$fache oder $\frac{4 \cdot 0{,}000009357}{4 \cdot 0{,}0025}$fache oder $\frac{0{,}000037388}{0{,}01}$fache oder nahezu das $\frac{375}{100000}$fache der ganzen Anziehung von D (die Masse D in A gedacht). Früher, bei der Entfernung AB = 10, war dieser Unterschied $\frac{1500}{100000}$, er ist also jetzt, bei doppelter Entfernung, nur $\frac{1}{4}$ so gross. Wird daher der Satellit in die doppelte Entfernung von A gebracht, so ist der Unterschied zwischen der Anziehung des Klumpens D in A und in D, im Vergleich zur Anziehung desselben in A, $\frac{1}{4}$ so gross als vorher. Nun wissen wir vom Schlusse von 230, dass, wenn die Anziehung des Klumpens in D kleiner ist, als wenn seine Masse in A wäre, die Anziehung des Sphäroids grösser sein muss als die seiner in A vereinigten Masse. Da jetzt der Unterschied zwischen beiden Anziehungen in doppelter Entfernung für den Klumpen $\frac{1}{4}$ so gross ist als der in einfacher Entfernung, so wird demnach auch der Unterschied zwischen diesen Anziehungen in doppelter Entfernung für das Sphäroid nur $\frac{1}{4}$ von dem in einfacher Entfernung sein, d. h. die Anziehung des Sphäroids ist in doppelter Entfernung zwar auch noch grösser als die seiner im Mittelpunkte vereinigt gedachten Masse, aber der Unterschied zwischen beiden Anziehungen ist doch kleiner geworden, er ist nur $\frac{1}{4}$ so gross als er in einfacher Entfernung war.

Was wir für die doppelte Entfernung fanden, lässt sich auch für andere Entfernungen ermitteln, und man würde so das Gesetz finden:

Das Verhältnis des Unterschiedes der wirklichen Anziehung eines Sphäroids und derjenigen, welche die im Mittelpunkte vereinigte Masse ergiebt, zu der letzteren Anziehung nimmt ab wie das Quadrat der Entfernung (des angezogenen Körpers) von A wächst.

**232)** Ist der anziehende Körper abgeplattet, so kann man also nicht so verfahren, als wäre alle Masse im Mittelpunkte vereinigt; macht man doch diese Annahme, so wird man noch dem am Schlusse von 231 Gesagten Rechnung tragen müssen, und zwar lässt sich die Anziehung eines abgeplatteten Sphäroids auf einen Satelliten oder auf einen andern Körper, der in der Ebene seines Äquators liegt, dann so ausdrücken:

Es ist zunächst dieselbe Anziehung da, wie wenn alle Materie des Sphäroids in seinem Mittelpunkte vereinigt wäre, aber es ist ausserdem noch eine andere Anziehung vorhanden, die von der Abplattung abhängt, und deren Verhältnis zur ersten Anziehung abnimmt, wie das Quadrat der Entfernung des Satelliten zunimmt.

**233)** Die Anziehung eines abgeplatteten Sphäroids auf einen Körper in der Richtung seiner Achse ist kleiner, als wenn seine ganze Masse in seinem Mittelpunkte vereint wirkte.

Untersuchen wir nun die Anziehung eines abgeplatteten Sphäroids auf einen in der Richtung seiner Achse liegenden Körper.

Wiederum sei (Fig. 81) der Satellit B um das Stück AB = 10 von A entfernt, so wird die Anziehung des Klumpens, wenn derselbe in A ist, durch $\frac{1}{100}$ dargestellt sein; sie würde aber, wenn diese Masse in D wäre, $\frac{1}{81}$ betragen, und wenn sie sich in E befände $\frac{1}{11^2} = \frac{1}{121}$ sein, da die Entfernungen von D und E bis B 9 und 11 sind. Sind die beiden gleich grossen Klumpen D und E in A vereint, so ist ihre Anziehung auf $B = \frac{1}{100} + \frac{1}{100} = \frac{1}{50} = 0{,}02$; befinden sich diese Klumpen aber in D und E, so ist die Summe ihrer Anziehungen $\frac{1}{81} + \frac{1}{121} = 0{,}0206100$. Der Unterschied ist $0{,}0006100$, um welche Grösse die Anziehung im letzteren Falle grösser ist. Es ist demnach die Anziehung der Klumpen in den Stellungen D und E grösser, als wenn ihre Massen im Mittelpunkte vereint wären, und zwar um $\frac{0{,}000610}{0{,}02} = \frac{305}{10000}$ oder nahezu $\frac{3}{100}$ ihrer

ihrer ganzen Anziehung (in A). Nun ist doch aber die Anziehung der Kugel dieselbe, als wenn ihre ganze Masse sich im Mittelpunkte befände; wenn wir also jene Klumpen wegnehmen, so muss eine Masse bleiben, deren Anziehung **kleiner** ist, als wenn ihre ganze Masse im Mittelpunkte vereint wäre. Würde man die Änderung des Unterschiedes zwischen der Anziehung des übrig bleibenden Sphäroids und seiner im Centrum vereinten Masse mit der Entfernung so untersuchen wie in 232, so würde man auch das dort angegebene Gesetz finden.

**234)** Man wird deshalb sagen können:

Die Anziehung eines Sphäroids auf einen Körper, der sich in der Richtung seiner Achse befindet, kann dadurch dargestellt werden, dass man die ganze Materie im Mittelpunkte vereint denkt, und dann die so sich ergebende Anziehung um eine Kraft **vermindert**, welche von der Abplattung abhängt, und deren Verhältnis zur ganzen Anziehung (der im Mittelpunkte gedachten Masse) so abnimmt, wie das Quadrat der Entfernung des Körpers zunimmt.

**235)** Wir haben somit gefunden, dass die Anziehung eines Sphäroids auf einen Körper in der Ebene des Äquators grösser ist, als wenn alle Masse des Sphäroids im Mittelpunkte sich befände, aber kleiner ist für einen, der sich in Richtung der Achse befindet. Es wird daher die Anziehung immer kleiner werden in je grössere Entfernung vom Äquator ein Körper gebracht wird, und es wird zwischen Achse und Äquator eine Richtung geben, für welche die wirkliche Anziehung des Sphäroids genau dieselbe ist, als wenn die ganze Masse desselben in seinem Centrum beisammen wäre.

**236)** **Die Anziehung eines abgeplatteten Sphäroids verursacht ein Vorschreiten der Apsidenlinie seiner Satelliten, welches um so schneller ist, je näher der Satellit steht.**

Nehmen wir an, es bewege sich ein Satellit in einer Ebene, die mit dem Äquator zusammenfällt oder doch nur einen kleinen Winkel mit ihm bildet; welcher Art wird die Bahn sein? Hierzu wissen wir nach 232, dass einmal auf den Satelliten eine Kraft so einwirkt, als wäre die Masse des Sphäroids im Mittelpunkte vereinigt, welche also dem Quadrate der Entfernung umgekehrt proportional ist, und infolge welcher der Satellit eine Ellipse beschreiben würde, deren Brennpunkt der Mittelpunkt des Sphäroids ist; wir wissen aber weiter, dass ausser dieser Anziehung noch eine Kraft da ist, welche von der Abplattung abhängt, und die stets nach dem Mittelpunkte gerichtet ist. **Durch diese Kraft nun wird nach 46 bewirkt**, dass die Umlaufszeit bei derselben mittleren Entfernung kürzer, oder die mittlere Entfernung bei derselben Umlaufszeit grösser wird, als wenn bloss die erste Anziehung da wäre. Nach 50 und 53 verursacht aber diese Kraft weiter ein Rückschreiten der Apsidenlinie, wenn der Satellit in seiner grössten Entfernung ist, und ein Vorschreiten derselben, wenn er die kleinste Entfernung hat. Stünde diese Kraft freilich in verschiedenen Entfernungen immer im gleichen Verhältnisse zur andern Anziehung, so würde sie im ganzen keine Lagenänderung der Apsidenlinie herbeiführen, da wir dann die Sache so ansehen könnten, als hätten wir in bestimmtem Masse die Centralmasse vermehrt. In diesem Falle würde also das Rückschreiten in der grössten Entfernung dem Vorschreiten in der kleinsten gleichkommen müssen, also eine Ellipse mit unveränderlicher Apsidenlinie beschrieben werden.*)

Allein **das Verhältnis** dieser Kraft zur andern nimmt ab, wenn die Entfernung wächst (231); daher wird das Rückschreiten in der grössten Entfernung kleiner sein als das Vorschreiten in der kleinsten, und die Apsidenlinie im ganzen vorschreiten. Ebenso ist das Verhältnis derselben Kraft zur ersten Anziehung um so grösser, je näher der Satellit dem Hauptkörper steht, weshalb für einen solchen Satelliten das Vorschreiten rascher erfolgen wird wie für einen entfernteren.**) Dieses Vorschreiten wiederholt sich bei jedem Umlaufe.

---

*) Es wäre eben dasselbe, als bewegte sich der Satellit um eine andere kugelförmige Centralmasse, die nach dem Gesetze der allgemeinen Schwere anzieht; infolge solcher Anziehung wird stets eine und dieselbe Ellipse beschrieben (siehe auch 98).

**) Für einen ferneren Satelliten sei in der kleinsten Entfernung die erstgenannte Anziehung auf ihn A, die an zweiter Stelle genannte, von der Abplattung herrührende B. Ist das Verhältnis von grösster und

Das Vorschreiten der Apsidenlinie des Mondes, welches durch die Abplattung der Erde verursacht wird, ist im Vergleich zu dem von der störenden Kraft der Sonne erzeugten so klein, dass man es kaum bemerken kann; das durch die Abplattung Jupiters erzeugte Vorschreiten der Apsidenlinien seiner Satelliten dagegen erfolgt so schnell, vorzüglich für die näheren Satelliten, dass im Vergleich zu demselben das von der Sonne herrührende klein ist.

**237)** Untersuchen wir nun *die Störungen, welche die Abplattung* eines Planeten *in der Breite* eines Satelliten *hervorbringt*.

**238)** *Wenn ein Satellit nicht in der Ebene des Äquators steht, so sucht ihn die von der Abplattung herrührende Störung derselben zu nähern.*

Fällt die Bahn des Satelliten mit der Ebene des Äquators des Planeten zusammen, so ist augenscheinlich keine Störung vorhanden, die aus dieser Ebene auf- oder abwärts zu ziehen strebt; der Planet wird deshalb beständig sich in dieser Ebene bewegen, oder es giebt in diesem Falle keine Störung in Breite.

Nehmen wir nun an, die Bahn des Satelliten sei gegen die Ebene des Äquators geneigt; B sei der Satellit (Fig. 82). Untersuchen wir die Anziehung der zwei Klumpen D und E, soweit dieselbe bestrebt ist B senkrecht zur Linie AB fortzutreiben. D ist näher an B als E, und die Linie BD ist mehr geneigt gegen AB als EB, bildet also einen *grösseren* Winkel mit AB als BB. Wirkte die Anziehung von D allein, so würde sie in gewisser Zeit den Satelliten nach d ziehen, und fd wäre der Teil dieser Bewegung, der senkrecht zu AB ist, und zwar wäre diese Bewegung aufwärts gerichtet (man zerlegt Bd in zwei Bewegungen, in eine in Richtung von AB und in eine senkrecht zu AB; fd ist senkrecht zu AB). Wirkte E allein, und würde dadurch B in derselben Zeit nach e gezogen, so wäre eg der Teil dieser Bewegung, der senkrecht zu AB, und zwar niederwärts zu AB gerichtet ist. Wirken beide Anziehungen, so kombinieren sich beide Wirkungen, und es fragt sich, welche die grössere ist, d. h. ob fd oder eg das grössere ist. Da D näher an B liegt als E, so ist zunächst Bd grösser als Be, und da auch noch BD einen grösseren Winkel mit AB bildet als BE, so ist df viel grösser als eg, so dass also die aufwärts treibende Kraft überwiegt. *Die vereinten Anziehungen von D und E ziehen daher den Satelliten über die Linie AB hinauf.* Die Anziehung der ganzen Kugel würde ihn längs der Linie AB fortzuziehen suchen. Nun geht doch diese letztere Wirkung hervor aus der Anziehung der beiden Klumpen und aus der des abgeplatteten Sphäroids; da die wirkliche Gesamtanziehung keine Abweichung von AB hervorbringt, die Klumpen eine solche aufwärts von AB erzeugen, so muss das Sphäroid eine solche abwärts von AB bewirken. Bei einem abgeplatteten Sphäroide ist demnach, ausser der nach seinem Mittelpunkte gerichteten Anziehung, stets noch eine senkrecht zum Radius Vektor AB stehende, nach dem Äquator hin gerichtete (jetzt abwärts von AB gerichtete) Kraft vorhanden, die den Satelliten nach der Ebene des Äquators zu ziehen sucht (dadurch wird das in 215 Behauptete begründet).

Steht der Satellit dem Planeten näher, so ist die Ungleichheit zwischen den Entfernungen DB und EB und zwischen den Neigungen von AB gegen DB und EB noch grösser

---

kleinster Entfernung $= \frac{m}{n}$, so ist die erstere Anziehung in der grössten Entfernung $A \cdot \left(\frac{n}{m}\right)^2$, die zweite $B \cdot \left(\frac{n}{m}\right)^2 \cdot \left(\frac{n}{m}\right)^2$, da letztere zur ersten nicht mehr im Verhältnisse von $\frac{B}{A}$ steht, sondern dieses Verhältnis jetzt nur noch das $\left(\frac{n}{m}\right)^2$fache ist. Denkt man sich denselben Satelliten in $\frac{1}{2}$ so grosser Entfernung vom Hauptplaneten, so ist die erste Anziehung auf ihn $4 \cdot A$, die zweite $16B$ in der kleinsten Entfernung, da das Verhältnis der letzteren zur ersteren in halber Entfernung das 4fache von dem in einfacher Entfernung, d. h. von $\frac{B}{A}$ ist. Nimmt man für das Verhältnis von grösster und kleinster Entfernung immer noch $= \frac{m}{n}$ an, so sind beide Anziehungen in der grössten Entfernung resp. $4A \cdot \left(\frac{n}{m}\right)^2$ und $16 \cdot B \cdot \left(\frac{n}{m}\right)^2 \cdot \left(\frac{n}{m}\right)^2$. Das Verhältnis beider Kräfte für die grösste und kleinste Entfernung ist also $\frac{B}{A} \left(\frac{n}{m}\right)^2$ und $\frac{B}{A}$ für den ferneren, $4 \cdot \frac{B}{A} \cdot \left(\frac{n}{m}\right)^2$ und $4 \cdot \frac{B}{A}$ für den näheren Satelliten oder es ist für den näheren Satelliten grösser, als vorher, und daher auch die Störung für einen näheren Satelliten viel bedeutender, als für einen entfernteren. (Damit ist das in 216 Behauptete bewiesen.)

**239)** Die Wirkungen dieser Störungen, wie sie bei Jupiter vorkommen, haben wir schon erwähnt, als wir in 215 die Fundamentalebenen der Jupitersatelliten bestimmten. Aus 192 u. f., insbesondere aus 220 folgt dann, dass die Kraft die Knotenlinie zurückgehen macht, wenn die Bahn gegen die Fundamentalebene geneigt ist, und zwar um so schneller, je näher der Satellit dem Hauptplaneten steht. Wäre keine andere störende Kraft vorhanden, so würde die Neigung dieser Bahnen gegen die Ebenen des Jupiteräquators unveränderlich sein, und ihre Knoten würden mit verschiedenen Geschwindigkeiten rückwärts gehen, die der nahen rascher als die der ferneren (220). In der That verhält sich bei den inneren Satelliten die Sache nahezu so, als ob keine andere störende Kraft existierte, so gross ist die durch die Abplattung Jupiters auf sie ausgeübte Wirkung.

**240)** Die Wirkung des Saturnringes auf die Bewegungen der Satelliten Saturns.

Mit Rücksicht auf seinen Ring weicht die Gestalt Saturns allerdings von der des Jupiter ab; will man aber die Wirkungen Saturns auf seine Satelliten erklären, so kann man dieselben Schlussfolgerungen anwenden wie bei Jupiter. Der Saturn ist abgeplattet, und die davon herrührenden Störungen sind dieselben wie bei Jupiter. Die Wirkungen des Ringes kann man auf folgende Weise ermitteln.

Wenn wir in ein abgeplattetes Sphäroid eine Kugel beschreiben (Fig. 83), welche seine Oberfläche in den beiden Polen berührt, so wird das Sphäroid in zwei Teile geteilt, in eine Kugel, deren Anziehung dieselbe ist, als wenn ihre Masse im Mittelpunkte vereinigt wäre, und in eine äquatoriale Hervorragung — in einen Wulst um den Äquator —, die der Gestalt nach einem Ringe gleich kommt. Die ganze Unregelmässigkeit in der Anziehung des Sphäroids rührt augenscheinlich her von der Anziehung dieses ringähnlichen Wulstes, da es in der Anziehung der Kugel keine solche Unregelmässigkeit giebt. Es wird also die Unregelmässigkeit in der Anziehung einer Kugel mit Ring derselben Art sein, wie die einer Kugel mit äquatorialem Wulste, d. h. wie die eines abgeplatteten Sphäroids (nur ist diese Unregelmässigkeit für den Ring im Vergleich zur Gesamtanziehung viel grösser als für den Wulst des Sphäroids, da der Ring die ganze Unregelmässigkeit ohne die Gesamtanziehung erzeugt). Da nun die Ebene des Ringes mit der des Äquators zusammenfällt, so erhält man die Wirkungen des abgeplatteten Körpers und des Ringes, indem man ihre gleichartigen Wirkungen einfach summiert, und da weiter der Ring eine Wirkung derselben Art wie die Abplattung, also ein Ring gleichartige Wirkungen wie ein Wulst erzeugt, so erfolgen die Wirkungen gerade so, als hätte man ausser dem Wulst des Sphäroids noch einen solchen, der dem Ringe entspricht, oder als wäre im ganzen ein grösserer Wulst da, oder als wäre Saturn sehr abgeplattet.

Da es nun, wenn Saturn mit Ring wirkt, so gut ist, als wirkte Saturn mit grösserer Abplattung, so lässt sich das von der Wirkung der Abplattung Jupiters Gesagte hier anwenden; das Perisaturnium (oder die Apsidenlinie, 236) eines Satelliten wird daher schnell vorwärts, und seine Knoten werden schnell rückwärts gehen. Was die übrigen Umstände anlangt, so kann man wohl als wahrscheinlich annehmen, dass die Theorie dieser Satelliten sehr einfach sein wird, da alle, mit Ausnahme des sechsten, sehr klein sind, und die störende Kraft der Sonne zu gering ist, um irgend merkliche Wirkungen hervorzubringen.

**241)** Mit Ausnahme des sechsten, welcher der hellste ist, sind die Satelliten Saturns so wenig beobachtet worden, dass man keine Thatsachen besitzt, durch welche man die Theorie dieser Körper begründen könnte. Doch hat Bessel eine Reihe von Beobachtungen des sechsten Satelliten angestellt, aus denen man durch Vergleichung des beobachteten Vorschreitens des Perisaturniums und des Rückschreitens der Knoten mit den aus einer angenommenen Masse des Ringes berechneten Werten dieser Grössen die Masse des Ringes gefunden hat. Schreibt man die ganze Wirkung dem Ringe zu, so findet man auf dem angegebenen Wege die Masse des Ringes nahezu $\frac{1}{118}$ der Masse des Planeten.

**242)** Die Fundamentalebene des Mondes ist gegen die Ekliptik geneigt.

Die Wirkung der Abplattung der Erde auf die Beschleunigung der rückschreitenden Bewegung der Mondknoten ist so klein, dass die Beobachtungen davon nichts erkennen lassen; wohl aber ist der Einfluss auf die Lage der Fundamentalebene wahrnehmbar. Untersuchen wir diesen Einfluss.

Aus 204 wissen wir, dass die Knotenlinie des Mondes in $19\frac{1}{2}$ Jahren eine ganze Umdrehung ausführt. Die Ebene des Erdäquators ist $23\frac{1}{2}°$ gegen die der Erdbahn geneigt, und die Durchschnittslinie beider ändert sich sehr langsam — sie führt in 26000 Jahren eine Umdrehung aus. Zu Zeiten also wird die Knotenlinie mit dieser Durchschnittslinie zusammenfallen, so dass die Ebene der Mondbahn zwischen den genannten zwei Ebenen zu liegen kommen wird; $9\frac{3}{4}$ Jahre später fällt die Knotenlinie wieder mit dieser Linie zusammen,*) nur ist die Mondbahn nach der andern Seite geneigt, so dass sie mit dem Erdäquator einen grösseren Winkel bildet als der ist, den die Bahn der Erde mit ihm bildet (Fig. 84). Nun hat man gefunden, dass im ersten Falle, in der ersten Lage der Mondbahn, die Neigung oder der Winkel der Mondbahn gegen die Erdbahn um ungefähr 16″ grösser ist als in der zweiten Lage;**) wäre nun die Erdbahn die Fundamentalebene, so würde sich die Neigung gegen sie nicht ändern. Da eine solche Änderung vorhanden ist, so muss eine andere Ebene, als die der Erdbahn oder des Erdäquators, die Fundamentalebene sein. Die letztere, gegen welche also die Neigung stets die gleiche bleibt, wird vielmehr mit der Erdbahn einen Winkel von etwa 8″ bilden und nach dem Erdäquator hin geneigt sein (Fig. 84).

Im ersten Falle ist dann $\sphericalangle$ ABD der gegen die Fundamentalebene DG, im zweiten ist er $\sphericalangle$ FBG; der eine ist 8″ kleiner, der andere 8″ grösser geworden als der Winkel der Mondbahn gegen die Erdbahn, so dass gegen diese Ebene DG die Neigung in beiden Fällen dieselbe ist. Diese Änderung der Fundamentalebene rührt nur von der Abplattung der Erde her, da sonst, wenn nur die Sonne störte, die Ekliptik Fundamentalebene wäre.

**243)** Die Abplattung der Erde erzeugt in der Mondbewegung eine Ungleichheit von langer Periode.

Ausser der soeben erwähnten Wirkung der Abplattung der Erde auf den Mond giebt es noch eine wahrnehmbare.

Die Neigung der Mondbahn gegen die Ekliptik ist kleiner als 5°, die Neigung des Erdäquators gegen dieselbe Ebene beträgt $23\frac{1}{2}°$. Steht also die Mondbahn zwischen diesen zwei Ebenen, so ist sie um $23\frac{1}{2}° - 5°$ oder nahezu 19° gegen den Erdäquator geneigt; ist die Knotenlinie wieder in dieselbe Lage gekommen — zweiter Fall in 242 —, aber die Bahn auf die andere Seite geneigt, so ist der Winkel, den sie mit dem Erdäquator bildet, $23\frac{1}{2}° + 5°$ oder nahe 28°.

Nach 235 ist der Überschuss der Anziehung eines Sphäroids über die Anziehung der im Mittelpunkt vereint gedachten Masse, also die Wirkung der Abplattung, am grössten, wenn der Satellit im Äquator steht, und nimmt von da nach der Richtung der Achse hin ab; folglich wird der Mond im zweiten Falle, wo seine Ebene 28° vom Äquator abweicht, an der Stelle, an welcher er am weitesten von seinem Knoten entfernt ist, (durch die Abplattung) eine kleinere Anziehung zur Erde hin erfahren, als wenn er im ersten Falle seine grösste Entfernung vom Knoten hat. Steht er in der Knotenlinie selbst, so werden in beiden Fällen die Attraktionen gleich sein (der Mond steht dann in jedem der zwei Fälle im Äquator selbst). Im ganzen also wird die Anziehung zur Erde hin im zweiten Falle kleiner sein als im ersten,

*) Es sind $9\frac{3}{4}$ Jahr, also die Hälfte von $19\frac{1}{2}$ Jahren, weil die Durchschnittslinie von Erdbahn und Erdäquator in dieser Zeit ihre Lage sehr wenig geändert hat.

**) Auch die Neigung der Mondbahn gegen den Äquator ändert sich sehr.

oder für eine Periode von $9\frac{3}{4}$ Jahren nimmt die Anziehung der Erde auf den Mond stufenweise ab, und nimmt dann die gleiche Zeit hindurch wieder zu. Aus 47 folgt dann, dass die Mondbahn in der ersten Periode stufenweise grösser, in der zweiten kleiner wird. Diese Veränderungen sind in Wirklichkeit sehr klein, aber die daraus hervorgehende Änderung in Länge kann sehr merklich sein, wie bereits in 49 erwähnt wurde; so hat man durch Beobachtung für diese Längenänderung den Wert 8″ gefunden, um welche der Mond bald vor seinem mittleren Orte voraus, bald hinter ihm zurück ist.

Wäre die Abplattung der Erde an jedem Pole grösser oder kleiner als wir bisher angenommen haben (nämlich grösser oder kleiner als $\frac{1}{299}$ des Äquatorialhalbmessers), so würden auch die Wirkungen auf den Mond, sowohl in Bezug auf die Änderungen in der Lage der Fundamentalebene, als in Bezug auf diese Ungleichheit in Länge, grösser oder kleiner sein als die vorher dafür angegebenen Grössen; und so kommen wir zu dem sehr merkwürdigen Resultate, dass man aus Beobachtungen des Mondes auf die Grösse der Abplattung der Erde schliessen kann, vorausgesetzt, dass die Theorie richtig ist. Diesen Schluss hat man gemacht, und die Übereinstimmung des so erhaltenen Wertes der Abplattung der Erde mit dem durch direkte Messungen auf der Erde gefundenen ist einer der schlagendsten Beweise für die Richtigkeit des Gesetzes von der allgemeinen Schwere.