Wissenschaftliche Beilage zum XXX. Jahresberichte des städtischen Realgymnasiums zu Borna. Ostern 1903.

Airys elementare Theorie der Planeten- und Mondstörungen

(II. Teil)

von

Professor **Balduin Schöne**,
Oberlehrer am Realgymnasium zu Borna.

1903. Programm Nr. 628.

Borna.
Druck von Albert Reiche.
1903.

Airys elementare Theorie der Planeten- und Mondstörungen.

II. Teil*).

Theorie des Mondes.

89) Die störende Kraft im Radius Vektor vermindert die mittlere Entfernung des Mondes von der Erde; die Wirkung der auf dem Radius Vektor senkrechten störenden Kraft ist verschieden.

Betrachten wir die Wirkungen, welche die in 88 genannten störenden Kräfte im allgemeinen, im ganzen hervorbringen. Da die im Radius Vektor liegende störende Kraft, welche von der Erde weg gerichtet ist, grösser ist als die nach der Erde hingerichtete (80), so lässt sich die Gesamtwirkung dieser Kraft ansehen, als eine Verminderung der Anziehung der Erde. Es verhalten sich nun (38) die Kuben der mittleren Entfernungen zweier Himmelskörper, die sich um verschiedene Centralkörper bewegen, wie die Produkte der Massen der letzteren in die Quadrate der Umlaufszeiten. Die Bewegungen des Mondes um die Erde, ohne und mit Störung, kann man aber ansehen im 1. Falle als eine Bewegung des Mondes um eine Masse M und im 2. Falle als eine um eine kleinere Masse m; nennt man die Umlaufszeit des Mondes in jedem der zwei Fälle T, die mittlere Entfernung R resp. r, so wird daher nach dem angegebenen Gesetze sein müssen

$$R^3 : r^3 = M.\,T^2 : m.\,T^2 \quad \text{oder}$$
$$R^3 : r^3 = M : m.$$

Ist nun m kleiner als M, wie hier, so muss auch r kleiner sein als R. Die mittlere Entfernung des Mondes von der Erde wird demnach infolge der Störung kleiner ausfallen als sie sein würde, wenn die Sonne keine Störung ausgeübt hätte; vorausgesetzt, dass die Umlaufszeit in beiden Fällen dieselbe ist.

Die auf dem Radius Vektor senkrechte Störung wird den Mond bald beschleunigen, bald verzögern, und daher keine beständige Wirkung hervorbringen.

90) Des Mondes jährliche Gleichung, hervorgebracht durch die Veränderung der Entfernung der Sonne von der Erde.

Da die Erde sich in einer Ellipse um die Sonne bewegt, so ist die Entfernung beider Körper von einander veränderlich. Die Grösse der störenden Kraft ist aber (83) umgekehrt proportional dem Kubus der Sonnenentfernung (d. i. der Entfernung des störenden Körpers); infolgedessen ist sie merklich grösser, wenn die Erde im Perihel, als wenn sie im Aphel ist. Bewegt sich also die Erde vom Perihel nach dem Aphel, so wird die störende Kraft beständig

*) Der I. Teil befindet sich im 22. Jahresberichte der Anstalt (1895. Programm Nr. 561).

abnehmen, aber zunehmen, während sie vom Aphel zum Perihel geht. Als störende Kraft kann allein die von der Erde weg gerichtete, im Radius Vektor liegende, angesehen werden, da die dazu senkrechte keine beständige Wirkung hervorbringt, wie in 89 gesagt ist. Nimmt nun im ersten Teile die Kraft ab, so wird dadurch die Entfernung von Erde und Mond geringer, oder die Bahn verengert sich allmählich, wie auch aus 47 folgt; wächst aber die störende Einwirkung, im zweiten Teile, vom Aphel zum Perihel, so wird sie die Entfernung des Mondes von der Erde vergrössern oder die Bahn wird sich nach und nach erweitern (47). Wenn nun auch diese Änderung der Entfernung von Erde und Mond an sich nicht gross ist, da der grösste und kleinste Wert der so verursachten verschiedenen Entfernungen sich kaum um $\frac{1}{5000}$ der mittleren Entfernung von einander unterscheiden, so ist doch die Wirkung auf die Winkelbewegung sehr beträchtlich (49). Mit den Dimensionen der Bahn ändert sich nämlich die Umlaufszeit (da sich die Quadrate der Umlaufszeiten wie die Kuben der mittleren Entfernung verhalten; erweitert sich also z. B. die Bahn, so wird die Umlaufszeit grösser) und damit die Winkelgeschwindigkeit, d. h. der Winkel, der in bestimmter Zeit beschrieben wird.

Die Winkelbewegung oder Winkelgeschwindigkeit wird demnach zunehmen, wenn sich die Erde vom Perihel nach dem Aphel, abnehmen, wenn sie sich vom Aphel nach dem Perihel bewegt, und zwar wird im Perihel die Winkelgeschwindigkeit am kleinsten sein, von da bis zum Aphel bis zum grössten Werte anwachsen, und dann wieder kleiner werden u. s. f. Denkt man sich also die mittlere Winkelgeschwindigkeit angegeben, d. i. den Winkel, der im Durchschnitt oder Mittel (etwa in einer Sekunde) beschrieben wird, so wird die Geschwindigkeit im Perihel kleiner als die mittlere sein, sich ihr danach nähern, schliesslich im Aphel grösser sein, und dann abnehmen, bis sie im Perihel wieder kleiner als die mittlere ist. Der Mond wird sich im Perihel, Anfang Januar, wo er weit von der Erde entfernt ist (weil die störende, von der Erde weg gerichtete Kraft gross ist) langsamer um die Erde bewegen als im Aphel, Anfang Juli. Infolge der geringen Geschwindigkeit im Perihel wird vom Perihel an des Mondes wahrer Ort hinter dem mittleren mehr und mehr zurückbleiben, der Zuwachs des Zurückbleibens wird aber immer kleiner, weil die Geschwindigkeit zunimmt, bis schliesslich in der Mitte von Perihel bis zum Aphel die Winkelgeschwindigkeit wieder gleich der mittleren ist. Von da ab wächst die erstere über die letztere, und der Mond holt in dieser zweiten Hälfte der Strecke von Perihel zu Aphel das wieder ein, um was er in der ersten Hälfte zurückbleibt, bis im Aphel selbst der wahre Ort mit dem mittleren zusammenfällt. Vom Aphel an, wo die Geschwindigkeit inzwischen sehr gross geworden ist, eilt der Mond dem mittleren Orte voraus; allein, da die Winkelbewegung kleiner wird, so wird der Zuwachs des Vorausseins immer kleiner, bis schliesslich die Geschwindigkeit so klein ist, dass er sich dem mittleren Orte wieder nähert, und ihn im Perihel erreicht, wo die Geschwindigkeit am kleinsten ist u. s. f. Die grösste Abweichung des wahren Ortes vom mittleren beträgt 11′ 12″, um so viel wird der wahre Ort hinter dem mittleren zurück (im Frühjahr) oder vor dem mittleren voraus sein können (im Herbst). Diese Ungleichheit, und zwar in der Länge des Mondes, weil sie sich mit jedem Erdumlaufe wiederholt, also an die Dauer des Jahres gebunden ist, heisst des Mondes jährliche Gleichung. Dieselbe wurde von Tycho de Brahe um 1590 aus Beobachtungen gefunden.

91) Des Mondes Variation, die unmittelbare Wirkung des Hauptteils der störenden Kräfte.

Wir wollen jetzt die Störungen untersuchen, welche bei jedem Mondumlaufe periodisch wiederkehren, und welche unabhängig von der Excentricität der Mondbahn sind.

Nehmen wir an, die Sonne oder besser die Erde stehe für einige Mondumläufe still: Sonne und Erde stehen also fest, nur der Mond bewege sich. Welcher Art muss nun die Bahn sein, in der sich der Mond unter Einwirkung der störenden Kräfte bewegt?

Die Bahn kann kein Kreis sein.

Die Kraft senkrecht zum Radius Vektor verzögert den Mond, wenn er von B_1 (Fig. 32)*) nach B_2 geht (88 und 84), und seine Geschwindigkeit ist deshalb in B_2 kleiner als in B_1; deswegen würde, wenn auch die Anziehung der Erde A auf B_1 und B_2 dieselbe wäre, die Bahn in B_2 stärker gekrümmt sein als in B_1. Aber da (88) die störende Kraft in B_2 nach A hin, in B_1 von A weg gerichtet ist, so ist es derart, als wäre die Anziehung von A in B_2 grösser als die in B_1, und daher muss auch in dieser Hinsicht die Krümmung in B_2 grösser sein als in B_1. Bei einem Kreise müsste aber die Krümmung überall dieselbe sein.

Die Bahn kann auch kein Oval sein mit der Erde im Mittelpunkte, dessen grössere Achse durch die Sonne C geht. Da die Geschwindigkeit in B_2 (Fig. 33) klein ist, weil die störende Kraft senkrecht zum Radius Vektor die Bewegung von B_1 bis B_2 verzögert; da die Anziehung der Erde wegen der grösseren Nähe des B_2 an A gross ist und noch durch die in B_2 nach A hin gerichtete Störung vermehrt wird, so muss die Krümmung in B_2 viel grösser sein als in B_1, wo ja die Geschwindigkeit gross, der Mond weit von der Erde entfernt ist, und die störende Kraft von der Erde fort gerichtet ist. Bei der angenommenen Form der Bahn würde aber die Krümmung in B_2 geringer sein als die in B_1. Diese Form der Bahn ist also nicht die wahre.

Den Bedingungen, die erfüllt sein müssen, wird aber genügt, wenn man die Bahn als ein Oval annimmt, dessen kleine Achse nach der Sonne hin gerichtet ist. (Die Erde A ist im Mittelpunkte gedacht). Die Geschwindigkeit in B_2 (Fig. 34) ist vermindert worden, weil die störende Kraft senkrecht zum Radius Vektor die Bewegung von B_1 bis B_2 verzögerte; soll aber die Bahn, wie in der angenommenen Figur, in B_2 stärker gekrümmt sein, so muss wirklich auch die Geschwindigkeit in B_2 kleiner sein als die in B_1. Freilich ist die Entfernung B_2A grösser als B_1A, demnach die Anziehung in B_2 kleiner als in B_1, aber es wird doch die Anziehung in B_2, vermehrt um die nach A gerichtete störende Kraft in B_2, nur um sehr wenig kleiner sein als die in B_1 durch die von A weg gerichtete störende Kraft verminderte Anziehung von A, sodass die Geschwindigkeit in B_2 viel, die Kraft in B_2, die nach A gerichtet ist, wenig abgenommen hat, daher die Bahn immer in B_2 stärker gekrümmt sein muss als in B_1, wie es die Figur verlangt.

Soll also der Zustand unter Einwirkung der störenden Kräfte ein dauernder sein, so muss die Mondbahn ein Oval der zuletzt angegebenen Art sein. Ein solches Oval wird folglich der Mond in den auf einander folgenden Umläufen unverändert beschreiben. Recht wohl lassen sich die Verhältnisse des Ovals so gewählt denken, dass es genau dem entspricht, welches die aus den verschiedenen Geschwindigkeiten folgenden Krümmungen verlangen.**)

92) Es ist vorher vorausgesetzt worden, dass die Erde stillstehe in bezug auf die Sonne. Wollen wir den wirklichen Vorgang, die Bewegung der Erde um die Sonne oder die scheinbare Bewegung der Sonne um die Erde mit berücksichtigen, so brauchen wir nur dem früheren Ovale eine Drehung um die Sonne zu erteilen, und dann ganz die frühere Schlussfolge anzuwenden. Es wird sich dann also das Oval so drehen, dass stets die kleine Achse nach der Sonne zu gewendet ist. (Fig. 35 stellt die vom Monde beschriebene Kurve dar mit Rücksicht auf die scheinbare Bewegung der Sonne.)

Stünde nun aber die Erde still, so würde die Zeit von einem Syzygium (etwa Neumond) bis wieder zu demselben (der sogen. synodische Monat) genau die Zeit sein, die zu einem ganzen Umlauf (siderischer Monat) gehört. Ist aber die Erde in Bewegung oder bewegt sich die Sonne scheinbar fort, so wird, wenn der Mond von M_1 (Fig. 36) bis wieder nach M_1 gekommen ist, die Sonne nicht mehr in S, sondern in S_1 und das Syzygium in M_3 sein (oder in M_2, wenn man die kleine Achse der Mondbahn stets nach der Sonne hin zeigend annimmt). Der Mond braucht also bei bewegter Erde mehr Zeit von einem Syzygium bis wieder zu demselben, als bei feststehender Erde; daher wird auch im ersten Falle die senkrecht zum Radius

*) Die Richtung der Kräfte ist, wie in 88 angegeben, aus Fig. 31 ersichtlich.

**) Die störenden Kräfte haben somit das Bestreben, den Mond ein Oval beschreiben zu lassen, dessen kleine Achse nach der Sonne hin gerichtet ist.

Vektor stehende störende Kraft in demselben Sinne längere Zeit hindurch wirken als früher, d. h. längere Zeit beschleunigen, aber auch verzögern, und folglich der Unterschied der Geschwindigkeiten in den Syzygien und Quadraturen noch grösser ausfallen als bei stillstehender Erde.

Wenn man sich die Erde beweglich, die Sonne stillstehend denkt, so gestaltet sich die Sache so: Neumond mag bei M_1 (Fig. 37) stattgefunden haben; hat sich die Erde bis A_2 bewegt, so wird, wenn Neumond stattfindet, derselbe nicht in M_1, sondern in M_3 erfolgen oder in M_2, wenn man die kleine Achse der Bahn immer nach der Sonne S gerichtet denkt. Dieselbe Schlussweise wie vorher gilt auch hier: Die störende Kraft senkrecht zum Radius Vektor wird längere Zeit wirken als bei stillstehender Erde, da der Mond jetzt längere Zeit braucht von einer Syzygie bis wieder zu derselben.

93) Wie wird sich nun die erwähnte Störung in des Mondes Winkelbewegung zeigen? Wenn der Mond die gefundene Ellipse, deren kleine Achse nach der Sonne gerichtet ist, ohne eine störende Kraft senkrecht zum Radius Vektor beschriebe, so würde der Radius Vektor in gleichen Zeiten gleiche Flächen beschreiben, und es würde daher nach früherem die Winkelbewegung des Mondes nahe B_2 und B_4 (Fig. 34) viel kleiner sein als die nahe B_1 und B_3. Wie wird diese Abweichung von der gleichförmigen Winkelbewegung nun durch die störende Kraft senkrecht zum Radius Vektor geändert? Diese Kraft*) verzögert den Mond von B_1 bis B_2 und von B_3 bis B_4, sie beschleunigt ihn von B_2 bis B_3 und von B_4 bis B_1; daher wird die Winkelbewegung bei B_2 und B_4 noch mehr vermindert, bei B_1 und B_3 noch grösser sein als es ohne die Kraft sein würde. Die Winkelbewegung wird von B_1 bis B_2 bedeutend abnehmen, von B_2 bis B_3 zunehmen; von da bis B_4 abnehmen, bis B_1 wieder zunehmen.

Die Winkelbewegung des Mondes ist in B_1 und B_3 grösser, in B_2 und B_4 kleiner als die mittlere, und zwar noch viel grösser oder kleiner als diejenige mittlere, die sich ergeben würde, wenn der Mond die genannte Ellipse ohne die Kraft senkrecht zum Radius Vektor beschriebe. Daher ist des Mondes wahrer Ort von B_1 bis B_2 und von B_3 bis B_4 vor dem mittleren voraus, von B_2 bis B_3 und von B_4 bis B_1 hinter demselben zurück. Diese Ungleichheit in der Bewegung, die sich als eine ungleichförmige Änderung der Länge des Mondes kenntlich macht, heisst des Mondes V a r i a t i o n; ihr grösster Wert beträgt 35′ 42″, um welche der wahre Ort des Mondes manchmal vor, manchmal hinter dem mittleren ist. Sie wurde um 1590 von Tycho de Brahe aus Beobachtungen gefunden. Eine Abweichung solcher Grösse tritt von einem Neumonde bis zum folgenden zweimal auf; von B_1 bis B_2, von B_3 bis B_4 ist der Mond voraus, von B_2 bis B_3 und von B_4 bis B_1 zurück um 35′ 42″. Die Störung kehrt also in jeder Hälfte der Zeit von Neumond zu Neumond wieder; ihre Periode ist der halbe synodische Monat oder $14{,}_8$ Tage. Mit dem genannten grössten Werte tritt die Abweichung auf in den Mitten von Quadraturen und Syzygien, was sich durch eine ähnliche Schlussweise wie in 90 ermitteln lässt. Vom Syzygium an nämlich eilt der Mond infolge der grossen Geschwindigkeit dem mittleren Orte voraus, doch wird der Zuwachs des Vorausseins immer kleiner, bis die Geschwindigkeit in der Mitte zwischen Syzygium und Quadratur so verkleinert ist, dass kein Zuwachs des Vorausseins mehr erfolgt, also das letztere am grössten ist. Die Geschwindigkeit nimmt nun weiter ab, sodass der Mond von nun an zurückbleibt, bis das Voraussein in der Quadratur ganz aufgehoben ist, und von jetzt an ein Zurückbleiben gegen den mittleren Ort erfolgt, das seinen grössten Wert in der Mitte von Quadratur und folgender Syzygie erreicht u. s. f.

Wie wir erkennen, rührt die gefundene Störung, die bei jedem M o n d u m l a u f periodisch wiederkehrt, von dem Hauptteile der störenden Kräfte, von den letzteren im allgemeinen her. Diese letzteren vergrössern also die Geschwindigkeit in den Syzygien, vermindern sie in den Quadraturen, und suchen daher die Mondbahn an den Stellen der Quadraturen stärker zu krümmen, in den Syzygien die Krümmung kleiner zu machen, als sie

*) Diese Kräfte sind in Fig. 31 des 1. Teils der Abhandlung dargestellt.

sein würde ohne Störung; sie streben eben an, die Bahn so zu gestalten, dass ihre kleine Achse nach der Sonne zu gewendet ist.

Es ist von verzögernden und beschleunigenden Kräften geredet worden, aber es ist nicht in Betracht gezogen worden, ob die verzögernden Kräfte z. B. unter einander gleich oder verschieden sind.

94) Die parallaktische Ungleichheit, bewirkt durch den Unterschied der störenden Kräfte in der Konjunktion und in der Opposition.

In 79 erwähnten wir nun, dass die störenden Kräfte auf der der Sonne zugekehrten und auf der von der Sonne entferntesten Seite der Bahn nicht gleich seien, dass vielmehr die ersteren ein wenig grösser seien als die letzteren. Das galt zunächst für die Kräfte im Radius Vektor, doch gilt es auch für die senkrecht zu demselben. Welcher Art werden nun die Störungen sein, die infolge der Verschiedenheit dieser Kräfte auftreten?

Denken wir uns dazu, wir hätten in der vorigen Untersuchung über die Variation einen mittleren Wert der in Rede stehenden störenden Kräfte benutzt. Wir erhalten dann den wirklichen Fall, wenn wir diese mittlere Kraft in der Nähe der Konjunktion vergrössert, in der Nähe der Opposition verringert annehmen. Nach 77, 78, 84 müssen wir, um den wirklichen Fall aus dem mittleren Werte zu erhalten, folgende Änderungen treffen:

In der Nähe der Konjunktion ist eine Kraft im Radius Vektor, von der Erde weg gerichtet, und eine solche senkrecht zum Radius Vektor hinzuzufügen, welche letztere den Mond vor der Konjunktion beschleunigt und nach derselben verzögert; in der Nähe der Opposition müssen diese Kräfte von gerade entgegengesetzter Art gewählt werden. Welche Änderungen erzeugen diese hinzuzufügenden Kräfte?*)

Wir werden wieder ermitteln, welche Gestalt die Bahn haben muss, damit unsere Kräfte allein keine Veränderung derselben hervorbringen können. (Es kommen die Wirkungen der vorher behandelten Kräfte also gar nicht in Frage, wir haben vielmehr gar keine andern störenden Kräfte, als die jedesmal in Rede stehenden zu betrachten und dann zu ermitteln, welcher dauernde Zustand mit der Wirkung dieser Kräfte allein verträglich ist. Ein andrer Zustand als jener eine wird dann nie andauern, und jenen einen, dauernden, werden dann die Kräfte herbeizuführen bestrebt sein.) Die Kräfte selbst sind, wie gesagt, sehr klein, sie werden daher die Bahn nicht merklich von der elliptischen Form abbringen. Soll nun immer dieselbe Art von Bahn beschrieben werden, so muss die Excentricität immer dieselbe sein, und man wird dann angeben können, welches jene konstante Excentricität, und welches die Lage der Apsidenlinie sein muss.

Geht die Apsidenlinie nicht durch die Sonne (Fig. 38), so ergiebt sich aus 57, 58, 59, 68, dass die Excentricität der Bahn infolge der störenden Kräfte entweder ab- oder zunimmt. Steht z. B. der störende Körper in C, somit nicht in der Apsidenlinie, so haben wir in B_1 und seiner Nachbarschaft eine von A fort, in B_3 eine nach A hin gerichtete Kraft; vor der Konjunktion B_1 eine beschleunigende, nach dem Durchgange durch B_1 eine verzögernde störende Kraft, ferner eine vor B_3 verzögernde, nach B_3 beschleunigende Kraft.

Diese Kräfte wirken nur in der Nähe der Konjunktion und Opposition. (Die Pfeile deuten die Richtung derselben an.) In B_1 geht der Mond vom Perigäum zum Apogäum; nach 59 wird dann durch die in B_1 im Radius Vektor von A weg wirkende Kraft die Excentricität vergrössert. In B_3 ist die Kraft im Radius Vektor nach A hin gerichtet, und da der Mond hier vom Apogäum nach dem Perigäum geht, so vergrössert sie nach 58 die Excentricität. Die Kraft senkrecht zum Radius Vektor beschleunigt vor B_1, und zwar geschieht dies in der Nähe des Perigäums — da die Punkte links der kleinen Achse der beschriebenen elliptischen Bahn in der Nähe des Perigäums, die rechts davon nahe dem Apogäum liegen —, sodass sie nach 68 die Excentricität vergrössert; dasselbe gilt von der nach dem Durchgange durch B_3 beschleunigenden Kraft. Die nach dem Passieren von B_1 und die vor dem Durchgange durch B_3 verzögernden Kräfte wirken in der Nähe des Aphels und verursachen daher nach 68

*) In Fig. 38 u. 39 sind diese Kräfte allein durch Pfeile dargestellt.

wieder eine Zunahme der Excentricität. Hat also die Absidenlinie die angenommene Lage, so wird die Excentricität nicht konstant bleiben. In der durch Fig. 39 dargestellten Lage wirkt in B_1 die Kraft im Radius Vektor von A fort, und der Mond bewegt sich vom Perigäum nach dem Apogäum; deshalb wird die Excentricität nach 58 zunehmen. Ebenso erzeugt die in B_3, wo der Mond vom Apogäum nach dem Perigäum geht, nach A gerichtete Störung ein Wachsen der Excentricität. Der Punkt B_1, samt benachbarten Punkten, liegt in der Nähe des Perihels, daher wird die beschleunigende Kraft vor B_1 die Excentricität vergrössern, die verzögernde, nach dem Durchgange durch B_1 wirkende Kraft aber dieselbe um nahe ebensoviel verkleinern; Gleiches gilt von den in der Umgebung von B_3 senkrecht zum Radius Vektor wirkenden Kräften, so dass die letzteren im ganzen fast keine Wirkung hervorbringen und daher die Excentricität infolge der im Radius Vektor liegenden Kräfte im Ganzen zunimmt. Ebenso lässt sich für andere Fälle, in denen die Lage der Apsidenlinie die ist, wie sie die Fig. 40, 41, 42 darstellen, zeigen, dass die Excentricität sich ändert.

Ist aber die Apsidenlinie nach der Sonne hin gekehrt (Fig. 43), so werden die störenden Kräfte*) vor B_1 oder vor Neumond, und nach demselben genau gleich sein, und zwar sowohl die im Radius Vektor von A weg gerichteten, als auch die senkrecht dazu wirkenden, vor B_1 beschleunigenden, nach B_1 verzögernden Kräfte; denn dann liegt die Bahn symmetrisch um die Linie B_1 B_3. Die Änderungen, welche diese Kräfte nach dem in den genannten Paragraphen Gefundenen in der Excentricität hervorrufen, werden sich dann aufheben. Gleiches gilt von den vor und nach B_3 (Opposition, Vollmond) wirkenden Kräften. — Dies ergiebt sich so: „Die Kraft ist über B_1 und B_3 dieselbe wie die in den entsprechenden Punkten unter B_1 und B_3, da die störende Kraft der Entfernung vom Centralkörper proportional ist; ebenso sind die Kräfte im Radius Vektor und senkrecht dazu von gleicher Grösse. Die ersteren wirken bei B_1 von A fort, und zwar vor B_1 während der Mond nach dem Perigäum geht, nach B_1 aber während er nach dem Apogäum geht, und erzeugen daher nach 59 gleiche und entgegengesetzte Wirkungen in Bezug auf die Excentricität. Ebenso heben sich die Wirkungen der bei B_3 im Radius Vektor liegenden Kräfte auf. 68 lehrt weiter, dass auch die Kräfte senkrecht zum Radius Vektor, die ebenfalls zu beiden Seiten von B_1 wie B_3 gleich sind, die Excentricität im ganzen unverändert lassen.“ — Unsere Bahn soll stets dieselbe Excentricität behalten; wir sehen, dies wird eintreten, wenn wir annehmen, dass die Apsidenlinie durch die Sonne geht. Ist aber das Perigäum oder Apogäum zur Sonne hin gewendet?

Dazu müssen wir beachten, dass doch, wenn die Apsidenlinie immer durch die Sonne gehen soll, diese Linie eben so schnell wie die Sonne vorrücken muss. Wir müssen deshalb diejenige Lage der Apsidenlinie wählen, bei welcher die Kräfte ein Fortschreiten derselben verursachen werden. Ist das Perigäum zur Sonne hin gewendet, so machen die Kräfte auf beiden Seiten der Bahn die Linie der Apsiden rückläufig (siehe 51, 53, 65, 66). Diese Annahme ist also nicht zulässig. Liegt aber das Apogäum nach der Sonne zu, so werden nach denselben Paragraphen, die zu beiden Seiten der Bahn wirkenden Kräfte eine progressive Bewegung der Apsidenlinie hervorrufen. Ja, wenn wir uns für die Excentricität den gehörigen konstanten Wert gewählt denken, so wird das Fortschreiten der Linie genau gleich dem der Sonne sein (56). Ein solcher dauernder Zustand allein ist also mit unseren Kräften verträglich; letztere streben daher dahin, die Bahn in die angegebene Form zu bringen. Wir sehen daher: „Der Unterschied der Kräfte in Konjunktion und Opposition bewirkt das Bestreben der Apsidenlinie sich nach der Sonne hin zu wenden, und zwar — da das Apogäum nach der Sonne hin, das Perigäum gerade entgegengesetzt liegt — sucht dieser Unterschied die Bahn nach der Sonne zu zu verlängern, auf der entgegengesetzten Seite zusammenzudrücken, oder er will die Bahn nach der Sonne hin mehr zuspitzen oder krümmen, auf der entgegengesetzten Seite abplatten. Man sieht, die Variation wird durch diese Störung etwas vermindert in Konjunktion und vermehrt in Opposition (siehe 96), da eben unsere Störung in Konjunktion das entgegengesetzte, in Opposition dasselbe erzeugen will wie die Variation.**)

*) Sie sind in Fig. 38 und 39 durch Pfeile dargestellt.
**) Siehe die Bemerkung zu 91.

Man nennt diese Störung **die parallaktische Ungleichheit***); sie ändert ebenfalls des Mondes mittlere Länge. Ihr grösster Betrag ist $2'\,2{,}_1''$, um welche der wahre Ort hinter dem mittleren (im ersten Viertel) zurück oder vor ihm voraus ist im (letzten Viertel). Da nämlich die Bahn nach der Sonne zu stärker gekrümmt wird, der grösseren Krümmung eine geringere Geschwindigkeit entspricht (siehe 96), so wird von Konjunktion an der Mond hinter dem mittleren Orte zurück sein, ein Zurücksein, das im ersten Viertel den grössten Wert erreicht hat u. s. w.

In den folgenden Abschnitten (98, 99, 100) werden wir zeigen, dass, wenn der Mond sich in einer Bahn bewegt, wie sie vorher erwähnt worden ist, deren Apsidenlinie also durch die Sonne geht, die Wirkungen von anderen noch nicht erwähnten störenden Kräften der Apsidenlinie eine beträchtliche fortschreitende Bewegung erteilen werden. Die hier betrachteten Kräfte, welche die parallaktische Ungleichheit erzeugen, brauchen daher nur ein geringeres Fortschreiten der Absidenlinie hervorzurufen, welches zu dem, von den später zu behandelnden Kräften erzeugten hinzugefügt, ein Fortschreiten ergiebt derart, dass die Linie der Apsiden stets nach der Sonne gerichtet ist, ein Fortschreiten also, das mit der scheinbaren Bewegung der Sonne gleichen Schritt hält.

Die betrachteten Kräfte sollen also nur eine geringere progressive Bewegung erzeugen. Nach 56 sind die Wirkungen kleiner, wenn die Excentricität grösser ist. Dieselben Kräfte haben nur einen Teil der fortschreitenden Bewegung der Apsidenlinie zu erzeugen; damit dies geschieht, muss die Excentricität der Bahn grösser angenommen werden, und zwar grösser als man sie hätte annehmen müssen, wenn die hier behandelten Kräfte das ganze Fortschreiten hätten bewirken sollen. Durch das Dazukommen der später zu betrachtenden Kräfte wird also bewirkt, dass für die Excentricität der Bahn ein grösserer (konstanter) Wert genommen werden muss, dass die Bahn mehr zugespitzt ist, als wenn diese Kräfte nicht vorhanden wären. Wenn dann die Apsidenlinie fortschreitet, so wird die Verlängerung der Bahn nach der Sonne zu noch grösser sein als früher. So wird die parallaktische Ungleichheit vermehrt durch die Wirkung der anderen störenden Kräfte.

95) Die Grösse der hier behandelten Kräfte, welche die parallaktische Ungleichheit erzeugen, ist beiläufig ungefähr $\frac{1}{135}$ von der der Kräfte, welche die Variation hervorriefen, und in 91 u. f. betrachtet wurden (die störenden Kräfte in Konjunktion und Opposition waren nach 79 das $\frac{799}{159201}$ und $\frac{801}{160801}$fache der Anziehung der Sonne auf die Erde oder das 0,005018 und 0,004981 fache; die Differenz dieser Kräfte ist das 0,000037 fache derselben Anziehung; nehmen wir für die störenden Kräfte in Konjunktion wie Opposition den abgerundeten oder mittlern Wert $\frac{1}{200}$, wie wir es früher bei der Variation gethan haben, sodass also die mittlere störende Kraft $\frac{1}{200}$, die Differenz der störenden Kräfte in Konjunktion und Opposition 0,000037 ist, so ergiebt sich, dass diese Differenz das 0,000037 : $\frac{1}{200}$fache oder $\frac{1}{135}$ der mittleren störenden Kraft ist); die Wirkungen beider dagegen verhalten sich nahe wie 1 : 17 (die Variation beträgt $35'\,42''$, die parallaktische Ungleichheit $2'\,2{,}_1''$). Es ist das ein auffallendes Beispiel des Unterschiedes im Verhältnisse der Grössen und der Wirkungen der Kräfte; die Differenz rührt her von der verschiedenen Wirkungsweise derselben.

Die parallaktische Ungleichheit ist deshalb bemerkenswert, weil man aus ihrer Grösse das Verhältnis der Entfernungen der Sonne und des Mondes von der Erde mit grosser Genauigkeit bestimmen kann (vergleiche damit die Bemerkung am Ende der Seite).

96) Wie schon erwähnt, wird sich die hier behandelte Störung mit der in 91 u. f. behandelten Variation kombinieren. (Siehe die Anmerkung zu 134; darnach ist die wirkliche

---

*) Zur Erklärung des Ursprunges dieses Wortes: „Das Verhältnis der verschieden grossen Abziehungen in Neu- und Vollmond hängt vom Verhältnisse zwischen den Entfernungen des Mondes und der Sonne von der Erde ab; und da letzteres Verhältnis einerlei mit dem zwischen den Horizontalparallaxen der Sonne und des Mondes ist, so heisst jene Störung auch parallaktische Gleichung.“ Möbius, Elemente der Mechanik des Himmels.

Abweichung im Radius Vektor gleich der Summe der einzelnen Abänderungen.) Die Folge davon ist, dass die Mondbahn auf der der Sonne zugekehrten Seite weniger, auf der abgewendeten mehr abgeplattet sein wird, als wir in 91 und 92 fanden. Das gleichförmige Beschreiben von Flächen wird durch die jetzt behandelten Kräfte kaum beeinflusst, es wird daher der Flächensatz gelten, und es wird deshalb infolge der etwas verminderten Abplattung oder vergrösserten Krümmung in Konjunktion die Geschwindigkeit daselbst etwas kleiner ausfallen oder die Variation wird in der Nähe der Konjunktion etwas vermindert, und in der Nähe der Opposition etwas vermehrt.

97) Die Variation hängt nicht von der Excentricität ab.

Zeigen wir jetzt, dass die Unregelmässigkeit, Variation genannt, in irgend einer elliptischen Bahn ebenso wie in einer Kreisbahn erzeugt wird, dass also die störenden Kräfte in jeder Bahn die Geschwindigkeit in den Syzygien vergrössern, in den Quadraturen vermindern, oder die Bahn in den Syzygien abplatten und in den Quadraturen zuspitzen.

Der Mond, so werde angenommen, wolle die Kreisbahn B_1 b_2 B_3 b_4 beschreiben (Fig. 44); treten die störenden Kräfte hinzu, so wird er eine andere Bahn beschreiben müssen, wie wir früher gesehen haben, nämlich das Oval B_1 B_2 B_3 B_4, welches aber den Kreis in B_1 und B_3 berührt. Diese Kräfte wirken in B_1 und B_3 von A fort, in B_2 und B_4 nach A hin; sie machen die Anziehung der Erde in B_1 und B_3 kleiner, in B_2 und B_4 grösser als sie sonst, ohne Störung, gewesen wäre. Die auf dem Radius Vektor senkrechte störende Kraft macht die Geschwindigkeit in B_2 kleiner, als sie sonst in b_2 gewesen sein würde. Hätte der Mond in B_1 dieselbe Geschwindigkeit wie bei der Bewegung im Kreise, so würde durch die infolge der grösseren Anziehung erzeugte starke Krümmung und durch die verminderte Geschwindigkeit in B_2 der Mond viel näher nach A kommen als der Punkt B_3 ist. Allein die Geschwindigkeit ist in B_1, mit Berücksichtigung der Störung, viel grösser als ohne Störung in der Kreisbahn. Daher wird infolge dieser grösseren Geschwindigkeit in B_1, trotz der grösseren Anziehung und der geminderten Geschwindigkeit in B_2 der Mond sich über b_2 hinaus bis B_2 von A entfernen und infolge der grösseren Krümmung genau durch B_3 gehen. Mit der in B_3 erlangten grossen Geschwindigkeit wird dann der Körper bis hinaus zu B_4 und von da nach B_1 kommen.*)

Nehmen wir ferner an, der Mond hätte ohne Störung die Ellipse B_1 b_2 B_3 b_4 (Fig. 45) beschreiben wollen, so wird die Wirkung der störenden Kräfte dieselbe sein wie vorher. Wie vorher würde die geminderte Geschwindigkeit und grössere Anziehung in B_2 den Mond näher an A bringen als B_3 ist. Da die Geschwindigkeit in B_1 aber grösser ist als die ohne Störung in der Bahn B_1 b_2 B_3 b_4, so wird der Körper über b_2 hinaus bis B_2 gehen, und die grössere Anziehung und verminderte Geschwindigkeit in B_2 werden seine Bahn dann so krümmen, dass er die ursprüngliche elliptische Bahn gerade in B_3 berühren kann u. s. w. Die ganze Erklärung beruht im einen wie im anderen Falle auf der Differenz der Kräfte, die ohne Störung und mit Berücksichtigung der Störung vorhanden sind. In jedem Falle ist die Wirkung die, die Bahn an den Stellen der Syzygien B_1 und B_3 flacher zu machen.

B. Störungen, die von der Excentricität abhängen.

Bisher haben wir die Störungen nur betrachtet, so weit sie vom Stande der Sonne abhängen. Allein es giebt auch Störungen, welche davon abhängen, ob der Mond sich im Perigäum oder Apogäum, d. h. im einen oder andern Endpunkte der grossen Achse seiner Bahn, und ferner, ob er sich in einem Endpunkte der kleinen Achse befindet. Von Perigäum oder Apogäum lässt sich nur reden, wenn der Centralkörper nicht im Mittelpunkte der Bahn steht, also letztere eine Excentricität hat. So haben wir die Störungen noch zu behandeln, die von der Lage des Perigäums oder Apogäums oder von der Excentricität abhängen, und

*) B_1 u. B_3 sind Syzygien. Die störenden Kräfte sind die in Fig. 31.

die natürlich von den bisher schon behandelten Kräften erzeugt werden. Sprechen wir da zuerst von der Bewegung des Perigäums. Nehmen wir das Perigäum oder, was dasselbe ist, die Apsidenlinie in bestimmten Lagen an.

a. Bewegung des Perigäums oder der Apsidenlinie.

98) Fällt die Linie der Apsiden mit der der Syzygien zusammen, so verursachen die störenden Kräfte ein Vorschreiten der Apsidenlinie.

Das Perigäum B_1 (Fig. 43) sei der Sonne zugekehrt. Betrachten wir zunächst die Wirkungen der im Radius Vektor liegenden Kräfte*). In der Nähe von B_1 ist die störende Kraft von A fort gerichtet; die Apsidenlinie geht folglich, nach 51, rückwärts. Ist der Mond in der Nähe von B_3, d. h. nahe beim Apogäum, so ist die störende Kraft ebenfalls von A weg gerichtet, und die Apsidenlinie bewegt sich deshalb nach 54 direkt. Nunmehr fragt es sich: Ist die direkte oder die retrograde Bewegung die grössere? Da jetzt der störende Körper weit absteht, so folgt aus 82, dass die störende Kraft in B_3 sich zu der in B_1 verhält wie $AB_3 : AB_1$. AB_3 ist grösser als AB_1, folglich auch die störende Kraft in B_3 grösser als in B_1 (auch die gesamten von A weg gerichteten störenden Kräfte in der Umgebung von B_3 sind grösser als alle bei B_1, die die retrograde Bewegung erzeugen); deshalb ist die erstere Kraft viel grösser als diejenige Kraft, welche eine progressive Bewegung erzeugen würde, die gleich ist dem bei B_1 hervorgerufenen Rückschreiten. Es überwiegen die Wirkungen der störenden Kraft bei B_3 und die Apsidenlinie schreitet vorwärts. Die nach A hin gerichteten störenden Kräfte in der Nähe von B_2 und B_4 erzeugen kaum eine Wirkung, da die letztere auf den beiden Seiten von B_2 und B_4 von gerade entgegengesetzter Art ist und die Kräfte nahe gleich sind, weil B_2 und B_4 gleich weit vom Centralkörper entfernt sind; es liegen nämlich die Punkte links von B_2 und B_4 in der Nähe des Perigäums, die rechts davon in der Nähe des Apogäums (50, 53; siehe hierzu auch 55).**)

99) Wirkungen der auf dem Radius Vektor senkrechten Kraft. Die von A weg gerichtete störende Kraft ist in den Punkten B_1 und B_3 selbst die einzige störende Kraft, nicht aber in der Nähe dieser Punkte; es ist da auch noch eine Kraft senkrecht zum Radius Vektor vorhanden. Diese beschleunigt den Mond, während er sich B_1 nähert, und nach 65 wird deshalb, da B_1 der Ort des Perigäums ist, die Apsidenlinie rückwärtsgehen; entfernt sich der Mond von B_1, so verzögert ihn die Kraft, und die Apsidenlinie geht nach 66 wieder rückwärts. Nähert sich aber der Mond B_3, dem Orte des Apogäums, so beschleunigt ihn die Kraft senkrecht zum Radius Vektor, und es bewegt sich die Apsidenlinie nach 65 direkt. Ebenso bewegt sie sich direkt nach dem Durchgange durch B_3 (66), wo die Kraft den Mond verzögert. Wiederum fragt es sich, ob die bei B_3 erzeugte progressive Bewegung grösser ist, als die bei B_1 erzeugte retrograde.

Wie schon in 98 erwähnt wurde, ist die störende Kraft, da sie der Entfernung vom Centralkörper proportional ist, von B_2 bis B_3 und von B_3 bis B_4 grösser als die von B_4 bis B_1 und B_1 bis B_2; dieselbe wirkt im ersten Falle längere Zeit als im zweiten, weil der Mond von B_2 bis B_3 bis B_4 eine längere Zeit braucht als von B_4 bis B_1 bis B_2, was sich aus dem Gesetze ergiebt: Der Radius Vektor beschreibt in gleichen Zeiten gleiche Flächenräume.

Nun ist die Grösse des Vor- oder Rückschreitens ganz von dem Verhältnisse abhängig, in welchem die durch die störende Kraft erzeugte Geschwindigkeit zu derjenigen steht, die der Mond an der betreffenden Stelle hat; da die Geschwindigkeit beim Durchgange von B_2 über B_3 bis B_4 kleiner ist, als die beim Durchlaufen der Strecke B_4 über B_1 bis B_2, und da

*) Die Kräfte sind wieder die in Fig 31.

**) Verhielten sich die von A weg gerichteten störenden Kräfte umgekehrt wie die Quadrate der Entfernungen, so wäre das Resultat ganz dasselbe, als wenn man die Anziehung von A in gegebenem Verhältnisse geändert oder die Masse von A verkleinert hätte; durch letzteres würden freilich auch die Kräfte bei B_2 und B_4 geändert werden, aber da diese keine Wirkung auf die Apsidenlinie hervorbringen, so dürfte man in der That die Anziehung von A im ganzen verkleinert denken. Dann aber würde der Mond stets dieselbe Bahn, also eine Bahn beschreiben, deren Apsidenlinie sich nicht ändert.

im ersten Falle, nach dem soeben Behandelten, die Kraft stärker und länger einwirkt als im zweiten Falle, so wird die von der Störung erzeugte Geschwindigkeit im Vergleich zu der Geschwindigkeit an der betreffenden Stelle im ersten Falle viel grösser sein, als das Verhältnis dieser Geschwindigkeiten im zweiten Falle. Es wird deshalb das Vorschreiten das Rückschreiten überwiegen. Die Kraft senkrecht zum Radius Vektor erteilt also der Apsidenlinie ebenfalls eine progressive Bewegung.

100) Wenn demnach das Perigäum der Sonne zugekehrt ist, so führt die Apsidenlinie im ganzen eine direkte Bewegung aus. Dieselbe Schlussweise, wie in den vorherigen Paragraphen, lässt sich in jeder Hinsicht auch dann anwenden, wenn das Perigäum von der Sonne weg gewendet ist. Die störenden Kräfte im Radius Vektor, wie die senkrecht dazu, bewirken wieder eine progressive Bewegung der Apsidenlinie.

101) Die Apsidenlinie fällt mit der Linie der Quadraturen zusammen; die störenden Kräfte verursachen ein Rückschreiten der Apsidenlinie.

Es sei die Apsidenlinie senkrecht zur Verbindungslinie von Erde und Sonne (Fig. 46). Die störende Kraft im Radius Vektor ist jetzt in den beiden Apsiden zur Erde hin gerichtet und veranlasst deshalb nach 50 und 52 ein Fortschreiten der Apsidenlinie, während der Mond in der Nähe des Perigäums, und ein Rückschreiten, während er nahe dem Apogäum ist. Nun ist die störende Kraft der Entfernung von der Erde proportional; daher ist sie in der Nähe des Apogäums grösser als im Perigäum, folglich die Wirkung im ersten Falle grösser als im letzteren, d. h. die retrograde Bewegung der Apsidenlinie ist grösser als die progressive. Die störenden Kräfte in den Syzygien B_1 und B_3 erzeugen kaum eine Wirkung; es gilt hier dasselbe, was vorher, in 98, von den in B_2 und B_4 wirkenden Kräften gesagt worden ist.

102) Betrachten wir die Kräfte senkrecht zum Radius Vektor. Aus früherem ergiebt sich, dass dieselben den Mond verzögern, während er sich einer Apside nähert (von B_3 bis B_4 z. B.), und ihn beschleunigen, wenn er sich von einer solchen entfernt. Aus 65 und 66 folgt dann, dass die Apsidenlinie, wenn der Mond in der Nähe des Perigäums ist, vorschreitet, aber in der Nähe des Apogäums rückschreitet. Denn, nach dem Passieren von B_4 beschleunigt die Kraft, die Apsidenlinie bewegt sich daher direkt (65), vor B_4 verzögert die Kraft, die Apsidenlinie bewegt sich wieder direkt (66); entsprechendes erhält man für die Umgebung von B_2. Wendet man dieselbe Schlussweise an, wie in 99, so ergiebt sich, dass das Rückschreiten das Vorschreiten überwiegt. Dieses Resultat, im Verein mit dem in 101 gefundenen, lässt erkennen, dass die Apsidenlinie infolge der behandelten Kräfte bedeutend zurückgeht.

103) In 56 wurde erwähnt, dass die Wirkungen der Kräfte grösser werden, wenn die Excentricität kleiner wird. Dies gilt hier nicht. Wird die Excentricität kleiner, so wird freilich die Bewegung der Apsidenlinie grösser, wie es eben in 56 angegeben ist. Allein die störende Kraft hängt von der Excentricität ab, ist z. B. die Excentricität Null, so ist auch die Wirkung der störenden Kraft Null. Die wirklich in Betracht kommende störende Kraft ist ja die Differenz der Kräfte in Perigäum und Apogäum, und die Kräfte selbst verhalten sich wie die Entfernungen vom Centralkörper, also hier wie die Entfernungen des Peri- und Apogäums von der Erde; letztere sind gleich, wenn die Excentricität Null ist, folglich sind es dann auch die störenden Kräfte, und ihre Differenz ist Null. Überhaupt aber ist die störende Kraft — weil sie die Differenz der Kräfte in Peri- und Apogäum ist, und weil diese wieder den Entfernungen von der Erde proportional sind — selbst der Differenz dieser Entfernungen, d. h. der Excentricität proportional. Bei kleiner Excentricität ist daher die störende Kraft kleiner, und infolge davon die Bewegung der Apsidenlinie langsamer als bei grösserer Excentricität. Wird also durch verminderte Excentricität allein die Bewegung der Apsidenlinie vergrössert, im Vergleich zu der bei der ursprünglichen Excentricität, so wird, infolge der gleichzeitig verringerten störenden Kraft, die Bewegung langsamer werden. Die Vermehrung und Verminderung der Bewegung heben sich auf; die Bewegung der Apsidenlinie bleibt auch bei sich ändernder Excentricität nahe dieselbe wie früher bei ungeänderter.

104) Die Apsidenlinie geht im ganzen vorwärts, da ihre retrograde Bewegung kleiner ist als die progressive.

Für die Bewegung des Perigäums hat sich aus dem Bisherigen das Folgende ergeben: Geht die Apsidenlinie durch die Sonne, so erteilen ihr die störenden Kräfte eine progressive Bewegung; steht sie senkrecht zur Verbindungslinie von Sonne und Erde, so wollen dieselben Kräfte die Apsidenlinie rückwärts bewegen. Es lässt sich nun denken, dass es zwischen den genannten beiden Lagen eine solche Lage der Apsidenlinie geben wird, in welcher die störende Kraft gar keine Wirkung ausübt. Von Interesse ist es nun, zu untersuchen, ob das erwähnte Vorschreiten das Rückschreiten an Grösse übertrifft.

Betrachten wir zunächst die Kräfte senkrecht zum Radius Vektor. Die in 99 betrachtete Kraft dieser Art (dort war die Apsidenlinie nach der Sonne gerichtet, Fig. 43) ist genau gleich der in 102 behandelten (wo die Apsidenlinie senkrecht zur Linie Sonne—Erde stand, Fig. 46), denn die störende Kraft ist dem Abstande vom Centralkörper proportional, und diese Abstände sind bei beiden Bahnen gleich, also auch die beschleunigende Kraft von B_4 bis B_1 in 99 genau gleich der verzögernden von B_3 bis B_4 in 102, die verzögernde von B_1 bis B_2 in 99 gleich der beschleunigenden von B_4 bis B_1 in 102 u. s. f. Demnach ist das von jener Kraft erzeugte Vorschreiten der Apsidenlinie, falls letztere durch die Sonne geht, gleich dem Rückschreiten, welches die Kraft erzeugt, wenn die Apsidenlinie senkrecht ist zur Verbindungslinie von Sonne und Erde. Die Kraft senkrecht zum Radius Vektor kann also als eine solche betrachtet werden, die im ganzen keine Wirkung auf die Bewegung der Apsidenlinie ausübt (abgesehen von einer indirekten, von der wir später sprechen werden). Wäre also bei einem Mondumlaufe die Apsidenlinie durch die Sonne gegangen, bei einem andern senkrecht zu dieser Lage gewesen, so würde die in Rede stehende Kraft keine Änderung der Lage der Apsidenlinie herbeigeführt haben.

Es kommt nun noch in Frage die im Radius Vektor von der Erde weg (98) und zur Erde hin gerichtete Kraft (101). Aus 79 folgt, dass die von der Erde weg wirkende Kraft in 98 nahezu $\frac{1}{200}$ ist von der Anziehung der Sonne auf die Erde. 80 aber ergiebt, dass die zur Erde hin gerichtete störende Kraft in 101 nur $\frac{1}{400}$ der Anziehung auf die Erde ist. Die erstere störende Kraft ist also fast das Doppelte der letzteren und demnach wiegt auch die Wirkung der ersteren vor, d. h. die Apsidenlinie wird infolge der Wirkung der im Radius Vektor liegenden Kräfte im ganzen vorwärtsgehen (98).

In der That beträgt das Vorschreiten der Apsidenlinie, wenn sie durch die Sonne geht, ungefähr 11° bei jedem Mondumlauf, das Rückschreiten dagegen, wenn die Apsidenlinie senkrecht zur Verbindungslinie von Erde und Sonne steht, nur etwa 9° bei jedem Mondumlauf.

105) Das Vorschreiten der Apsidenlinie wird noch vergrössert durch die Änderung der Wirkungsdauer der verschiedenen Kräfte, die von der Bewegung der Sonne herrührt.

Die progressive Bewegung der Apsidenlinie ist beträchtlich grösser als die bisherigen Betrachtungen erwarten lassen, und zwar aus folgenden Gründen:

106) Erstens. Die Erde bewegt sich um die Sonne oder letztere scheint sich um die Erde zu bewegen in derselben Richtung, in der sich der Mond bewegt. Dies verlängert die Zeit, in welcher die Sonne in irgend einer Weise auf den Mond wirkt, aber es verlängert diese Zeit mehr, wenn der Mond sich langsam, als wenn er sich schnell bewegt, da der Mond, der sich ja überhaupt schneller als die Sonne bewegt, im ersten Falle länger in der Nähe der Sonne bleibt.

So ist des Mondes Winkelbewegung im Perigäum das 14fache von der der Sonne, im Apogäum dagegen nur das 10fache. Bewegt sich also die Sonne um 1° fort, so rückt der Mond im Perigäum um 14° weiter oder entfernt sich um 13° von der Sonne, von der Erde aus gesehen. Die ganze Bewegung des Mondes beträgt 14°, die in Bezug auf die Sonne 13°, sodass der Mond mit $\frac{13}{14}$ seiner ganzen Bewegung an der Sonne vorübergeht, während er im Apogäum nur mit $\frac{9}{10}$ derselben der Sonne vorauseilt. Da also der Mond sich nur mit $\frac{13}{14}$ seiner ganzen Bewegung von der Sonne entfernt, so beträgt die Zeit, in welcher er sich um einen gewissen Winkel von der sich bewegenden Linie der Syzygien entfernt, oder in welcher der Winkel zwischen Sonne und Mond um ein Bestimmtes wächst, $\frac{14}{13}$ von der Zeit, in welcher er denselben Winkel durchlaufen hätte, wenn die Sonne nicht in Bewegung gewesen wäre. In der Nähe des Apogäums ist die erstere Zeit $\frac{10}{9}$ von der zuletzt erwähnten. Die letztere Zahl $\frac{10}{9}$ ist grösser als die frühere $\frac{14}{13}$, d. h die störende Kraft wirkt im Apogäum (infolge der scheinbaren Bewegung der Sonne) längere Zeit ein als im Perigäum; daher wird auch die Wirkung dieser Kräfte (durch die Bewegung der Sonne) im Apogäum in stärkerem Masse vergrössert als im Perigäum. Die wirkliche, resultierende Bewegung der Apsidenlinie wird aber doch erzeugt durch den Überschuss der Wirkungen im Apogäum über die Wirkungen im Perigäum; daher wird also ein geringer Zuwachs der Wirkung im Apogäum, wie er hier vorhanden ist, die wirkliche Bewegung der Apsidenlinie merklich vergrössern.

107) Zweitens. Ist die Apsidenlinie zur Sonne hin gerichtet, so besteht die Gesamtwirkung der Kräfte darin, diese Linie fortschreiten zu machen, d. h. in derselben Richtung zu bewegen, in der die Sonne fortgeht. Nun bewegt sich die Sonne während eines Mondumlaufs ungefähr 27° fort, die Apsidenlinie im selben Sinne, nach 104, um 11°. Die Sonne entfernt sich daher nur um $27^{\circ} - 11^{\circ} = 16^{\circ}$ von der Apsidenlinie während eines Mondumlaufes. Dadurch, dass beide im selben Sinne sich bewegen, wird also bewirkt, dass die Apsidenlinie längere Zeit in der Nähe der Sonne bleibt, als es der Fall sein würde, wenn die Apsidenlinie sich nicht bewegte; es wird daher auch die Kraft längere Zeit in derselben Weise einwirken.

Steht die Apsidenlinie senkrecht zur Verbindungslinie von Sonne und Erde, so besteht die Gesamtwirkung der Kräfte in einer rückläufigen Bewegung der Apsidenlinie, deren Grösse nach 104 etwa 9° für einen Mondumlauf beträgt. In dieser Zeit schreitet die Sonne im entgegengesetzten Sinne um 27° fort; folglich vergrössert sich in diesem Falle der Winkel zwischen Sonne und Apsidenlinie in jeder Mondrevolution um $27^{\circ} + 9^{\circ} = 36^{\circ}$, und die Apsidenlinie verlässt daher schnell diese Lage, schneller als wie ohne störende Kräfte. Die Zeit, in welcher die Kräfte auf diese Lage einwirken, ist daher kürzer, die Wirkung selbst geringer als es der Fall sein würde, wenn die Apsidenlinie sich nicht fortbewegte. In der ersten Lage, wo die Apsidenlinie durch die Sonne ging, ist also die Wirkung der Kräfte länger dauernd als in der zweiten Lage. Weil nun weiter die Apsidenlinie aus der ersten Lage sich langsam, aus der zweiten schnell entfernt, so wird die erste Lage vorherrschen. Aus beiden Gründen ergiebt sich ein Überwiegen derjenigen Wirkung, die in der zuerst behandelten Lage der Apsidenlinie erzeugt wird. Beide Umstände, das längere Verweilen der Apsidenlinie in der ersten Lage wie das Vorherrschen dieser Lage, vergrössern das Fortschreiten der Apsidenlinie.

108) Durch die vereinten Wirkungen der in 106 und 107 angegebenen Ursachen wird das Vorschreiten der Apsidenlinie nahe doppelt so gross wie dasjenige, das sich herausstellen würde, wenn die verschiedenen Teile der Bahn der störenden Kraft der Sonne während der auf einander folgenden Mondumläufe gleichmässig ausgesetzt wären.

109) Im ganzen führt also die Apsidenlinie eine progressive Bewegung aus (das Perigäum schreitet vor), und zwar, wie Rechnung und Beobachtung übereinstimmend zeigen, mit einer Winkelgeschwindigkeit, infolge deren sie während eines jeden Mondumlaufes im Durchschnitt 3° beschreibt, und welche sie demnach in nahezu 9 Jahren eine volle Umdrehung ausführen lässt. Freilich bewegt sich manchmal Monate hintereinander die Apsidenlinie direkt oder monatelang retrograd, sodass ihre Bewegung eine sehr unregelmässige ist, aber, wie gesagt, im ganzen ist doch das Vorschreiten grösser als das Rückschreiten, und zwar um durchschnittlich 3° für jeden Mondumlauf. Die Bewegung der Apsidenlinie im allgemeinen ist seit den ältesten Zeiten der Astronomie bekannt.*)

b. Störungen der Excentricität der Mondbahn.

110) Die Excentricität bleibt ungeändert, wenn die Linie der Apsiden mit der der Syzygien zusammenfällt oder auf ihr senkrecht steht.

Es gehe die Apsidenlinie durch die Sonne (Fig. 43). Bewegt sich der Mond vom Perigäum B_1 nach dem Apogäum B_3, so ist die Kraft in Richtung des Radius Vektors bald von der Erde fort, bald zu ihr hin gerichtet; nach 59 und 57 vergrössert und verringert sich dementsprechend die Excentricität. Geht der Mond aber von B_3 nach B_1, so sind die in diesem Teile der Bahn auftretenden störenden Kräfte genau gleich den früheren, welche von B_1 bis B_3 da waren, und zwar sind an den sich entsprechenden Punkten der Halbbahnen, welche symmetrisch zur grossen Achse liegen, die Kräfte gleich. (Diese Punkte, B_2 und B_4, sind z. B. solche, welche zu zweien symmetrisch zur Linie der Syzygien liegen, sind vom Centralkörper gleich weit entfernt, weshalb auch die störenden Kräfte auf der einen Bahnhälfte eben so gross wie die für die entsprechenden Punkte der andern sind.) Nach 58 bringen dann diese Kräfte genau entgegengesetzte Wirkungen hervor. Im ganzen haben also die Kräfte, die in Richtung des Radius Vektors wirken, keinen Einfluss auf die Excentricität.

Betrachten wir die Kräfte senkrecht zum Radius Vektor. Dieselben vergrössern die Geschwindigkeit des Mondes, wenn er von B_4 nach B_1, und machen sie um eben so viel kleiner, wenn er von B_1 nach B_2 geht. Nach 68 wird dann die Excentricität wachsen, während sich der Mond von B_4 nach B_1 bewegt, und um ebensoviel abnehmen während der Bewegung von B_1 nach B_2.

In gleicher Weise ergiebt sich, dass die Excentricität während der Bewegung von B_2 nach B_3 kleiner, von B_3 nach B_4 aber um ebensoviel grösser wird. Auch die Kraft senkrecht zum Radius Vektor hat im ganzen keinen Einfluss auf die Excentricität.

Es ergiebt sich also, dass die Excentricität der Bahn durch die störenden Kräfte im ganzen nicht geändert wird, wenn die Apsidenlinie durch die Sonne geht.

111) Die Apsidenlinie stehe senkrecht zur Linie der Syzygien (Fig. 46). Auch jetzt bleibt die Excentricität trotz der störenden Kräfte im ganzen ungeändert. Es ist nämlich auch jetzt $B_3 B_4 = B_4 B_1$ und $B_1 B_2 = B_2 B_3$. Da ferner die störende Kraft der Entfernung von der Erde proportional ist, und diese Entfernungen für die Punkte zwischen $B_4 B_1$ und $B_1 B_2$ gleich denen der Punkte zwischen $B_3 B_4$ und $B_2 B_3$ sind, so sind auch die Kräfte auf den Strecken $B_4 B_1$ und $B_1 B_2$ gleich denen längs $B_3 B_4$ und $B_2 B_3$, sodass sich die Wirkungen derselben auf verschiedenen Seiten von Perigäum und Apogäum, wie früher, aufheben.**)

112) Ist die Linie der Syzygien gegen die der Apsiden geneigt, und geht der Mond früher durch letztere, als durch die erstere, so wird die

*) Im Laufe der von der Sonne scheinbar ausgeführten Bewegung wird die Apsidenlinie freilich in alle möglichen Lagen zur Sonne kommen, allein die Wirkungen in den hier behandelten Lagen sind die überwiegenden; giebt es ja zwischen beiden, nach 104, solche Lagen, in denen gar keine Wirkung auf die Apsidenlinie stattfindet.

**) Die Kraft im Radius Vektor ist bei B_4 und B_2 nach der Erde hin gerichtet und erzeugt auf der Strecke von B_4 bis B_2, nach 57, ein Vermindern der Excentricität, von B_2 bis B_4 eine eben so grosse Zunahme (58); die von der Erde fort gerichtete störende Kraft bei B_1 und B_3 vergrössert die Excentricität von B_4 bis B_2 und verkleinert sie um dasselbe von B_2 bis B_4. Die Kraft senkrecht zum Radius Vektor wird nach 68 von B_3 bis B_4 die Excentricität verkleinern, von B_4 bis B_1, nach 67, um dasselbe vergrössern, ebenso von B_1 bis B_2 vergrössern, von B_2 bis B_3 um ein Gleiches verkleinern.

Excentricität bei jedem Mondumlauf kleiner oder grösser, je nachdem die Linie der Syzygien auf der einen oder andern Seite der zur Apsidenlinie senkrechten Geraden liegt.

Nehmen wir die Apsidenlinie geneigt an gegen die Linie AC der Syzygien (wie in Fig. 39)*); der Mond erreiche das Perigäum eher wie das Syzygium. Jetzt halten sich die Wirkungen der störenden Kräfte nicht mehr das Gleichgewicht.

Ist der Mond in der Nähe von B_4 und B_2, so ist die störende Kraft in Richtung des Radius Vektor nach der Erde hin gerichtet; da in B_4 der Mond sich nach dem Perigäum hin, in B_2 von ihm fort bewegt, so wird nach 58 und 57 die Excentricität in B_4 vergrössert, in B_2 vermindert. Nun erfolgt die Bewegung bei B_2 langsam, die störende Kraft kann also längere Zeit einwirken; ferner ist diese Kraft in B_2 grösser als in B_4, da B_2 weiter von A entfernt ist als B_4, und die störenden Kräfte sich wie die Entfernungen von A verhalten. Daher überwiegt die Wirkung in B_2, und infolge der vereinten Einwirkungen bei B_4 und B_2 wird deshalb die Excentricität im ganzen abnehmen.

In B_1 und B_3 ist die Kraft in Richtung des Radius Vektor von der Erde fort gerichtet. In B_1 bewegt sich der Mond vom Perigäum fort, in B_3 nach ihm hin; nach 59 wird dann infolge der störenden Kraft die Excentricität in B_1 zunehmen, in B_3 kleiner werden. Wieder erfolgt die Bewegung in B_3 langsamer, in B_1 schneller oder die Kraft wirkt längere Zeit in B_3 als in B_1; B_3A ist grösser als B_1A, daher die Kraft in B_3 die grössere. Beides bewirkt, dass die Wirkung in B_3 vorwiegt; die vereinigten Wirkungen in B_1 und B_3 bringen also eine Verminderung der Excentricität hervor. Dieses Ergebnis mit dem vorigen zusammen lehrt, dass die gesamten Kräfte in Richtung des Radius Vektor die Excentricität im ganzen kleiner zu machen bestrebt sind.

Die Kraft senkrecht zum Radius Vektor verzögert den Mond von B_1 bis B_2. Da nun der erste Teil des Bahnstückes B_1B_2 nahe dem Perigäum, der übrige Teil nahe dem Apogäum liegt, oder als in der Nähe dieser Orte liegend angesehen werden kann, so wird die Kraft die Excentricität im ersten Teile vermindern, im zweiten vergrössern (68), und die von diesen Kräften von B_1 bis B_2 erzeugte Wirkung wird im ganzen sehr klein sein.

Ebenso ist die Gesamtwirkung der Kräfte von B_3 bis B_4 sehr gering.

Von B_4 bis B_1 aber beschleunigt die Kraft den Mond, und da der Mond hier ausserdem in der Nähe des Perigäums ist, so nimmt nach 68 die Excentricität zu. Von B_2 bis B_3 wird der Mond ebenfalls beschleunigt, doch da dies in der Nähe des Apogäums geschieht, so nimmt die Excentricität (68) längs dieser Strecke ab.

Nun ist die Wirkung der Kräfte zwischen B_2 und B_3 viel grösser als zwischen B_4 und B_1, weil von B_2 bis B_3 die Bewegung langsamer erfolgt als von B_4 bis B_1, also auch die Kraft länger einwirkt, und weil ferner die Punkte zwischen B_3 und B_2 von A weiter entfernt sind, als die zwischen B_4 und B_1, und deshalb die Kraft, die ja der Entfernung von A proportional ist, im ersten Falle die grössere ist.

Die vereinte Wirkung der Kräfte senkrecht zum Radius Vektor erzeugt demnach eine Verminderung der Excentricität. Dasselbe Resultat ergab sich vorher für die Kräfte im Radius Vektor.

Die Ergebnisse zusammenfassend erhält man folgendes Resultat:

Wenn die Apsidenlinie gegen die Linie der Syzygien derart geneigt ist, dass der Mond durch die erstere früher geht als durch die letztere, so wird die Excentricität der Mondbahn bei jedem Umlaufe kleiner, falls die Linie der Syzygien, wie die Figur ergiebt, links der zur Apsidenlinie in A errichteten Senkrechten liegt.

113) Es habe jetzt die Linie der Syzygien die Lage wie in Fig. 40; die Sonne stehe in C. Wieder wird die Apsidenlinie eher passiert als die der Syzygien, aber letztere später als die Gerade senkrecht zur Apsidenlinie. Entfernt sich jetzt der Mond vom Perigäum oder Apogäum, so ist die störende Kraft im Radius Vektor nach der Erde

*) Als Kräfte hat man sich natürlich nicht die in dieser Figur, sondern die von Fig. 31 zu denken.

hin gerichtet, weil jetzt z. B. in B_4, das dem Perigäum nahe liegt, die Kraft nach A gerichtet ist. Bewegt sich der Mond nach Perigäum oder Apogäum hin, also von B_1 oder B_3 fort, oder in der Nähe dieser Punkte nach den beiden Apsiden hin, so ist die störende Kraft von der Erde weg gerichtet. Die Richtung der Kräfte ist also gerade entgegengesetzt zu der der Kräfte in Fig. 39.*)

Die Kraft senkrecht zum Radius Vektor verzögert den Mond in der Nähe des Perigäums und Apogäums, da sie von B_3 bis B_4 und von B_1 bis B_2 verzögert; auch diese Kräfte wirken gerade entgegengesetzt wie die in 112 (Fig. 39) behandelten.

Die Wirkung auf die Excentricität wird daher die entgegengesetzte der früheren (in 112) sein, d. h. die Excentricität wird bei jedem Mondumlaufe zunehmen.

114) Der Mond geht früher durch die Linie der Syzygien als durch die der Apsiden. Die Verbindungslinie AC von Erde und Sonne habe die Lagen wie in Fig. 41 und 42. Die Wirkung der Kräfte ist dann dieselbe wie in den in 112 und 113 behandelten zwei Fällen, d. h. dieselbe wie in den zur Apsidenlinie gerade entgegengesetzt liegenden Stellungen der Linie der Syzygien.

115) Zusammenfassung der Resultate von 112 bis 114.

Es bewegt sich die Erde um die Sonne oder die Sonne scheint sich um die Erde zu bewegen; die Linie der Syzygien wird demnach nacheinander wirklich alle die Lagen einnehmen, die in den behandelten sechs Fällen (Fig. 39, 40—43, 46) angegeben sind. Die Excentricität wird sich deshalb nach und nach in der Reihenfolge ändern, wie sie von 112 bis 114 erwähnt ist, und zwar:

„Steht die Sonne in der Linie der Apsiden, so ändert sich die Excentricität der Mondbahn nicht; schreitet die Sonne fort, so vermindert sich nun die Excentricität, bis die Sonne unter rechtem Winkel zur Apsidenlinie erscheint (112). In dieser letzteren Lage ändert sich die Excentricität nicht; darnach vergrössert sie sich, bis die Sonne die Apsidenlinie auf der anderen Seite erreicht, wo keine Änderung eintritt; weiterhin nimmt sie wieder ab, bis die Sonne abermals unter rechtem Winkel zur Apsidenlinie erscheint. Hier bleibt sie ungeändert, und nimmt dann bis zur ersten Apside wieder zu. (Fig. 47 veranschaulicht, bei welchen Stellungen der Sonne die Excentricität konstant ist, ab- oder zunimmt.) Hiernach ist die Excentricität der Mondbahn am grössten, wenn die Apsidenlinie durch die Sonne geht, und am kleinsten, wenn sie senkrecht zur Verbindungslinie von Erde und Sonne steht.

Diese Änderung der Excentricität der Mondbahn beträgt mehr als $\frac{1}{5}$ von ihrem mittleren Werte; um jenes $\frac{1}{5}$ ist die wahre Excentricität manchmal grösser, manchmal kleiner als die mittlere. Nennt man die mittlere Excentricität 1, so ist also die grösste $1\frac{1}{5}$, die kleinste $\frac{4}{5}$, sodass die grössten und kleinsten Excentricitäten nahezu im Verhältnis von 6 : 4 oder 3 : 2 stehen.

116) Die wichtigsten Ungleichheiten in der Mondbewegung sind demnach die folgenden:

1) Die elliptische Ungleichheit oder Mittelpunktsgleichung (siehe 31), welche daher rührt, dass die Bahn kein Kreis ist, welche demnach auch vorhanden wäre, wenn es keine Störung gäbe.
2) Die jährliche Gleichung (siehe 90), welche von der Stellung der Erde in ihrer Bahn abhängt.
3) Die Variation (93) und parallaktische Ungleichheit (94), welche von der Stellung des Mondes in Bezug auf die Sonne abhängen.
4) Das Vorschreiten des Mondperigäums im allgemeinen. (Das allgemeine Resultat in 104.)

---

*) An dieser Fig. 39 und 40 denke man sich aber die Kräfte nach Fig. 31 angebracht. Deckt man dann die Fig. 40 auf 39, so erkennt man sofort, dass die Kräfte an den aufeinander fallenden Punkten entgegengesetzt sind.

5) Die Unregelmässigkeiten in der Bewegung des Perigäums, welche von der Stellung des Perigäums gegen die Sonne abhängen (109).

6) Das abwechselnde Wachsen und Abnehmen der Excentricität, welches von der Stellung des Perigäums gegen die Sonne abhängt (115).

Diese Ungleichheiten wurden zuerst, teilweise freilich unvollkommen, von Newton um das Jahr 1680 auseinandergesetzt.

117) Die Wirkungen der beiden letzten Ungleichheiten fasst man zusammen unter dem Namen „Evektion". Von allen Ungleichheiten ist die Evektion die, welche den grössten Einfluss auf den Ort des Mondes hat. Infolge der Evektion erscheint nämlich die Länge des Mondes manchmal um $1^{\circ}\,15'$ vergrössert oder vermindert. Diese Ungleichheit wurde von Ptolemäus um das Jahr 140 aus Beobachtungen erkannt.

118) Wir haben hier nur die vorzüglichsten Ungleichheiten betrachtet. Es giebt noch viele andere, welche hauptsächlich von kleinen Fehlern in den gemachten Voraussetzungen herrühren. Einige rühren her von den Veränderungen, welche die störende Kraft erleidet; so wird z. B. die Ungleichheit oder der Unterschied der störenden Kräfte in Konjunktion und Opposition, deren hauptsächlichste Wirkung in 94 besprochen worden ist, auch eine merkliche Ungleichheit in der Schnelligkeit des Vorschreitens der Apsidenlinie und in den Dimensionen der Mondbahn hervorbringen (in 101 am Schlusse, ebenso in 111 z. B. sind diese Kräfte als gleichgross angenommen). Ferner: die Veränderungen der von der Excentricität der Erdbahn abhängenden störenden Kraft (90) verursachen auch Veränderungen in der Grösse der Variation und Evektion; die Veränderung der in 94 behandelten Kraft bringt eine andere merkliche Wirkung hervor, die von dem Winkel abhängt, welchen der Radius Vektor des Mondes (die Verbindungslinie von Erde und Mond) mit der Apsidenlinie der Erdbahn bildet (Fig. 48). Alle diese und andere Störungen sind sehr klein, freilich immerhin doch noch so gross, dass man für astronomische Zwecke deren dreissig bis vierzig berücksichtigen muss.

119) Beschleunigung des Mondes, hervorgebracht durch die Veränderungen, welche die Excentricität der Erdbahn durch die Planeten erleidet.

Versuchen wir es noch, uns einen allgemeinen Begriff zu machen von einer Ungleichheit der Mondbewegung, welche besonders historisches Interesse hat.

Wir sagten in 89, die Wirkung der störenden Kraft sei im ganzen eine Verminderung der Schwere des Mondes gegen die Erde; in 90 erwähnten wir weiter, dass diese Wirkung grösser ist, wenn die Erde in der Nähe des Perihels ist, als wenn sie nahe beim Aphel steht. Da man nun durch genaue Untersuchungen gefunden hat, dass die halbe Summe der Wirkungen im Perihel und Aphel die Wirkung in mittlerer Entfernung um eine kleine Grösse übersteigt, die von der Excentricität der Erdbahn abhängt, so erkennt man, dass jene halbe Summe, und damit die Wirkung der störenden Kraft der Sonne um so grösser ist, je grösser die Excentricität der Erdbahn ist, vorausgesetzt, dass die mittlere Entfernung dieselbe bleibt.

Die mittlere Entfernung der Erde wird nun im Laufe der Jahrhunderte durch die Störungen der Planeten nicht merklich geändert, wohl aber wird durch letztere die Excentricität der Erdbahn bedeutend vermindert, und zwar so, dass sie nach etwa 25 000 Jahren, von wo ab wieder eine Zunahme eintritt, auf $\frac{1}{4}$ ihres gegenwärtigen Wertes gesunken sein, und die Erdbahn sich also der Kreisform mehr genähert haben wird. Mit der Excentricität wird nach dem Vorherigen auch die Wirkung der Störung der Sonne auf den Mond kleiner; da diese Wirkung in einer Verminderung der Schwere des Mondes zur Erde bestand, so wird jetzt diese Verminderung Jahrhunderte hindurch verkleinert, d. h. die Schwere des Mondes gegen die Erde wird immer grösser werden. Ist letzteres der Fall, so folgt aus 47, dass sich die Bahn des Mondes allmählich, wenn auch unmerklich, verengt oder ihr Umfang kleiner wird. Ist diese Änderung auch unmerklich, so ändert sich des Mondes Ort in seiner Bahn merklich, denn des Mondes Winkelbewegung wird, infolge des Engerwerdens der Bahn, nach 49 beständig beschleunigt. Diese Beschleunigung beträgt im Jahrhundert 6 Bogensekunden; um soviel wird in jedem Jahrhundert die mittlere Bewegung des Mondes schneller werden.

Noch ehe diese Störung theoretisch durch Laplace im Jahre 1787 begründet wurde, war sie den Astronomen bekannt unter dem Namen Acceleration der mittleren Bewegung des Mondes (säkulare Beschleunigung der Mondbewegung).

Nimmt man auch auf diese Störungsform Rücksicht, so stellt die Theorie die ältesten wie die neuesten Beobachtungen gleich gut dar.

Die Ursache, durch welche diese neue Störung erzeugt wird, bewirkt zugleich noch eine Verringerung des Fortschreitens der Apsidenlinie des Mondes.

VI. Abschnitt.

Theorie der Jupitermonde.

120) Jupiter hat vier Satelliten*), welche sich in derselben Weise um ihn bewegen, in welcher der Mond um die Erde läuft; es könnte daher scheinen, als wäre die Theorie der Unregelmässigkeiten in der Bewegung dieser Satelliten ähnlich der Theorie der Ungleichheiten in der Mondbewegung. In Wirklichkeit aber sind sie beide gänzlich verschieden voneinander.

Der vierte Satellit, dessen Bahn die grösste ist, hat eine kleine Unregelmässigkeit analog der Variation des Mondes, ebenso eine andere Unregelmässigkeit ähnlich der Evektion und eine entsprechend der jährlichen Gleichung. Die letztere beläuft sich nur auf 2 Minuten, und die andern zwei Ungleichheiten sind noch viel kleiner. Diese eben genannten Ungleichheiten sind für die drei andern Satelliten noch kleiner als bei dem vierten.

Aber diese Satelliten stören sich selbst gegenseitig so bedeutend und in einer Weise, wie es in unserem Sonnensysteme kein zweites Beispiel giebt; ausserdem sind die Bewegungen dieser Körper, wie wir später sehen werden, in höchst merkwürdiger Weise von der Gestalt Jupiters abhängig.

121) Dessenungeachtet wird die Theorie dieser Satelliten sehr vereinfacht durch die folgenden Umstände:

1) Man darf, ausgenommen bei den genauesten Berechnungen, die von der Sonne hervorgerufenen Störungen völlig vernachlässigen.
2) Die Bahnen der zwei inneren Satelliten haben keine Excentricität, die von der Störung unabhängig ist, d. h. sie zeigen keine Abweichung von der Kreisbahn, besitzen also sonst keine Excentricität, ausser etwa einer durch die Störung erzeugten.
3) Es besteht eine sehr merkwürdige, und wie wir noch zeigen werden, notwendige Beziehung zwischen den Bewegungen der drei ersten Satelliten.

Ehe wir jedoch mit der Theorie der drei ersten Satelliten beginnen, wollen wir einen allgemeinen Satz herleiten, der sich auf alle diese drei Körper anwenden lässt.

Betrachten wir deshalb

A. Die Bewegung zweier Satelliten, von denen der eine eine Umlaufszeit hat, die ein wenig grösser ist als die doppelte des andern.

122) Es mögen sich also zwei Satelliten um denselben Planeten (etwa Jupiter) bewegen; die Umlaufszeit des einen sei nur wenig grösser als die doppelte des andern.

Ist nun unter Einwirkung der störenden Kräfte ein dauernder Zustand möglich, so werden ihn die Kräfte herzustellen suchen. Wenn wir nun aber voraussetzen, dass der Zustand

*) Gegenwärtig kennt man deren fünf. Im folgenden soll immer nur von den vier längst bekannten gesprochen werden.

ein dauernder sein soll, d. h. bei jedem Umlaufe eine gleichartige krumme Linie beschrieben werden soll, so fragt es sich, welche Gestalt wird die Bahn haben, in der sich ein jeder Satellit dann bewegt?

123) Da die Störung, welcher ein kleiner Satellit auf einen andern, während eines Umlaufes desselben, ausübt, die Gestalt der Bahn nicht bedeutend ändern kann, so wird diese Bahn zunächst merklich elliptisch sein. (Kreisförmig kann die Bahn nicht mehr sein, wenn die Störung hinzukommt, da letztere die Geschwindigkeit ungleich ändert.) Nun haben wir vorausgesetzt, dass die Bahn dieselbe Gestalt, die sie mit Rücksicht auf die Störung angenommen hat, beibehält; wir haben mit andern Worten vorausgesetzt, dass die grosse Achse der Bahn und die Excentricität unveränderlich, daher nur die Lage der Apsidenlinie oder grossen Achse veränderlich ist.

Jetzt fragt es sich weiter: „Wenn bei jedem Umlaufe eine Kurve derselben Art beschrieben werden soll, wie gross muss man dann die unveränderliche Excentricität annehmen, und welcher Art muss dann die Änderung der Lage der Apsidenlinie sein?“ Für die in 122 erwähnten Satelliten lässt sich hierzu zunächst zeigen:

124) Die Linie der Konjunktion schreitet langsam zurück.

Es sei B_3 B_2 B_1 die Bahn des Satelliten B; C_3 C_2 C_1 die des zweiten Satelliten C (Fig. 49). Nehmen wir an, es befinde sich C in C_1, wenn B in B_1 ist, wo A, B_1, C_1 in derselben Geraden liegen, oder es mögen B und C in B_1 und C_1 in Konjunktion stehen. Wenn die Umlaufszeit von C genau doppelt so gross als die von B ist, d. h. wenn B zwei Umläufe macht in der Zeit, in der C gerade einen ausführt, so werden beide Satelliten die nächste und so jede folgende Konjunktion wieder in B_1 und C_1 haben. Allein die Umlaufszeit von C ist ein wenig grösser als die doppelte von B, oder C bewegt sich etwas langsamer als soeben angenommen worden ist; ist also B wieder in B_1, so ist C noch nicht bis C_1 gekommen, sondern ist zurück. Es wird deshalb auch die Konjunktionsstellung nicht in B_1C_1 sein, sondern weiter rückwärts, da B dem Satelliten C früher schon gegenübergestanden hat; sie wird etwa in B_2C_2 sein. Es hat auch zwischen der vorigen und der jetzigen Konjunktion keine andere stattgefunden; denn eine Konjunktion kann erst dann wieder eintreten, wenn der eine Satellit einen ganzen Umlauf vor dem andern voraus hat. Zum Beispiel: Die Monde seien in B_1C_1 in Konjunktion. B eilt nun dem C voraus; hat B einen Umlauf ausgeführt, so ist er wieder in B_1, C dagegen ist immer hinter B gewesen und hat jetzt noch nicht ganz einen halben Umlauf beschrieben, steht daher noch nicht ganz in Opposition. Von jetzt ab nähert sich B dem C wieder, erreicht ihn in C_2 und steht mit ihm in B_2C_2 in Konjunktion. Findet also die erste Konjunktion in der Linie AB_1C_1 statt, so erfolgt die zweite in der Linie AB_2C_2, die dritte noch weiter rückwärts, etwa in AB_3C_3, sodass die Linie der Konjunktion langsam rückwärts geht. Man erkennt zugleich, dass dieselbe um so langsamer rückwärts gehen muss, je näher die Umlaufszeit des einen Satelliten der doppelten des andern kommt.

125) Sind die Satelliten in der Nähe der Konjunktion, so ist ihre Entfernung am kleinsten; daher wird hier die grösste Störung stattfinden, die letztere wird überwiegen. Diese letztere hat nun Einfluss auf die Lage der Apsidenlinie; es lässt sich daher wohl denken, dass diese Lage von der der Linie der Konjunktion abhängen, dass die Bewegung beider Linien dieselbe sein muss. Ja wir werden im folgenden Paragraphen nicht nur dies, sondern auch noch das nachweisen, dass beide Linien stets zusammenfallen müssen, falls der Zustand ein dauernder sein soll. Dabei wird es sich nun fragen, welche Werte man für die unveränderlichen Excentricitäten annehmen muss, und welche Stellungen die Perijovien haben müssen, damit wirklich auch die Bewegung der Apsidenlinie dieselbe ist wie die der Linie der Konjunktion.

126) Fällt die Apsidenlinie des ersten, inneren Satelliten nicht mit der Linie der Konjunktion zusammen, so wird er zur Zeit der Konjunktion sich entweder vom Perijovium zum Apojovium oder vom Apojovium zum Perijovium bewegen. Nun ist in Konjunktion und in ihrer Umgebung die störende Kraft nach früherem vom Centralkörper weggerichtet*) (sie wird vom äusseren Satelliten ausgeübt, hat dieselbe Richtung, wie die, welche die Störung der Sonne auf den Mond erzeugt, falls letzterer zwischen Sonne und Erde steht, 77); nach 59 wird diese Kraft, die als die überwiegende allein in Frage kommt, im ersten Falle ein Wachsen, im zweiten Falle ein Abnehmen der Excentricität verursachen. Da wir aber letztere als unveränderlich annahmen, so kann keiner von diesen Fällen möglich sein; d. h. der erste Satellit muss sich zur Zeit der Konjunktion im Apo- oder Perijovium selbst befinden oder die Linie der Apsiden muss mit der der Konjunktionen zusammenfallen. Beide müssen daher die gleiche rückwärtsgehende Bewegung haben.

127) Fallen aber diese Linien zusammen, so fragt es sich weiter: liegt das Apojovium oder das Perijovium des ersten Satelliten in der Richtung AB_1C_1 der Punkte der Konjunktion? Angenommen es sei das erstere der Fall. Aus 54 folgt dann, dass die im Apojovium in Richtung des Radius Vektor vom Centralkörper weggerichtete störende Kraft ein Vorschreiten der Apsidenlinie verursacht. Betrachten wir die auf dem Radius Vektor senkrechte Kraft; ehe der erste Satellit B die Konjunktion erreicht (Fig. 50), beschleunigt ihn diese Kraft, denn der zweite Satellit C, von dem doch die Kraft ausgeht, bewegt sich langsamer als B, muss sich daher näher bei dem Punkte der Konjunktion befinden als B, wie es die Figur zeigt. Das im vorigen Abschnitte Angegebene lehrt dann, dass in dieser Lage von B und C die störende Kraft B beschleunigt. Nach dem Durchgange durch die Konjunktion ist B wieder voraus, die von C ausgehende Störung verzögert B. Vor der Konjunktion bewegt sich B vom Perijovium zum Apojovium, die beschleunigende Kraft lässt nach 65 die Apsidenlinie vorschreiten; nach der Konjunktion geht B vom Apojovium fort, die verzögernde Kraft verursacht wieder ein Vorschreiten der Apsidenlinie (nach 66). Liegt also das Apojovium in Richtung der Punkte der Konjunktion, so ergiebt sich, dass infolge der störenden Kraft vor und nach der Konjunktion die Linie der Apsiden fortschreitet. Wir haben angegeben, dass die Linie der Apsiden sich in gleicher Richtung mit der der Konjunktion bewege, d. h. zurückschreite; demnach kann das Apojovium des ersten Satelliten nicht in der Richtung der Punkte der Konjunktion liegen. Wir wollen vielmehr zeigen, dass dasselbe auf gerade entgegengesetzter Seite liegen muss.

128) Der innere (erste) Satellit muss sich in einer Ellipse bewegen, deren Perijovium gegen die Punkte der Konjunktion hin liegt, vorausgesetzt, dass diese Ellipse keine unabhängige Excentricität hat (das heisst, dass sie keine ursprüngliche Excentricität hat, dass vielmehr die letztere und also auch das Perijovium erst durch die störende Kraft erzeugt wird). Nehmen wir nun an, es liege das Perijovium des ersten Satelliten in der Richtung der Punkte der Konjunktion, so kommt alles in Übereinstimmung.

Die störende Kraft in Richtung des Radius Vektor, die vom Centralkörper weggerichtet ist, wird nach 51 ein Rückschreiten der Apsidenlinie veranlassen; die Kraft senkrecht zum Radius Vektor, welche vor der Konjunktion beschleunigt und nach derselben verzögert, erzeugt, wieder nach 65 und 66, ebenfalls ein Rückschreiten dieser Linie.

Hier gilt aber das, was in 56 gesagt ist, d. h. diese retrograde Bewegung wird grösser sein, wenn die Excentricität der Bahn kleiner ist; in 103 freilich galt das nicht, weil dort die störende Kraft der Excentricität proportional war. Hier aber ist die hauptsächlichste, allein in Betracht kommende, störende Kraft die in der Konjunktion auftretende, und diese hängt nicht von der Excentricität ab. Es lässt sich daher wohl ein solcher Wert der Excentricität denken, für welchen die Apsidenlinie ebenso rasch wie die Linie der Konjunktion zurückgehen wird, für welchen also beide Linien immer zusammenfallen werden. Diese Excentricität, welche die Bahn haben muss, wird sich nun auch nicht weiter ändern (nach 59 und 68); denn wenn dieselbe auch vor und nach dem Perijovium ab- und zunimmt

*) Die Kraft senkrecht zum Radius Vektor kommt nicht in Frage, da sie vor der Konjunktion beschleunigt, nach derselben verzögert, und daher gerade entgegengesetzte Wirkungen auf die Excentricität hervorbringt. Siehe auch 130.

und umgekehrt, infolge der Kraft im und senkrecht zum Radius Vektor, wie in den genannten Paragraphen angegeben ist, so heben sich doch Ab- und Zunahme auf. Die Excentricität also bleibt nun unverändert dieselbe, und die Gestalt der Bahn bleibt daher ebenfalls in jeder folgenden Revolution im allgemeinen dieselbe.

129) Wir werden später erwähnen, dass die Gestalt Jupiters eine derartige ist, dass infolge derselben allein das Perijovium des ersten Satelliten, wenn es nicht vom zweiten gestört wäre, mit einer Geschwindigkeit vorwärts bewegt würde, die nicht von der Excentricität abhängt. Die einzige Änderung, welche dadurch in unseren früheren Schlüssen hervorgebracht wird, ist die, dass wir die Excentricität der Bahn so wählen müssen, dass die vorher behandelte störende Kraft ein so grosses Rückschreiten der Apsidenlinie verursacht, welches gleich ist der Summe aus der von Jupiters Gestalt erzeugten fortschreitenden Bewegung und aus der rückschreitenden Bewegung der Linie der Konjunktion. Es muss also mit Berücksichtigung der von Jupiters Gestalt erzeugten Störung ein stärkeres Rückschreiten der Apsidenlinie da sein, wie ohne dieselbe. Dieses stärkere Rückschreiten wird aber, wie wir im vorigen Paragraphen bereits erwähnten, eintreten, sobald wir die Excentricität der Bahn kleiner annehmen.

Die einzige Wirkung der Gestalt Jupiters ist demnach eine Verminderung der Excentricität der Bahn.

130) Das Apojovium des äusseren Satelliten muss nach den Punkten der Konjunktion hin liegen.

Welches muss nun die Gestalt und Lage der Bahn des zweiten Satelliten sein? Wie früher, so findet auch hier die hauptsächlichste Störung in der Nähe der Konjunktion statt, so dass nur diese Kraft, da sie überwiegt, in Betracht zu ziehen ist. Für diesen Satelliten ist, da jetzt der störende Körper (der erste Satellit) innerhalb der Bahn des gestörten liegt, die im Radius Vektor liegende störende Kraft in der Nähe der Konjunktion zum Centralkörper hin gerichtet. Vor der Konjunktion ist der erste Satellit hinter dem zweiten zurück; die Kraft senkrecht zum Radius Vektor verzögert daher den zweiten Satelliten in dieser Stellung (nach 86). Nach 86 würde dazu freilich erforderlich sein, dass die Entfernung des ersten Satelliten vom zweiten in der Nähe der Konjunktion kleiner ist als die Entfernung des ersten vom Centralkörper. Dies ist aber hier der Fall, was sich wie folgt zeigen lässt: „Die Umlaufszeit des zweiten ist nahe doppelt so gross als die des ersten Satelliten. Nun verhalten sich die Quadrate der Umlaufszeiten wie die Kuben der Entfernungen vom Centralkörper; die Quadrate der Umlaufszeiten verhalten sich nahezu wie 1^1 zu 2^2 oder wie 1 zu 4. In demselben Verhältnisse müssen die dritten Potenzen der Entfernungen stehen. Da sich die dritten Potenzen von 7 und 11 nahezu wie 1 zu 4 verhalten, so stehen die mittleren Entfernungen vom Hauptplaneten im Verhältnis von 7 zu 11. Nennt man daher die Entfernung des ersten Satelliten vom Hauptplaneten 7, so ist dieselbe des zweiten gleich 11, demnach die Entfernung der Satelliten von einander gleich 4". Der erste Satellit hat die Entfernung 7 vom Centralkörper und den Abstand 4 vom zweiten Satelliten; hiermit ist die obige Behauptung bewiesen: „Nach 86 wird der zweite Satellit vor der Konjunktion verzögert". Ebenso wird die störende Kraft nach der Konjunktion den zweiten Satelliten beschleunigen.

Auf demselben Wege wie beim ersten Satelliten wird man dann finden, dass die Apsidenlinie des zweiten mit der Linie der Konjunktion zusammenfallen muss, wie in 126. Denn wäre dies nicht der Fall, so würde die nach A gerichtete Störung, falls C in der Konjunktion nach dem Perijovium oder Apojovium hin ginge, nach 58 die Excentricität vergrössern oder verkleinern; während die Kraft senkrecht zum Radius Vektor, die vor der Konjunktion verzögert, nach derselben beschleunigt, nach 68 die Excentricität verkleinern und auch vergrössern, also fast keine Wirkung hervorbringen würde, sodass die Excentricität im ganzen zunähme oder abnähme. Da sie nun konstant sein soll, so ist unsere Annahme nicht möglich; der zweite Satellit kann in der Konjunktion weder nach dem Apojovium noch nach dem Perijovium gehen, die beiden letzteren müssen mit der Linie der Konjunktion zusammenfallen. Liegt das Apojovium in Richtung der Punkte der Konjunktion, so wird die im Radius Vektor liegende, nach **A** gerichtete störende Kraft ein Rückschreiten der Apsidenlinie des zweiten Satelliten erzeugen (nach 53). Desgleichen wird die Kraft senkrecht zum Radius Vektor, welche vor dem Apojovium, d. i. vor der Konjunktion verzögert, nach demselben beschleunigt, nach 65 und 66 der Apsidenlinie eine rückschreitende Bewegung geben, wie es ja auch sein muss. Darnach muss das Apojovium, da die Apsidenlinie mit der Linie der Konjunktion zusammenfallen, also auch mit ihr zurückgehen muss, in Richtung der Punkte der Konjunktion fallen. Es lässt sich dann auch denken, dass es einen bestimmten konstanten Wert der Excentricität dieser Bahn giebt, für welchen dieses Rückschreiten der Linie der Apsiden genau gleich dem der Linie der Konjunktion ist.

131) Zusammenfassung der gefundenen Resultate. Wir haben hiernach folgendes gefunden: Bewegen sich zwei Monde um einen Hauptplaneten, etwa um Jupiter, und ist die Umlaufszeit des einen nur wenig grösser als die doppelte des andern, und nimmt man an, dass die beschriebenen Bahnen immer dieselbe Gestalt behalten, dass sie also keine von der Störung unabhängige Excentricität haben, d. h. dass die Excentricität erst durch die störende Kraft hervorgerufen wird (und dann konstant bleibt), so werden die Bahnen nicht merklich von Ellipsen abweichen, und die Apsidenlinien beider Bahnen werden stets mit der Linie der Konjunktionen zusammenfallen; ferner wird das Apojovium der Bahn des zweiten und das Perijovium der Bahn des ersten Satelliten immer nach den Punkten der Konjunktion hin gewendet sein.

Wir haben auch gesehen, dass diese Bedingungen für die Lage von Perijovium und Apojovium hinreichen, wenn die Linien der Apsiden gleichmässig mit der der Konjunktionen zurückgehen sollen, sobald wir eben für die Excentricitäten die erforderlichen Werte gewählt denken, welche letzteren passend gewählten Werte sich dann auch nicht ändern werden. Wir haben also aufgefunden, unter welchen Umständen der Zustand bleibend sein wird. Diesen Zustand werden die Kräfte in der That herbeiführen wollen; er stellt uns daher die von den Kräften angestrebte Wirkung dar.

Näherte sich das Verhältnis der Umlaufszeiten mehr dem Werte 1:2, so würde die Linie der Konjunktion langsamer zurückgehen als vorher, und man müsste dann für die Excentricitäten der Bahnen grössere Werte annehmen, die aber auch konstant bleiben würden.

132) Die Perijovien liegen den vorher gefundenen gerade entgegengesetzt, wenn die Umlaufszeit des einen Satelliten sehr wenig kleiner ist als die doppelte des andern.

Wie früher, so wird man auch in dem Falle, wo die Umlaufszeit des einen Satelliten ein wenig kleiner als die doppelte des andern ist, finden, dass, wenn in jeder Revolution Bahnen derselben Gestalt, d. h. solche von konstanter Excentricität beschrieben werden sollen, notwendig die Apsidenlinien mit der Linie der Konjunktion zusammenfallen müssen; ferner dass das Apojovium des ersten wie das Perijovium des zweiten Satelliten immer nach der Seite der Punkte der Konjunktion hin liegen müssen. Entsprechend dem am Schlusse des vorigen Paragraphen Angegebenen liesse sich hier sagen, dass die Excentricitäten um so grösser genommen werden müssten, je näher das Verhältnis der Umlaufszeiten dem Werte 1:2 kommt. Je näher nämlich dieser Wert erreicht ist, um so langsamer schreitet die Linie der Konjunktion, also auch die der Apsiden, fort; damit letzteres geschieht, muss die Excentricität grösser genommen werden (56).

133) Genau dasselbe gilt, wenn die Umlaufszeiten sich sehr nahe wie 2:3 oder 3:4 verhalten. Diese Annahmen lassen sich jedoch nicht auf die Satelliten Jupiters anwenden.

134) Die Ungleichheiten im Radius Vektor, welche die störende Kraft hervorbringt, sind nahezu dieselben, wenn die ungestörte Bahn keine, wie wenn sie wirklich selbst schon eine Excentricität besitzt.

Wir haben vorher die Wirkungen der störenden Kraft in Bahnen betrachtet, deren Excentricität von der Störung abhing, d. h. die keine ursprüngliche Excentricität besassen, welche letztere vielmehr erst durch die Störung bestimmt wurde. Es lässt sich wohl denken, dass dieselbe Wirkung eintritt, wenn die Bahn auch nicht nahezu kreisförmig ist, sondern schon ohne Störung eine Excentricität besitzt, d. h. dass die Ungleichheiten im Radius Vektor, die Änderungen des letzteren, in beiden Fällen dieselben sein werden.

Ist die Bahn ohne ursprüngliche Excentricität, so wird durch die Störung das Perijovium nach den Punkten der Konjunktion hin gelegt (für den ersten Satelliten); ist aber die Bahn ohne Störung schon excentrisch, so hat das Perijovium eine andere durch die ursprüngliche Excentricität bestimmte Lage. In beiden Fällen aber wird, wie gesagt, die durch die Störung erzeugte Ungleichheit oder Änderung des Radius Vektor dieselbe sein; erweitert sich durch die Störung die Bahn im einen Falle nach einer Seite, so wird dasselbe auch im andern Falle geschehen.*)

Wenden wir die gefundenen Sätze auf Jupiters drei erste Satelliten an.

---

*) Um das Behauptete durch die Anschauung verständlich zu machen, kann man folgenden Weg einschlagen. Es sei A (Fig. 51) der Hauptplanet, AC die Linie der Konjunktion des ersten und zweiten Satelliten, BDE die elliptische Bahn des ersten Satelliten ohne Störung, D sein Perijovium. (Es ist also letzteres in der Linie der Konjunktion liegend angenommen oder es ist dasselbe, als hätten wir keine ursprüngliche, sondern eine abhängige Excentricität vorausgesetzt, welche letztere durch die Störung erst erzeugt worden wäre und somit jenes bestimmte Perijovium ergeben hätte; nach Aufhören der Störung würde fortan die Bahn mit dem Perijovium D beschrieben werden.) Zur Vereinfachung der Figur wollen wir nun annehmen, dass die Anziehung des zweiten Satelliten nur für eine bestimmte Zeit einwirke, etwa während der erste Satellit von F nach H geht. Die im Radius Vektor von A weg gerichtete Störung wird den ersten Satelliten aus der Bahn, in welcher er sich bewegt haben würde, herausziehen, sodass er die Ellipse H e b d beschreiben wird, (er wird nämlich, wenn in H die Störung aufhört, auch nach H zurückkehren,) die ähnlich BDE ist, mit dem Unterschiede, dass das Perijovium nicht mehr in D, sondern weiter rückwärts in d ist. (Gleiches ergiebt sich aus 122 bis 131, wonach die Apsidenlinie, also auch das Perijovium zurückgeht.) Dass der Satellit wirklich in der Bahn H e b d einhergehen wird, lässt sich (aus 122 bis 131) folgendermassen begründen:

„Die störende Kraft senkrecht zum Radius Vektor beschleunigt vor der Konjunktion und verzögert nach derselben, ändert also die Geschwindigkeit im ganzen nicht; infolge der störenden Kraft im Radius Vektor, welche also den Satelliten nach aussen gezogen hat, ohne die Geschwindigkeit zu ändern, bewegt sich der Satellit in einer Kurve F G H ausserhalb der Ellipse FD. Hat die störende Kraft in H aufgehört, so fährt der Satellit fort von der alten Bahn abzuweichen, bis seine Geschwindigkeit (26) genügend vermindert ist und dadurch die Bahn stärker gekrümmt wird, sodass der Mond schliesslich bei E sich der alten Bahn wieder annähert und in L dieselbe schneidet, um darnach sich innerhalb der alten Bahn zu bewegen. Infolge der Vergrösserung der Geschwindigkeit nach dem Durchgange durch b (25) wird die Bahn sich wenig krümmen und daher die alte wieder, zwischen d und D, durchschneiden. Die neue Bahn liegt so, dass nicht mehr D, sondern ein weiter rückwärts liegender Punkt, etwa d dem Centralkörper am nächsten, also das Perijovium ist.

Es habe zweitens die Bahn BFE (Fig. 52) desselben Satelliten eine von der Störung unabhängige Excentricität, es sei also auch ein ursprüngliches, unabhängiges, nicht erst von der Störung erzeugtes Perijovium da; letzteres liege jetzt nicht nach den Punkten AC der Konjunktion hin, sondern in irgend einem Punkte D_1. Der Satellit wird sich in einer Kurve FGH ausserhalb der Bahn FE bewegen, wie vorher, wobei wieder angenommen ist, die störende Kraft fange in F an und höre in H auf einzuwirken. Die neue Bahn wird sich schliesslich bei e so stark krümmen, dass der Satellit sich der alten wieder annähert, sie in L schneidet — wo L nahezu entgegengesetzt mit C liegt —, dann sich innerhalb der alten Bahn bewegt, bis die Vergrösserung der Geschwindigkeit (25) bei b die Bahn so wenig gekrümmt macht, dass die alte Bahn wieder zwischen F und H geschnitten wird.

Man ziehe nun in einer bestimmten Richtung einen Radius Vektor, derselbe sei AK in der alten, Ak in der neuen Bahn und zwar im ersten Falle (Fig. 51), wie im zweiten (Fig. 52), so ist die Änderung kK dieses Radius Vektor im ersten Falle nahe dieselbe wie im zweiten (oder: wird die Bahn in einem Falle verengert oder erweitert nach einer Seite hin, so geschieht dasselbe auch im andern). Dies ist die ganze Änderung die während einer Revolution des Satelliten erzeugt wird; sie ist in den beiden behandelten Fällen, gleichviel also wo das Perijovium liegt, nahe die gleiche. Da sich das Gesagte auf jeden Umlauf anwenden lässt, so folgt, dass stets die Ungleichheit oder Änderung des Radius Vektor im zweiten Beispiele nahe dieselbe ist wie im ersten, und so sieht man, dass die durch die Störung erzeugten Ungleichheiten dieselben sind bei abhängigen wie unabhängigen Excentricitäten oder Perijovien."

Wäre die Excentricität im zweiten Falle sehr bedeutend, so würde die Ungleichheit im Radius Vektor freilich um etwas verschieden von der im ersten Falle ausfallen, und zwar aus folgenden Gründen: 1. ist die Bahn im zweiten Falle sehr excentrisch, so ist auch die Geschwindigkeit in den einzelnen Teilen der Bahn nicht mehr nahezu die gleiche und es wird deshalb auch die Konjunktion nicht mehr wie früher, wo die Bahn wenig excentrisch war, in der Linie AC erfolgen, sondern in einer andern Linie, sodass die in beiden Fällen parallel gezogenen Radien Vektoren nicht mehr gleiche Winkelentfernungen von den Konjunktionen haben würden und deshalb der Unterschied im Radius Vektor in beiden Fällen nicht derselbe wäre; 2. werden bei

B. Anwendung des Gefundenen auf die Satelliten Jupiters.

135) Anwendung des Gefundenen auf Jupiters ersten und zweiten Satelliten.

Die Umlaufszeit von Jupiters erstem Satelliten beträgt $1^d\ 18^h\ 27^m\ 34^s$, die des zweiten $3^d\ 13^h\ 13^m\ 42^s$, die des dritten $7^d\ 3^h\ 42^m\ 32^s$.*) Die Umlaufszeit des zweiten ist also nur wenig grösser als die doppelte des ersten, sodass sich die vorhergehenden Untersuchungen ohne weiteres auf die Bewegung dieser zwei Satelliten anwenden lassen. In der That führt der erste Satellit 275 Umläufe aus in der Zeit, in welcher der zweite deren 137 macht.

Denken wir uns nun, die zwei Satelliten ständen in Konjunktion, so wissen wir aus dem Vorherigen, dass beide wieder in Konjunktion treten werden, wenn der zweite Satellit nahezu einen Umlauf oder der erste nahezu zwei ausgeführt hat, und zwar an Orten, die den vorigen Orten der Konjunktion nahe liegen; kurz, wir wissen, dass die Linie der Konjunktion zurückschreitet. Hat nun, vom Orte der angenommenen ersten Konjunktion aus, der erste Satellit 275 Umläufe gemacht, so hat der zweite deren 137 beschrieben, ist aber, wie der erste, wieder am Orte dieser ersten Konjunktion, oder die Linie der Konjunktion hat eine ganze Umdrehung ausgeführt. Beide stehen also wieder am selben Orte in Konjunktion, wenn der erste Satellit 275 Umläufe oder einen mehr als die doppelte Zahl der Umläufe des zweiten gemacht hat, was in $486\frac{1}{2}$ Tagen geschieht.

136) Aus früherem folgt ferner, dass, da die Bahnen der zwei ersten Satelliten keine von der Störung unabhängige Excentricität haben (also ohne Störung keine Excentricität haben würden), dieselben elliptisch sein werden, und dass die Apsidenlinie jeder Bahn wie die Linie der Konjunktion zurückschreiten, und wie letztere in $486\frac{1}{2}$ Tagen eine ganze Umdrehung ausführen wird; weiter, dass, wenn die zwei Satelliten in Konjunktion stehen, der erste stets im Perijovium, der zweite im Apojovium sich befinden wird.

137) Anwendung des früher Gefundenen auf den zweiten und dritten Satelliten.

Die Umlaufszeit des dritten Satelliten ist ebenfalls nur um wenig grösser als die doppelte des zweiten; die Linie der Konjunktion beider Körper wird also langsam zurückgehen. Da ausserdem die ursprüngliche Excentricität der Bahn des dritten Satelliten gering ist, so wird die Ungleichheit im Radius Vektor dieselbe sein wie bei ursprünglich kreisförmiger Bahn, oder diese Ungleichheit ist beim dritten Satelliten dieselbe, wie wenn seine Bahn keine ursprüngliche Excentricität, also auch kein ursprüngliches Perijovium besessen hätte. Hinsichtlich dieser Ungleichheit verhalten sich also diese zwei Satelliten zueinander wie der erste und zweite. Betrachten wir nun den zweiten und dritten Satelliten genauer

---

stärker excentrischer Bahn die Entfernungen zwischen den Satelliten in den Konjunktionen und folglich auch die störenden Kräfte in der Nähe der Konjunktionen nicht immer dieselben sein; es wird daher die Konjunktion auch aus diesem Grunde nicht mehr in der Linie AC erfolgen; 3. weil die Wirkung einer gegebenen Kraft bei excentrischer Bahn wesentlich verschieden ist, je nach dem Teile der Bahn, in welchem sie wirkt.

Wenn aber die Excentricität so klein ist wie in der Bahn des dritten Satelliten Jupiters oder in denen der alten Planeten, so ist der Unterschied im Radius Vektor, der durch die Störung bei der Bahn mit unabhängiger Excentricität (Perijovium) auftritt, derselbe wie er bei der Bahn dieses Körpers sein würde, falls sie eine abhängige Excentricität (Perijovium) besässe.

Das gefundene Resultat kann mit entsprechenden Rücksichten auf jede Störung angewendet werden, welche durch eine störende Kraft hervorgebracht wird, die von der Gestalt der Bahn nahezu unabhängig ist. Da dies von jeder einzelnen solchen störenden Kraft gilt, so gilt dasselbe auch, wenn mehrere derartige Kräfte gleichzeitig wirken. Man erhält so den Satz: Wenn mehrere störende Kräfte auf einen Planeten oder Satelliten einwirken, dessen Bahn eine unabhängige, d. h. eine auch ohne Störung schon vorhandene Excentricität besitzt, so ist die Ungleichheit im Radius Vektor, welche diese Kräfte zusammen erzeugen, gleich der Summe derjenigen Ungleichheiten, welche diese Kräfte einzeln hervorrufen würden in dem Falle, in welchem die Bahn eine abhängige Excentricität besässe (in welchem die Excentricität erst durch die Störung erzeugt wird).

*) Die Umlaufszeit des im Jahre 1892 entdeckten fünften (innersten) Satelliten beträgt $11^h\ 57^m\ 22{,}_{647}{}^s$.

und beachten wir das in 130 Gesagte: „Das Apojovium des äusseren Satelliten liegt gegen die Punkte der Konjunktion hin, d. h. die Bahn des äusseren Satelliten wird nach diesen Punkten hin verlängert“. Im jetzigen Falle ist das Apojovium des dritten Satelliten unabhängig von der Störung, aber da die Ungleichheit im Radius Vektor für abhängiges wie unabhängiges Apo- oder Perijovium die gleiche ist, so wird, wenn auch das Apojovium des dritten Satelliten nicht nach den Punkten der Konjunktion hin liegt, doch die Abweichung vom Radius Vektor nach diesen Punkten hin so gross sein, wie bei abhängigem Perijovium, d. h. die Bahn des dritten Satelliten wird nach diesen Punkten hin erweitert, auf der entgegengesetzten Seite also zusammengedrückt werden. Nach 128 wird für den zweiten (jetzt inneren) Satelliten die störende Kraft des dritten das Perijovium nach den Punkten der Konjunktion von zweitem und drittem hin verlegen wollen, d. h. die Bahn des zweiten wird auf der Seite der Punkte der Konjunktion zusammengedrückt, auf der entgegengesetzten erweitert.

138) Die Linie der Konjunktion des zweiten und dritten Satelliten schreitet genau so rasch zurück, wie die des ersten und zweiten.

Wir kommen nun zu dem ausserordentlichsten Teile dieser Theorie. Wir erwähnten vorher, dass 275 Umläufe des ersten Satelliten in fast genau derselben Zeit ausgeführt werden, wie 137 des zweiten; die für die Umlaufszeiten angegebenen Zahlen lehren aber weiter, dass 137 Umläufe des zweiten wieder fast genau in derselben Zeit beendet werden, wie 68 des dritten, und dass also zu allen diesen Umläufen ein Zeitraum von $486\frac{1}{2}$ Tagen gehört. In 135 zeigten wir nun, dass nach diesen $486\frac{1}{2}$ Tagen — nach welchen ja der erste einen Umlauf mehr ausgeführt hat, als die doppelte Zahl Umläufe des zweiten beträgt — die Linie der Konjunktion eine ganze Umdrehung ausgeführt hat. In denselben $486\frac{1}{2}$ Tagen führt nun aber der zweite ebenfalls einen Umlauf mehr aus, als die doppelte Zahl der Umläufe des dritten in dieser Zeit ausmacht; es wird daher auch die Linie der Konjunktion des zweiten und dritten Satelliten in $486\frac{1}{2}$ Tagen in ihrer retrograden Bewegung ein ganzes Mal herumkommen.

Wir erhalten also das merkwürdige Resultat: Das Rückschreiten der Linie der Konjunktion des zweiten und dritten Satelliten geschieht mit derselben Geschwindigkeit wie das der Linie der Konjunktion des ersten und zweiten.

Dies Gesetz ist so genau, dass man in den Tausenden von Umläufen, die man seit der Entdeckung der Satelliten beobachtet hat, auch nicht die geringste Abweichung davon gefunden hat, ausser einer, die von der elliptischen Gestalt der Bahn des dritten Satelliten abhängt.

139) Die Punkte der Konjunktion des zweiten und dritten Satelliten liegen stets entgegengesetzt mit denen des ersten und zweiten.

So sonderbar das im vorigen Paragraphen aufgestellte Gesetz erscheinen mag, das folgende ist es nicht weniger:

Die Linie der Konjunktion des zweiten und dritten Satelliten liegt stets mit der Linie der Konjunktion des ersten und zweiten in einer einzigen Geraden, und zwar liegt letztere gerade entgegengesetzt der ersteren, da die Konjunktionen des zweiten und dritten Satelliten in Punkten stattfinden, die gerade entgegengesetzt liegen mit den Punkten, in welchen die Konjunktionen des ersten und zweiten Satelliten stattfinden.

Durch dieses Gesetz ist die relative Lage der Linie der Konjunktionen vom ersten und zweiten, resp. zweiten und dritten Satelliten bestimmt; da nach dem Gesetze in 138 beide Linien sich mit gleicher Winkelgeschwindigkeit bewegen, so bleibt diese relative Lage unverändert dieselbe. Auch dieses neue Gesetz hat sich, soweit die Beobachtungen reichen, bei jedem Umlaufe seit der Entdeckung der Satelliten als genau wahr erwiesen.

Wir werden in 142 zeigen, dass die störenden Kräfte bestrebt sind, diese Gesetze herzustellen und ihr Fortbestehen zu sichern.

140) Die durch den ersten und dritten Satelliten in der Bewegung des zweiten hervorgerufenen Ungleichheiten kombinieren sich unzertrennlich und erzeugen **eine** grosse Ungleichheit.

Die schlagendste Wirkung dieser Gesetze in den Störungen der Satelliten findet man in den Bewegungen des zweiten Satelliten. Die störende Kraft des ersten bewirkt, dass das Apojovium des zweiten nach den Punkten der Konjunktion beider hin liegt (130), sie erzeugt also ein Erweitern der Bahn des zweiten nach diesen Punkten hin, und folglich ein Zusammendrücken auf der entgegengesetzten Seite. Die störende Kraft des dritten Satelliten wird, wie am Schlusse von 137 gezeigt ist, die Bahn des zweiten auf der Seite der Konjunktion des zweiten und dritten zusammendrücken. Da nun die Punkte der Konjunktion des zweiten und dritten entgegengesetzt liegen zu denen des ersten und zweiten, so wird die störende Kraft des ersten Satelliten genau dort ein Zusammendrücken erzeugen, wo es auch die Kraft des dritten hervorbringt. Beide Kräfte bewirken also auf dieser einen Seite ein starkes Zusammendrücken der Bahn, und ebenso ein starkes Verlängern derselben auf der entgegengesetzten Seite.

Die Excentricität, die sonach gänzlich von der Störung abhängt, kann dadurch so gross werden, dass sie merklich die der Venusbahn überschreitet.

Die Ungleichheiten in den Bewegungen der Satelliten, welche von diesen Excentricitäten hervorgerufen werden, wurden zuerst, und zwar aus Beobachtungen, von Bradley um das Jahr 1740 gefunden, und zuerst aus der Theorie nachgewiesen von Lagrange im Jahre 1766.

141) Das Sonderbare dieser Gesetze und die Genauigkeit, mit welcher sie befolgt werden, lassen wohl vermuten, dass sie nicht ganz zufällig sind. Es scheint natürlich, zu fragen, ob nicht in den gegenseitigen Störungen der Satelliten ein Grund gefunden werden kann für die Aufrechterhaltung dieser einfachen Verhältnisse.

In der That können wir zeigen, dass, wenn man die Satelliten zu irgend einer Zeit in Bewegung versetzt denkt zwar nicht genau, aber doch nahezu nach diesen gefundenen Gesetzen, ihre gegenseitige Anziehung immer bestrebt ist, die Bewegungen so zu ändern, dass sie genau diesen Gesetzen entsprechen.

Wir wollen dies beweisen, indem wir annehmen, dass die Bewegungen eine geringe Abweichung von den Gesetzen zeigen, und indem wir dann die Natur derjenigen Kräfte untersuchen, welche aus dieser Abweichung hervorgehen.

142) Sobald die rückläufigen Bewegungen der Linien der Konjunktionen nahezu gleich sind, sind die gefundenen zwei Gesetze nicht zufällig, sondern eine notwendige Folge der gegenseitigen Anziehung der Satelliten.

Nehmen wir z. B. an, dass der dritte Satellit hinter dem aus dem Gesetze bestimmten Orte zurückbleibe, d. h. nehmen wir an, der zweite Satellit befinde sich an dem am meisten zusammengedrückten Teile seiner Ellipse (dieses Zusammendrücken nur durch die Wirkung des ersten Satelliten hervorgerufen gedacht), und der dritte Satellit stehe hinter diesem Orte. Die Konjunktion des zweiten und dritten Satelliten wird dann erfolgen vor der Linie AC (Fig. 53), also bevor die Apsidenlinie AC der Bahn des zweiten (diese Linie nur durch die Wirkung des ersten erzeugt gedacht) erreicht wird.

Im folgenden haben wir nun die Kräfte zu schätzen, welche jetzt auf den dritten Satelliten wirken, und ihre Veränderungen, welche von der Veränderung der Lage der Linien der Konjunktionen abhängen. Bei dieser Schätzung ist es nun nicht nötig, den Einfluss zu betrachten, welchen die Ellipticität der Bahn des zweiten, soweit sie durch den dritten erzeugt ist, oder den die Ellipticität des dritten (diese durch den zweiten allein erzeugt gedacht) auf den dritten Satelliten ausübt. Denn die von der Wirkung des dritten herrührende Abplattung der Bahn des zweiten (140), und die vom zweiten erzeugte Verlängerung der Bahn des dritten liegen immer nach den Punkten der Konjunktion des zweiten und dritten hin; durch diese Abplattung und Verlängerung tritt allerdings eine

Modifikation der Wirkung ein, aber diese Modifikation **bleibt dieselbe**, die **Linien der Konjunktionen** vom ersten und zweiten einerseits, vom zweiten und dritten Satelliten andrerseits, **mögen zusammenfallen oder nicht**.

Es sei nun C (Fig. 54) das Perijovium der Bahn des zweiten Satelliten, und zwar hervorgebracht durch die Wirkung des ersten allein, D derjenige Punkt der Bahn des dritten, welcher in der Verlängerung von AC liegt. Ist der dritte Satellit in D, wenn der zweite gleichzeitig in C ist, so verzögert die senkrecht zum Radius Vektor stehende Kraft des zweiten den dritten Satelliten, bevor letzterer nach D gelangt (der zweite ist ja dann gegen den dritten zurück), und beschleunigt ihn nach früherem **um ebensoviel**, wenn er durch D gegangen ist (der zweite ist dann dem dritten voraus).

Nach unserer Annahme erfolgt aber die Konjunktion beider in der Linie AC_1D_1, also vor C; die Verzögerung des dritten, herrührend von der Anziehung des zweiten, findet also jetzt statt noch bevor der zweite in sein Perijovium kommt. Im Punkte C_1 der Konjunktion ist nun die Entfernung beider Satelliten voneinander am kleinsten; da der zweite **vor** seinem Perijovium C ist, so bewegt er sich nicht so schnell als z. B. in C — wo die Geschwindigkeit am grössten ist — und gleich nach dem Durchgange durch C. Durch beides wird bewirkt, dass die verzögernde Kraft stark und eine geraume Zeit wirkt. Von C_1 an wird die Entfernung beider Körper grösser, und der zweite Satellit bewegt sich schneller wie vorher; folglich ist die beschleunigende Kraft nach der Konjunktion, die auf den dritten vom zweiten ausgeübt wird, schwach und wirkt kürzere Zeit. Aus der Grösse der Kraft vor und nach der Konjunktion folgt also, dass die Verzögerung grösser ist als die Beschleunigung, und ihre Wirkung daher überwiegt. Eine zum Radius Vektor senkrecht gerichtete verzögernde Wirkung verkürzt aber, nach dem am Schlusse von 48 Gesagten, die Umlaufszeit des dritten Satelliten, und macht daher seine Winkelbewegung schneller. Die Folge davon ist, dass, wenn ihn der zweite Satellit wieder erreicht, er weiter als bis D_1 gekommen sein wird oder dass die Linie der nächsten Konjunktion dem Orte des Perijoviums C vom zweiten (oder der Linie der Konjunktion vom ersten und zweiten) näher liegt als vorher.

Würden wir annehmen, dass der dritte Satellit vor dem aus dem Gesetze bestimmten Orte liege, dass also die Konjunktion nicht in einem Punkte D_1 **vor** dem Perijovium C, sondern in einem über C hinaus stattfinde, oder dass der dritte Satellit sich rascher bewege, als aus dem obigen Gesetze folgt, so würden wir auf dem eben behandelten Wege finden, dass die Gesamtwirkung der störenden Kräfte des zweiten Satelliten (vor und nach der Konjunktion) die sein würde, den dritten zu beschleunigen, und damit, wieder nach 48, seine Umlaufszeit zu verlängern, und somit seine Winkelbewegung langsamer zu machen, die Linie der nächsten Konjunktion näher dem Orte C zu legen*).

In beiden Fällen ist das Bestreben der Einwirkung des zweiten Satelliten das, die Linie der Konjunktion des zweiten und dritten zusammenfallen zu lassen mit der Linie der Apsiden des zweiten oder mit der der Konjunktion des ersten und zweiten, indem die Kräfte das eine Mal ein Vorschreiten, das zweite Mal ein Rückschreiten der Linie der Konjunktion des zweiten und dritten erzeugen.

Durch dieselbe Schlussfolge kann man sich überzeugen, dass es Kräfte giebt, die auf den ersten Satelliten vom zweiten ausgeübt werden, und durch die elliptische Ungleichheit erzeugt werden, welche der dritte in der Bahn des zweiten hervorbringt, welche die Winkelbewegung des ersten verzögern oder beschleunigen, je nachdem der erste vor dem aus dem

*) Denn ist der dritte vor dem aus dem Gesetze bestimmten Orte voraus, so wird die Konjunktion nicht in C, sondern darüber hinaus, etwa in C_2 stattfinden; der zweite ist dann in der Nähe des Perijoviums, bewegt sich also schnell. Vor der Konjunktion verzögert der zweite den dritten; nach der Konjunktion, wo dann der zweite sich noch weiter von seinem Perijovium entfernt hat, sich also langsamer bewegt als vorher, beschleunigt er den dritten. Es wirkt hiernach die Beschleunigung auf den dritten für längere Zeit als die Verzögerung oder sie überwiegt. Durch eine beschleunigende Kraft senkrecht zum Radius Vektor wird aber die Umlaufszeit vergrössert, und dadurch die Winkelbewegung langsamer. Daher wird, wenn der zweite Satellit den dritten wieder erreicht, der letztere nicht so weit wie D_2 gekommen sein oder die Linie der Konjunktion wird näher der Linie CD liegen als vorher.

Gesetze bestimmten Orte voraus (also die Konjunktion früher eintritt) oder hinter demselben zurück ist (oder die Konjunktion später eintritt), und somit die Linie der Konjunktion vom ersten und zweiten Satelliten entweder vor- oder rückwärts bewegen, bis sie mit der Apsidenlinie des zweiten (diese nur durch den dritten erzeugt gedacht) oder mit der Linie der Konjunktion vom zweiten und dritten zusammenfällt.*)

Auf dieselbe Weise wird man finden können, dass in jedem der behandelten zwei Beispiele sowohl der dritte wie der erste Satellit Kräfte auf den zweiten ausüben, welche seine Winkelbewegung verzögern (1. Fall vom 1. Beispiel) oder beschleunigen (2. Fall vom 1. Beispiel), und damit die Linie der Konjunktion zwischen dem dritten und zweiten oder dem ersten und zweiten so vor- oder rückwärts bewegen (und umgekehrt), dass schliesslich beide zusammenfallen.**)

Alle diese Wirkungen streben also dahin, das erwähnte Gesetz durch Vor- und Rückwärtsbewegen der Linien der Konjunktionen so lange zu erhalten, bis beide aufeinander fallen. Es sei nochmals bemerkt, dass hier und im folgenden nur die Kraft in Konjunktion, als die überwiegende, in Frage kommt.

143) Vielleicht giebt es kein theoretisches Fortdauern in den Elementen, auf das man sich mit so grosser Sicherheit verlassen kann, wie auf das Beharren dieses Gesetzes. Die grössten und unregelmässigsten Störungen Jupiters oder seiner Satelliten werden, vorausgesetzt, dass sie nur stufenweise eintreten, die Beziehungen zwischen diesen Bewegungen der Satelliten nicht ändern; auch die Wirkungen eines widerstehenden Mittels werden ohne Einfluss sein (da eben die gegenseitigen Einwirkungen der Satelliten auf Erhaltung dieses Gesetzes gerichtet sind), obschon jede dieser Ursachen die Bewegungen aller Satelliten stören würde, und obschon ähnliche Ursachen die Schlüsse gänzlich untergraben können, welche die Mathematiker für die Stabilität des Sonnensystems in Bezug auf die Elemente der Planeten-

---

*) Es sei M das Apojovium der Bahn des zweiten (Fig. 55), hervorgebracht durch die Wirkung des dritten Satelliten, L der Punkt der Bahn des ersten, welcher auf der Linie A M liegt. Angenommen der erste sei noch nicht in L, wenn der zweite in M steht (A M ist zugleich Linie der Konjunktion vom zweiten und dritten Satelliten), so wird die Konjunktion über L hinaus in der Linie L_1 M_1 erfolgen. Vor der Konjunktion beschleunigt dann der zweite den ersten und zwar für kurze Zeit, da der zweite vom Apojovium kommt, sich daher langsam bewegt, und ihn der erste somit schnell einholen kann; nach der Konjunktion verzögert der zweite und zwar für längere Zeit, da der zweite weiter von seinem Apojovium entfernt ist als vor der Konjunktion, sich daher schneller bewegt, ihm deshalb der erste nicht so rasch vorauseilen kann oder beide länger in grösserer Nähe bleiben. Es überwiegt hiernach die Verzögerung, welche eine Verkürzung der Umlaufszeit oder eine Vergrösserung der Winkelbewegung erzeugt, sodass der erste nicht mehr so weit zurück sein wird gegen den zweiten wie vorher oder dass die nächste Konjunktion nicht in der Linie L_1 M_1, sondern näher der Linie L M erfolgen wird.

Wäre der erste dem Orte L voraus, falls der zweite in M steht, so hätte die Konjunktion vor L M, etwa in L_2 M_2 stattgefunden. Vor der Konjunktion wird der erste vom zweiten beschleunigt und zwar für längere Zeit, da der zweite sich vor seinem Apojovium schneller bewegt wie in demselben, und ihn deshalb der erste nicht so bald einholt. Nach der Konjunktion dagegen wird der erste verzögert; da sich jetzt der zweite langsamer bewegt als vorher, weil er seinem Apojovium näher steht, so kann der erste ihm rasch vorauseilen oder die Verzögerung erfolgt für kürzere Zeit. Darnach wird jetzt die Beschleunigung überwiegen, durch welche die Umlaufszeit des ersten Satelliten vergrössert, seine Winkelbewegung verkleinert wird. Weil der erste sich nunmehr langsamer bewegt, so wird er den zweiten nicht so rasch wieder einholen oder die nächste Konjunktion wird nicht in der Linie L_2 M_2, sondern in einer anderen erfolgen, die der Linie L M näher liegt. In jedem Falle sind also die Kräfte bestrebt, die Linie der Konjunktion vom ersten und zweiten Satelliten zusammenfallen zu lassen mit der Apsidenlinie des zweiten, diese durch den dritten erzeugt gedacht.

**) Desgleichen sucht umgekehrt der dritte den zweiten in derselben Weise zu beeinflussen, in welcher es der zweite mit dem dritten thut. In dem ersten der behandelten Fälle fand z. B. die Konjunktion beider Satelliten vor A C in A C_1 (Fig. 54) statt. Der dritte beschleunigt vor der Konjunktion und zwar für längere Zeit, da der zweite Satellit vor seinem Perijovium ist, sich daher noch nicht so schnell bewegt, wie in diesem selbst und so den dritten nicht so bald einholt. Nach der Konjunktion wird der zweite eine kürzere Zeit hindurch verzögert, weil er seinem Perijovium näher ist, sich also schneller bewegt als vorher und sich daher auch rasch vom dritten entfernt. Die überwiegende Beschleunigung vergrössert die Umlaufszeit, verkleinert die Winkelbewegung des zweiten, sodass er das nächste Mal nicht schon in der Linie A C_1, sondern in einer näher bei A C liegenden Linie mit dem dritten in Konjunktion stehen wird. u. s. w.

bahnen gezogen haben. Die physische Erklärung dieses Gesetzes wurde zuerst von Laplace im Jahre 1784 gegeben.

144) Wir haben nun den wichtigsten Teil der Theorie dieser Satelliten beendet; es giebt jedoch noch einige andere Punkte, die der Beachtung wert sind teils um ihrer selbst willen, teils als Einführung in die Theorie der Planeten.

145) Wie wir erwähnten, hat die Bahn des dritten Satelliten eine kleine von der Störung unabhängige (ursprüngliche) Excentricität, als auch ein von der Störung unabhängiges (von vornherein der Lage nach schon gegebenes) Perijovium. Findet nun die Konjunktion mit dem zweiten nahe diesem unabhängigen Perijovium des dritten statt, so wird die Wirkung der Störung auf den zweiten grösser als zu irgend einer anderen Zeit sein, grösser als zu jeder anderen Konjunktion; dies verursacht eine Unregelmässigkeit in der Excentricität des zweiten und in der Bewegung seiner Apsiden,*) welche also von der Entfernung der Linie der Konjunktion des zweiten und dritten Satelliten von dem unabhängigen Perijovium des dritten abhängt.

Die Abweichung von der Gleichförmigkeit in der Winkelbewegung des dritten (infolge seiner elliptischen Bahn) erzeugt wieder eine Abweichung von der Gleichförmigkeit der rückläufigen Bewegung der Linie der Konjunktion, und dies trägt wieder zu derselben soeben erwähnten Unregelmässigkeit bei.

146) Die von einem inneren Satelliten ausgeübte, in Richtung des Radius Vektor liegende störende Kraft ist manchmal nach dem Centralkörper hin, manchmal von ihm fort gerichtet, im ganzen aber übertrifft nach 86 die erste die letzte, und zwar ist die nach dem Centralkörper hin gerichtete Kraft in Konjunktion am grössten (86). Die Hauptwirkung wird stattfinden, wenn die Satelliten in der Nähe ihrer Konjunktion stehen; folglich ist, wenn die Linie der Konjunktion vom zweiten und dritten Satelliten nahe bei dem unabhängigen Perijovium des dritten Satelliten vorbeigeht, die Kraft, durch welche der dritte zum Hauptplaneten getrieben wird, grösser als zu irgend einer anderen Zeit, und da die Linie der Konjunktion sich dreht, so wird diese Kraft abwechselnd wachsen und abnehmen (in der erwähnten Stellung aber den grössten Wert haben). Dies bewirkt eine Unregelmässigkeit in der Länge der grossen Achse, und folglich in der Bewegung des dritten Satelliten (47). Diese Unregelmässigkeit hängt also von der Entfernung der Linie der Konjunktion von dem Perijovium des dritten Satelliten ab.

147) Die von einem äusseren Satelliten erzeugte, im Radius Vektor liegende, störende Kraft ist manchmal nach dem Centralkörper hin, manchmal von ihm weg gerichtet, aber im ganzen überwiegt (nach 80, Schluss) die letztere die erste. Aus den in 146 angegebenen Gründen giebt es daher in der Bewegung des zweiten Satelliten eine Unregelmässigkeit, welche von der Entfernung der Linie der Konjunktion des zweiten und des dritten von dem unabhängigen Perijovium des dritten abhängt, ihrer Natur nach aber der entsprechenden Ungleichheit des dritten entgegengesetzt ist; denn in 146 war die auf den einen, dritten Satelliten wirkende überwiegende Kraft nach dem Centralkörper hin gerichtet, während die jetzt auf den zweiten (inneren) vom dritten (äusseren) ausgeübte überwiegende störende Kraft vom Hauptplaneten fort gerichtet ist.

148) Jede dieser Unregelmässigkeiten in der Bewegung eines dieser Satelliten erzeugt eine Unregelmässigkeit in der Bewegung der anderen, und so wird die ganze Theorie sehr verwickelt, wenn wir alle kleinen Unregelmässigkeiten berücksichtigen wollen.

149) Die Bewegung des vierten Satelliten steht zu den Bewegungen der drei anderen nicht in solchem Zusammenhange, in welchem diese untereinander stehen. Seine Umlaufszeit steht zu der des dritten nahezu im Verhältnisse von 7 : 3. Einige der Unregelmässigkeiten, die er erfährt, sind fast denen in den Bewegungen der Hauptplaneten gleich. Dieselben sind jedoch klein; die bedeutendsten unter ihnen sind die, welche von den Änderungen

*) Es ergiebt sich dies aus dem im III. Abschnitt behandelten Einflusse störender Kräfte auf die Excentricität (z. B. 59) und auf die Apsidenlinie (z. B. 50 bis 54).

der Elemente abhängen. Diese Änderungen erfordern eine Reihe von Revolutionen der Satelliten, ehe alle ihre verschiedenen Zustände durchlaufen werden; sie sind aber dessenungeachtet beobachtet worden, seit man die Satelliten entdeckt hat. Wir werden jetzt zu diesen übergehen.

150) Nehmen wir zuerst an, dass der dritte Satellit keine von der Störung unabhängige, der vierte aber eine merkliche Excentricität habe, und dass seine Apsidenlinie hauptsächlich infolge der Gestalt Jupiters, sich so langsam rückläufig bewegt, dass sie in 11000 Umläufen des Satelliten noch nicht eine vollständige Umdrehung ausgeführt hat.

Wenn jeder Satellit einige hundert Male um Jupiter gegangen ist, werden ihre Konjunktionen fast an allen Stellen ihrer Bahnen stattgefunden haben. Wenn nun die Bahn des vierten sowohl wie die des dritten keine unabhängige Excentricität hätte, so würde durch die Störung keine bemerkbare Änderung der Gestalt der Bahn eintreten, da ohne ursprüngliche Excentricität die Wirkung der beiden Satelliten aufeinander dann bei jeder Konjunktion (und die hier auftretende Kraft kommt, als die überwiegende, nur in Frage) die gleiche ist, und die Satelliten doch in allen verschiedenen Punkten der Bahn in Konjunktion kommen.

Allein die Bahn des vierten (die ungestörte schon) ist excentrisch, folglich ist die Wirkung eines jeden der zwei Satelliten auf den andern am grössten, wenn die Konjunktion nahe beim Perijovium des vierten stattfindet, wo beide Körper die grösste Annäherung erreicht haben. Wir haben also jetzt zu beachten, dass die überwiegende Kraft in diesem Teile der Bahn auftritt, und müssen nun nachsehen, welche Gestalt die Bahn des dritten Satelliten haben muss, damit, unter alleiniger Einwirkung dieser überwiegenden Störung, ihre Excentricität bei jedem Umlaufe dieselbe bleibt. Diesen konstanten Zustand, wenn er überhaupt möglich ist, sucht dann auch jene überwiegende störende Kraft herbeizuführen. Man muss sich hierbei erinnern, dass die Wirkung der Gestalt Jupiters der Apsidenlinie des dritten Satelliten, wenn seine Bahn excentrisch ist, eine rechtläufige Bewegung erteilt, die schneller ist als die progressive Bewegung der Apsidenlinie des vierten (236).

151) Die Excentricität der Bahn des vierten Satelliten verursacht eine kleine Excentricität derselben Art in der Bahn des dritten.

Die überwiegende Kraft tritt nach dem soeben Gesagten auf, wenn die Konjunktion beim Perijovium des vierten Satelliten stattfindet; die überwiegende störende Kraft auf dem dritten Satelliten ist hier vom Centralkörper fort nach dem Perijovium des vierten hin gerichtet. Die überwiegende störende Kraft senkrecht zum Radius Vektor beschleunigt den dritten Satelliten vor Erreichung dieses Ortes (der dritte ist hinter dem vierten zurück) und verzögert ihn nach dem Durchgange durch diesen Ort (der dritte ist dem vierten dann voraus).

Aus allen diesen Angaben folgt, mit Rücksicht auf das in 51, 65 und 66 Gesagte, dass, wenn das Perijovium des dritten Satelliten (das aber erst durch Störung erzeugt gedacht wird)*) in dieser Stellung ist, die genannten drei Kräfte der Apsidenlinie des dritten eine rückläufige Bewegung erteilen werden; die Kraft im Radius Vektor nämlich macht diese Linie rückläufig (51), die senkrecht zum Radius Vektor macht sie vor dem Perijovium des dritten (65) und nach demselben (66) rückläufig. Diese rückläufige Bewegung kann bedeutend werden, wenn die Excentricität des dritten klein ist (56), obschon das Überwiegen der Kraft, durch welches ja diese Bewegung verursacht wird, sehr klein ist. Sie kann der von Jupiters Gestalt erzeugten rechtläufigen Bewegung so nahe kommen, dass die wirkliche Bewegung der Apsidenlinie beliebig nahezu gleich kommt der Bewegung der Apsidenlinie des vierten, welche letztere ja viel langsamer erfolgt als die von der Gestalt Jupiters hervorgebrachte (siehe 150, Schluss) Bewegung derselben Linie des dritten Satelliten.

Aber die Bewegung der Apsidenlinie des vierten wird, wenn auch nur wenig, selbst beeinflusst durch die stärkere Wirkung des dritten an dem erwähnten Orte der Konjunktion. Die im Radius Vektor liegende Kraft wirkt auf den vierten Satelliten in seinem Perijovium

---

*) Denn kreisförmig kann die Bahn nicht mehr sein, da die Störung die Geschwindigkeit in den einzelnen Punkten der Bahn verschieden macht.

zum Centralkörper hin, während die auf dem Radius Vektor senkrechte ihn vor dem Perijovium verzögert, und nach demselben beschleunigt, sodass dadurch eine kleine Vergrösserung der progressiven Bewegung seiner Apsidenlinie entsteht. (50, 65, 66.)

Soll der Zustand der Dinge bleibend sein, soll die Bahn des dritten Satelliten immer dieselbe Gestalt behalten unter Einwirkung dieses Überschusses der Kraft in Konjunktion, so darf sich die Excentricität nicht ändern. Letzteres wird nun in der That der Fall sein, wie wir z. B. schon in 128 gezeigt haben, wenn eben das Perijovium des dritten Satelliten, stets bei dem des vierten liegt. Dazu ist nötig, dass die Apsidenlinie beider Bahnen sich gleich schnell bewegen, oder dass das durch die Störung vermehrte Vorschreiten der Apsiden des vierten Satelliten gleich kommt dem durch die Störung verminderten Vorschreiten der Apsiden des dritten (vergl. damit den Schluss von 150), was sich aber für einen bestimmten konstanten Wert der Excentricität des dritten Satelliten sicher wird herstellen lassen. Diesen möglichen, bleibenden Zustand werden unsere Kräfte allein stets herzustellen bestrebt sein. Da zu denselben die angegebene Lage des Perijoviums des dritten erforderlich ist, so wird das Bestreben der Störung (d. i. der überwiegenden Kraft in den Konjunktionen, die beim Perijovium des vierten Satelliten stattfinden) darin bestehen, das Perijovium des dritten nach dem des vierten hin zu bringen, also die Bahn des dritten hier zusammenzudrücken und auf der entgegengesetzten Seite, dem Orte des Apojoviums, zuzuspitzen oder zu erweitern. Der dritte Satellit hat keine ursprüngliche Excentricität, — so nahmen wir an —, die Störung erzeugt aber eine Excentricität, da sie ein Perijovium des dritten hervorzubringen strebt; da dieses letztere dem des vierten zugewendet ist, beide Perijovien somit nach derselben Richtung hin liegen, so erzeugt also die Excentricität der Bahn des vierten Satelliten eine Excentricität in der Bahn des dritten, die derselben Art ist wie sie selbst.

Dies würde der Fall sein, wenn, wie wir bisher angenommen haben, der dritte Satellit keine von der Störung unabhängige Excentricität hätte; aber wie in anderen Fällen, so liesse sich auch hier zeigen, dass die Art der Änderung der Bahn dieselbe sein wird, wenn er eine unabhängige Excentricität besitzt (134). Die Störung sucht also in jedem Falle die Bahn nach dem Perijovium des vierten hin abzuplatten, auf der entgegengesetzten Seite zu erweitern.

152) Die Excentricität der Bahn des dritten Satelliten erzeugt eine Excentricität der entgegengesetzten Art in der Bahn des vierten.

Nehmen wir nun zweitens an, der vierte Satellit habe keine von der Störung unabhängige Excentricität, aber der dritte besitze eine solche, d. h. ohne Störung sei die Bahn des vierten ein Kreis, die des dritten eine Ellipse. Dann liegt das Apojovium des dritten der Bahn des vierten am nächsten (Fig. 56), und die grösste Wirkung wird daher stattfinden, wenn die Konjunktion hier erfolgt. Diese überwiegende Kraft wird jetzt der Apsidenlinie des dritten eine, wenn auch nur langsame, progressive Bewegung erteilen, durch welche die von Jupiters Gestalt hervorgebrachte vermehrt wird. Denn die störende Kraft im Radius Vektor ist vom Centralkörper fort gerichtet und erzeugt nach 54 ein Vorschreiten der Apsidenlinie; die senkrecht zum Radius Vektor beschleunigt vor der Konjunktion (die im Apojovium des dritten erfolgt), und verzögert nach derselben den dritten Satelliten, weshalb nach 65 und 66 die Apsidenlinie wieder vorwärts geht. Wieder wollen wir wissen, welcher dauernde Zustand unter Einwirkung unserer überwiegenden Kraft allein sich herstellen wird oder wir wollen diejenige Gestalt der Bahn des vierten Satelliten finden, die bei jedem Umlaufe dieselbe Excentricität behält. Die Bahn des vierten kann infolge der Störung natürlich nicht mehr kreisförmig bleiben, sondern muss elliptisch werden, da doch die Geschwindigkeit in den verschiedenen Punkten der Bahn nicht mehr die gleiche sein kann. Diese Excentricität bleibt nun konstant, wenn die Apsidenlinie des vierten mit der Linie der Konjunktion vom dritten und vierten zusammenfällt. Die auf den vierten wirkende Kraft im Radius Vektor ist dann vor und nach der Konjunktion (im Peri- oder Apojovium des vierten) nach dem Centralkörper gerichtet und erzeugt nach 57 und 58 im ganzen keine Änderung der Excentricität, da ihre Wirkungen auf letztere vor und nach dieser Stellung gleich sind; gleiches gilt nach 68 von der Kraft senkrecht zum Radius Vektor, welche vor der Konjunktion, also bevor der vierte die eine Apside erreicht hat, verzögert, darnach aber beschleunigt.

Soll der Zustand dauernd sein, so muss demnach die Apsidenlinie stets durch das Apojovium des dritten gehen oder stets mit der des dritten zusammenfallen. Dazu ist nötig, dass die Apsidenlinie des vierten so schnell vorschreitet wie die des dritten Satelliten. Die des vierten bewegt sich infolge der Wirkung der Gestalt Jupiters nur sehr langsam vorwärts, soll sie schneller fortschreiten, so müssen wir das Perijovium des vierten Satelliten nach dem Apojovium des dritten hin liegend annehmen; nach 50, 65, 66 wird dann die Apsidenlinie des vierten vorschreiten und zwar sowohl infolge der im Radius Vektor wie der senkrecht dazu wirkenden Kräfte (die in den im Apojovium des dritten erfolgenden Konjunktionen auftreten). Soll sie ebenso schnell wie die des dritten vorschreiten (150, am Schlusse), so wird man nur den Wert der Excentricität der Bahn des vierten klein genug annehmen müssen, wodurch ja nach früherem die Wirkungen grösser werden. Dieser mögliche konstante Zustand, den wir gefunden haben, wird von unseren überwiegenden Kräften allein herzustellen gesucht; dieselben wollen das Perijovium des vierten nach dem Apojovium des dritten hin legen, oder wollen an dieser Stelle die Bahn des vierten zusammendrücken, auf der entgegengesetzten Seite verlängern. Da dieses Perijovium des vierten dem des dritten entgegengesetzt liegt, so wollen also die überwiegenden störenden Kräfte des dritten (die von der Excentricität des dritten herrühren) in der Bahn des vierten eine Excentricität entgegengesetzter Art hervorrufen.

Wir haben auch in dieser Untersuchung den einen, hier den vierten Satelliten ohne selbständige Excentricität angenommen, es werden aber auch hier wieder die über die Änderungen in den Bahnen gezogenen Schlüsse ebenso gelten, wenn wir dem vierten Satelliten eine unabhängige, ursprüngliche Excentricität beilegen.

153) In der That haben der dritte und vierte Satellit unabhängige Excentricitäten, und die beiden gefundenen Resultate sind daher auf beide anwendbar. Der vierte Satellit bekommt nach dem Gefundenen zu seiner unabhängigen Excentricität eine neue, die nach ihrer Art der des dritten Satelliten entgegengesetzt ist, und der dritte erhält ausser seiner ursprünglichen Excentricität eine ihrer Art nach mit der des vierten gleiche Excentricität. Ebenso erhalten die Bahnen des ersten und zweiten Satelliten kleine Excentricitäten, die ähnlich denen des dritten und vierten sind. Denn der erste und zweite erfahren vom dritten und vierten Wirkungen ähnlicher Art wie die, welche der dritte vom vierten erfährt.

154) Man sieht wohl ein, dass die Excentricitäten der Bahn des dritten Satelliten Einfluss ausüben werden auf die grosse Ungleichheit (137), welche er in der Bewegung des zweiten erzeugt, und dass ebenso die Ungleichheit in der Bewegung des dritten, welche von der Anziehung des zweiten herrührt, die Wirkung des dritten auf den vierten beeinflussen wird. Wir wollen darauf nicht weiter eingehen, sondern nur bemerken, dass diese Einflüsse gering sind.

155) Wir haben nun die hauptsächlichsten Ungleichheiten in den Bewegungen der Jupitersatelliten behandelt. Sie hängen so sehr mit einander zusammen und sind derart verwickelt, dass wir sie auf dem von uns angegebenen Wege wohl erklären, aber kaum berechnen können. Nur ein mathematisches Verfahren der obstrusesten Art, welches zu gleicher Zeit die Bewegungen aller umfasst, reicht für einen solchen Zweck aus.

Dessenungeachtet werden wir das uns hier gesteckte Ziel für erreicht halten dürfen, wenn wir dem Leser einen allgemeinen Begriff gegeben haben von den Störungen in diesem merkwürdigsten und verwickeltsten Systeme, welches je der Rechnung unterworfen worden ist.

VII. Abschnitt.

Theorie der Planeten.

156) Die Theorie der Planeten nimmt in gewisser Hinsicht eine Mittelstellung ein zwischen der Theorie unseres Mondes und der der Jupitersatelliten. Bei unserem Monde sind die hauptsächlichsten Ungleichheiten derart, dass sie bei jedem Umlaufe oder längstens in einem Umlaufe der Erde um die Sonne, nahezu in derselben Ordnung wiederkehren; dies rührt daher, dass diese Ungleichheiten lediglich von der gegenseitigen Lage der Sonne, des Mondes und der Apsidenlinien abhängen. Bei den Satelliten Jupiters hängen einige der hauptsächlichsten Ungleichheiten, wie die des dritten und vierten Satelliten, ganz und gar nicht von der gegenseitigen Stellung der Körper ab, wohl aber von der Lage der Apsidenlinien, deren Umläufe, wenn sie auch langsam erfolgen, doch vollständig beobachtet werden können. Bei den Planeten sind die Störungen, welche denen des Mondes analog sind, nur klein; die Änderungen der Elemente, die durch sie erzeugt werden, sind zwar bemerklich, aber sie erfolgen doch so langsam, dass mehrere Jahrtausende notwendig sind, um sie vollständig zu beobachten. Die bemerkenswertesten Unregelmässigkeiten sind die, welche hervorgebracht werden durch Änderungen der Elemente, die mehrere Umläufe der Planeten umfassen. Diese Störungen sind unter den bisher behandelten Fällen am ähnlichsten denen der drei ersten Jupitermonde; von den letzteren unterscheiden sie sich jedoch dadurch, dass für den grössten Teil von ihnen unabhängige Excentricitäten durchaus wesentlich sind.

Ungleichheiten, die früher behandelten ähnlich sind.

157) Einige Ungleichheiten, die der Variation, der parallaktischen Ungleichheit, der Evektion und der jährlichen Gleichung des Mondes ähnlich sind.

Wie wir schon sagten, giebt es einige Störungen, die den in der Theorie des Mondes behandelten ähnlich sind. Betrachten wir z. B. die Störungen Merkurs durch Jupiter. Die Entfernung des letzteren von der Sonne ist fast 13 mal so gross wie dieselbe Entfernung für Merkur, also die erstere sehr gross im Vergleich zur letzteren. Es ist deshalb dieser Fall fast genau derselbe wie der des durch die Sonne gestörten Mondes. Wie früher die Mondbahn, so wird jetzt die Bahn Merkurs an den Stellen, welche Jupiter am nächsten und von ihm am weitesten entfernt liegen, etwas zusammengedrückt; die Störung ist der Variation ähnlich. Diese Wirkung wird jedoch sehr modificiert durch die Wirkungen derjenigen Kräfte, welche den in 94 erwähnten analog sind und hier bedeutend überwiegen (parallaktische Ungleichheit). Nach dem in 98 Gesagten wird die Apsidenlinie Merkurs bei jedem Umlaufe ein wenig vorschreiten, wenn Jupiter nahe in dieser Apsidenlinie steht, sie wird aber etwas zurückschreiten (101), wenn sich Jupiter in der darauf senkrechten Linie befindet. Nach 115 (am Schlusse) ist die Excentricität im ersten Falle am grössten, im letzteren am kleinsten, oder die Merkurbahn ist im ersten Falle etwas mehr, im zweiten etwas weniger excentrisch. Aus 90 folgt ferner, dass sich die Bahn des Merkur etwas weiter ausdehnt, wenn Jupiter im Perihel steht, als wenn er sich im Aphel befindet (die Bahn verengert sich, während Jupiter vom Perihel zum Aphel geht und erweitert sich vom Aphel bis zum Perihel).

Wie auf Merkur, so lassen sich die früher für den Mond gefundenen Resultate auch ausdehnen auf die Störungen, welche Venus, Erde und Mars durch Jupiter erfahren.

158) Das soeben behandelte Beispiel Merkurs und Jupiters ist freilich eines der extremsten im Planetensystem, sofern eben die Planeten sehr weit voneinander entfernt sind. Betrachten wir dagegen die Störungen zweier Planeten, die einander näher sind, so müssen wir unsere Schlüsse bedeutend modificieren. Es wird alsdann dort, wo die Planeten in der Nähe ihrer Konjunktion sind, die störende Kraft viel grösser sein als an irgend einer anderen Stelle, und deshalb wird auch die Bahn an dieser Stelle viel mehr als in irgend einem anderen Teile geändert (beim Monde war die störende Kraft in Konjunktion und Opposition nahezu die gleiche, weil die Entfernung des störenden Körper sehr gross war, 82). Indessen wird die Schlussweise, auf welche wir in 91 die Gestalt der Mondbahn gründeten (wenn wir von der Betrachtung einer selbständigen Excentricität absehen), bis zu einem gewissen Grade auch hier gelten. Die Bahn wird also in verschiedenen Fällen (91) auf der Seite, auf der die Konjunktion stattfindet, und auf der ihr entgegengesetzten zusammengedrückt werden, am meisten aber auf der letzteren (96)*); sie wird ferner an den Teilen sich erweitern, wo die störende Kraft vollständig die Gravitation gegen die Sonne hin zu vergrössern strebt.

Diese Schlussweise gilt für die Anziehung eines äusseren Planeten, aber sie wird uns auch in vielen Fällen behilflich sein, um diejenige Gestalt der Bahn zu finden, welche durch die Anziehung eines inneren Planeten hervorgebracht wird.

159) Die Analogie muss mit grosser Vorsicht benutzt werden.

Die Betrachtung einzelner Fälle wird uns zeigen, wie vorsichtig man in der Anwendung dieser Schlüsse sein muss. Angenommen, wir untersuchten die gegenseitigen Störungen von Erde und Mars. Die Umlaufzeit des Mars ist nahezu doppelt so gross, wie die der Erde; wir treffen also hier auf eine Ungleichheit der Art, wie die in 122 und den folgenden Paragraphen betrachtete Ungleichheit der Satelliten Jupiters. Obgleich die Umlaufszeit des Mars nicht sehr nahe das doppelte von der der Erde ist, so dass die Änderungen, die durch dieses Verhältnis der Umlaufszeiten in den Bahnen von Erde und Mars entstehen (die Abstände der Punkte der Konjunktion voneinander sind dann grösser als die früher bei den Jupitersatelliten), nicht sehr auffallend sind, so sind sie doch unter den bloss von der Stellung der Planeten abhängigen die grössten, welche die zwei Körper gegenseitig in ihren Bewegungen hervorbringen.

Obwohl man also auf den ersten Blick bemerkt, dass diese Störung zwischen Erde und Mars analog der Variation des Mondes ist, so erhält sie doch, wegen des geringen Unterschiedes der Distanzen, und wegen der nahen Kommensurabilität der Umlaufszeiten weit mehr Ähnlichkeit mit der bei den Jupitersatelliten auftretenden, d. h. mit der langsamen Variation der Elemente der Bahn als mit der Variation des Mondes.

160) Es ist kaum möglich einen Begriff von den Rechnungen zu geben, durch welche man in allen den verschiedenen Fällen die von den Excentricitäten unabhängigen Störungen bestimmen kann. Wir müssen uns damit begnügen, anzugeben, dass diese Methoden für alle gelten, und dass sie viel einfacher sind als andere, die sich auf Punkte beziehen, von denen wir durch eine allgemeine Erörterung einen Begriff geben wollen.

161) Allgemeiner Grundsatz für die Erklärungen der bedeutenderen Störungen, welche von den Excentricitäten und Neigungen der Bahnen abhängen.

Betrachten wir nun die Ungleichheiten der Bewegung, welche von den Excentricitäten und den Neigungen der Planetenbahnen abhängen. Der Leser wird wahrscheinlich zuerst an folgendes denken:

„Wenn die Störungen der Planeten, falls man ihre Bahnen ohne unabhängige Excentricitäten annimmt, nur wenige Sekunden betragen, wie können dann die kleinen Ortsänderungen, welche entstehen, sobald wir uns die unbedeutenden wirklich ursprünglich vorhandenen Excentricitäten und Neigungen der Bahnen hinzugefügt denken, die Kräfte, mit denen die Planeten aufeinander wirken, so sehr verändern, dass daraus irgend merkliche Unterschiede in der Grösse der Unregelmässigkeiten entstehen?“

Als Antwort hierauf kann man sagen:

„Es sind thatsächlich diese Kräfte oder die erwähnten Änderungen der Kräfte (die man bei abhängiger Excentricität anzubringen hat, sobald man den Fall einer ursprünglichen

*) Weil eben der Unterschied der Kräfte in Konjunktion und Opposition jetzt gross ist, und die daraus entstehende, der parallaktischen Ungleichheit des Mondes ähnliche Störung in Opposition die der Variation ähnliche Störung vermehrt, in Konjunktion aber vermindert (96).

Excentricität haben will) ausserordentlich klein, und diejenigen Teile derselben, welche in derselben Richtung eine kurze Zeit hindurch, z. B. während eines Bruchteiles der Umlaufszeit eines Planeten wirken, bringen keine merkliche Wirkung hervor. Aber es giebt auch Teile, die nicht bloss eine kurze Zeit hindurch wirken, sondern die während vieler Umläufe in derselben Weise fortwirken; die Wirkungen dieser Störungen werden im Laufe der Zeit merklich; insbesondere bringen jene, welche die mittlere Entfernung und die Umlaufszeit ändern, nach und nach Änderungen in der Länge des Planeten hervor (49), die weit fühlbarer sind als die Änderung der Dimensionen der Bahn."

162) In dieser Betrachtung ist die ganze allgemeine Theorie derjenigen Ungleichheiten begriffen, welche man unter dem Namen „Ungleichheiten von langer Periode" kennt. Ausser denjenigen Ungleichheiten, die der Evektion des Mondes ähnlich sind, sind sie unter den von den Excentricitäten abhängigen Ungleichheiten die einzigen, welche Bedeutung haben.

Die Ungleichheiten von langer Periode, insbesondere die für Jupiter und Saturn.

163) Um näher in die Erörterung einzugehen, wollen wir das Beispiel der langen Ungleichheit von Jupiter und Saturn wählen. Diese letztere Ungleichheit ist wegen ihrer Grösse, wegen der Zeit, in welcher die Kräfte in derselben Art wirken, aber auch wegen der Schwierigkeit, welche sie den Astronomen bot, ehe sie durch die Theorie begründet war, die merkwürdigste, die man seit der ersten Erklärung der Ungleichheiten des Mondes kennen gelernt hat.

164) Die Umlaufszeiten von Jupiter und Saturn betragen $4332,_{5888}$ Tage und $10759,_{2198}$ Tage, sie verhalten sich also zu einander nahezu wie 2:5, oder die Anzahl Grade, welche beide Planeten in derselben Zeit in Länge beschreiben, abgesehen von ihren Excentricitäten, stehen nahezu im Verhältnis von 5:2. Nehmen wir an, dieses Verhältnis habe genau den Wert 2:5, und Jupiter und Saturn gehen von einer Konjunktion aus (die Bahnen seien nicht excentrisch). Hat Saturn 240 Grade beschrieben, so wird Jupiter 600 Grade zurückgelegt haben, da diese Zahlen sich wie 2:5 verhalten oder da Jupiter $\frac{5}{2}$ mal so viel zurücklegt. Da nun 360 Grad einen Umlauf geben, so wird also Jupiter ein ganzes Mal (von der ursprünglichen Stellung in Konjunktion aus gerechnet) herum gegangen sein und überdies noch 240 Grade beschrieben haben; er wird daher mit Saturn wieder in Konjunktion stehen, weil dieser gleichfalls vom früheren Orte der Konjunktion um 240 Grade sich entfernt hat.

Hat Saturn nochmals 240 Grad beschrieben, d. h. im ganzen 480 Grade oder einen ganzen Umlauf und noch 120 Grade darüber, so wird Jupiter im ganzen 1200 Grade oder drei Umläufe und noch 120 Grade darüber durchlaufen haben, wird folglich wieder mit Saturn in Konjunktion stehen.

Wenn Saturn ein drittes Mal 240 Grade zurücklegt, also im ganzen 720 Grade oder genau zwei Umläufe durchmessen hat, wird Jupiter $600 \times 3 = 1800$ Grad zurückgelegt oder genau 5 Umdrehungen gemacht haben, und die Planeten werden wieder in Konjunktion stehen.

Wir haben jetzt drei auf einander folgende Konjunktionsstellungen gefunden: in 240°, 120°, 0° Abstand von der ersten Konjunktion. Man sieht daher: verhalten sich die Umlaufszeiten genau wie 2:5, so wird eine beständige Folge von Konjunktionen in denjenigen Punkten stattfinden, deren Längen die Länge des Ortes der ersten Konjunktion um 240°, 120°, 0°, darnach wieder um 240°, 120°, 0° u. s. w. übertreffen.

Sind z. B. B_1 und C_1 (Fig. 57) die Orte von Jupiter und Saturn bei der ersten Konjunktion, von der wir ausgehen, so wird Jupiter ganz herumgegangen und noch darüber, um 240°, bis B_2 gekommen sein, wenn Saturn nur einen Teil seines Umlaufes, 240°, bis C_2 beschrieben hat. Hat Jupiter wieder einen Umlauf ausgeführt, von B_2 aus gerechnet, und ist er noch überdies um 240° darüberhinaus bis B_3 gekommen, so hat Saturn auch wieder nur einen Teil seines Umlaufes, von C_2 bis C_3 oder 240° gemacht. Dann wird Jupiter neuerdings ein ganzes Mal herum und noch überdies bis B_1 (240°) gehen, während Saturn einen Teil seines Umlaufes von C_3 bis C_1 (240°) macht, und so zum dritten Male mit Jupiter in Konjunktion kommt. Hierauf werden die Konjunktionen in derselben Ordnung aufeinander folgen.

Stehen also die Umlaufszeiten genau im Verhältnisse von 2:5, so werden die Konjunktionen stets in denselben drei Punkten der Bahn stattfinden. Dieser Schluss hat auch Gültigkeit, wenn man die Bahnen excentrisch annimmt; denn wenn auch die Orte der Konjunktion dann etwas verändert werden, so werden doch diese Orte nach der dritten Konjunktion, wenn Saturn genau zwei und Jupiter fünf Umläufe gemacht hat, in derselben Ordnung und an denselben Plätzen wie zuvor wiederkehren.

165) Die Umlaufszeiten von Jupiter und Saturn stehen nahezu im Verhältnisse von 29:72, und deshalb fallen ihre Konjunktionen nahezu auf drei Punkte, die gleich weit voneinander abstehen, und die bei jeder Rückkehr langsam vorwärts gehen.

Die Umlaufszeiten verhalten sich nun aber nicht genau wie 2:5, sondern nahezu wie 29:72. Dies ändert die Entfernung der Orte der Konjunktion. Wir müssen jetzt den Saturn $242{,}_{79}°$ beschreiben lassen, nicht wie vorher 240°, wenn Jupiter mit ihm wieder in Konjunktion kommen soll, denn dann wird Jupiter $\frac{72}{29} \cdot 242{,}_{79}° = 602{,}_{79}°$ oder einen Umlauf und überdies $242{,}_{79}°$ gemacht haben, sodass thatsächlich beide nunmehr wieder in Konjunktion stehen. Die nächste Konjunktion wird stattfinden, wenn Saturn den doppelten Wert oder $485{,}_{58}°$ beschrieben hat; die dritte wird eintreten, wenn Saturn durch $3 \cdot 242_{79}° = 728{,}_{37}°$ gegangen ist oder 2 Umläufe und noch $8{,}_{37}°$ darüber zurückgelegt hat. Die nun folgenden 3 Konjunktionen werden nicht an den früheren Punkten erfolgen, sondern gegen diese um $8{,}_{37}°$ vorausliegen; überhaupt werden die Orte von je 3 Konjunktionen $8{,}_{37}°$ den Orten vorausliegen, an welchen die zunächst vorangegangenen 3 Konjunktionen stattfanden.

Wendet man dies auf die Figur 57 an, so findet man, dass die Orte der aufeinander folgenden Konjunktionen etwa sein werden: $B_1\,C_1$, $b_2\,c_2$, $b_3\,c_3$, $b_4\,c_4$, $b_5\,c_5$, $b_6\,c_6$ u. s. w. Dieses Verschieben der Orte der Konjunktion wird nahezu in derselben Weise vor sich gehen, die Bahnen mögen excentrisch sein oder nicht.

166) Hieraus ergiebt sich:

1) Verhalten sich die Umlaufszeiten genau wie 2:5, so finden die aufeinander folgenden Konjunktionen in drei nahezu gleich weit voneinander entfernten Punkten der Bahnen statt.
2) Ist das Verhältnis nicht genau das von 2:5, sondern ein weniger ungleiches, wie das von 29:72, das etwa gleich $2:4{,}_{97}$ ist, so gehen die Punkte der Konjunktion vorwärts, sodass jede Folge von Konjunktionen in Punkten der Bahnen stattfindet, welche um $8{,}_{37}°$ vorausliegen in Bezug auf die Punkte der zunächst vorangegangenen Folge von Konjunktionen.

167) Untersuchen wir nun, wenn die Konjunktionen wieder an demselben Orte wie zuerst stattfinden werden.

Letzteres wird der Fall sein, wenn die Punkte $b_2\,c_2$, $b_5\,c_5$, $b_8\,c_8$ u. s. w. bis $B_1\,C_1$ reichen. Nach welcher Zeit werden diese Punkte so weit vorgerückt sein? Es seien $B_2\,C_2$, $B_3\,C_3$ die Punkte, welche um 120° voneinander und von $B_1\,C_1$ abstehen. Die erste Konjunktion erfolgte, von $B_1\,C_1$ an gerechnet, in $b_2\,c_2$ und zwar um $2{,}_{79}°$ von $B_2\,C_2$ entfernt, nämlich im Abstande $242{,}_{79}°$ von $B_1\,C_1$; die letzte der nun folgenden drei Konjunktionen findet dann in $b_5\,c_5$, um $8{,}_{37}°$ von $b_2\,c_2$ entfernt, statt, während von den nun weiter folgenden nächsten drei Konjunktionen die letzte in $b_8\,c_8$ erfolgt, und zwar wieder um $8{,}_{37}°$ von $b_5\,c_5$ entfernt; denn in drei Konjunktionen rücken ja die Punkte um $8{,}_{37}°$ vorwärts. Nun sind es von $b_2\,c_2$ bis $B_1\,C_1$ im ganzen $120° - 2{,}_{79}° = 117{,}_{21}°$. Von diesen $117{,}_{21}°$ werden also je $8{,}_{37}°$ in drei Konjunktionen durchlaufen; es fragt sich, wievielmal drei Konjunktionen dazu gehören, damit

$117{,}_{21}{}^{0}$ beschrieben werden. Jedenfalls sovielmal 3 Konjunktionen wievielmal $8{,}_{37}{}^{0}$ enthalten ist in $117{,}_{21}{}^{0}$. Es ist $117{,}_{21} : 8{,}_{37} = 14$; also werden die Punkte $b_2\,c_2$, $b_5\,c_5$, $b_8\,c_8$ u. s. w. von $b_2\,c_2$ bis $B_1\,C_1$ gelangen nach 14 mal 3 oder nach 42 Konjunktionen. Da nun $b_2\,c_2$ selbst die nächste Konjunktion nach $B_1\,C_1$ ist, so wird also die Reihe der Punkte $b_2\,c_2$, $b_5\,c_5$, $b_8\,c_8$ u. s. w. bis $B_1\,C_1$ rücken nach $42 + 1 = 43$ Konjunktionen, von der in $B_1\,C_1$ stattfindenden aus gerechnet. Darnach wird die Konjunktion wieder, wie am Anfang, in $B_1\,C_1$, darauf in $b_2\,c_2$, $b_3\,c_3$ u. s. w. stattfinden.

Nun wissen wir, dass nach einer Konjunktion die folgende stattfindet, wenn Saturn sich um $242{,}_{79}{}^{0}$ fortbewegt hat, und da 43 Konjunktionen nach der in $B_1\,C_1$ verfliessen müssen, damit dieselben wieder in $B_1\,C_1$ und den früheren Punkten stattfinden, so werden die Konjunktionen wieder an denselben Orten wie zuerst statthaben, wenn Saturn $242{,}_{79}{}^{0} \times 43 = 10\,439{,}_{97}{}^{0}$ oder rund $10\,440^{0}$ zurückgelegt oder 29 Umläufe gemacht hat. In derselben Zeit wird Jupiter, da sich die Umlaufszeiten wie 29 : 72 verhalten, $29 \times \frac{72}{29}$ oder 72 Umläufe gemacht haben. Die Zeit also, nach welcher die Konjunktionen wieder auf dieselben Punkte fallen, beträgt das 29fache der Umlaufszeit Saturns oder das 72fache von der des Jupiter, oder endlich nahezu 855 Jahre, da zu einem Saturnumlauf $10\,759{,}_{2198}$ Tage gehören.

Die gefundenen Zahlen sind nicht genau, weil das Verhältnis 29 : 72 nicht genau das richtige ist.

168) Betrachten wir nun

die Wirkungen dieser langsamen Bewegung der Punkte der Konjunktion auf die Kräfte, mit denen die beiden Körper einander stören.

169) Haben die Bahnen keine unabhängige Excentricität, sind sie also ohne Störung kreisförmig, so wird der einzige Einfluss auf die Bahnen die periodische Änderung sein, die bei jeder Konjunktion stattfinden wird. Es wird dann bei einer wie bei der andern Folge von Konjunktionen das, was die Dimensionen der Bahn beeinflussen kann, dasselbe sein.

170) Dieses Vorrücken der Punkte der Konjunktion verursacht eine kleine Variation der störenden Kräfte, mit denen der eine Planet auf den andern wirkt, sodass diese Kräfte zu ihren früheren Werten nur dann zurückkehren, wenn die Punkte der Konjunktion um 120° vorgerückt sind.

Sind aber die Bahnen nicht kreisförmig, so gilt das im vorigen Paragraphen Gesagte nicht mehr. Es ist dann nicht einerlei (Fig. 58), ob die Konjunktionen in $B_1\,C_1$, $B_2\,C_2$ und $B_3\,C_3$ erfolgen, oder in $b_1\,c_1$, $b_2\,c_2$ und $b_3\,c_3$. Die Entfernungen der Planeten voneinander sind jetzt nicht immer dieselben, und folglich sind auch die Kräfte, mit denen sie aufeinander in den Konjunktionen einwirken, nicht immer die gleichen; ebenso sind dann ihre Geschwindigkeiten in verschiedenen Teilen der Bahnen oder in den verschiedenen Punkten der Konjunktion verschieden, sodass infolge davon auch die Zeiten, während welcher sie aufeinander in den Punkten der Konjunktion und ihrer Umgebung wirken können, nicht immer dieselben sind.

In der Figur ist z. B. allerdings $b_2\,c_2$ kleiner als $B_2\,C_2$, während $b_3\,c_3$ grösser als $B_3\,C_3$ ist (wo $B_1\,C_1$, $B_2\,C_2$, $B_3\,C_3$ die um je 120° voneinander entfernten früher betrachteten Punkte sind), sodass durch die verschiedenen Wirkungen in den verschiedenen Punkten der Bahn eine teilweise Kompensation in den Änderungen der Wirkungen, die infolge der vorhandenen Excentricitäten eintreten, stattfindet. Allein nur durch sehr genaue Berechnungen kann man sich überzeugen, ob die Kompensation eine vollständige oder teilweise ist, die hierzu nötigen Berechnungen sind vielleicht die verwickeltsten, zu welchen je die physikalischen Wissenschaften Veranlassung gegeben haben, und der Leser kann nicht erwarten, dass ihrer hier auch nur im geringsten Erwähnung gethan werde. Nur das kann hier als Resultat hingestellt werden, dass es im Planetensystem kein Beispiel einer vollständigen Ausgleichung giebt, und dass die Wahrscheinlichkeit einer solchen vollständigen Kompensation in irgend einem Falle unendlich klein ist.

171) Wir haben soeben den veränderlichen Einfluss eines Körpers auf den andern in der Konjunktion betrachtet, und haben uns dabei gedacht, derselbe hänge lediglich von den Excentricitäten ab. Aber es giebt einen andern Umstand, der diesen Einfluss zu verändern strebt; die Bahnen nämlich sind gegeneinander geneigt (bisher dachten wir uns die Bahnen alle in einer Ebene liegend). Ziehen wir diese Neigung in Betracht, so wird sowohl die Entfernung der Planeten voneinander, als auch die Richtung, in welcher sie aufeinander wirken, in den verschiedenen Punkten eine andere sein als früher.

172) In dem Falle von Jupiter und Saturn wirken nun die beiden Planeten aufeinander mit Kräften, welche bei jeder dritten Konjunktion zwar nahezu, aber nicht genau dieselben sind, und deren Änderungen eine Periode von etwa 850 Jahren umfassen (nach 167 finden ja nach 855 Jahren die Konjunktionen an denselben früheren Punkten statt oder sind die Punkte der Konjunktion um 120° vorgerückt). Von diesen Kräften wirken nun einige Teile in der Richtung des Radius Vektor, und diese suchen unmittelbar die grossen Achsen der beschriebenen Bahnen zu beeinflussen (siehe z. B. 46); andere Teile dieser Kräfte sind senkrecht zum Radius Vektor gerichtet, und suchen bald zu beschleunigen, bald zu verzögern, und streben (siehe z. B. 48), wenn auch auf entgegengesetzte Arten, die grossen Achsen zu beeinflussen. Es giebt also Kräfte, welche die grossen Achsen der Bahnen zu ändern suchen, welche alle ihre möglichen Grössen in 850 Jahren durchlaufen. In der einen Hälfte dieser Zeit suchen sie die grosse Achse der Jupiterbahn zu verkleinern, die der Saturnbahn zu vergrössern, während sie in der andern Hälfte das umgekehrte Bestreben zeigen. Dieses Zusammenfallen der Zeiträume des Wachstums der einen grossen Achse und der Abnahme der andern ist freilich das Resultat einer Untersuchung, in die wir hier nicht eingehen können.

173) Die mittleren Entfernungen der Planeten erfahren nach dem vorigen zwar unbedeutende Änderungen, aber diese letzteren erzeugen merkliche Änderungen der Länge.

Wir erwähnten in 170, dass die Änderungen der Kräfte, die auftreten, sobald die Bahnen excentrisch sind, sich zum Teil ausgleichen; es wird also die wirklich übrigbleibende Kraft, welche die im vorigen Paragraphen angegebenen Wirkungen hervorbringt, nur sehr klein sein. In der That ist sie so klein, dass sie nach einer Wirksamkeit von mehr als 400 Jahren (der Hälfte von 855 Jahren), die grosse Achse Saturns nur um $\frac{1}{1850}$, und die Jupiters um $\frac{1}{8560}$ vergrössert oder verkleinert. Solche Änderungen würde man kaum mit unseren besten Instrumenten bemerken können. Allein, wenn die grosse Achse etwa 400 Jahre hindurch zunimmt, also dementsprechend auch die mittlere Entfernung wächst und darnach abnimmt, so wird auch die jährliche Winkelbewegung die einen 400 Jahre hindurch beständig kleiner, und durch die nächsten 400 Jahre beständig grösser werden als ihr Mittelwert (da $T^2 : T_1^2 = R^3 : R^3_1$, — wo T, T_1 die Umlaufszeiten bei den mittleren Entfernungen R, R_1 bedeuten — und deshalb T_1 grösser als T sein wird, wenn R_1 grösser als R ist oder die Winkelbewegung kleiner sein wird für die mittlere Entfernung R_1 als für die von der Grösse R); in dieser langen Periode aber kann die Ungleichheit in Länge eine sehr bedeutende Grösse erreichen (49). So beträgt z. B. diese Ungleichheit in Länge bei Saturn 48 Minuten, um welche also sein wahrer Ort manchmal vor dem mittleren Orte voraus, manchmal hinter demselben zurück ist. Bei Jupiter beläuft sich dieselbe Ungleichheit auf 21 Minuten, während ihr grösster Wert für keinen der übrigen Planeten 3 Minuten übersteigt, und für die unter Jupiter befindlichen Planeten nicht einmal über 25 Sekunden kommt.

Die theoretische Erklärung dieser Ungleichheiten wurde zuerst von Laplace im Jahre 1785 gegeben.

174) Die Grösse dieser Ungleichheiten in den Bewegungen von Jupiter und Saturn hängt also, wie wir gesehen haben, hauptsächlich von der Länge der Zeit ab, während welcher die Kräfte im gleichen Sinne wirken, und zwar 1) weil sie in dieser langen Zeit einen bedeutenden Einfluss auf die Länge der grossen Achse und auf die jährliche Winkelbewegung ausüben, und 2) weil die Planeten dann ja eine geraume Zeit hindurch mit der so geänderten Winkelbewegung einhergehen. Allein man muss dabei auch in Betracht ziehen, dass diese Planeten die grössten des Systems sind, da Jupiter nahezu 300, Saturn nahezu 100 mal so viel Masse hat als die Erde.

175) Dieselben Ursachen erzeugen periodische Änderungen der Excentricitäten und der Orte der Perihelien.

Durch dieselbe Schlussweise, welche uns das Vorhandensein einer periodischen Ungleichheit der grossen Achse jeder dieser Bahnen lehrte, lässt sich auch zeigen (50 u. s. f.), dass es eine periodische Ungleichheit in der Excentricität und dem Orte des Periheliums giebt. Ebenso erhellt, dass auch diese Wirkungen die Überbleibsel sind, die nach der teilweisen Ausgleichung der Wirkungen in den verschiedenen Teilen der Bahn noch vorhanden sind.

Findet z. B. eine Konjunktion statt, wenn sich Jupiter auf das Aphel zu bewegt, so wird die störende Kraft Saturns, die den Jupiter von der Sonne wegzieht, nach 59 die Excentricität der Jupiterbahn vergrössern wollen. Sicher aber wird dann die nächste oder übernächste oder es werden beide diese Konjunktionen an einem Teile der Bahn erfolgen, wo Jupiter zum Perihel hin geht, und somit nach 59 die Excentricität seiner Bahn vermindert wird.

Ähnliches gilt auch von Saturn.

Sache der Rechnung ist es nun, zu entscheiden, ob die Ausgleichung zwischen beiden soeben angegebenen Wirkungen eine vollständige oder nur eine teilweise ist. Diese Kompensation ist nun keine vollständige. Wir können jedoch hier nur sagen: während die Punkte der Konjunktion um nahezu 120° vorrücken, besteht die Wirkung des unausgeglichenen Teils in der einen Hälfte der dazu gehörigen Zeit darin, die Excentricität zu vergrössern, in der zweiten Hälfte darin, sie zu verkleinern.

Es erhellt, dass hier auch kein notwendiger Zusammenhang stattfindet zwischen der Zeit, zu welcher die Excentricität am grössten oder kleinsten ist, und der, wo die grosse Achse ihren grössten oder kleinsten Wert hat, sodass wir nicht behaupten können, die Excentricität sei am grössten, wenn die grosse Achse am grössten oder umgekehrt, und ebenso nicht behaupten können, die Excentricität der einen Bahn sei dann am grössten, wenn die der andern ihren grössten Wert hat. Nur soviel können wir sagen: die Zeit, in welcher die Excentricität jeder Bahn alle ihre möglichen Werte, vom grössten bis zum kleinsten, durchläuft, ist dieselbe wie die, in welcher die grosse Achse alle ihre möglichen Grössen annimmt.

Die Entfernung des Planeten von der Sonne wird durch die Änderung der Excentricität weit mehr beeinflusst, als durch die Änderung der grossen Achse; die Wirkung der ersteren Änderung beträgt nämlich für Jupiter $\frac{1}{1230}$, für Saturn $\frac{1}{314}$ seiner ganzen Entfernung (vergl. hiermit die Werte in 173).

176) Ähnliche Betrachtungen lassen sich in jeder Hinsicht auf die Bewegungen des Perihels jeder Bahn anwenden. Es wird das Perihel während etwa 425 Jahren vor- und 425 Jahre lang zurückschreiten, doch ohne dass ein notwendiger Zusammenhang bestünde zwischen der Zeit, zu welcher das eine und das andere am meisten vorgeschritten ist. Wohl aber findet eine notwendige Beziehung statt zwischen der Änderung der Excentricität und der Bewegung des Perihels jeder Bahn, nämlich:

„Die Excentricität jeder Bahn hat ihren mittleren Wert, wenn das Perihel derselben am meisten vor- oder rückwärts gegangen ist. Ist die Excentricität am grössten oder kleinsten, so ist das Perihel an seinem mittleren Orte.“

177) Weitere ähnliche Fälle im Sonnensystem.

Wir haben zur eingehenden Behandlung die lange Ungleichheit von Jupiter und Saturn gewählt, weil sie infolge ihrer Grösse die auffallendste ist, aber auch weil sie die bekannteste ist durch ihre Geschichte, da sie, ehe ihre Ursache theoretisch erklärt war, durch ihre merkwürdigen Unregelmässigkeiten die Astronomen verwirrte.

Es giebt aber noch andere theoretisch gleich merkwürdige Ungleichheiten.

Das 8fache der Umlaufszeit der Erde ist sehr nahe gleich der 13fachen Umlaufszeit der Venus, und dies bringt in den Bewegungen von Erde und Venus eine geringe Ungleichheit hervor, welche in 239 Jahren durch alle ihre Werte geht (s. Bemerkung zu 178).

Vier Umlaufszeiten Merkurs kommen nahezu der Umlaufszeit der Erde gleich, und dies erzeugt eine Ungleichheit, deren Periode beinahe 7 Jahre beträgt.*)

Die Umlaufszeit des Mars ist beinahe doppelt so gross wie die der Erde; dadurch entsteht eine bedeutende Ungleichheit, welche von den Excentricitäten abhängt u. s. w., nebst der in 159 erwähnten, die von den Excentricitäten unabhängig war.

Die doppelte Umlaufszeit der Venus ist nahezu gleich der 5fachen des Merkur; drei Umlaufszeiten der Venus kommen einer des Mars gleich, und drei Umlaufszeiten des Saturn endlich unterscheiden sich nur wenig von der Umlaufszeit des Uranus. Jede solche Annäherung zur Gleichheit liefert in der Bewegung je zweier Planeten eine Gleichung, d. i. Abweichung vom mittleren Werte, von merklicher Grösse und langer Periode.

178) Die Ungleichheiten sind am grössten, wenn der Unterschied zwischen den zwei Zahlen, welche das Verhältnis der Umlaufszeit derselben sind, klein ist.

Es lässt sich wohl einsehen, dass der Mangel der Ausgleichung, von welchem die behandelten Ungleichheiten abhängen, im einen Falle grösser sein kann als im andern.

Die Konjunktionen von Erde und Mars erfolgen während mehrerer Umläufe in einem ganz bestimmten Punkte und seiner nächsten Umgebung; die von Venus und Mars treten in zwei entgegengesetzt liegenden Punkten und deren nächster Umgebung ein, weil jede nächste Konjunktion stattfindet, wenn Mars eine halbe, und Venus daher eine und eine halbe Revolution beschrieben hat. Die Konjunktionen endlich von Jupiter und Saturn geschehen, wie wir von früher wissen, in drei Punkten, die von Venus und Erde in fünf Punkten.**)

---

*) Die Umlaufszeiten von Merkur und Erde verhalten sich nahezu wie 1 : 4, sodass Merkur 4 Umläufe macht, wenn die Erde einen ausführt. Beschreibt die Erde 1°, so Merkur deren 4, oder für 1°, den die Erde durchläuft, kommt Merkur um 3° voraus (die Bahnen kreisförmig vorausgesetzt); letzterer wird daher um 360° voraus sein, wenn die Erde 120° beschrieben hat; beide werden dann wieder in Konjunktion stehen, wenn dies vorher der Fall war, da von einer solchen Konjunktion aus gerechnet die nächste erfolgt, wenn der eine 360° voraus ist. Erfolgt eine Konjunktion in $E_1 M_1$ (Fig. 59), so wird die nächste stattfinden, wenn Merkur 360° voraus ist, also 120° von $E_1 M_1$ entfernt in $E_2 M_2$. Die folgenden sodann in $E_3 M_3$, wieder 120° von der vorigen weg liegend. Beide Körper stehen demnach an 3 bestimmten Punkten in Konjunktion. Allein das Verhältnis 4 : 1 ist nicht genau, die Umlaufszeiten verhalten sich vielmehr wie $365_{,256} : 87_{,969}$. Die Division ergiebt nahezu $4_{,15}$ sodass sich die Zeiten wie 415 : 100 oder wie 83 : 20 verhalten. Macht die Erde 20°, so beschreibt Merkur 83°, oder er kommt um 63° voraus; um 360° wird er voraus sein, wenn die Erde $\frac{360 \cdot 20}{63} = 114_{,3}{}^\circ$ (abgerundet) beschrieben hat. Findet die erste Konjunktion also in $E_1 M_1$ statt, so wird die zweite $114_{,3}{}^\circ$ davon entfernt in $e_2 m_2$, also $5_{,7}{}^\circ$ vor $E_2 M_2$ erfolgen, die dritte um $114_{,3}{}^\circ$ von $e_2 m_2$ in $e_3 m_3$ und zwar $2 \cdot 5_{,7}{}^\circ$ vor $E_3 M_3$; die nächste $3 \cdot 5_{,7}{}^\circ$ vor $E_1 M_1$. Von $E_1 M_1$ bis $e_2 m_2$ sind es $114_{,3}{}^\circ$ und da $e_4 m_4$ um $3 \cdot 5_{,7}{}^\circ$ vor $E_1 M_1$ liegt, so wird die folgende Konjunktion auch $3 \cdot 5_{,7}{}^\circ$ vor $e_2 m_2$ liegen, die nun folgende $3 \cdot 5_{,7}{}^\circ$ vor $e_3 m_3$ u. s. f.; kurz die jetzt folgenden Konjunktionen werden um $3 \cdot 5_{,7}{}^\circ$ verschoben sein gegen die vorherigen. Die Konjunktionen werden wieder in der früheren Folge: $e_2 m_2$, $e_3 m_3$ u. s. w. erfolgen, wenn die Punkte $e_2 m_2$, $e_5 m_5$ u. s. f. bis $E_1 M_1$ zurückgegangen sind. Nun ist es von $e_2 m_2$ bis $e_5 m_5$ $3 \cdot 5_{,7}{}^\circ$, um welche die Punkte nach je 3 Konjunktionen zurückgehen; da es von $e_2 m_2$ bis $E_1 M_1$ aber $114_{,3}{}^\circ$ sind, so werden zu dem Zurückgehen von $e_2 m_2$ bis $E_1 M_1$ sovielmal 3 Konjunktionen gehören, wievielmal $3 \cdot 5_{,7}{}^\circ$ enthalten sind in $114_{,3}{}^\circ$. Es ist $\frac{114_{,3}}{3 \cdot 5_{,7}} = 6{,}68$ oder abgerundet 7; nach nahezu 7mal 3 Konjunktionen werden die letzteren in derselben Reihenfolge wie ursprünglich stattfinden, von $e_2 m_2$ aus gerechnet, oder, da $e_2 m_2$ selbst die erste Konjunktion von $E_1 M_1$ aus ist, nach 22 Konjunktionen von $E_1 M_1$ aus. Von einer Konjunktion bis zur folgenden legt die Erde $114_{,3}{}^\circ$ zurück, nach 22 Konjunktionen somit $114_{,3} \cdot 22 = 2514_{,6}{}^\circ$. Da zu einem Umlaufe 360° gehören, so macht dies $\frac{2514_{,6}}{360.} = 7$ Umläufe (nahezu), sodass die Konjunktionen in derselben Reihenfolge stattfinden werden nach etwa 7 Umläufen der Erde oder nach beinahe 7 Jahren.

**) Dass die Konjunktionen von Venus und Erde in 5 Punkten erfolgen, lässt sich auf folgendem Wege zeigen. Stehen beide (Fig. 60) in $B_1 C_1$ in Konjunktion, so wird die nächste stattfinden, wenn die Venus 360° voraus ist. Nun verhalten sich die Umlaufszeiten nahezu wie 8 : 13; macht also die Erde 8°, so die Venus

Im ersten dieser Beispiele hat — eben weil der Ort der Konjunktion immer nahezu an einer und derselben Stelle ist, und wir nur die Wirkung in Konjunktion, als die überwiegende, betrachten — die ganze Wirkung, die durch die Änderung eines Punktes der Konjunktion entsteht, auf die Dimensionen der Bahn Einfluss, während im zweiten nur der Unterschied zweier Wirkungen, im dritten die Mischung dreier Effekte, von denen einer den andern zu beeinflussen sucht, und schliesslich im vierten Beispiele eine Mischung von fünf Effekten da ist und die Dimensionen der Bahn beeinflusst. Je kleiner nun die Zahl dieser Effekte ist, d. h. je kleiner die Zahl der Punkte der Konjunktionen ist, desto günstiger sind, vorausgesetzt, dass für die Ungleichheiten gleich lange Perioden angenommen werden, die Umstände zum Entstehen einer grossen Ungleichheit. Die Zahl dieser Punkte ist immer gleich dem Unterschiede zwischen denjenigen zwei kleinsten Zahlen, welche das Verhältnis der Umlaufszeiten genähert ausdrücken. Es wird daher eine grosse Ungleichheit auftreten, wenn die Umlaufszeiten zweier Planeten beinahe in demselben Verhältnisse stehen, wie zwei sehr wenig voneinander verschiedene Zahlen.

Die säkularen Variationen der Elemente der Planetenbahnen.

179) Wir gehen nun über zu den **säkularen** Variationen der Elemente der Planetenbahnen. Darunter versteht man diejenigen Variationen, welche nicht von der Stellung der Planeten in ihren Bahnen, auch nicht von den Orten der Konjunktion, sondern nur von den gegenseitigen Entfernungen und Excentricitäten der Bahnen und den Stellungen ihrer Apsidenlinien abhängen. Es sind dies demnach die Variationen, welche von der mittleren oder durchschnittlichen Wirkung eines Planeten auf den andern, wie sie für den Verlauf langer Zeiträume gilt, herrühren. Alle merklichen Abweichungen von der säkularen Variation (welche selbst von der mittleren Wirkung herrührt), welche durch die Unregelmässigkeit der Einwirkungen der Planeten aufeinander entstehen, werden als in den vorher schon behandelten Ungleichheiten enthalten vorausgesetzt.

A. Über die säkulare Variation der mittleren Entfernung.

180) Die gegenseitige Einwirkung der Planeten ändert im Laufe der Zeiten die mittlere Entfernung nicht.

Sehen wir nun zuerst nach, ob sich die mittlere Entfernung der Planeten im Laufe der Zeiten ändert, und betrachten wir zu diesem Zwecke einen äusseren Planeten, der einen inneren stört, wie Saturn den Jupiter.

Welches wird der Erfolg der im Radius Vektor liegenden störenden Kraft im Laufe der Zeit sein?

Nach 77 u. f. ist diese Kraft manchmal von der Sonne weg, manchmal zu ihr hin gerichtet, aber die erste Wirkung ist, wie schon mehreremal erwähnt, die grössere (80) und überwiegt, sodass wir im ganzen die störende Kraft als eine die Anziehung der Sonne vermindernde ansehen können. Dies ändert nach 46 das Verhältnis zwischen der Umlaufszeit und der mittleren Entfernung, sodass die letztere kleiner ist, als sie ohne Störung bei derselben Umlaufszeit gewesen wäre.

Betrachten wir einen inneren Planeten, der einen äusseren stört, wie Jupiter den Saturn, so ist die nach der Sonne hin gerichtete störende Kraft die über-

13°, oder wenn die Erde um 8° fortrückt, kommt die Venus 5° voraus. Um 360° wird sie dann voraus sein, wenn die Erde $\frac{360 \cdot 8}{5} = 72 \cdot 8 = 576°$ beschrieben oder einen Umlauf und noch $216° = 3 \cdot 72°$ gemacht hat; dann wird also die nächste Konjunktion etwa in $B_2\,C_2$ sein. Die nun folgende tritt ein in $B_3\,C_3$ wieder um $3 \cdot 72°$ von $B_2\,C_2$ oder um 72° von $B_1\,C_1$ entfernt; die spätere in $B_4\,C_4$, von $B_3\,C_3$ um $3 \cdot 72°$ oder von $B_2\,C_2$ um 72° weg; die fünfte in $B_5\,C_5$ und zwar $3 \cdot 72°$ von $B_4\,C_4$, oder $2 \cdot 72°$ von $B_1\,C_1$, oder 72° von $B_3\,C_3$, ab. Die nun folgende sechste wird $3 \cdot 72°$ von $B_5\,C_5$, d. i. wieder in $B_1\,C_1$ erfolgen. In der That also fallen die Konjunktionen auf 5 verschiedene Punkte. Diese Punkte werden sich freilich ändern, wenn das Verhältnis 8 : 13 nicht genau ist, aber die Konjunktionen werden doch in der Nähe dieser Punkte erfolgen.

wiegende (86), und demnach die mittlere Entfernung grösser, als sie bei derselben Umlaufszeit ohne Störung gewesen wäre; wir können die störende Kraft als eine die Anziehung der Sonne vergrössernde ansehen.

Wir wissen nun aus 46, dass, so lange als diese allgemeinen Wirkungen der durch die Sonne gehenden Kraft unverändert fortdauern, sich die mittleren Entfernungen nicht ändern werden. (Es ist ja so gut, als wäre eine andere Sonnenanziehung, aber doch eine solche von immer gleicher Stärke da.) Sehen wir nach, ob dies hier erfüllt ist.

Nehmen wir einen sehr langen Zeitraum, von etwa einigen Jahrtausenden an und teilen wir ihn in zwei oder drei Teile oder Perioden, so werden die zwei Planeten in jedem dieser langen Zeitabschnitte auf allen Stellen ihrer Bahnen in Konjunktion gestanden und jede mögliche relative Lage gehabt haben.

Denkt man sich, der störende Körper führe einen Umlauf aus und der gestörte sei fest an einer bestimmten Stelle, so wäre die gesamte Störung also eine Verminderung der Anziehung der Sonne im einen (für den inneren Planeten), eine Vermehrung derselben im anderen Falle (für den äusseren Planeten). Diese Verminderung oder Vermehrung bleibt unverändert dieselbe, wenn der störende einen Umlauf ausführt und der gestörte an derselben bestimmten Stelle bleibt.

Die Planeten werden nun, wie gesagt, in langer Zeit, also in jeder der Perioden, alle möglichen relativen Lagen gehabt haben. Ist z. B. der eine (der gestörte) wieder und wieder an dieselbe Stelle gekommen, so wird der andere (störende) eine immer andere Stelle und so jeden möglichen Ort seiner Bahn innegehabt und in jedem mit anderer Stärke auf den ersten gewirkt haben, im Durchschnitt aber eben mit solcher Kraft, die das Mittel ist aus allen den Kräften, die er von jeder einzelnen Stelle seiner Bahn aus auf jene bestimmte Stelle der ersten Bahn ausübt. (Diese Kraft ist also zugleich das Mittel aus allen den Kräften, die der störende Planet, wenn er einen Umlauf ausführt, ausübt auf den dabei immer an derselben Stelle stehenden gestörten Planeten.) Dieses Mittel ist für jede der Perioden dasselbe (d. h. in jeder der Perioden ist die mittlere Wirkung, die der störende auf jede bestimmte Stellung des gestörten Körpers ausübt, die gleiche), somit auch die Verminderung oder Vermehrung der Sonnenanziehung dieselbe.

Die mittlere Wirkung des einen Planeten auf den andern ist also für jede bestimmte Stelle der Bahn des gestörten in jeder Periode dieselbe; somit wird auch, da die Gesamtwirkung der störenden Kraft immer eine Verminderung oder Vermehrung der Sonnenanziehung ist, diese Verminderung oder Vermehrung bei jeder Periode dieselbe sein oder es wird so sein, als wäre in jeder Periode die Sonnenanziehung — wenn sie auch grösser oder kleiner wäre ohne Störung — dieselbe. Der gestörte Planet wird daher im ganzen in jeder Periode eine Bahn von konstanter Grösse und Gestalt beschreiben, oder die mittlere Entfernung wird sich nicht ändern.

181) Betrachten wir jetzt die Wirkungen der Kraft senkrecht zum Radius Vektor; hinsichtlich dieser Kraft liegt die Sache anders als vorher. Vorher, von der im Radius liegenden Kraft, konnte man sagen, dass die mittlere Distanz nicht geändert werde, so lange die Kraft im Radius Vektor unverändert fortdauere. Jetzt dagegen genügt die blosse Existenz einer solchen Kraft senkrecht zum Radius Vektor, ohne Variation derselben, um eine Änderung der mittleren Entfernung hervorzubringen (48).*) Wir müssen daher notwendig zeigen, dass die Natur und die Variationen der Kraft solche sind, dass im Laufe der Zeiten die Geschwindigkeit des gestörten Planeten durch sie nicht geändert wird.

Zu diesem Zwecke wollen wir nicht die Kraft senkrecht zum Radius Vektor allein betrachten, sondern die ganze Kraft, welche der Planet auf die Sonne, und die ganze Kraft, welche er auf den gestörten Körper ausübt.

*) Eine solche Kraft, wenn sie auch konstant wirkte, würde beständig die Dimensionen der Bahn — die mittlere Entfernung — ändern; so würde eine beschleunigende Kraft die Bahn erweitern, eine verzögernde sie verengen.

Die Kraft nun, welche er auf die Sonne ausübt, sucht die Sonne nacheinander in allen möglichen Richtungen fortzuziehen und bringt daher im ganzen keine dauernde Ortsveränderung der Sonne hervor, kann also gleich vernachlässigt werden.

Die Kraft, welche ein Planet auf den andern ausübt, hat gewirkt, während — für irgend eine beliebige Stellung des störenden Planeten — der gestörte in jedem Punkte seiner Bahn war. Die ganze Beschleunigung während einer langen Zeit ist gleich der Summe aller einzelnen Beschleunigungen vermindert um die Summe aller Verzögerungen in dieser Zeit; teilen wir nun in Gruppen, bringen wir z. B. in eine Gruppe alle Beschleunigungen und Verzögerungen, die bei einer gewissen Stellung des störenden Körpers überhaupt auftreten können. Hat dieser Körper in sehr langer Zeit dieselbe Stelle oft genug eingenommen, so wird der gestörte an allen möglichen Orten seiner Bahn gewesen sein; in eine Gruppe sollen also jetzt alle die Beschleunigungen und Verzögerungen kommen, die in dieser Zeit der gestörte Körper erfährt. Diese Bewegungsänderungen einer solchen Gruppe sind aber ja ganz dieselben wie die, welche auftreten werden, sobald man den störenden Körper fest und den gestörten einen ganzen Umlauf ausführend denkt, also wie die, welche vorkommen, wenn der gestörte von einem Orte seiner Bahn bis wieder zu demselben kommt und der störende fest ist. Nun sagt aber ein Satz der Mechanik: „Bewegt sich ein Körper in einer Kurve, und ist er der Anziehung eines festen Körpers unterworfen, so ist seine Geschwindigkeit, sobald er den Punkt erreicht, von dem er ausging, genau dieselbe, wie am Anfangspunkte, indem sich Beschleunigung und Verzögerungen genau das Gleichgewicht halten.“ Demnach heben sich alle Beschleunigungen und Verzögerungen einer Gruppe auf. Dasselbe gilt von jeder Gruppe. In langer Zeit treten alle möglichen relativen Stellungen auf; also werden wir in dieser alle Gruppen erhalten, in denen der störende Körper an bestimmter, aber in jeder Gruppe anderer Stelle, der gestörte an allen Stellen seiner Bahn zu denken ist. Es werden sich also überhaupt alle Beschleunigungen und Verzögerungen aufheben, und die Geschwindigkeit wird sich im ganzen nicht ändern. Da sich nun im Laufe der Zeiten des Planeten Geschwindigkeit nicht ändert, und da nach 180 die durch die Sonne gehende, im Radius Vektor liegende Kraft dieselbe bleibt, so wird auch die mittlere Entfernung des Planeten sich nicht ändern.

Natürlich ist dabei nicht ausgeschlossen, dass die Geschwindigkeit an besonderen Orten der Bahn zu- oder abnimmt, sodass die Excentricität und die Apsidenlinie sich ändern können, aber das gefundene Resultat zeigt, dass, wenn auf einer Seite eine Zunahme erfolgt, auf der andern eine Abnahme eintritt, die jene aufhebt; es zeigt weiter, dass die Geschwindigkeit in dem Punkte nicht geändert wird, in welchem sich die Bahn beim Beginne einer langen Periode und die Bahn am Ende derselben schneiden, welcher Punkt beinahe in der mittleren Entfernung sich befindet. In unserem Beweise haben wir freilich vorausgesetzt, dass die Kurventeile, welche in verschiedenen Umläufen bei einer und derselben Stellung des störenden Planeten beschrieben werden, Teile einer und derselben Bahn sind; wir haben also nicht Rücksicht genommen auf die Änderung der Grösse der störenden Kraft, die aus der Änderung des Ortes, welche diese Kraft bewirkt, hervorgeht. Bis zu einem gewissen Grade haben einige Mathematiker dies in Rechnung gebracht, und es zeigte sich dabei, soweit als sie eingingen, dass dadurch keine Änderung in unserem gefundenen Resultate herbeigeführt wird.

B. Die säkulare Variation des Perihels oder der Lage der Apsidenlinie.

182) Die gegenseitige Einwirkung zweier Planeten erzeugt im Laufe der Zeiten ein Vorschreiten der Apsidenlinie, ausser wenn die Bahn des störenden Planeten sehr excentrisch ist, und die Orte ihrer Perihelien nahe zusammenfallen.

Untersuchen wir nun an zweiter Stelle, ob sich der Ort des Perihels oder die Lage der Apsidenlinie ändert. Die Bewegung der letzteren hängt wesentlich von der Excentricität der Bahn des störenden Körpers ab. Nehmen wir z. B. die

Bahn der Venus elliptisch, die der Erde kreisförmig an (Fig. 61), so wird, da die Entfernung dieser Planeten voneinander in Konjunktion wenig mehr als $\frac{1}{4}$ der Entfernung der Erde von der Sonne beträgt, die Venus in ihrem Aphel, wegen der Ellipticität ihrer Bahn, der Erdbahn so nahe gebracht, dass bei weitem die grösste Wirkung auftreten wird, wenn beide hier in Konjunktion kommen. (Denn da die Planeten sich überhaupt nahe sind, so wird eine geringe Annäherung schon, wie sie im Aphel der Venusbahn da ist, gross sein im Vergleich zur Entfernung der Planeten voneinander, also auch eine grosse Änderung in der Einwirkung der Planeten aufeinander statthaben.) Diese überwiegende Kraft im Aphel der Venusbahn ist von der Sonne fort gerichtet und erteilt nach 54 der Apsidenlinie der Venusbahn eine vorschreitende Bewegung.

Ist aber die Erdbahn elliptischer als die Venusbahn, wie es thatsächlich der Fall ist, und liegen die Perihelien beider Bahnen auf derselben Seite der Sonne (Fig. 62), so kann die Hauptwirkung im Perihel stattfinden. Dann würde nach 51 die Apsidenlinie sich rückwärts bewegen.

Diese Wirkungen werden fortbestehen, solange die relative Lage der Apsidenlinien und das Verhältnis der Excentricitäten nahezu dieselben bleiben. Da im Laufe der Zeiten überall Konjunktionen stattfinden werden, so wird die überwiegende Gesamtwirkung der grössten (in Konjunktion) ähnlich, und folglich die säkulare Bewegung der Apsidenlinie konstant sein (im Sinne der grössten Wirkung), bis die Lagen der Apsidenlinien und das Verhältnis der Excentricitäten sich bedeutend geändert haben; die Grösse und Richtung der Apsidenlinie wird von den Excentricitäten der Bahnen beider Körper abhängen.

Ist aber der gestörte Planet ein innerer, und ist die Bahn des andern nicht excentrisch, so wird die Apsidenlinie vorschreiten (54), weil dann, wie wir eingangs sahen, die Wirkung im Aphel überwiegt. Dasselbe gilt, wenn der gestörte Körper ein äusserer ist, indem dann die grösste Wirkung im Perihel eintritt, — falls die innere Bahn nicht excentrisch ist — und nach der Sonne hin gerichtet ist (50).

C. Die säkulare Variation der Excentricität.

183) Die Excentricität der Bahn des störenden Planeten verursacht eine Zu- oder Abnahme der Excentricität der Bahn des gestörten Planeten, je nach der relativen Lage der Apsidenlinien.

Wenden wir uns drittens der Excentricität zu. Ist die Bahn des störenden Körpers kreisförmig, so wird die Wirkung auf die Excentricität, welche hervorgebracht wird, wenn die Konjunktion an dem Orte stattfindet, wo die Bahnen einander am nächsten sind, sowohl hinsichtlich der im Radius Vektor liegenden, als der darauf senkrecht stehenden Kraft, vor der Konjunktion von gerade entgegengesetzter Art sein wie nach derselben. Die Excentricität wird deshalb in diesem Falle nicht geändert werden (58, 59, 68). Z. B.: „In Fig. 61 sei V die Venus, E die Erde. Vor der Konjunktion wird V hinter E_1 zurück sein, in V_1, da V sich schneller bewegt; V_1 wird durch E_1 beschleunigt. Nach der Konjunktion ist V voraus, etwa in V_2, und wird verzögert. Die Kraft im Radius Vektor ist beide Male von A fort gerichtet. Durch letztere Kraft wird die Excentricität von V_1 bis V vergrössert, von V bis V_2 um ebensoviel verkleinert (59). Die Kraft senkrecht zum Radius Vektor vergrössert die Excentricität von V bis V_2, verkleinert sie um dasselbe von V_1 bis V (68)."

Dasselbe wird gelten, wenn beide Bahnen excentrisch sind, vorausgesetzt nur, dass ihre Apsidenlinien zusammenfallen (Fig. 62).

Man sieht also, dass die Excentricität sich nur ändern wird, wenn die Bahn des störenden Körpers excentrisch ist, und seine Apsidenlinie nicht mit der des gestörten zusammenfällt.

Denken wir uns die letzten Bedingungen erfüllt, wie es thatsächlich bei jeder Planetenbahn der Fall ist, so kann man einen allgemeinen Begriff erlangen von der eintretenden Wirkung, indem man den Ort aufsucht, an welchem sich die Bahnen am nächsten sind, und die Wirkungen untersucht, welche die Kräfte vor und nach der an dieser Stelle erfolgenden Konjunktion hervorrufen; denn die überwiegende Einwirkung geschieht ja dann, wenn die Konjunktion an den sich am nächsten liegenden Orten stattfindet, und die Gesamtwirkung ist der grössten ähnlich.

Betrachten wir die Störung, die ein innerer Planet erfährt. Die Konjunktion erfolge also an den Punkten der Bahn, die den kleinsten Abstand voneinander haben. Kommt an dieser Stelle der innere Planet vom Perihel, so nimmt die Excentricität zu, da die störende Kraft ihn von der Sonne weg zieht; geht er nach dem Perihel, so treibt ihn dieselbe Kraft wieder von der Sonne fort und die Excentricität wird folglich abnehmen.

Für den äusseren Planeten ist die Kraft vor und nach der Konjunktion nach der Sonne hin gerichtet, und es gilt daher für ihn gerade das Umgekehrte wie für den inneren. Die Kraft senkrecht zum Radius Vektor bringt für beide Planeten im ganzen keine Wirkung hervor (68).

Diese Wirkungen sind konstant, bis die Excentricitäten und Lagen der Apsidenlinien sich merklich geändert haben.

Der Ort, an welchem zur Zeit der Konjunktion die Wirkung auf die Excentricität am grössten ist, ist streng genommen nicht der Ort, wo die Bahnen einander am nächsten sind, sondern er liegt nur in dessen Nähe.

Sind die beiden Planeten an dem Orte, wo sich die Bahnen am nächsten kommen, so bewegen sich im allgemeinen beide vom Perihel fort oder beide zu demselben hin, sodass die eine Excentricität zunimmt, wenn die andere kleiner wird (da die störende Kraft für den einen nach der Sonne hin, für den andern von ihr fort gerichtet ist).

184) Für die allgemeine Stabilität des Planetensystems sind die Lagen der Apsidenlinien nicht von Wichtigkeit, wohl aber ist von Bedeutung das Gleichbleiben der grossen Achsen und der Excentricitäten.

Wir haben in 181 gezeigt, dass durch die störende Einwirkung eines einzigen Planeten eine säkulare Variation der grossen Achse nicht erzeugt wird. Da dasselbe nun auch für die Störungen gilt, welche mehrere Planeten hervorbringen, so können wir behaupten, dass die grossen Achsen der Planetenbahnen überhaupt keiner säkularen Variation unterworfen sind.

Die Excentricitäten erleiden allerdings eine säkulare Variation, aber auch diese verbessert sich selbst in hinreichend grossem Zeitraume. Führt man die Untersuchung vollständig durch, so findet man nämlich, dass jede Excentricität durch eine Anzahl von periodischen Gliedern ausgedrückt wird, deren Perioden Jahrtausende umfassen. So hat sich die grosse Achse der Erdbahn, trotz ihrer häufigen kleinen Variationen, in vielen Jahrtausenden nicht merklich geändert, und wird sich auch nicht ändern; und was die Excentricität der Erdbahn betrifft, so hat diese zwar viel kleine Variationen erfahren, ist deshalb seit mehreren Jahrtausenden beständig kleiner geworden, und wird auch ferner noch Jahrtausende hindurch abnehmen, wird aber dann auch wieder zunehmen.

185) Ein merkwürdiger Zusammenhang zwischen den Variationen der Excentricitäten aller Planeten.

Ein einfaches Beispiel über merkwürdige Beziehungen zwischen den Excentricitäten zweier Planeten ist am Schlusse von 183 angegeben worden. Für die Variationen der Excentricitäten aller Planeten gilt aber ein anderer merkwürdiger Satz, der sich auf die Grösse der Excentricitäten zu irgend einer bestimmten Zeit bezieht; derselbe heisst:

„Die Summe der Produkte aus dem Quadrate jeder Excentricität, aus der Masse des Planeten und der Quadratwurzel aus der grossen Achse ist stets dieselbe.“

VIII. Abschnitt.

Störung der Neigung und der Lage der Knoten.

186) Wir sind bisher so verfahren, als bewegten sich Sonne, Mond und Planeten in derselben Ebene, als wäre z. B. die Sonne im Mittelpunkte einer Tafel befestigt, und als bewegten sich alle Planeten mit ihren Satelliten in dieser Ebene. Allein diese Voraussetzung ist nicht richtig. Nehmen wir an, die Erde bewege sich in dieser Tafel, so wird die eine Hälfte der Mondbahn oberhalb, die andere unterhalb der Tafel liegen; sie wird daher die letztere in zwei Punkten schneiden, welche, von der Erde aus gesehen, gerade entgegengesetzt liegen. Ebenso wird die eine Hälfte der Venusbahn über, die andere unterhalb der Tafel liegen und wird die letztere in zwei Punkten schneiden, welche in Bezug auf die Sonne genau entgegengesetzt liegen; überhaupt wird für jeden der Planeten und Satelliten die eine Hälfte seiner Bahn auf der einen, die andere auf der andern Seite der Tafel liegen, und jede solche Bahn wird die letztere in zwei solchen Punkten schneiden, welche in Bezug auf den Centralkörper gerade entgegengesetzt liegen. Bei manchen Untersuchungen ist es nötig, die Neigung der Ebene der Bahn gegen verschiedene solche Tafeln oder Grundebenen zu betrachten. Die Linie, in welcher die Bahn die Grundebene durchschneidet, heisst die Knotenlinie der Bahn in dieser Ebene, und der Winkel, welchen die Bahnebene mit der Grundebene bildet, wird die Neigung der Bahn gegen diese Ebene genannt. Die Grundebene muss immer so angenommen werden, dass sie durch den Centralkörper geht.

187) Die Neigungen aller Bahnen, ausgenommen die der kleinen Planeten, sind so gering (ist ja die zweitgrösste, nämlich die der Mondbahn gegen die Erdbahn, im Mittel nur 5^{0}; die der Merkurbahn ist 7^{0}), dass man sie bei der Bestimmung der Störungen der Planeten untereinander im allgemeinen ganz vernachlässigen darf. In einigen Fällen freilich, wie bei den Ungleichheiten von langer Periode, wo die eigentlich wirksame Kraft nur der kleine Rest ist, der nach einer mehr oder weniger vollständigen Ausgleichung übrigbleibt, darf keine Änderung der Kräfte vernachlässigt werden; hier muss dann auch, wie wir in 171 schon andeuteten, die Änderung der Kräfte, welche durch die Neigung der Bahn entsteht, in Rechnung gezogen werden.

188) Obgleich aber die Änderung, welche die Neigung in denjenigen Kräften erzeugt, welche den Planeten **in** der Ebene seiner Bahn zu stören suchen, in den meisten Fällen vernachlässigt werden darf, so darf man doch keinesfalls die Kraft unberücksichtigt lassen, welche den Körper über oder unter die Ebene seiner Bahn zu ziehen sucht. Es ist diese letztere Kraft zwar immer kleiner als die in der Ebene der Bahn wirkende Störung, aber sie ist doch viel grösser als die Änderung, welche die Neigung in der in der Bahnebene wirkenden störenden Kraft hervorbringt. Wir wollen nun in dem vorliegenden Abschnitte die Wirkungen untersuchen, die von den Kräften erzeugt werden, welche bestrebt sind, den Körper aus der Ebene seiner Bahn herauszuziehen.

A. Allgemeine Sätze über die Änderungen des Knotens und der Neigung durch Kräfte, die zur Ebene der Bahn des gestörten Körpers senkrecht stehen, und über die zur Ebene der Bahn senkrechte Störung, welche ein Himmelskörper auf den andern ausübt.

189) Eine Kraft, welche den sich bewegenden Körper gegen eine Grundebene hinzieht, ehe er den grössten Abstand über oder unter dieser Ebene erreicht hat, verursacht ein Rückschreiten der Knotenlinie und eine Abnahme der Neigung.

Betrachten wir zuerst die Wirkungen einer Kraft, die senkrecht zur Ebene der Bahn wirkt; eine Kraft, die in der Ebene der Bahn wirkt, wird natürlich keine Änderung in der Lage derselben hervorbringen. Es sei Fig. 63 eine perspektivische

Darstellung einer Bahn und einer Grundebene; es sei ferner MAN die Knotenlinie, in welcher die Bahn NB_1B_2 die Grundebene schneidet, und in welcher der Centralkörper A liegt. Der ausgezogene Teil der Bahn liege über, der punktierte unter der Grundebene. Gesetzt, der Planet bewegt sich von N nach B_1, und ehe er den höchsten Punkt über der Ebene DE erreicht, etwa in B_1, ziehe ihn eine Kraft abwärts nach der Grundebene hin. Nach einer kurzen Zeit würde der Körper ohne die störende Kraft das Stück B_1B_2 beschrieben haben, allein infolge der Störung wird er in derselben Zeit etwa das Stück B_1b_2 zurücklegen*). Offenbar könnte die Bahn, in welcher er ohne störende Kraft den Weg B_1b_2 gemacht hätte, nicht mehr NB_1, sondern müsste eine Kurve sein wie etwa nB_1, welche die Ebene DE in n schneidet. Wirkt nun keine störende Kraft weiter ein, so wird der Planet, der das Stück B_1b_2 so beschrieben hat, als käme er ohne Störung von n, nun auch weiterhin eine Bahn beschreiben, als wäre er ohne Störung von n gekommen, d. h. er wird sich in einer Bahn nb_2m bewegen, welche die Ebene DE in den Punkten n und m durchschneidet. Die Knotenlinie MAN ist auf diese Weise übergegangen in mAn.

190) Die Knotenlinie hat sich also in einer Richtung bewegt, die der Bewegungsrichtung des Planeten entgegengesetzt ist, oder sie ist zurückgegangen. Die Neigung der neuen Bahnebene ist augenscheinlich kleiner als die der alten, da sie durch denselben Punkt B_1 geht, und die Grundebene in einer Linie schneidet, welche von B_1 um B_1n, also weiter entfernt ist, als die Linie war, in welcher die alte Bahn DE schnitt, die den Abstand B_1N von B_1 hatte. Wir finden somit:

Die Knotenlinie ist zurückgegangen, die Neigung hat abgenommen.

191) Wirkt eine ähnliche Kraft ein, nachdem der Körper die grösste Entfernung von der Grundebene passiert hat, so verursacht dieselbe ein Rückschreiten der Knotenlinie und eine Zunahme der Neigung.

Der Planet habe den höchsten Punkt über der Grundebene passiert, und es ziehe ihn in B_3 (Fig. 64) eine Kraft nach DE hin, so wird der Planet anstatt nach B_4 nach b_4 gehen, und die Ebene DE nicht in M, sondern in m schneiden. Wird er nicht weiter gestört, so wird er folglich fortan in einer Bahn sich bewegen, von der $B_3\,b_4$ m ein Teil ist, und welche die Ebene DE in den Punkten m und n schneidet.

Die neue Knotenlinie ist also zurückgegangen im Vergleich zur alten, die Neigung ist grösser geworden.

192) Wir haben demnach das folgende allgemeine Resultat:

Eine Kraft, welche senkrecht zur Ebene der Bahn nach der Grundebene hin wirkt, verursacht stets ein Rückschreiten der Knotenlinie; sie verkleinert die Neigung, während sich der Planet von einem Knoten nach dem am höchsten über der Grundebene liegenden Punkte hin bewegt, und vergrössert sie, während er vom höchsten Punkte nach einem Knoten zu geht.

193) Ganz auf dem bisherigen Wege findet man das Folgende:

Wirkt eine Kraft senkrecht zur Bahnebene, und zwar von der Grundebene fort gerichtet, so bewegt sich die Knotenlinie vorwärts; die Neigung nimmt zu, wenn der Planet von einem Knoten nach dem höchsten Punkte geht, und nimmt ab, wenn er vom höchsten Punkte nach einem Knoten zu läuft.

194) Ähnliche Resultate erhält man, wenn man die Wirkungen dieser Kräfte untersucht, während der Planet sich unter der Grundebene DE befindet. Eine nach letzterer hin gerichtete Kraft verursacht ein Rückschreiten der Knoten und eine Abnahme der Neigung, wenn der Planet nach dem tiefsten Punkte zu geht, und ein Rückschreiten der Knotenlinie, aber eine Zunahme der Neigung, wenn der Planet vom tiefsten Punkte fort geht; das Umgekehrte gilt, wenn die Kraft von der Grundebene fort gerichtet ist. Im folgenden wollen wir diejenige zur Ebene der Bahn senkrecht stehende Kraft betrachten, welche von der Anziehung eines störenden Körpers herrührt.

---

*) B_1b_2 ist Diagonale des Parallelogramms aus B_1B_2 und der Störung.

195) *Wenn Centralkörper und umlaufender Körper gleich weit vom störenden entfernt sind, so giebt es keine zur Ebene der Bahn senkrechte Störung. Es ist eine nach dem störenden Körper hin oder von ihm fort gerichtete störende Kraft vorhanden, wenn der umlaufende Körper dem störenden näher ist oder weiter von ihm absteht als der Centralkörper.*

Steht der störende Körper in der Ebene der Bahn, so wird er weder den Centralkörper noch den Planeten aus dieser Ebene zu entfernen suchen, es wird also keine störende Kraft senkrecht zur Bahnebene geben. Nehmen wir nun an, *der störende Körper C stehe ausserhalb der Ebene der Bahn* (Fig. 65), die wir der Einfachheit halber stets als eine kreisförmige ansehen wollen. Von den 3 Punkten B_1, B_2, B_3 der Bahn sei B_1 von C ebensoweit entfernt als A, B_2 liege näher an C, B_3 weiter von C als A. Die Anziehung von C bringe in einer gewissen kleinen Zeit den Körper A von A nach a, und den Planeten, wenn er in B_1, B_2, B_3 ist, in derselben Zeit nach b_1, b_2, b_3. Nach 71 würde dann die Anziehung von C auf die zwei Körper A und B keine Störung in ihren relativen Bewegungen hervorbringen, wenn sie dieselben um gleiche Strecken in derselben Richtung fortzöge. Man ziehe nun B_1d_1, B_2d_2, B_3d_3 jedes gleich und parallel zu Aa; hätte dann die Anziehung B_1 nach d_1 gezogen, so gäbe es keine Störung. Da aber B_1 in Wirklichkeit in b_1 ist, so ist die wirkliche Störung dargestellt durch eine Kraft, die den Planeten von d_1 nach b_1 bewegen kann. Ebenso sind die wirklichen Störungen in B_2 und B_3 durch Kräfte dargestellt, welche den Planeten von d_2 nach b_2, und von d_3 nach b_3 bewegen können. Da nun $CA = CB_1$, angenommen worden ist, so sind die Kräfte von C auf A und B_1, und deshalb auch die Stücke, um welche A und B_1 fortgezogen werden, einander gleich, d. h. $B_1b_1 = Aa$. Hieraus folgt, dass ab_1 parallel AB_1 ist (weil Dreieck AB_1C gleichschenklig ist, und ab_1 von den gleichen Schenkeln AC und B_1C gleiche Stücke aA, b_1B_1 abschneidet), und dass b_1d_1 mit ab_1 in einer Geraden liegt. (Es geht B_1d_1 durch den Punkt B_1 der Ebene AB_1C und ist parallel Aa; daher liegt B_1d_1 und somit auch d_1b_1 in der Ebene AB_1C. Die Dreiecke aCb_1, $b_1d_1B_1$ sind gleichschenklig, da $aC = b_1C$ und $d_1B_1 = b_1B_1$; ihre Winkel an der Spitze sind gleich: $\sphericalangle d_1B_1b_1 = \sphericalangle ACb_1$ als Wechselwinkel an Parallelen, somit sind auch ihre Basiswinkel gleich: $\sphericalangle d_1b_1B_1 = \sphericalangle ab_1C$, was nur möglich ist, wenn ab_1 und b_1d_1 in einer Geraden liegen.) Die ganze störende Kraft, deren Richtung ja d_1b_1 oder wie man auch sagen kann, B_1A ist, liegt also parallel zum Radius Vektor oder parallel zur Ebene der Bahn, und es giebt keine auf der Ebene der Bahn senkrechte Störung.*)

In B_2 steht der Planet näher bei C, die störende Kraft wirkt stärker auf ihn, und es ist demnach B_2b_2 grösser als Aa oder B_2d_2; weil ferner auch noch B_2b_2 der Senkrechten zur Bahnebene (in B_2 etwa errichtet gedacht) näher liegt, d. h. einen kleineren Winkel mit ihr bildet als B_2d_2, so ist b_2 von der Ebene der Bahn weiter entfernt als d_2 (siehe auch Fig. 66**), die störende Kraft d_2b_2 ist daher von einem Punkte d_2 nach einem von der Ebene weiter ab liegenden Punkte b_2, also nach der Seite des störenden Körpers hin gerichtet; sie ist von der Ebene der Bahn fort nach der Seite hin gerichtet, auf welcher C liegt.

Befindet sich dagegen der Planet in B_3, so ist er weiter von C entfernt als A, die Kraft auf ihn ist kleiner; B_3b_3 ist kleiner als Aa oder B_3d_3. B_3d_3 liegt jetzt näher an der Senkrechten (in B_3 errichtet) als B_3b_3, und da noch B_3b_3 kleiner als B_3d_3 ist, so heisst das, d_3 ist weiter von der Ebene entfernt als b_3, oder die störende Kraft, die doch von d_3 nach der Ebene näheren Punkte b_3 gerichtet ist, wirkt von der Seite, auf welcher C steht, weg, nach dem der Ebene der Bahn (siehe auch Fig. 66).

*) Denkt man sich etwa durch b_1 eine Parallele zu B_1d_1 gezogen, die AB_1 in D schneiden mag (Fig. 65), so hat man, um einen andern Ausdruck zu gebrauchen, die Bewegung B_1b_1 in die zwei: B_1d_1 und B_1D zerlegt. Infolge B_1d_1 allein giebt es keine Störung, da B_1d_1 gleich und parallel Aa ist; nur B_1D stellt die Störung dar, und diese liegt in der Bahnebene, im Radius Vektor.

**) AB_2 stelle die Bahn im Durchschnitt dar; B_2C ist kleiner als AC (Fig. 66), B_2b_2 bildet mit der Senkrechten B_2L zur Bahn einen kleineren Winkel als B_2d_2 und B_2b_2 ist grösser als B_2d_2, daher ist der Abstand des Punktes b_2 von der Ebene AB_2 grösser als der des Punktes d_2.

Wir erhielten folgende Resultate:

196) a. Wenn Centralkörper und umlaufender Körper gleich weit vom störenden entfernt sind, giebt es keine zur Ebene der Bahn senkrechte störende Kraft.

197) b. Steht der revolvierende Körper dem störenden näher als der Centralkörper, so sucht die zur Ebene der Bahn senkrecht stehende Störung den revolvierenden Körper aus dieser Ebene heraus nach der Seite des störenden Körpers zu ziehen.

198) c. Ist der umlaufende Körper weiter vom störenden entfernt, als der Centralkörper, so sucht die zur Ebene der Bahn senkrechte Störung den umlaufenden Körper aus dieser Ebene vom störenden fort zu treiben.*)

Wir wollen nun die so gefundenen Resultate anwenden auf die Änderung des Knotens und der Neigung der Mondbahn durch die Anziehung der Sonne. *Als Grundebene wollen wir dabei die Erdbahn annehmen.*

B. Änderung des Knotens und der Neigung der Mondbahn durch die Anziehung der Sonne.

199) *Wenn die Knotenlinie der Mondbahn in den Syzygien liegt, giebt es keine Änderung des Knotens oder der Neigung.*

Nehmen wir *erstens* an, die Knotenlinie der Mondbahn gehe durch die Syzygien oder durch die Sonne, dann steht die Sonne in der Ebene der Mondbahn, und es giebt daher nach 195 keine zur Ebene der Mondbahn senkrechte störende Kraft.

200) *Geht die Knotenlinie durch die Quadraturen, so schreitet sie schnell zurück, aber die Neigung bleibt ungeändert.*

Nehmen wir *zweitens* an, die Knotenlinie gehe durch die Quadraturen oder stehe senkrecht zur Verbindungslinie von Erde und Sonne. Die Sonne soll jetzt als unter der Ebene der Mondbahn stehend angenommen werden, wie es mit Figur 67 übereinstimmt. Da die Entfernung des Mondes von der Erde klein ist im Vergleich zur Entfernung der Sonne, so werden die Punkte, in denen Mond und Erde von der Sonne gleich weit entfernt sind, nahe mit den Punkten der Quadraturen, also im vorliegenden Falle mit den Knoten zusammenfallen (81). Während also der Mond sich von B_4 über B_1 nach B_2 bewegt, steht er der Sonne näher als die Erde, und die störende Kraft sucht ihn daher, nach 197, aus der Ebene seiner Bahn abwärts zu ziehen, nach der Grundebene hin; während er von B_2 über B_3 nach B_4 geht, ist er weiter von der Sonne entfernt als die Erde, und die störende Kraft wird ihn aus der Ebene seiner Bahn, von der Seite, auf welcher die Sonne steht, fort, also aufwärts treiben (198), nach der Grundebene hin. Bedenkt man nun, dass die Störung, wie wir soeben gefunden haben, stets nach der Grundebene hin gerichtet ist, und wendet man das in 192 und 194 Gesagte an, so ergiebt sich:

Bewegt sich der Mond von B_4 nach B_1, wo B_1 der höchste Punkt über der Grundebene ist, so geht die Knotenlinie zurück, die Neigung nimmt ab; geht er von B_1 nach B_2, so schreitet die Knotenlinie zurück, die Neigung wird grösser. Während der Bewegung von B_2 nach B_3 bewegt sich die Knotenlinie rückwärts, die Neigung wird geringer, und endlich während der Bewegung von B_3 nach B_4 geht die Knotenlinie zurück, die Neigung wird vergrössert.

Während eines Umlaufes wird also *die Neigung nicht merklich geändert*, da sie abwechselnd zu- und abgenommen hat,**) *die Knotenlinie aber geht beständig zurück.*

---

*) Die ganze störende Kraft d_2b_2, d_3b_3 ist nicht notwendig senkrecht zur Ebene, aber man kann sie doch immer in zwei Kräfte zerlegen, von denen die eine senkrecht dazu ist, die andere in der Ebene selbst liegt.

**) Die Strecken B_4B_1, B_1B_2, B_2B_3, B_3B_4, auf denen die Neigung ab- und zunimmt, sind nahezu gleich, werden beinahe in gleichen Zeiten durchlaufen, sodass die Kraft die gleiche ist, und Ab- und Zunahme der Neigung beinahe gleich sind.

201) Wenn der Mond die Knotenlinie passiert, während er von einer Quadratur nach einer Syzygie geht, so nimmt die Neigung ab, passiert er sie, während er von einer Syzygie nach einer Quadratur geht, so nimmt die Neigung zu; in beiden Fällen bewegt sich der Knoten rückwärts.

Es seien B_2, B_4 die Quadraturen, B_1, B_3 die Syzygien (Fig. 68), NM die Knotenlinie. Nehmen wir also drittens die Knotenlinie in solcher Lage an, dass der Mond sie passiert, während er von einer Quadratur nach einer Syzygie geht. Wieder wollen wir die Sonne als unter der Ebene der Bahn des Mondes stehend betrachten. Wie im vorigen Paragraphen erwähnt wurde, ist der Mond, während er von B_4 über B_1 nach B_2 geht, näher bei der Sonne als die Erde, sodass ihn die störende Kraft aus der Ebene seiner Bahn abwärts zu ziehen sucht; er ist ferner auf der Strecke $B_2B_3B_4$ weiter von der Sonne entfernt als die Erde, weshalb ihn die störende Kraft aufwärts aus seiner Bahnebene zu bringen sucht. Daraus folgt, dass, während der Mond sich von B_4 nach N bewegt, die störende Kraft ihn von der Grundebene wegtreibt (eben abwärts), und deshalb nach 193 ein Vorschreiten der Knotenlinie und eine Abnahme der Neigung verursacht. Es folgt weiter: geht der Mond von N nach dem höchsten Punkte O, so zieht die Kraft den Mond (abwärts) nach der Grundebene hin, und bewirkt daher ein Rückschreiten der Knoten und eine Abnahme der Neigung (192); vom höchsten Punkte O bis B_2 zieht die Kraft den Mond immer noch (abwärts) zur Grundebene hin, verursacht daher abermals ein Rückschreiten der Knoten, aber eine Zunahme der Neigung. Während der Mond also von B_4 nach N geht, erhält die Knotenlinie von der störenden Kraft eine vorschreitende, und während er von N nach B_2 sich bewegt, eine rückschreitende Bewegung. Ebenso kann man finden, dass dieselbe Kraft der Knotenlinie eine direkte Bewegung erteilt, während der Mond das Stück B_2M zurücklegt, aber eine retrograde, während er von M nach B_4 geht. Hatte die Knotenlinie die Lage B_1B_3, so änderte sie sich nicht; ging sie durch B_2B_4, so führte sie eine starke retrograde Bewegung aus; hat sie die Lage NM, zwischen den beiden vorigen Lagen, so führt sie nicht nur eine rückschreitende, sondern zum Teil auch eine vorschreitende Bewegung aus, aber sie wird doch im ganzen zurückgehen, wenn auch nicht so rasch wie vorher in 200. Denn die rückschreitende Bewegung ergiebt sich für die Strecken NB_1OB_2 und MB_3PB_4, die vorschreitende für B_4N und B_2M; aber die ersteren sind viel grösser als die letzteren, da z. B. schon B_1B_2 ein Viertel der Bahn ist, dieselbe kreisförmig gedacht, daher NB_1OB_2 und MB_3PB_4 zusammen viel grösser als die halbe Bahn sind, und die störende Kraft also auf grösserer Strecke und für viel längere Zeit das Rückschreiten hervorbringt als das Vorschreiten.

Für die Neigung ergiebt sich:

Geht der Mond von B_4 nach O, so nimmt die Neigung ab, geht er von O nach B_2, so nimmt sie zu; bewegt er sich von B_2 nach P, dem tiefsten Punkte unter der Grundebene, so wird die Neigung kleiner, und bewegt er sich von P nach B_4, so wird sie grösser, im ganzen aber nimmt die Neigung ab. Denn die Abnahme erfolgt von B_4 bis O und von B_2 bis P, die Zunahme von O bis B_2 und von P bis B_4, wobei wieder die ersteren Strecken weitaus die grösseren sind, also die Abnahme erzeugende Kraft auf längerer Strecke und längere Zeit einwirkt.

202) Es liege viertens die Knotenlinie so, dass der Mond durch sie geht, wenn er von einer Syzygie nach einer Quadratur geht. B_2, B_4 seien (Fig. 69) die Orte der Quadraturen, B_1, B_3 die Syzygien. B_4 liegt jetzt oberhalb der Grundebene. Denken wir uns abermals die Sonne unter der Ebene der Mondbahn stehend, so sucht die Kraft den Mond, während er die Strecke $B_4B_1B_2$ durchläuft, aus seiner Bahn abwärts, und während er von B_2 über B_3 nach B_4 geht, aufwärts zu ziehen. Daraus folgt:

„Während der Bewegung von B_4 bis M und von B_2 bis N, wo die Kraft zur Grundebene hin wirkt, geht die Knotenlinie zurück; von M bis B_2 und von N bis B_4, wo die Kraft von der Gundebene weg gerichtet ist, schreitet dieselbe Linie vor. Dieselben Schlüsse wie in 201 ergeben, dass das Rückschreiten überwiegt, also die Knotenlinie im ganzen zurückgeht.

Die Neigung wird von B_4 bis O abnehmen, von O bis B_2 zunehmen, von B_2 bis P ab- und von P bis B_4 zunehmen. OB_2 und PB_4 sind die grösseren Strecken und werden in längerer Zeit beschrieben, die Wirkung hier wird überwiegen, d. h. die Neigung nimmt im ganzen zu."

Dieselbe Schlussweise lässt sich anwenden und führt auf in jeder Hinsicht gleiche Resultate, wenn wir die Mondbahn in der entgegengesetzten Richtung geneigt voraussetzen, wo dann die Sonne oberhalb der Bahn stünde.

203) Es fragt sich nun, ob die Knotenlinie in der That alle die angegebenen Lagen haben kann. Das ist der Fall; denn die Erde bewegt sich um die Sonne oder die letztere bewegt sich scheinbar in demselben Sinne um die erstere, in welchem der Mond um die Erde läuft. Gehen wir jetzt von dem Stande der Sonne aus, wo die Knotenlinie durch die Sonne geht, und wo nach früherem weder die Knotenlinie noch die Neigung eine Änderung erfährt, und denken wir uns nun also, dass die Sonne sich um die Erde bewegt von der eben angenommenen Stellung in der Knotenlinie aus. Ist die Sonne so bis S_1 gekommen (Fig. 70), so sind Q_1, Q_2 die Punkte der Quadraturen, M ist eine Syzygie; wir kommen also zunächst zu der Lage, wo der Mond die Knotenlinie K_1K_2 passiert, während er von einer Quadratur zu einer Syzygie geht, wo nach dem dritten Falle, in 201, die Knotenlinie zurückgeht und die Neigung abnimmt.

Hat sich die Sonne scheinbar weiter bewegt bis S_2, so kommen wir zu der Lage, in welcher die Knotenlinie mit der Linie der Quadraturen zusammenfällt, wo nach dem zweiten Falle, in 200, der Knoten schnell zurückschreitet, und die Neigung ungeändert bleibt.

Darnach kommen wir zu der Lage S_3 der Sonne, in welcher der Mond durch die Knotenlinie geht, während er sich von einer Syzygie — das würde z. B. Q_1 sein — nach einer Quadratur L bewegt, wo nach dem vierten Falle, in 202, der Knoten rückwärts schreitet, und die Neigung zunimmt. Schliesslich kommen wir wieder zu einer Stellung S_4 der Sonne, in welcher die Knotenlinie abermals durch die Sonne geht. Dies geschieht, wenn die Sonne einen halben scheinbaren Umlauf um die Erde, oder eigentlich, wegen des Rückschreitens des Knotens, etwas weniger gemacht hat. In dem folgenden halben Umlaufe werden in jeder Hinsicht dieselben Veränderungen in derselben Reihenfolge eintreten.

Es ergiebt sich also, dass infolge der Umlaufsbewegung der Erde um die Sonne oder infolge der scheinbaren Bewegung der Sonne um die Erde, die Knotenlinie der Mondbahn nach und nach wirklich in alle die Lagen kommt, welche wir in den obigen vier Fällen, in 199 bis 201, betrachet haben.

Die Veränderungen, die während eines solchen Umlaufes die Knotenlinie und die Neigung erfahren, lassen sich demnach so zusammenfassen:

„Die Knotenlinie der Mondbahn geht beständig zurück. Die Neigung ist am grössten, wenn die Knotenlinie durch die Sonne geht oder mit der Linie der Syzygien zusammenfällt, und am kleinsten, wenn die Knotenlinie durch die Quadraturen geht," da sie beständig abnimmt von der ersten Lage bis zur letzteren (während die Sonne von S bis S_2 geht), und beständig grösser wird von der letzteren Lage bis wieder zur früheren (während die Sonne von S_2 bis S_4 geht).

Die angegebene Ungleichheit ist die hauptsächlichste in der Neigung der Mondbahn; alle übrigen sind sehr klein.

204) Das Rückschreiten der Knotenlinie ist etwas kleiner als aus einer ersten Berechnung folgt.

Wie wir wissen, schreitet die Knotenlinie beständig zurück, ausgenommen, wenn sie durch die Sonne geht. Die jährliche Bewegung dieser Linie, welche wir anfangs erwarten sollten, wird durch den folgenden Umstand etwas verkleinert.

Hat die Knotenlinie (Fig. 71) die Lage K_1K_2, während die Sonne in S_2 steht, ist sie also in der Stellung, in welcher die Wirkung die grösste ist, so bewegt sich die Knotenlinie rasch rückwärts, sie entfernt sich somit schnell wieder von dieser Lage der grössten Wirksamkeit. Freilich, auch wenn sie nicht zurückginge, so würde doch durch die Bewegung der Sonne die Linie der Quadraturen fortrücken, z. B. von K_1K_2 nach Q_1Q_2, und somit die Knotenlinie rasch von der Linie Q_1Q_2 der grössten Wirksamkeit entfernt werden. Aber wenn die Knotenlinie selbst noch rasch zurückgeht, so kommt sie noch viel schneller und weiter von der Lage Q_1Q_2 der grössten Wirkung fort (etwa um den Winkel $K_1{}^1EQ_1$, wenn sie selbst um den Winkel $K_1{}^1EK_1$ rückwärtsgegangen ist, während die Linie der Quadraturen bis Q_1Q_2 vorgerückt ist), als es eben infolge der Bewegung der Sonne allein der Fall sein würde. So wird die Dauer der grössten Wirkung durch das rasche Rückschreiten, und damit das, was durch diese Wirkung hervorgebracht wird, nämlich das Rückschreiten selbst, verringert.

Da aber die Knotenlinie niemals vorwärts geht, so wird diese Verminderung ihrer Bewegung viel kleiner als die in 107 erwähnte Zunahme der Bewegung der Apsidenlinie, welche letztere Linie ja vor- und rückwärts geht. Weil ferner die Kraft auf entgegengesetzten Punkten der Bahn, wie wir sahen, Wirkungen derselben Art hervorbringt, eben weil die Knotenlinie stets zurückgeht, so wird es hier keine Ungleichheit geben, die der in 106 behandelten ähnlich ist. Daher weicht die wirkliche rückschreitende Bewegung der Knotenlinie, obgleich sie etwas kleiner ist, als man beim ersten Anblicke hätte erwarten sollen, von diesem erwarteten Werte doch nur um eine Grösse ab, die viel kleiner ist, als die, um welche sich die wirkliche Bewegung der Apsidenlinie von der auf den ersten Blick erwarteten unterscheidet. Die Knotenlinie führt in etwas mehr als 19 Jahren einen ganzen Umlauf aus.

205) Die Wirkungen der Unregelmässigkeiten im Rückschreiten der Knoten, welche letztere ja bald schneller, bald langsamer zurückgehen, und die Wirkung des abwechselnden Zu- und Abnehmens der Neigung vermischen sich mit einer Ungleichheit der Breite, welche von den Längen der Sonne, des Mondes und des Mondknotens abhängt. Diese Ungleichheit wurde um das Jahr 1590 von Tycho de Brahe aus Beobachtungen entdeckt. Sie steht zur Neigung im ähnlichem Verhältnisse, wie die Evektion zur Excentricität, und wie die Evektion die grösste Ungleichheit in Länge ist, so ist sie die grösste in Breite. Sie ist jedoch viel kleiner als die Evektion, da ihre grösste Wirkung auf die Mondbreite einen Wert von 8′ erreicht, um welche die mittlere Neigung der Mondbahn bald vergrössert, bald verkleinert wird.

206) Es giebt noch andere Ungleichheiten in der Breite des Mondes, welche entstehen teils aus den Änderungen, welche Knoten und Neigung erleiden, die in jedem Mondumlaufe mehreremal stattfinden (siehe 200 am Schlusse u. f.), teils aus den Excentricitäten der Erd- und Mondbahn, teils von der die Variation begleitenden Änderung, und teils von der Veränderlichkeit der Neigung selbst. Wir können jedoch nicht auf die Erklärung aller dieser Dinge eingehen.

C. Störungen der Planeten in Breite.

207) Neigung und Knoten eines inneren Planeten werden durch einen entfernten äusseren Planeten nahezu in derselben Weise beeinflusst wie Neigung und Knoten des Mondes durch die Sonne.

Wir wollen uns nun zu den Störungen wenden, welche die Planeten in Breite erfahren.

Beim Monde sahen wir als Grundebene an die Ebene der Erdbahn oder die der scheinbaren Sonnenbahn, also die scheinbare Bahn des störenden Körpers. Auch bei den jetzigen Untersuchungen eignet sich als Grundebene am besten die Ebene der Bahn des störenden Planeten. Betrachten wir zuerst den Fall, wo Merkur oder Venus durch Jupiter gestört wird. Für diese zwei Planeten ist die Sonne Centralkörper, und da Jupiter, weil er weit entfernt ist, lange Zeit braucht, um einen Umlauf auszuführen (viel längere Zeit als Merkur und Venus), so bringt derselbe eben die Wirkungen hervor, welche die Sonne beim Monde hervorbringt, für welchen die Erde Centralkörper ist; die Sonne nämlich vollendet auch erst in längerer Zeit ihren scheinbaren Umlauf, und zwar in viel längerer Zeit als der Mond. Die störende Kraft Jupiters bewirkt also, dass die Knoten der Merkur- und Venusbahn auf der Bahn des Jupiter, die jetzt Grundebene ist, zurückschreiten, bewirkt ausserdem eine Unregelmässigkeit in der Bewegung jedes Knotens, und verursacht eine Änderung in der Neigung. Alle diese Wirkungen kombinieren sich, können also in eine vereinigt werden, und diese ist die einzige merkliche Ungleichheit, welche in der Breite beider Planeten durch Jupiter hervorgebracht wird.

208) Die anderen Ungleichheiten in Breite, welche von der gegenseitigen Lage der Planeten abhängen, bieten kein besonderes Interesse, aber einen allgemeinen Begriff von ihnen kann man aus den Bemerkungen gewinnen, die wir bei der Untersuchung der Bewegung der Mondknoten gemacht haben. Ein Fall jedoch lässt sich hier leicht erörtern.

Wenn ein äusserer Planet durch die Anziehung eines inneren gestört wird, dessen Entfernung von der Sonne kleiner ist als die halbe Entfernung des äusseren von der Sonne, und dessen Umlaufszeit daher viel kürzer ist (da die Quadrate der Umlaufszeiten sich wie die Kuben der mittleren Entfernung verhalten), so ist der äussere Planet stets vom inneren weiter entfernt als es die Sonne ist, und es giebt deshalb nach 195 stets eine von der Seite, auf welcher der störende Körper steht, fort gerichtete Kraft, welche ihn, den äusseren Planeten, von der Grundebene fort treibt, sobald die Planeten in Konjunktion stehen, z. B. in a_2 und i (Fig. 72), und zu dieser Ebene hin zieht, wenn sie in Opposition sind, in a_1 und i. (In der Figur bedeutet Si die Bahn des inneren, also die Grundebene, a_2Sa_1 die Bahn des äusseren Planeten, wobei die Pfeile die Richtung der Kräfte andeuten.) So wird der äussere Planet von Konjunktion zu Konjunktion abwechselnd auf und ab getrieben, d. h. von der Grundebene fort und zu ihr hin getrieben. Steht er jedoch in der Knotenlinie seiner Bahn, also in der Durchschnittslinie seiner Bahn mit der des störenden inneren Planeten, so verschwindet die Störung nach 195 am Anfang.

209) Sind die Umlaufszeiten zweier Planeten nahezu kommensurabel, so werden in der Neigung und Lage der Knoten lange Ungleichheiten hervorgebracht.

Die nahezu erreichte Kommensurabilität der Umlaufszeiten, welche die grosse Achse, die Excentricität, und den Ort des Perihels so auffallend beeinflusst, übt auch bedeutende Wirkungen auf die Knoten und die Neigung aus. Die Schlussweise in 175 und 176 lässt sich in jeder Hinsicht auch auf den vorliegenden Fall anwenden: „Die grösste Wirkung auf die Bewegung des Knotens sowohl wie auf die Änderung der Neigung findet statt, wenn die Planeten in Konjunktion sind; die stufenweise Änderung der Punkte der Konjunktion (z. B. B_1C_1, b_4c_4, b_7c_7 u. s. w. bei Saturn und Jupiter) bewirkt eine stufenweise Änderung dieser Wirkungen, welche jedoch, wie z. B. in dem Falle von Jupiter und Saturn, durch die stufenweise Änderung der anderen Punkte der Konjunktion (wie b_2c_2, b_5c_5, b_8c_8 und b_3c_3, b_6c_6 . . . bei Jupiter und Saturn, Fig. 57) teilweise aufgehoben werden; der nicht ausgeglichene Teil bringt jedoch in vielen Jahren eine sehr merkliche Ungleichheit in den Elementen hervor. Alles in 175 u. f. Gesagte gilt ohne Änderung auch hier, wenn wir dort für die Worte Apsidenlinie und Excentricität setzen Knotenlinie und Neigung.“

210) Im Laufe der Zeit verursacht die Einwirkung des einen Planeten ein Rückschreiten der Knoten des andern; die Neigung aber ändert sich nur, wenn eine der Bahnen excentrisch ist.

Für die säkulare Variation der Lage der Bahn scheinen die folgenden Betrachtungen hinreichend.

Im Laufe einer langen Zeit ist der gestörte Planet in jedem Punkte seiner Bahn eine grosse Anzahl Male gewesen, während der störende beinahe auf jedem Teile seiner Bahn war, sodass der störende jedesmal an anderer Stelle, und so nach und nach an allen Stellen seiner Bahn sich befunden hat, wenn der gestörte wieder und wieder zu demselben bestimmten

Orte seiner Bahn gekommen ist. Die störende Kraft ist immer der Unterschied der Kräfte, welche auf Sonne und Planet wirken. Da der störende Planet, in seinen verschiedenen Stellungen, auf die Sonne in allen möglichen Richtungen in der Ebene seiner Bahn wirkt, so kann seine Wirkung auf die Sonne ganz vernachlässigt werden (181). Es wird also nicht mehr die erwähnte Differenz der Kräfte als Störung gelten, sondern es bleibt vielmehr im ganzen nur die Wirkung als Störung übrig, welche der störende Planet überhaupt auf den gestörten ausübt. (Diese Wirkung ist dann dieselbe wie die, welche hervorgeht, wenn man sich den gestörten an bestimmter Stelle fest, und den störenden einen Umlauf ausführend denkt.) Da der erstere nun stets den letzteren aus der Ebene seiner Bahn herauszuziehen sucht, so wird die vereinigte Wirkung der Kräfte, welche der störende in allen denjenigen Punkten ausübt, für welche der gestörte jedesmal an demselben bestimmten Orte ist, die sein, den gestörten Planeten aus der Ebene seiner Bahn heraus nach der des störenden zu ziehen. Denn die störende Kraft ist am grössten und überwiegt (und die Gesamtwirkung ist ja dieser überwiegenden ähnlich), wenn der störende Planet am nächsten steht (in Konjunktion), wenn also beide Körper die Stellung a_2i in 208 haben oder überhaupt auf derselben Seite von S aus stehen, in welchem Falle aber immer die Kraft nach i hin gerichtet ist, und daher ein Teil von ihr senkrecht zu Sa_2 nach Si hin wirkt. Ist der gestörte also wieder und wieder an dieselbe bestimmte Stelle gekommen, und hat der störende dabei nach und nach jede Stelle seiner Bahn inne gehabt, so ist die gesamte, überwiegende störende Kraft eine zur Bahn des gestörten senkrechte, nach der des störenden hin gerichtete. Im Laufe der Zeit werden beide Körper alle möglichen Stellungen zueinander gehabt haben, man wird deshalb Gruppen von Orten bilden können, in deren jeder der gestörte an bestimmter aber in jeder Gruppe anderer Stelle seiner Bahn und der störende an jedem Orte seiner Bahn ist. Der Vorgang in langer Zeit ist dann genau so, als hätten wir verschiedene Umläufe des störenden um den gestörten, und als wäre bei jedem dieser Umläufe der gestörte an einem anderen bestimmten Orte. Für jeden solchen Umlauf, so haben wir vorher gefunden, ist die überwiegende Wirkung der Störung eine zur Ebene der Bahn des gestörten Körpers senkrechte, nach der des störenden hin gerichtete Kraft; folglich ist auch während der ganzen Bewegung des gestörten Körpers im Laufe langer Zeit die gesamte überwiegende Störung eine Kraft solcher Art. Aus 192 folgt dann, dass infolge derselben die Knotenlinie der Bahn des gestörten stets auf der des störenden, welche ja die Grundebene ist, zurückschreitet. Dies wird gelten, gleichviel ob der störende Planet ein äusserer oder innerer ist im Vergleich zu dem gestörten.

Wir dürfen also, während sich der gestörte Planet bewegt, die Sache im ganzen immer so ansehen, als wirkte stets eine Kraft senkrecht zu seiner Bahnebene nach der Grundebene hin. Es ergiebt sich nun weiter, dass eine Änderung der Neigung im ganzen nicht eintreten wird, falls die Bahnen kreisförmig sind. Im letzteren Falle wird stets der oberhalb der Grundebene liegende Teil der Bahn des gestörten (Fig. 73) gleich dem unterhalb liegenden sein, und der höchste Punkt wird die Bahnhälfte genau halbieren. Man denke sich nun zwei Punkte S, R oder S_1, R_1, die vom höchsten Punkte O gleich weit entfernt sind; macht der störende einen der früher erwähnten Umläufe, während man den gestörten vielleicht in S denkt, so ist die Gesamtwirkung die schon genannte Kraft senkrecht zur Bahnebene. Die gleich grosse Kraft wird aber auch R erfahren, wenn der eine Körper revolviert, der andere in R fest ist, eben weil beide Bahnen kreisförmig sind, sie zu MN oder zur Grundebene symmetrisch liegen, von MN und der Grundebene halbiert werden. Bei der Bewegung des gestörten Körpers ist somit im Laufe langer Zeit die durchschnittliche Wirkung an Punkten, die vom höchsten Punkte O gleich weit entfernt sind, gleich gross; nach 192 wird dann die Neigung das eine Mal vergrössert, z. B. in S, das andere Mal um eben so viel verkleinert — in R — oder die Neigung wird sich im ganzen nicht ändern. Sind die Bahnen elliptisch, so giebt es einen Punkt, wo die Wirkung der Kraft auf die Neigung grösser ist als irgend anderswo; die Gesamtwirkung auf die Neigung ist dann dieser grösseren ähnlich.

211) Es ist als Grundebene bisher die Bahn des störenden Planeten angenommen worden; wählt man als solche eine andere Ebene, etwa die Bahn eines anderen Planeten, so kann es sich ereignen, dass die Knotenlinie vorschreitet.

Wenn wir vorher sagten, die Knotenlinie gehe im Laufe der Zeit rückwärts, so gilt dieses Zurückschreiten nur als ein solches in der Bahn des störenden Planeten. In Bezug auf eine andere Grundebene kann die Knotenlinie auch eine direkte Bewegung ausführen. Betrachten wir z. B. Jupiter und Saturn, und denken wir uns die Bahnen dieser zwei Körper und die der Erde auf einer Himmelskugel aufgezeichnet. EC sei die Erdbahn, IE die Bahn des Jupiter, ST die Saturns (Fig. 74). Infolge der Störung Saturns gehen also die Knoten Jupiters in der Ebene des Saturn rückwärts. Die Knoten der Bahnen von Jupiter und Saturn in der Erdbahn liegen nicht sehr weit voneinander entfernt, aber die Neigung der Saturnbahn gegen die der Erde ist grösser als die der Jupiterbahn. Geht nun die letztere in der Saturnbahn rückwärts, wie es ja wirklich der Fall ist, so kommt sie aus der Lage EI in die Stellung der punktierten Linie ej; der Knoten I mit der Saturnbahn ist nach j rückwärts gegangen, aber der Knoten E der Jupiterbahn in der Erdbahn ist von E nach e vorgeschritten. Damit ist die eingangs aufgestellte Behauptung bewiesen.

212) Merkwürdiges Verhältnis zwischen den Neigungen mehrerer Planeten, die sich einander stören.

Zwischen den Neigungen aller Bahnen unseres Planetensystems gegen eine feste Grundebene besteht ein merkwürdiger Zusammenhang, der sich während aller säkularen Variationen erhält, und welcher dem Zusammenhang zwischen den Excentricitäten der Planeten ähnlich ist. Es ist nämlich die Summe der Produkte aus jeder Masse in die Quadratwurzel der grossen Achse ihrer Bahn, und in das Quadrat der Neigung gegen eine feste Ebene konstant.

D. Störungen der Breite der Jupitersatelliten.

213) Die Störungen, welche die Satelliten Jupiters in Breite erleiden, sind nicht minder beachtenswert als die Störungen in Länge, welche wir früher betrachtet haben.

Die Massen dieser Körper sind so klein, und ihre Bahnen so wenig gegeneinander geneigt, dass man die kleinen Ungleichheiten, welche während eines Umlaufes erzeugt werden, vernachlässigen kann. So klein sind die gegenseitigen Neigungen der Bahnen, dass selbst diejenige Ungleichheit keine merkliche Grösse erreicht, welche von der langsamen Bewegung der Linie der Konjunktion der drei ersten Satelliten abhängt.

Wir werden daher nur jene Änderungen in der Lage der Bahnebenen betrachten, welche während einer geringen Zahl von Umläufen sich nicht merklich ändern.

Zu diesem Zwecke müssen wir einen neuen Ausdruck einführen.

214) Bedeutung des Ausdruckes „Fundamentalebene“.

Wenn der Mond sich um die Erde in derselben Ebene bewegte, in welcher die Erde um die Sonne geht, so würde die Anziehung der Sonne den Mond nie aus jener Ebene zu ziehen suchen. In Wirklichkeit aber bewegt sich der Mond in einer Ebene, die gegen die Erdbahnebene geneigt ist, weshalb die Knotenlinie auf letzterer zurückschreitet, während die Neigung beider Ebenen im ganzen ungeändert bleibt. Man nennt nun die Ebene der Erdbahn eine Fundamentalebene der Mondbahn. Durch diesen Ausdruck soll angedeutet werden, dass, wenn der Mond sich in dieser Ebene bewegte, die störende Kraft ihn nie aus derselben ziehen würde, und dass, wenn der Mond sich in einer gegen sie geneigten Ebene bewegt, die Neigung stets nahezu dieselbe bleibt, obgleich die Knotenlinie sich merklich ändert. Das Letztere ist im allgemeinen eine Folge des Ersteren.

215) Bestimmung der Fundamentalebene der Jupitersatelliten.

Um die Fundamentalebene der Jupitermonde zu ermitteln, muss man bedenken, dass auf diese Körper ausser der Sonnenanziehung noch eine andere stärkere störende Kraft einwirkt, nämlich die Unregelmässigkeit der Anziehung, welche durch die Abplattung Jupiters erzeugt wird. Wie wir später sehen werden, geht die Wirkung der letzteren dahin, die Satelliten nach der Ebene des Jupiteräquators hin zu ziehen (238). Hätte Jupiter Kugelgestalt, so wäre die einzige störende Kraft die Anziehung der Sonne, welche im ganzen die Satelliten gegen die Ebene der Jupiterbahn zu ziehen suchen würde (210 letzter Abschnitt; jetzt ist die Sonne der störende Körper, der sich, scheinbar, um Jupiter bewegt), und dann würde diese letztere die Fundamentalebene sein. Ist aber Jupiter abgeplattet, und stört die Sonne die Satelliten nicht, so wird die Unregelmässigkeit in der Gestalt Jupiters die Satelliten stets nach der Ebene des Jupiteräquators hin ziehen, und dann ist dieser Äquator die Fundamentalebene für die Satelliten.

Da nun beide Störungen da sind, so wird weder die Ebene der Bahn noch des Äquators von Jupiter diese Fundamentalebene sein können, wir müssen sie vielmehr erst aus folgender Betrachtung bestimmen.

Wir müssen eine Ebene suchen, aus welcher die Sonne die Satelliten im ganzen abwärts, Jupiters Abplattung um ebensoviel aufwärts zieht, und umgekehrt (Figur 75), je nachdem wir den Teil rechts oder links in Fig. 75 betrachten; diese Ebene wird die Fundamentalebene sein. Sie muss zwischen den Ebenen der Bahn und des Äquators von Jupiter liegen, weil nur so die störenden Kräfte in Bezug auf dieselbe entgegengesetzt wirken und sich aufheben können; sie muss ferner durch die Durchschnittslinie beider Ebenen gehen, weil sonst an dieser Stelle beide Ebenen unten oder beide oben wären, und die beiden Störungen dann im gleichen Sinne (eben nach den beiden Ebenen hin) wirkten, sich also nicht aufheben, sondern verstärken würden.

216) Die störende Kraft der Sonne ist nach 82 u. f. um so grösser, je weiter der Satellit vom Centralkörper entfernt ist; wie wir nachher sehen werden (238, am Schlusse), ist aber gerade dann die störende Kraft, welche von der Gestalt Jupiters abhängt, kleiner. Wenn also der Satellit weit entfernt ist, so ist die Wirkung der Störung der Sonne gross, die Wirkung der von der Gestalt Jupiters herrührenden Störung klein. Die Störung der Sonne ist Null, wenn der Satellit in der Jupiterbahn liegt; ist er ausserhalb dieser Bahn, so hat sie einen bestimmten Wert, und zwar einen um so grösseren, je grösser der Abstand von der Ebene der Bahn ist*), oder die Störung der Sonne wird kleiner, je näher der Satellit der Jupiterbahn steht, eben weil er in dieser Ebene selbst gar keine Störung erfährt. Ebenso ist die von Jupiters Gestalt herrührende Störung um so kleiner, je näher der Satellit dem Jupiteräquator steht. Wären nun für einen Satelliten die störenden Kräfte von Sonne und Jupitergestalt gleich gross, so würde die Fundamentalebene dieses Satelliten in der Mitte zwischen Jupiterbahn und Äquatorebene liegen. Überwiegt aber die Kraft der Sonne, so wird die Fundamentalebene mehr nach der Sonne oder nach der Jupiterbahn hin liegen, da dann die Wirkung der Sonne auf diese neue Lage um soviel kleiner, die der Abplattung um soviel grösser geworden ist, dass sich beide wieder das Gleichgewicht halten. Für einen entfernteren Satelliten wird also die Fundamentalebene näher an der Jupiterbahn liegen, wie für einen nicht soweit abstehenden. Der erste Satellit ist dem Jupiter am nächsten, es ist die Störung durch die Gestalt Jupiters die grössere, seine Fundamentalebene fällt beinahe in den Äquator Jupiters; der zweite Satellit ist weiter entfernt, die genannte Ebene wird nicht so nahe an dem Äquator liegen; noch mehr werden für die übrigen Satelliten die Fundamentalebenen vom Äquator abweichen. Wenn also die vier Satelliten einander nicht störten, so dass nur die behandelten zwei Störungsursachen vorhanden wären, so würde jeder von ihnen seine eigene Fundamentalebene haben, und die Lagen dieser Ebenen würden nur von der Entfernung eines jeden Satelliten von Jupiter abhängen.

217) In der That aber stören die Satelliten einander. Welcher Art werden diese Störungen sein? Als wir in 210 von den Planeten sprachen, erwähnten wir, dass die

*) Zerlegt man die aus der Bahnebene ziehende Kraft in Komponenten in und senkrecht zu dieser Ebene, so ergiebt sich, dass die senkrechte Komponente um so grösser ausfällt, je höher der gestörte Körper über der Bahn des störenden steht, bei gleicher Entfernung des störenden Körpers.

Wirkung der Anziehung eines Planeten auf den andern im Laufe der Zeit darin besteht, den gestörten (in irgend einem Teile seiner Bahn) in die Ebene der Bahn des störenden zu ziehen. Dies gilt für irgend einen umlaufenden Körper, der von einem andern gestört wird; es gilt also auch für die Satelliten Jupiters: „jeder derselben wird den andern aus seiner Bahnebene in die Ebene der Bahn des störenden zu ziehen suchen".

In Wirklichkeit sind die Bahnen der Satelliten gegen ihre Fundamentalebenen geneigt, wenn auch nicht stark. Im Laufe der Zeit aber, wenn die Knoten viele Male ihren Umlauf vollendet haben, können wir die Bewegung als in der Fundamentalebene vor sich gegangen betrachten; denn denkt man sich, die Knoten haben wiederholt ihre Umläufe vollendet, so wird die Bahn auf der einen Seite ebensooft über als unter der Fundamentalebene gelegen haben, oder es wird im Mittel ihre Lage, in langer Zeit, die der Fundamentalebene sein (siehe 220). Wir wollen nun auch vorläufig annehmen, die Satelliten bewegten sich in ihren Fundamentalebenen selbst.

Nunmehr fragt es sich: welches werden diese vier Fundamentalebenen der Satelliten sein, wenn wir die gegenseitigen Einwirkungen der letzteren berücksichtigen? Eine solche Ebene soll derart sein, dass, wenn der Satellit sich in ihr bewegt, sich alle Kräfte auf ihn im Laufe der Zeit das Gleichgewicht halten, also gar keine Änderung der Neigung und des Knotens erzeugt wird. In dieser Ebene wird der Satellit gegen die Ebene der Jupiterbahn durch die störende Kraft der Sonne gezogen, während ihn ferner die Abplattung Jupiters nach dem Äquator des letzteren, und die störenden Kräfte der drei anderen Satelliten nach den Bahnen dieser drei Körper hin ziehen; alle diese Kräfte müssen sich in der Fundamentalebene im Laufe der Zeit das Gleichgewicht halten.

218) Die Bestimmung der neuen Lagen dieser Ebenen ist nicht sehr schwierig, wenn für die Grösse jeder dieser Kräfte allgemeine algebraische Ausdrücke gefunden sind. Die allgemeine Natur der Resultate ist leicht zu erkennen; die einzelnen Fundamentalebenen, wie sie da sein würden, wenn nur Sonne und Jupiters Gestalt störten, werden einander näher gebracht werden, weil jeder Satellit nach den Ebenen der drei anderen hin gezogen wird (in 216 zeigten wir, dass, wenn die Wirkung nach der einen Seite grösser wird, auch die Fundamentalebene mehr nach dieser Seite rückt); für den ersten, zweiten, dritten Satelliten, für welche die Fundamentalebenen von dem Jupiteräquator der Reihe nach immer grössere Abstände hatten, nähern sich diese Ebenen der Bahn des Jupiter, während die des vierten näher nach dem Äquator des Jupiter hin gezogen wird. Die vier Ebenen gehen stets durch die Durchschnittslinie von Äquator und Bahn des Jupiter, wie wir schon erwähnten. Denken wir das Auge in dieser Durchschnittslinie in grosser Entfernung stehend, und bedeuten in Fig. 76 die punktierten Linien die Fundamentalebenen, wenn die Satelliten sich gegenseitig nicht störten, so werden dann, nach den vorigen Bemerkungen, die ausgezogenen Linien die Lagen dieser Ebenen darstellen für den Fall, dass die Satelliten störend aufeinander wirken*). Der Äquator des Jupiter ist gegen die Jupiterbahn nur ungefähr um 3° 6′ geneigt, und die Wirkung der Abplattung ist so gross, dass die Fundamentalebene des ersten Satelliten gegen den Äquator des Jupiter nur um 7″ geneigt ist, die des zweiten ungefähr um 1′, die des dritten um etwa 5′, und die des vierten beinahe um $24\frac{1}{2}$′. Ohne gegenseitige Störungen der Satelliten wären diese Neigungen 2″, 20″, 4′, 48′.

219) Nachdem wir so die Lagen der Fundamentalebenen betrachtet haben, wollen wir nun die Bewegung eines Satelliten untersuchen, der in einer gegen seine Fundamentalebene geneigten Bahn einhergeht.

220) Die Knotenlinien schreiten auf den Fundamentalebenen zurück, ohne Änderung der Neigung gegen diese Ebenen.

*) Dass die Fundamentalebenen der Satelliten gerade so liegen wie in Fig. 76, rührt von der verschiedenen Grösse der Massen und der Entfernungen der Satelliten her; so ist die Masse des dritten die grösste, nach ihr kommt die des vierten.

Nehmen wir nun also an, irgend einer der Satelliten bewege sich in einer gegen seine Fundamentalebene geneigten Bahn. Die allgemeine Wirkung wird derselben Art sein wie beim Monde. Die störende Kraft, welche den Satelliten aus seiner Bahn zu ziehen sucht, ist ja nach der Grundebene hin gerichtet, und die Knotenlinie wird deshalb (192) auf der Fundamentalebene rückwärts gehen.

Dass die störende Kraft thatsächlich die angegebene Richtung hat, ergiebt sich aus folgender Betrachtung: Die Bahn des Satelliten liege zwischen Fundamentalebene und Äquator, so ist die Bahn dem Äquator näher als die Fundamentalebene. Fiele die Bahn in den Äquator (Fig. 75), so wäre die Störung durch die Abplattung Null, die der Sonne (wenn wir die Wirkung der übrigen Satelliten unbeachtet lassen) allein da; läge sie in der Fundamentalebene selbst, so würden beide Störungen gleich sein und sich aufheben. Liegt die Bahn aber zwischen Äquator und Fundamentalebene, so werden die Störungen nicht mehr gleich sein, die Störung durch die Abplattung wird kleiner sein als die der Sonne, die letztere wird überwiegen; denn der Satellit ist dann von der Jupiterbahn weiter entfernt, als es der Fall ist, wenn er in der Fundamentalebene steht, somit die Störung durch die Sonne grösser als im letzten Falle. Die Wirkung davon ist eine grössere Anziehung nach der Sonne oder nach der Jupiterbahn hin, also nach der Seite hin, auf welcher die Fundamentalebene von der angenommenen Lage der Bahn aus liegt, d. h. eben die Störung ist nach der Fundamentalebene hin gerichtet. Ähnliches gilt, wenn man die Bahn nach der andern Seite geneigt annimmt, wo dann die Wirkung der Abplattung überwiegt und die Knoten zurückschreiten lässt. Gleiches ergiebt sich auch, wenn man die Wirkung der übrigen Satelliten berücksichtigt. Nehmen wir z. B. an, die Bahn des dritten, dessen Fundamentalebene in Fig. 76 bestimmt worden ist, liege zwischen dieser Ebene und dem Äquator des Jupiter. Fällt die Bahn mit der Fundamentalebene zusammen, so halten sich alle Kräfte das Gleichgewicht; liegt sie mehr nach dem Äquator hin, so ist sie letzterem, wie den Bahnen des ersten und zweiten näher, so dass die Wirkungen von Abplattung und erstem und zweitem Satelliten kleiner sind als in dem Falle, wo Gleichgewicht ist; sie ist aber ferner weiter entfernt von der Jupiterbahn und der Bahnebene des vierten, so dass deren Wirkungen grösser sind als im Gleichgewichtsfalle und somit überwiegen, oder eine Anziehung auf den dritten nach dieser Seite hin übrig bleibt, d. h. eine nach der Seite hin, auf welcher die Fundamentalebene von der Bahn des dritten aus liegt, oder eine nach der Fundamentalebene des dritten hin gerichtete."

Die Neigung wird zunehmen und abnehmen, aber **im ganzen** nicht geändert werden (192). Infolge der verschiedenen Neigungen wird die Abplattung, aber auch die Sonne in ihrer Wirkung überwiegen können. Schreiten nämlich die Knoten zurück, so ist auf der einen Seite die Bahn nach der einen, nach einem halben Umlaufe nach der entgegengesetzten Seite geneigt (Fig. 77), so dass in der That abwechselnd die Wirkung der Abplattung und die der Sonne überwiegen wird. Derjenige Teil der rückschreitenden Bewegung der Knoten nun, welcher von der störenden Kraft der Sonne abhängt, wird für die weiter entfernten Satelliten grösser sein als für die näheren; der aber, welcher von der Gestalt Jupiters abhängt — und dies ist der wichtigere — ist für die näheren Satelliten grösser, als für die entfernteren. Im ganzen werden also die Knotenlinien der inneren Satelliten schneller zurückgehen als die der äusseren. In der That hat die jährliche rückschreitende Bewegung für die vier Satelliten, wenn wir mit dem zweiten beginnen, die Grössen: 12°, 2° 32′, 41′.

221) Die Neigung der Bahn eines äusseren Satelliten erzeugt eine ähnliche Neigung der Bahn eines inneren.

Die störende Kraft eines Satelliten auf die andern wird durch den Umstand sehr modificiert, dass seine Bahn nicht mit seiner Fundamentalebene zusammenfällt, und die Bahn bleibt lange genug in nahezu derselben Lage, um eine sehr merkliche Unregelmässigkeit hervorzubringen. In 220 haben wir die Bewegung eines Satelliten für sich allein untersucht, falls seine Bahn gegen seine Fundamentalebene geneigt ist; welche Wirkung wird aber weiter dieser Satellit auf die andern ausüben? Nehmen wir also jetzt an, der eine

8*

Satellit bewege sich in seiner Fundamentalebene, der andere nicht; welche Unregelmässigkeit wird der letztere im ersteren hervorrufen? Um die Natur derselben zu erforschen, müssen wir beachten, dass die von einem Satelliten auf einen andern senkrecht zu dessen Bahn ausgeübte Kraft ganz von der Neigung der beiden Bahnen abhängt, sodass durch Vergrössern der Neigung die störende Kraft geändert wird. Fielen die Bahnen zusammen, so wäre die genannte störende Kraft Null, ist ein Abstand beider da, so gilt das nicht mehr, sondern die Störung ist um so grösser, je grösser der Abstand ist.

Nehmen wir nun einen bestimmten Fall an: Der zweite Satellit bewege sich in einer gegen seine Fundamentalebene geneigten Ebene; welcher Art wird die Störung sein, die er in der Breite des ersten hervorruft?

Bemerken wir dabei zuerst, dass, wenn beide Körper sich in ihren Fundamentalebenen bewegten, die von der Neigung dieser Ebenen, also zugleich der Bahnen, abhängenden störenden Kräfte vollständig dadurch in Rechnung gezogen wären, dass wir eben die Lage dieser Ebenen bestimmten; denn in den so bestimmten Bahn- oder Fundamentalebenen könnten sie sich fortan ohne Störung bewegen, oder der Zustand würde ein bleibender sein. Hat daher der eine Satellit eine gegen seine Fundamentalebene geneigte Bahn, so werden wir die dadurch auf den andern Satelliten hervorgebrachten Ungleichheiten ermitteln können, indem wir nur die Änderungen betrachten, welche durch die Ortsänderung des zweiten Satelliten gegen seine Fundamentalebene erzeugt werden. Wir werden, um die Einwirkung auf den ersten zu finden, in derselben Weise verfahren, wie bei mehreren früheren Beispielen, so nämlich, dass wir diejenige Bewegung des ersten Satelliten aufsuchen, welche, bezogen auf die Bewegung des zweiten, fortdauernd mit dieser Neigung des zweiten bestehen kann, oder dass wir die Bewegung des ersten suchen, für welche, trotz der Neigung der Bahn des zweiten, der Zustand ein dauernder ist.

Die wirkliche Bahn des zweiten liege etwa auf der einen Seite höher über, auf der andern demnach tiefer unter der Bahn des ersten als die Fundamentalebene des zweiten (Fig. 78). Liegt die Bahn des zweiten in der Fundamentalebene, so ist die aufziehende Wirkung des zweiten auf den ersten, auf der linken Seite in Fig. 78, so gross, dass sich alle auf- und abziehenden Kräfte das Gleichgewicht halten; liegt die Bahn des zweiten in der Bahn des ersten, so ist seine Wirkung auf den ersten Null, letztere ist aber um so grösser, je grösser die Neigung seiner Bahn gegen die des ersten ist; liegt seine Bahn also auf der linken Seite noch höher über der Bahn des ersten als die Fundamentalebene, so ist die aufziehende Kraft des zweiten grösser als sie sein würde, wenn der zweite in seiner Fundamentalebene läge. Die Kräfte insgesamt werden sich nicht mehr aufheben, es wird vielmehr in Wirklichkeit eine aufwärts ziehende Kraft da sein und auf die Bahn des ersten wirken, wie dann ebenso auf der rechten Seite eine von der Bahn des ersten fort gerichtete, also abwärts wirkende Kraft da ist.

Liegt die Bahn des zweiten auf der linken Seite näher der Bahn des ersten als die Fundamentalebene (Fig. 79), so wird die aufziehende Kraft des zweiten kleiner sein als sie sein würde, wenn er in der Fundamentalebene stünde, oder die Kräfte werden sich nicht mehr das Gleichgewicht halten; es wird die Summe der aufwärts gerichteten Kräfte kleiner sein als die der abwärts wirkenden oder es ist im ganzen eine abwärts gerichtete Kraft vorhanden, während auf der rechten Seite entsprechend eine aufwärts gerichtete da ist. Auf jeden Fall sehen wir, die Bahn des zweiten mag nach irgend welcher Seite gegen seine Fundamentalebene geneigt sein, dass auf den ersten Satelliten in den verschiedenen Punkten seiner Bahn eine Kraft nach derselben Seite hin wirkt, auf welcher die Bahn des zweiten Satelliten von ihrer Fundamentalebene aus liegt, und dass die Grösse dieser Kraft der Entfernung von Bahn- und Fundamentalebene des zweiten proportional ist.

Nun ist die Ungleichheit in der Bewegung des ersten Satelliten eine kleine Neigung seiner Bahn gegen seine Fundamentalebene, und diese einzige Ungleichheit der Satelliten Jupiters betrachten wir hier. Nunmehr fragt es sich, welche Lage muss die Bahn des ersten haben, damit ihre Ungleichheit, jene kleine Neigung, wirklich bestehen bleibt, also der Zustand ein dauernder ist?

Untersuchen wir zunächst, welche Lage die Knoten der Bahn des ersten haben müssen.

Diese Knoten des ersten in seiner Fundamentalebene können nicht nach der Seite hin liegen, wo der zweite am weitesten von seiner Fundamentalebene entfernt ist, z. B. nicht in B oder C; denn dann würde die störende Kraft gross sein, und zwar vor und nach dem Durchgange durch diese Knoten (eben weil der zweite dann grossen Abstand von seiner Fundamentalebene hat), wozu noch kommt, dass vor und nach dem Durchgange die Kraft in derselben Richtung wirkt — da sie stets nach der Seite gerichtet ist, auf welcher die Bahn des zweiten von seiner Fundamentalebene aus liegt — sodass dadurch der Ort des Knotens ungeändert bleibt (202, siehe auch die Fig. 69; wenn vor dem Durchgange ein Rückgehen der Knoten M und N erfolgt, so gehen sie darnach vorwärts), während die Neigung bedeutende Änderungen erleidet, da sie vor wie nach dem Durchgange durch jeden der Knoten entweder beide Male zunimmt oder abnimmt, je nachdem eben die Bahn des zweiten Satelliten nach der einen oder andern Seite ihrer Fundamentalebene geneigt ist (siehe wieder 202). Dadurch würde aber das Gleichbleiben der erwähnten Ungleichheit in der Neigung sehr gestört werden. Wir dürfen daher die Knoten nicht dort annehmen, wo der zweite Satellit weit von seiner Fundamentalebene absteht, sondern vielmehr dort, wo der zweite seiner Fundamentalebene am nächsten steht (da dann die Einwirkung auf den ersten in seinen Knoten gering und somit auch der Einfluss auf die Neigung des ersten gering ist), d. h. dort, wo seine Bahn die Fundamentalebene schneidet oder dort, wo die Knoten der Bahn des zweiten in der Fundamentalebene des zweiten liegen; mit andern Worten: die Knoten der Bahn des ersten Satelliten in seiner Fundamentalebene müssen auf derselben Seite liegen, auf welcher die Knoten des zweiten in seiner Fundamentalebene liegen.

Diese Bedingung muss erfüllt sein, soll der Zustand ein bleibender sein. In welchem Sinne wird nun aber weiter die Neigung der Bahn des ersten gelten? Wird diese Bahn auf der einen oder der andern Seite von der Fundamentalebene des ersten liegen? Um dies zu beantworten, müssen wir bedenken, dass die Einwirkung der Gestalt Jupiters die Knoten des ersten Satelliten schneller rückwärts gehen macht als die des zweiten. Nun haben wir aber soeben gesehen, dass die Knoten der Bahnen des ersten und zweiten stets auf gleichen Seiten liegen, sich also bei ihren Umläufen begleiten, d. h. sich beide gleich schnell bewegen müssen; damit dies möglich ist, muss die vom zweiten Satelliten abhängige störende Kraft einen Teil des schnelleren Rückschreitens aufheben oder sie muss für sich ein Vorschreiten der Knotenlinie des ersten erzeugen. Dazu ist nötig, dass die vom zweiten ausgehende störende Kraft den ersten Satelliten von seiner Fundamentalebene wegzuziehen sucht (193). Hieraus lässt sich die Lage der Bahn des ersten bestimmen: „Die vom zweiten bewirkte Störung hat dieselbe Richtung wie die Entfernung des zweiten Satelliten von seiner Fundamentalebene (Fig. 78 und 79), liegt er z. B. oberhalb der letzteren, so ist die Kraft aufwärts gerichtet; soll nun diese Störung den ersten von seiner Fundamentalebene fortziehen, so muss die Bahn des ersten auch oberhalb ihrer Fundamentalebene liegen (denn läge sie unterhalb, so würde die aufwärts gerichtete Störung den ersten nach seiner Fundamentalebene hin ziehen). Es muss also die Bahn des ersten in Bezug auf ihre Fundamentalebene dieselbe Lage haben, welche die Bahn des zweiten zu ihrer Fundamentalebene hat, wenn der Zustand ein dauernder sein soll.

Dieselbe Schlussfolge lässt sich in jedem andern Falle anwenden, wo ein innerer Satellit durch einen äusseren gestört wird, und so erhalten wir den Satz:

Wenn die Bahn eines Jupitersatelliten gegen seine Fundamentalebene geneigt ist, so sucht er in der Bahn jedes inneren Satelliten eine Neigung derselben Art und mit denselben Knoten zu erzeugen.

222) Die Neigung der Bahn eines inneren Satelliten ruft eine entgegengesetzte Neigung in der Bahn eines äusseren Satelliten hervor.

Untersuchen wir nun, welcher Art die Ungleichheit in der Breite des dritten Satelliten sein wird, welche der zweite erzeugt. Dieselbe Schlussweise wie vorher gilt wörtlich auch hier, nur muss man bedenken, dass das durch Jupiters Gestalt hervorgebrachte Rückschreiten der Knoten des dritten Satelliten langsamer ist als das des zweiten, und deshalb die auf den dritten einwirkende störende Kraft dieses Rückschreiten seiner Knoten beschleunigen, und diese Kraft somit gegen seine Fundamentalebene hin gerichtet sein muss (192). Dazu aber würde nötig sein, dass die Bahn des dritten auf der Seite ihrer Fundamentalebene liegt, welche entgegengesetzt der ist, auf welcher der zweite in Bezug auf seine Fundamentalebene sich befindet (die Störung des zweiten ist immer nach der Seite gerichtet, auf welcher seine Bahn von ihrer Fundamentalebene aus liegt, nach 221). Daraus folgt dann als allgemeines Resultat, dass wenn die Bahn eines Satelliten Jupiters gegen seine Fundamentalebene geneigt ist, er in der Bahn der äusseren Satelliten eine Neigung entgegengesetzter Art und mit demselben Knoten anstrebt.

223) Die Bahn des ersten Satelliten hat keine merkliche Neigung gegen seine Fundamentalebene; die des zweiten, dritten und vierten aber sind gegen ihre Fundamentalebenen geneigt, und zwar die des zweiten um 25′, die des dritten und vierten um etwa 12′, und diese Neigungen bewirken wirklich in den andern Satelliten Ungleichheiten solcher Art, wie wir sie eben untersucht haben.

224) Wir müssen noch hinzufügen, dass die Störung des ersten durch den zweiten eine Änderung in der Einwirkung des ersten auf den zweiten hervorbringt, die den zweiten von seiner Fundamentalebene zu entfernen, und folglich das Rückschreiten der Knoten des zweiten um etwas zu verringern sucht (193).

Ebenso sucht die geänderte Wirkung des dritten auf den zweiten den letzteren gegen seine Fundamentalebene hin zu ziehen, und deshalb das Rückschreiten der Knoten des zweiten um etwas zu vergrössern (192).*)

Wir haben hier dieselbe Art von Verwickelung hinsichtlich der Störungen dieser Körper in Breite, wie wir sie früher, in 150, in Bezug auf die Störungen in Länge erwähnt haben.

225) Die einzige noch vorhandene merkliche Ungleichheit in Breite ist die, welche von der Stellung der Sonne abhängt, mit Rücksicht auf die Knoten der Bahnen in der Ebene der Jupiterbahn (d. h. mit Rücksicht auf die Knoten von Jupiters Äquator auf der Ebene von Jupiters Bahn), und diese beläuft sich nur auf wenige Sekunden. Sie ist der des Mondes, welche wir in 205 erwähnt haben, völlig analog.

IX. Abschnitt.

Wirkung der Abplattung der Planeten auf die Bewegungen ihrer Satelliten.

226) In den Betrachtungen über die Bewegung um einen Centralkörper nahmen wir den letzteren als kugelförmig an. Diese Voraussetzung macht die Untersuchung ausserordentlich

---

*) Betrachten wir z. B. Fig. 78. Der zweite Satellit legt die Bahn des ersten nach oben (in der Figur links), näher der Fundamentalebene und der Bahn des zweiten; daher ist die Wirkung des ersten auf den zweiten kleiner als ohne diese Ablenkung, also die abziehende Kraft kleiner als früher oder es ist, gegen früher, jetzt eine Kraft da, die den zweiten aufwärts treibt, von seiner Fundamentalebene fort. In Figur 79 legt der zweite Satellit die Bahn des ersten (links in der Figur) unter die frühere Ebene, unter seine Fundamentalebene, also weiter von der Fundamentalebene des zweiten, so dass die vom ersten ausgeübte Abziehung grösser wird, und so den zweiten Satelliten von seiner Fundamentalebene zu entfernen sucht. Für die Wirkung des dritten auf den zweiten ergiebt sich das Behauptete, auf demselben Wege, wenn man bedenkt, dass der zweite Satellit eine entgegengesetzte Neigung der Bahn des dritten erzeugt.

ziehung, welche die gesamte Materie einer Kugel auf einen Körper ausübt, der sich ausserhalb in beliebiger Entfernung befindet, ist genau dieselbe, als wenn die ganze Materie im Mittelpunkte vereinigt wäre.“ Ist also der anziehende Körper kugelförmig, so können wir bei der Betrachtung der Bewegung um denselben seine Grösse ganz unbeachtet lassen; es ist dann so gut, als wäre er ein Punkt, der mit gleicher Stärke anzieht.

227) Allein die Planeten sind nicht kugelförmig. Mögen sie nun jemals flüssig gewesen sein oder nicht, sicher ist doch ein grosser Teil ihrer Oberfläche — bei der Erde wenigstens ist es so — mit Flüssigkeit bedeckt; diese letztere aber wird durch die Rotation des Planeten eine ganz bestimmte Gestalt annehmen. Die Flüssigkeit wird dort am meisten hindrängen, wo die drehende Bewegung am schnellsten ist, d. h. nach dem Äquator. So ergiebt sich schon aus der Theorie, und Messungen bestätigen es, dass die Erde keine Kugel, sondern ein Sphäroid ist, welches am Nord- und Südpol abgeplattet ist und rings um den Äquator einen Wulst hat. Die Halbachsen dieses Sphäroids, d. h. die Radien nach Pol und Äquator verhalten sich nahe wie 299:300, so dass eine durch den Erdmittelpunkt im Äquator gezogene Linie um nahe 44 km länger ist als die durch die Pole gehende Linie.

228) Die Abplattung des Jupiter ist noch viel grösser als die der Erde. Das Verhältnis seiner Achsen ist nämlich sehr nahe das von 16:17, so dass die Differenz seiner Durchmesser, des im Äquator liegenden und des nach den Polen gehenden, etwa 8054 km beträgt. In der That fällt dem durch ein Fernrohr beobachtenden Auge diese elliptische Gestalt Jupiters sofort auf.

229) In diesem Abschnitte wollen wir uns die Aufgabe stellen, die allgemeinen Wirkungen dieser Gestalt der Planeten auf die Bewegungen ihrer Satelliten zu ermitteln. Die Übereinstimmung, welche in diesem Punkte zwischen Beobachtung und Rechnung besteht, ist einer der schlagendsten Beweise für die Richtigkeit des Satzes: „jedes materielle Teilchen zieht jedes andere an nach dem Gesetze der allgemeinen Schwere“.

230) Die Anziehung eines abgeplatteten Sphäroids auf einen Körper in der Ebene seines Äquators ist grösser, als wenn seine ganze Masse in seinem Mittelpunkte vereinigt wäre.

Beginnen wir damit, die Wirkung zu untersuchen, welche ein abgeplatteter Planet auf einen in der Ebene seines Äquators stehenden Satelliten ausübt.

Das durch die ausgezogene Linie dargestellte Sphäroid (Fig. 80) können wir uns aus der durch punktierte Linien angedeuteten Kugel entstanden denken durch Abschneiden einer Quantität Materie von den Polen. Um die Betrachtung zu vereinfachen, wollen wir annehmen, die ganze so abgeschnittene Materie befinde sich in einem einzigen Klumpen an jedem Pole, also in den Punkten D und E. Die Anziehung der ganzen Kugel auf den Satelliten B ist, wie wir sagten, dieselbe, als wenn die ganze Materie der Kugel in A vereinigt wäre. Aber die Anziehung des abgeschnittenen Teiles ist nicht dieselbe, als wenn seine Masse sich in A befände; denn seine Entfernung von B ist grösser als AB, und seine Anziehung ist nach D oder E, aber nicht nach A gerichtet.

Nehmen wir, um dies noch besser einzusehen, etwa an, es sei AD = 1, AB = 10.

Da die Kräfte sich umgekehrt verhalten wie die Quadrate der Entfernungen der anziehenden Massen, so kann man die Anziehung des Klumpens D, wenn er in A stünde, wo seine Entfernung von B = 10 wäre, mit $\frac{1}{100}$ bezeichnen; ist er aber in D selbst, so ist seine Anziehung nur gleich $\frac{1}{101}$ zu setzen, denn es ist das Quadrat von BD gleich der Summe der Quadrate von AB und AD, d. h. gleich der Summe von 100 und 1. Man sieht also, die Anziehung der Masse am Pole D ist eine andere, wenn sie in A, als wenn sie in D ist.

Ebenso ist auch die Richtung der Anziehung schuld daran, dass die Anziehung des Klumpens in D eine andere ist, als wenn er sich in A befindet; denn, wenn die Anziehung von D den Satelliten um das Stück Bb fortziehen würde, so wäre die wirkliche Annäherung, die B einfach; denn man hat bewiesen, dass die Kugel die folgende Eigenschaft besitzt: „Die An-nach A hin erfahren hätte, das Stück Bc — wenn bc senkrecht zu AB steht*) —, welches kleiner ist als Bb, und zwar kleiner im Verhältnis von BA:BD oder von $10:\sqrt{101}$. Da wir nun die Anziehung der Masse D nach D hin durch $\frac{1}{101}$ bezeichneten, so wird die wirkliche Anziehung von D, geschätzt nach der Strecke, durch welche sie den Satelliten nach A hin zieht, die Grössen $\frac{10}{\sqrt{101}} \cdot \frac{1}{101}$ haben. Denn $\frac{1}{101}$ ist die Anziehung, wenn sie um das Stück Bb fortbewegt; bewegt sie um das Stück Bc fort, welches nur $\frac{10}{\sqrt{101}} \cdot$ Bb ist, so ist dann die Anziehung $\frac{10}{\sqrt{101}} \cdot \frac{1}{101}$. Das ist aber in der That die ganze Wirkung der Anziehungskraft von D, denn obgleich die Anziehung von D allein den Satelliten noch um das Stück cb über AB zu bringen sucht, so wird ihn doch die Anziehung von E um genau ebensoviel nach der entgegengesetzten Seite von AB ziehen, so dass sich die auf AB senkrechten Wirkungen der anziehenden Kräfte aufheben.

Wir haben demnach folgendes Ergebnis. Die Anziehung der Masse D, wenn man sie sich nach A gesetzt denkt, ist $= \frac{1}{100} = 0{,}01$, wenn man sie aber wirklich in D selbst annimmt $= \frac{10}{101 \cdot \sqrt{101}} = 0{,}0098518$ (nach A hin). Der Unterschied beträgt $0{,}0001482$ oder beinahe $0{,}0001500$ oder das $\frac{0{,}0001500}{0{,}01}$fache oder das $\frac{1500}{100000}$fache der ganzen Anziehung von D, letzteres in A vereint gedacht. Dasselbe gilt für die Masse E. Wir sehen also, wenn wir alles berücksichtigen: „dass D weiter von B entfernt ist als A, und dass DB und EB andere Richtung haben als AB, wodurch bewirkt wird, dass z. B. nicht Bb, sondern nur die kleinere Strecke Bc die Wirkung der Anziehung ist", so ergiebt sich, dass die Massen D und E in der That eine kleinere Anziehung auf B ausüben, als wenn sie in A vereinigt wären. Da aber die ganze Kugel, Sphäroid samt Klumpen, so wirkt, als wenn ihre ganze Masse im Mittelpunkte A vereinigt wäre, diese Anziehung aber doch dieselbe ist, als wenn Sphäroid und Klumpen jedes für sich wirkten, und da ferner die Massen D und E an diesen Orten D und E auf B schwächer wirken, als wenn man sie in A vereinigt denkt, so muss die Masse des „ausgezogenen Sphäroids" allein eine stärkere Wirkung ausüben, als sie sein würde, wenn seine ganze Masse im Mittelpunkte A vereinigt wäre.

231) Das Verhältnis, in welchem die Anziehung eines abgeplatteten Sphäroids grösser ist, als wenn seine Masse im Mittelpunkte vereinigt wäre, nimmt ab, wie das Quadrat der Entfernung wächst.

Wir sahen soeben, dass die Anziehung eines Sphäroids grösser ist als die, die man erhielte, wenn man sich die ganze Masse desselben im Mittelpunkte vereinigt dächte. Es fragt sich nun, ob dieser Unterschied zwischen beiden Anziehungen in anderer Entfernung des Satelliten noch derselbe ist oder ob er von der Entfernung abhängt.

Um dies zu ermitteln, wollen wir jetzt die Entfernung des Satelliten = 20 annehmen, also das frühere AB = 20 setzen. Auf dem früheren Wege finden wir, dass die Anziehung von D, dessen Masse aber in A gedacht dargestellt ist durch $\frac{1}{400} = 0{,}0025$, dass aber die Anziehung des D, die Masse jedoch in D selbst gedacht, $= \frac{20}{401 \cdot \sqrt{401}} = 0{,}002490653$.**) Der Unter-

---

*) Man kann sich die Anziehung Bb in zwei zerlegt denken: in Bc nach Richtung BA und in eine Komponente senkrecht zu AB.

**) Es ist jetzt $BD^2 = AB^2 + AD^2 = 400 + 1 = 401$, somit die Anziehung der Masse D in D $= \frac{1}{401}$. Die wirklich in Betracht kommende Anziehung von D (nach A hin) ist aber, da bc aufgehoben wird, dargestellt durch $Bc = \frac{AB}{BD} \cdot Bb = \frac{20}{\sqrt{401}} \cdot Bb$ (weil Bc : Bb = BA : BD). Bb stellt die Anziehung von D in D dar, sie ist $\frac{1}{401}$, somit ist Bc oder die wirkliche Anziehung von D (nach A hin): $\frac{20}{\sqrt{401}} \cdot \frac{1}{401}$.

schied beträgt $0{,}000009347$ oder das $\frac{0{,}000009347}{0{,}0025}$fache oder $\frac{4\,.\,0{,}000009357}{4\,.\,0{,}0025}$fache oder $\frac{0{,}000037388}{0{,}01}$fache oder nahezu das $\frac{375}{100000}$fache der ganzen Anziehung von D (die Masse D in A gedacht). Früher, bei der Entfernung AB $= 10$, war dieser Unterschied $\frac{1500}{100000}$, er ist also jetzt, bei doppelter Entfernung, nur $\frac{1}{4}$ so gross. Wird daher der Satellit in die doppelte Entfernung von A gebracht, so ist der Unterschied zwischen der Anziehung des Klumpens D in A und in D, im Vergleich zur Anziehung desselben in A, $\frac{1}{4}$ so gross als vorher. Nun wissen wir vom Schlusse von 230, dass, wenn die Anziehung des Klumpens in D kleiner ist, als wenn seine Masse in A wäre, die Anziehung des Sphäroids grösser sein muss als die seiner in A vereinigten Masse. Da jetzt der Unterschied zwischen beiden Anziehungen in doppelter Entfernung für den Klumpen $\frac{1}{4}$ so gross ist als der in einfacher Entfernung, so wird demnach auch der Unterschied zwischen diesen Anziehungen in doppelter Entfernung für das Sphäroid nur $\frac{1}{4}$ von dem in einfacher Entfernung sein, d. h. die Anziehung des Sphäroids ist in doppelter Entfernung zwar auch noch grösser als die seiner im Mittelpunkte vereinigt gedachten Masse, aber der Unterschied zwischen beiden Anziehungen ist doch kleiner geworden, er ist nur $\frac{1}{4}$ so gross als er in einfacher Entfernung war.

Was wir für die doppelte Entfernung fanden, lässt sich auch für andere Entfernungen ermitteln, und man würde so das Gesetz finden:

Das Verhältnis des Unterschiedes der wirklichen Anziehung eines Sphäroids und derjenigen, welche die im Mittelpunkte vereinigte Masse ergiebt, zu der letzteren Anziehung nimmt ab wie das Quadrat der Entfernung (des angezogenen Körpers) von A wächst.

232) Ist der anziehende Körper abgeplattet, so kann man also nicht so verfahren, als wäre alle Masse im Mittelpunkte vereinigt; macht man doch diese Annahme, so wird man noch dem am Schlusse von 231 Gesagten Rechnung tragen müssen, und zwar lässt sich die Anziehung eines abgeplatteten Sphäroids auf einen Satelliten oder auf einen andern Körper, der in der Ebene seines Äquators liegt, dann so ausdrücken:

Es ist zunächst dieselbe Anziehung da, wie wenn alle Materie des Sphäroids in seinem Mittelpunkte vereinigt wäre, aber es ist ausserdem noch eine andere Anziehung vorhanden, die von der Abplattung abhängt, und deren Verhältnis zur ersten Anziehung abnimmt, wie das Quadrat der Entfernung des Satelliten zunimmt.

233) Die Anziehung eines abgeplatteten Sphäroids auf einen Körper in der Richtung seiner Achse ist kleiner, als wenn seine ganze Masse in seinem Mittelpunkte vereint wirkte.

Untersuchen wir nun die Anziehung eines abgeplatteten Sphäroids auf einen in der Richtung seiner Achse liegenden Körper.

Wiederum sei (Fig. 81) der Satellit B um das Stück AB $= 10$ von A entfernt, so wird die Anziehung des Klumpens, wenn derselbe in A ist, durch $\frac{1}{100}$ dargestellt sein; sie würde aber, wenn diese Masse in D wäre, $\frac{1}{81}$ betragen, und wenn sie sich in E befände $\frac{1}{11^2} = \frac{1}{121}$ sein, da die Entfernungen von D und E bis B 9 und 11 sind. Sind die beiden gleich grossen Klumpen D und E in A vereint, so ist ihre Anziehung auf B $= \frac{1}{100} + \frac{1}{100} = \frac{1}{50} = 0{,}02$; befinden sich diese Klumpen aber in D und E, so ist die Summe ihrer Anziehungen $\frac{1}{81} + \frac{1}{121} = 0{,}0206100$. Der Unterschied ist $0{,}0006100$, um welche Grösse die Anziehung im letzteren Falle grösser ist. Es ist demnach die Anziehung der Klumpen in den Stellungen D und E grösser, als wenn ihre Massen im Mittelpunkte vereint wären, und zwar um $\frac{0{,}000610}{0{,}02} = \frac{305}{10000}$ oder nahezu $\frac{3}{100}$ ihrer

ihrer ganzen Anziehung (in A). Nun ist doch aber die Anziehung der Kugel dieselbe, als wenn ihre ganze Masse sich im Mittelpunkte befände; wenn wir also jene Klumpen wegnehmen, so muss eine Masse bleiben, deren Anziehung kleiner ist, als wenn ihre ganze Masse im Mittelpunkte vereint wäre. Würde man die Änderung des Unterschiedes zwischen der Anziehung des übrig bleibenden Sphäroids und seiner im Centrum vereinten Masse mit der Entfernung so untersuchen wie in 232, so würde man auch das dort angegebene Gesetz finden.

234) Man wird deshalb sagen können:

Die Anziehung eines Sphäroids auf einen Körper, der sich in der Richtung seiner Achse befindet, kann dadurch dargestellt werden, dass man die ganze Materie im Mittelpunkte vereint denkt, und dann die so sich ergebende Anziehung um eine Kraft vermindert, welche von der Abplattung abhängt, und deren Verhältnis zur ganzen Anziehung (der im Mittelpunkte gedachten Masse) so abnimmt, wie das Quadrat der Entfernung des Körpers zunimmt.

235) Wir haben somit gefunden, dass die Anziehung eines Sphäroids auf einen Körper in der Ebene des Äquators grösser ist, als wenn alle Masse des Sphäroids im Mittelpunkte sich befände, aber kleiner ist für einen, der sich in Richtung der Achse befindet. Es wird daher die Anziehung immer kleiner werden in je grössere Entfernung vom Äquator ein Körper gebracht wird, und es wird zwischen Achse und Äquator eine Richtung geben, für welche die wirkliche Anziehung des Sphäroids genau dieselbe ist, als wenn die ganze Masse desselben in seinem Centrum beisammen wäre.

236) Die Anziehung eines abgeplatteten Sphäroids verursacht ein Vorschreiten der Apsidenlinie seiner Satelliten, welches um so schneller ist, je näher der Satellit steht.

Nehmen wir an, es bewege sich ein Satellit in einer Ebene, die mit dem Äquator zusammenfällt oder doch nur einen kleinen Winkel mit ihm bildet; welcher Art wird die Bahn sein? Hierzu wissen wir nach 232, dass einmal auf den Satelliten eine Kraft so einwirkt, als wäre die Masse des Sphäroids im Mittelpunkte vereinigt, welche also dem Quadrate der Entfernung umgekehrt proportional ist, und infolge welcher der Satellit eine Ellipse beschreiben würde, deren Brennpunkt der Mittelpunkt des Sphäroids ist; wir wissen aber weiter, dass ausser dieser Anziehung noch eine Kraft da ist, welche von der Abplattung abhängt, und die stets nach dem Mittelpunkte gerichtet ist. Durch diese Kraft nun wird nach 46 bewirkt, dass die Umlaufszeit bei derselben mittleren Entfernung kürzer, oder die mittlere Entfernung bei derselben Umlaufszeit grösser wird, als wenn bloss die erste Anziehung da wäre. Nach 50 und 53 verursacht aber diese Kraft weiter ein Rückschreiten der Apsidenlinie, wenn der Satellit in seiner grössten Entfernung ist, und ein Vorschreiten derselben, wenn er die kleinste Entfernung hat. Stünde diese Kraft freilich in verschiedenen Entfernungen immer im gleichen Verhältnisse zur andern Anziehung, so würde sie im ganzen keine Lagenänderung der Apsidenlinie herbeiführen, da wir dann die Sache so ansehen könnten, als hätten wir in bestimmtem Masse die Centralmasse vermehrt. In diesem Falle würde also das Rückschreiten in der grössten Entfernung dem Vorschreiten in der kleinsten gleichkommen müssen, also eine Ellipse mit unveränderlicher Apsidenlinie beschrieben werden.*)

Allein das Verhältnis dieser Kraft zur andern nimmt ab, wenn die Entfernung wächst (231); daher wird das Rückschreiten in der grössten Entfernung kleiner sein als das Vorschreiten in der kleinsten, und die Apsidenlinie im ganzen vorschreiten. Ebenso ist das Verhältnis derselben Kraft zur ersten Anziehung um so grösser, je näher der Satellit dem Hauptkörper steht, weshalb für einen solchen Satelliten das Vorschreiten rascher erfolgen wird wie für einen entfernteren.**) Dieses Vorschreiten wiederholt sich bei jedem Umlaufe.

---

*) Es wäre eben dasselbe, als bewegte sich der Satellit um eine andere kugelförmige Centralmasse, die nach dem Gesetze der allgemeinen Schwere anzieht; infolge solcher Anziehung wird stets eine und dieselbe Ellipse beschrieben (siehe auch 98).

**) Für einen ferneren Satelliten sei in der kleinsten Entfernung die erstgenannte Anziehung auf ihn A, die an zweiter Stelle genannte, von der Abplattung herrührende B. Ist das Verhältnis von grösster und

Das Vorschreiten der Apsidenlinie des Mondes, welches durch die Abplattung der Erde verursacht wird, ist im Vergleich zu dem von der störenden Kraft der Sonne erzeugten so klein, dass man es kaum bemerken kann; das durch die Abplattung Jupiters erzeugte Vorschreiten der Apsidenlinien seiner Satelliten dagegen erfolgt so schnell, vorzüglich für die näheren Satelliten, dass im Vergleich zu demselben das von der Sonne herrührende klein ist.

237) Untersuchen wir nun die Störungen, welche die Abplattung eines Planeten in der Breite eines Satelliten hervorbringt.

238) Wenn ein Satellit nicht in der Ebene des Äquators steht, so sucht ihn die von der Abplattung herrührende Störung derselben zu nähern.

Fällt die Bahn des Satelliten mit der Ebene des Äquators des Planeten zusammen, so ist augenscheinlich keine Störung vorhanden, die aus dieser Ebene auf- oder abwärts zu ziehen strebt; der Planet wird deshalb beständig sich in dieser Ebene bewegen, oder es giebt in diesem Falle keine Störung in Breite.

Nehmen wir nun an, die Bahn des Satelliten sei gegen die Ebene des Äquators geneigt; B sei der Satellit (Fig. 82). Untersuchen wir die Anziehung der zwei Klumpen D und E, soweit dieselbe bestrebt ist B senkrecht zur Linie AB fortzutreiben. D ist näher an B als E, und die Linie BD ist mehr geneigt gegen AB als EB, bildet also einen grösseren Winkel mit AB als BB. Wirkte die Anziehung von D allein, so würde sie in gewisser Zeit den Satelliten nach d ziehen, und fd wäre der Teil dieser Bewegung, der senkrecht zu AB ist, und zwar wäre diese Bewegung aufwärts gerichtet (man zerlegt Bd in zwei Bewegungen, in eine in Richtung von AB und in eine senkrecht zu AB; fd ist senkrecht zu AB). Wirkte E allein, und würde dadurch B in derselben Zeit nach e gezogen, so wäre eg der Teil dieser Bewegung, der senkrecht zu AB, und zwar niederwärts zu AB gerichtet ist. Wirken beide Anziehungen, so kombinieren sich beide Wirkungen, und es fragt sich, welche die grössere ist, d. h. ob fd oder eg das grössere ist. Da D näher an B liegt als E, so ist zunächst Bd grösser als Be, und da auch noch BD einen grösseren Winkel mit AB bildet als BE, so ist df viel grösser als eg, so dass also die aufwärts treibende Kraft überwiegt. Die vereinten Anziehungen von D und E ziehen daher den Satelliten über die Linie AB hinauf. Die Anziehung der ganzen Kugel würde ihn längs der Linie AB fortzuziehen suchen. Nun geht doch diese letztere Wirkung hervor aus der Anziehung der beiden Klumpen und aus der des abgeplatteten Sphäroids; da die wirkliche Gesamtanziehung keine Abweichung von AB hervorbringt, die Klumpen eine solche aufwärts von AB erzeugen, so muss das Sphäroid eine solche abwärts von AB bewirken. Bei einem abgeplatteten Sphäroide ist demnach, ausser der nach seinem Mittelpunkte gerichteten Anziehung, stets noch eine senkrecht zum Radius Vektor AB stehende, nach dem Äquator hin gerichtete (jetzt abwärts von AB gerichtete) Kraft vorhanden, die den Satelliten nach der Ebene des Äquators zu ziehen sucht (dadurch wird das in 215 Behauptete begründet).

Steht der Satellit dem Planeten näher, so ist die Ungleichheit zwischen den Entfernungen DB und EB und zwischen den Neigungen von AB gegen DB und EB noch grösser

kleinster Entfernung $= \frac{m}{n}$, so ist die erstere Anziehung in der grössten Entfernung $A \cdot \left(\frac{n}{m}\right)^2$, die zweite $B \cdot \left(\frac{n}{m}\right)^2 \cdot \left(\frac{n}{m}\right)^2$, da letztere zur ersten nicht mehr im Verhältnisse von $\frac{B}{A}$ steht, sondern dieses Verhältnis jetzt nur noch das $\left(\frac{n}{m}\right)^2$fache ist. Denkt man sich denselben Satelliten in $\frac{1}{2}$ so grosser Entfernung vom Hauptplaneten, so ist die erste Anziehung auf ihn $4 \cdot A$, die zweite $16B$ in der kleinsten Entfernung, da das Verhältnis der letzteren zur ersteren in halber Entfernung das 4fache von dem in einfacher Entfernung, d. h. von $\frac{B}{A}$ ist. Nimmt man für das Verhältnis von grösster und kleinster Entfernung immer noch $= \frac{m}{n}$ an, so sind beide Anziehungen in der grössten Entfernung resp. $4A \cdot \left(\frac{n}{m}\right)^2$ und $16 \cdot B \cdot \left(\frac{n}{m}\right)^2 \cdot \left(\frac{n}{m}\right)^2$. Das Verhältnis beider Kräfte für die grösste und kleinste Entfernung ist also $\frac{B}{A} \left(\frac{n}{m}\right)^2$ und $\frac{B}{A}$ für den ferneren, $4 \cdot \frac{B}{A} \cdot \left(\frac{n}{m}\right)^2$ und $4 \cdot \frac{B}{A}$ für den näheren Satelliten oder es ist für den näheren Satelliten grösser, als vorher, und daher auch die Störung für einen näheren Satelliten viel bedeutender, als für einen entfernteren. (Damit ist das in 216 Behauptete bewiesen.)

239) Die Wirkungen dieser Störungen, wie sie bei Jupiter vorkommen, haben wir schon erwähnt, als wir in 215 die Fundamentalebenen der Jupitersatelliten bestimmten. Aus 192 u. f., insbesondere aus 220 folgt dann, dass die Kraft die Knotenlinie zurückgehen macht, wenn die Bahn gegen die Fundamentalebene geneigt ist, und zwar um so schneller, je näher der Satellit dem Hauptplaneten steht. Wäre keine andere störende Kraft vorhanden, so würde die Neigung dieser Bahnen gegen die Ebenen des Jupiteräquators unveränderlich sein, und ihre Knoten würden mit verschiedenen Geschwindigkeiten rückwärts gehen, die der nahen rascher als die der ferneren (220). In der That verhält sich bei den inneren Satelliten die Sache nahezu so, als ob keine andere störende Kraft existierte, so gross ist die durch die Abplattung Jupiters auf sie ausgeübte Wirkung.

240) Die Wirkung des Saturnringes auf die Bewegungen der Satelliten Saturns.

Mit Rücksicht auf seinen Ring weicht die Gestalt Saturns allerdings von der des Jupiter ab; will man aber die Wirkungen Saturns auf seine Satelliten erklären, so kann man dieselben Schlussfolgerungen anwenden wie bei Jupiter. Der Saturn ist abgeplattet, und die davon herrührenden Störungen sind dieselben wie bei Jupiter. Die Wirkungen des Ringes kann man auf folgende Weise ermitteln.

Wenn wir in ein abgeplattetes Sphäroid eine Kugel beschreiben (Fig. 83), welche seine Oberfläche in den beiden Polen berührt, so wird das Sphäroid in zwei Teile geteilt, in eine Kugel, deren Anziehung dieselbe ist, als wenn ihre Masse im Mittelpunkte vereinigt wäre, und in eine äquatoriale Hervorragung — in einen Wulst um den Äquator —, die der Gestalt nach einem Ringe gleich kommt. Die ganze Unregelmässigkeit in der Anziehung des Sphäroids rührt augenscheinlich her von der Anziehung dieses ringähnlichen Wulstes, da es in der Anziehung der Kugel keine solche Unregelmässigkeit giebt. Es wird also die Unregelmässigkeit in der Anziehung einer Kugel mit Ring derselben Art sein, wie die einer Kugel mit äquatorialem Wulste, d. h. wie die eines abgeplatteten Sphäroids (nur ist diese Unregelmässigkeit für den Ring im Vergleich zur Gesamtanziehung viel grösser als für den Wulst des Sphäroids, da der Ring die ganze Unregelmässigkeit ohne die Gesamtanziehung erzeugt). Da nun die Ebene des Ringes mit der des Äquators zusammenfällt, so erhält man die Wirkungen des abgeplatteten Körpers und des Ringes, indem man ihre gleichartigen Wirkungen einfach summiert, und da weiter der Ring eine Wirkung derselben Art wie die Abplattung, also ein Ring gleichartige Wirkungen wie ein Wulst erzeugt, so erfolgen die Wirkungen gerade so, als hätte man ausser dem Wulst des Sphäroids noch einen solchen, der dem Ringe entspricht, oder als wäre im ganzen ein grösserer Wulst da, oder als wäre Saturn sehr abgeplattet.

Da es nun, wenn Saturn mit Ring wirkt, so gut ist, als wirkte Saturn mit grösserer Abplattung, so lässt sich das von der Wirkung der Abplattung Jupiters Gesagte hier anwenden; das Perisaturnium (oder die Apsidenlinie, 236) eines Satelliten wird daher schnell vorwärts, und seine Knoten werden schnell rückwärts gehen. Was die übrigen Umstände anlangt, so kann man wohl als wahrscheinlich annehmen, dass die Theorie dieser Satelliten sehr einfach sein wird, da alle, mit Ausnahme des sechsten, sehr klein sind, und die störende Kraft der Sonne zu gering ist, um irgend merkliche Wirkungen hervorzubringen.

241) Mit Ausnahme des sechsten, welcher der hellste ist, sind die Satelliten Saturns so wenig beobachtet worden, dass man keine Thatsachen besitzt, durch welche man die Theorie dieser Körper begründen könnte. Doch hat Bessel eine Reihe von Beobachtungen des sechsten Satelliten angestellt, aus denen man durch Vergleichung des beobachteten Vorschreitens des Perisaturniums und des Rückschreitens der Knoten mit den aus einer angenommenen Masse des Ringes berechneten Werten dieser Grössen die Masse des Ringes gefunden hat. Schreibt man die ganze Wirkung dem Ringe zu, so findet man auf dem angegebenen Wege die Masse des Ringes nahezu $\frac{1}{118}$ der Masse des Planeten.

242) Die Fundamentalebene des Mondes ist gegen die Ekliptik geneigt.

Die Wirkung der Abplattung der Erde auf die Beschleunigung der rückschreitenden Bewegung der Mondknoten ist so klein, dass die Beobachtungen davon nichts erkennen lassen; wohl aber ist der Einfluss auf die Lage der Fundamentalebene wahrnehmbar. Untersuchen wir diesen Einfluss.

Aus 204 wissen wir, dass die Knotenlinie des Mondes in $19\frac{1}{2}$ Jahren eine ganze Umdrehung ausführt. Die Ebene des Erdäquators ist $23\frac{1}{2}°$ gegen die der Erdbahn geneigt, und die Durchschnittslinie beider ändert sich sehr langsam — sie führt in 26000 Jahren eine Umdrehung aus. Zu Zeiten also wird die Knotenlinie mit dieser Durchschnittslinie zusammenfallen, so dass die Ebene der Mondbahn zwischen den genannten zwei Ebenen zu liegen kommen wird; $9\frac{3}{4}$ Jahre später fällt die Knotenlinie wieder mit dieser Linie zusammen,*) nur ist die Mondbahn nach der andern Seite geneigt, so dass sie mit dem Erdäquator einen grösseren Winkel bildet als der ist, den die Bahn der Erde mit ihm bildet (Fig. 84). Nun hat man gefunden, dass im ersten Falle, in der ersten Lage der Mondbahn, die Neigung oder der Winkel der Mondbahn gegen die Erdbahn um ungefähr 16″ grösser ist als in der zweiten Lage;**) wäre nun die Erdbahn die Fundamentalebene, so würde sich die Neigung gegen sie nicht ändern. Da eine solche Änderung vorhanden ist, so muss eine andere Ebene, als die der Erdbahn oder des Erdäquators, die Fundamentalebene sein. Die letztere, gegen welche also die Neigung stets die gleiche bleibt, wird vielmehr mit der Erdbahn einen Winkel von etwa 8″ bilden und nach dem Erdäquator hin geneigt sein (Fig. 84).

Im ersten Falle ist dann $\sphericalangle$ ABD der gegen die Fundamentalebene DG, im zweiten ist er $\sphericalangle$ FBG; der eine ist 8″ kleiner, der andere 8″ grösser geworden als der Winkel der Mondbahn gegen die Erdbahn, so dass gegen diese Ebene DG die Neigung in beiden Fällen dieselbe ist. Diese Änderung der Fundamentalebene rührt nur von der Abplattung der Erde her, da sonst, wenn nur die Sonne störte, die Ekliptik Fundamentalebene wäre.

243) Die Abplattung der Erde erzeugt in der Mondbewegung eine Ungleichheit von langer Periode.

Ausser der soeben erwähnten Wirkung der Abplattung der Erde auf den Mond giebt es noch eine wahrnehmbare.

Die Neigung der Mondbahn gegen die Ekliptik ist kleiner als 5°, die Neigung des Erdäquators gegen dieselbe Ebene beträgt $23\frac{1}{2}°$. Steht also die Mondbahn zwischen diesen zwei Ebenen, so ist sie um $23\frac{1}{2}° - 5°$ oder nahezu 19° gegen den Erdäquator geneigt; ist die Knotenlinie wieder in dieselbe Lage gekommen — zweiter Fall in 242 —, aber die Bahn auf die andere Seite geneigt, so ist der Winkel, den sie mit dem Erdäquator bildet, $23\frac{1}{2}° + 5°$ oder nahe 28°.

Nach 235 ist der Überschuss der Anziehung eines Sphäroids über die Anziehung der im Mittelpunkt vereint gedachten Masse, also die Wirkung der Abplattung, am grössten, wenn der Satellit im Äquator steht, und nimmt von da nach der Richtung der Achse hin ab; folglich wird der Mond im zweiten Falle, wo seine Ebene 28° vom Äquator abweicht, an der Stelle, an welcher er am weitesten von seinem Knoten entfernt ist, (durch die Abplattung) eine kleinere Anziehung zur Erde hin erfahren, als wenn er im ersten Falle seine grösste Entfernung vom Knoten hat. Steht er in der Knotenlinie selbst, so werden in beiden Fällen die Attraktionen gleich sein (der Mond steht dann in jedem der zwei Fälle im Äquator selbst). Im ganzen also wird die Anziehung zur Erde hin im zweiten Falle kleiner sein als im ersten,

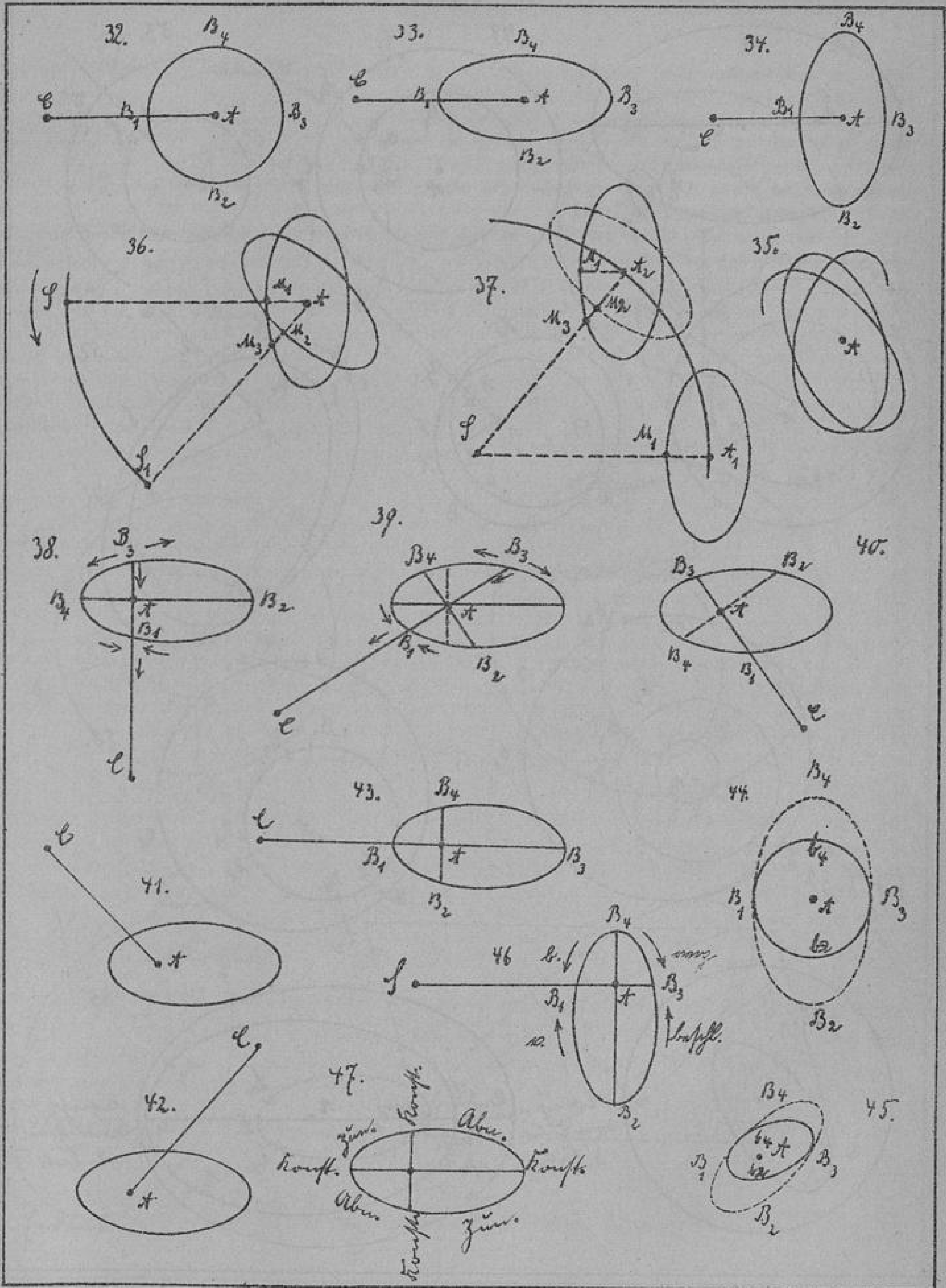
*) Es sind $9\frac{3}{4}$ Jahr, also die Hälfte von $19\frac{1}{2}$ Jahren, weil die Durchschnittslinie von Erdbahn und Erdäquator in dieser Zeit ihre Lage sehr wenig geändert hat.

**) Auch die Neigung der Mondbahn gegen den Äquator ändert sich sehr.

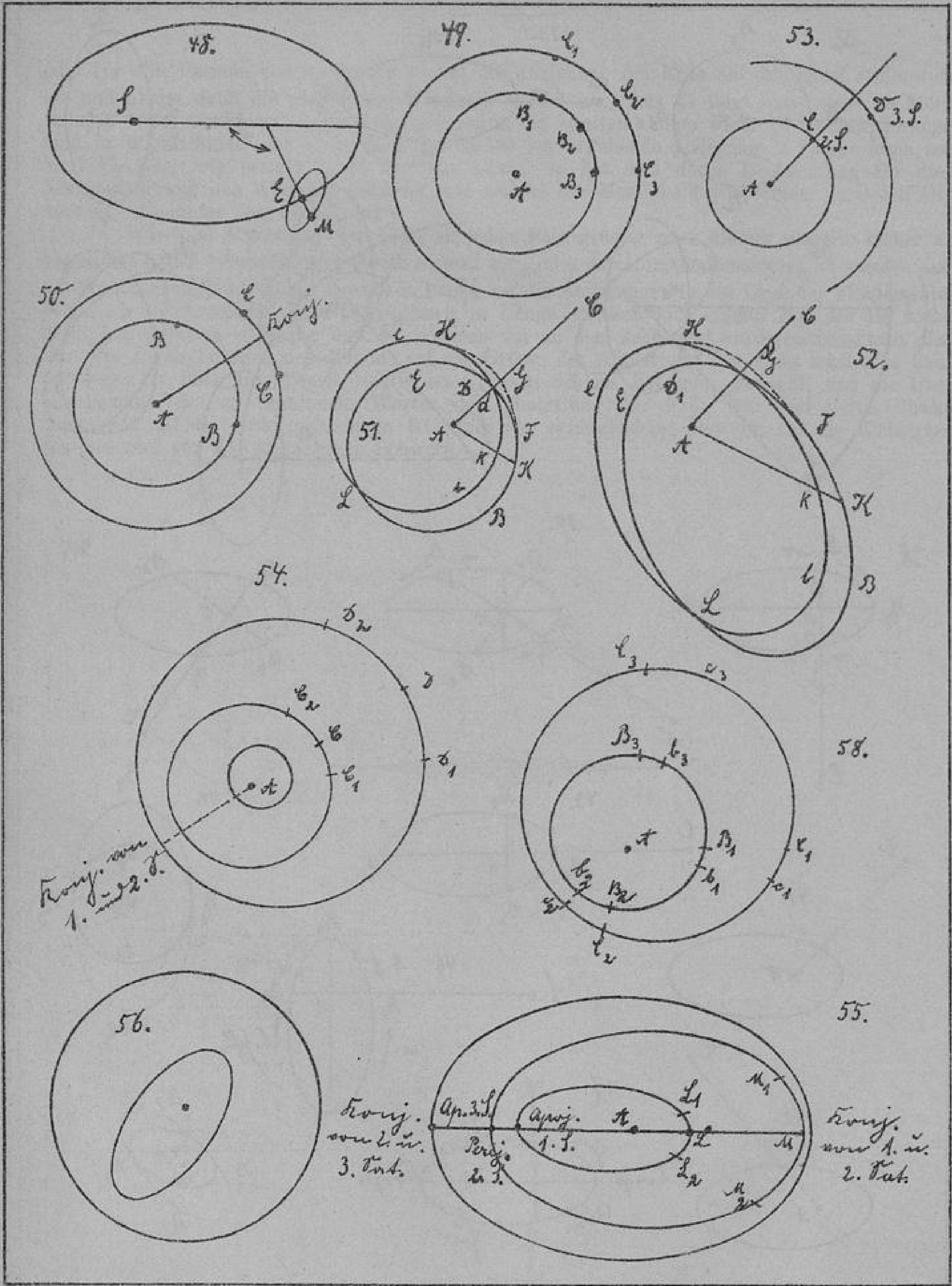
oder für eine Periode von $9\frac{3}{4}$ Jahren nimmt die Anziehung der Erde auf den Mond stufenweise ab, und nimmt dann die gleiche Zeit hindurch wieder zu. Aus 47 folgt dann, dass die Mondbahn in der ersten Periode stufenweise grösser, in der zweiten kleiner wird. Diese Veränderungen sind in Wirklichkeit sehr klein, aber die daraus hervorgehende Änderung in Länge kann sehr merklich sein, wie bereits in 49 erwähnt wurde; so hat man durch Beobachtung für diese Längenänderung den Wert 8″ gefunden, um welche der Mond bald vor seinem mittleren Orte voraus, bald hinter ihm zurück ist.

Wäre die Abplattung der Erde an jedem Pole grösser oder kleiner als wir bisher angenommen haben (nämlich grösser oder kleiner als $\frac{1}{299}$ des Äquatorialhalbmessers), so würden auch die Wirkungen auf den Mond, sowohl in Bezug auf die Änderungen in der Lage der Fundamentalebene, als in Bezug auf diese Ungleichheit in Länge, grösser oder kleiner sein als die vorher dafür angegebenen Grössen; und so kommen wir zu dem sehr merkwürdigen Resultate, dass man aus Beobachtungen des Mondes auf die Grösse der Abplattung der Erde schliessen kann, vorausgesetzt, dass die Theorie richtig ist. Diesen Schluss hat man gemacht, und die Übereinstimmung des so erhaltenen Wertes der Abplattung der Erde mit dem durch direkte Messungen auf der Erde gefundenen ist einer der schlagendsten Beweise für die Richtigkeit des Gesetzes von der allgemeinen Schwere.

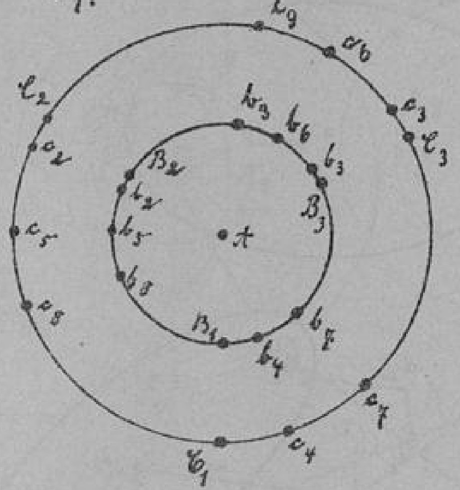
I.



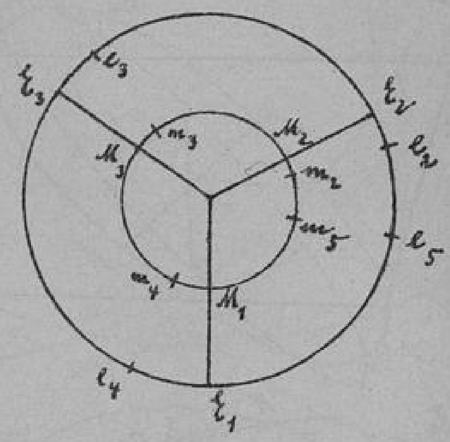
II.



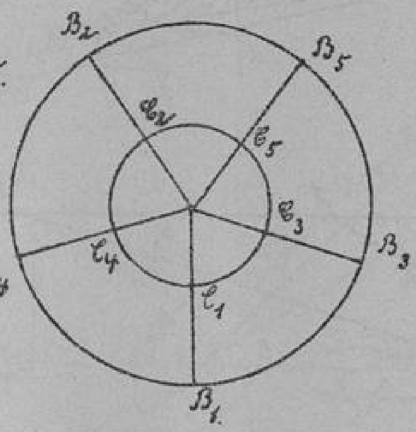
57.



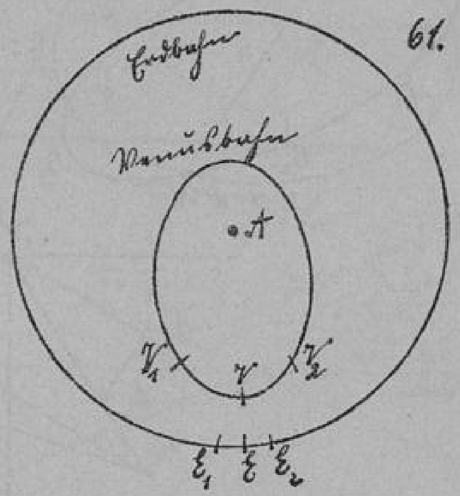
59.



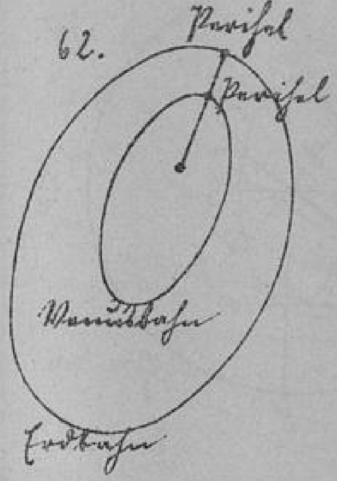
60.



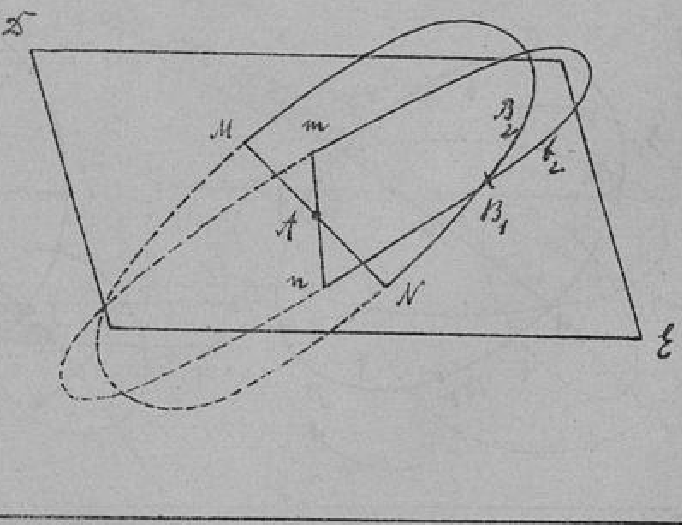
61.



62.

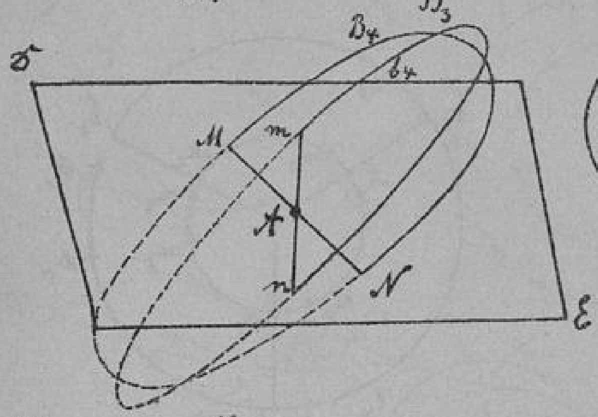


63.

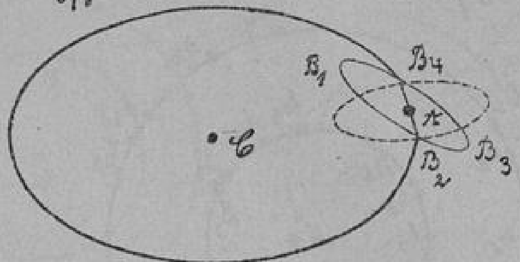


IV.

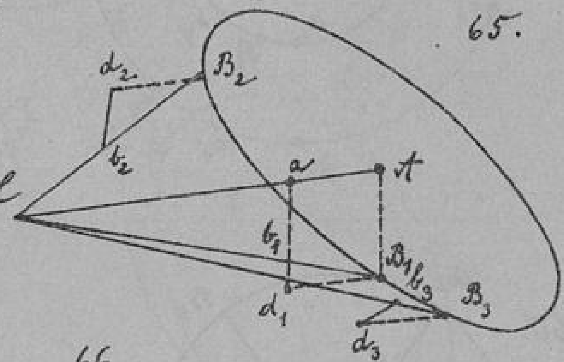
64.



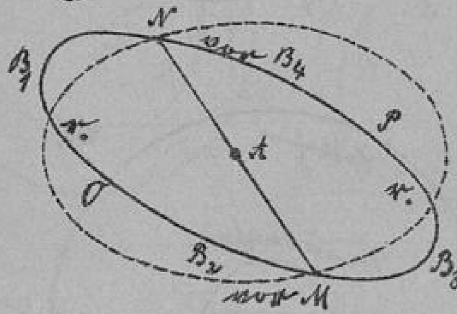
67.



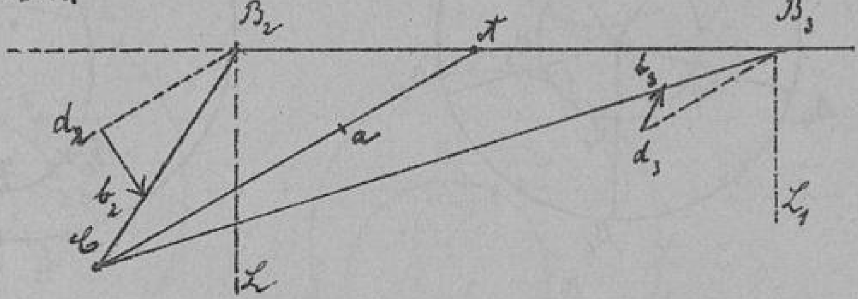
65.



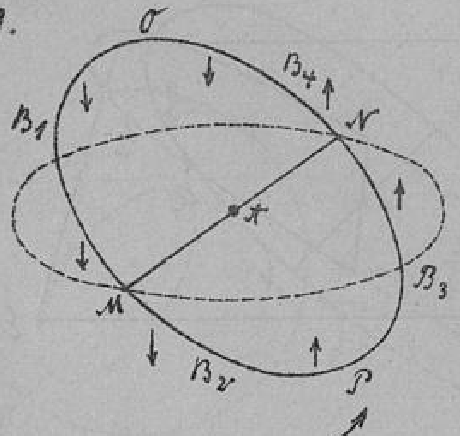
68.



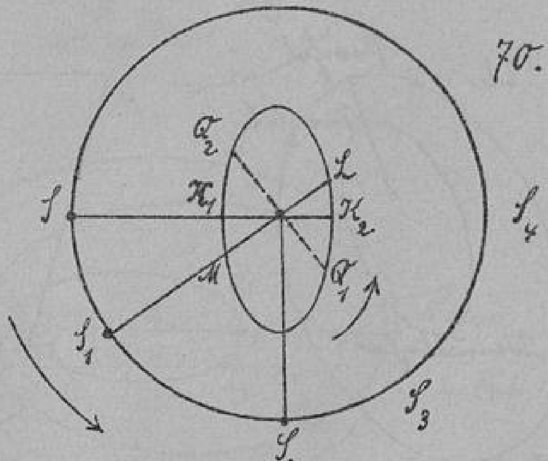
66.

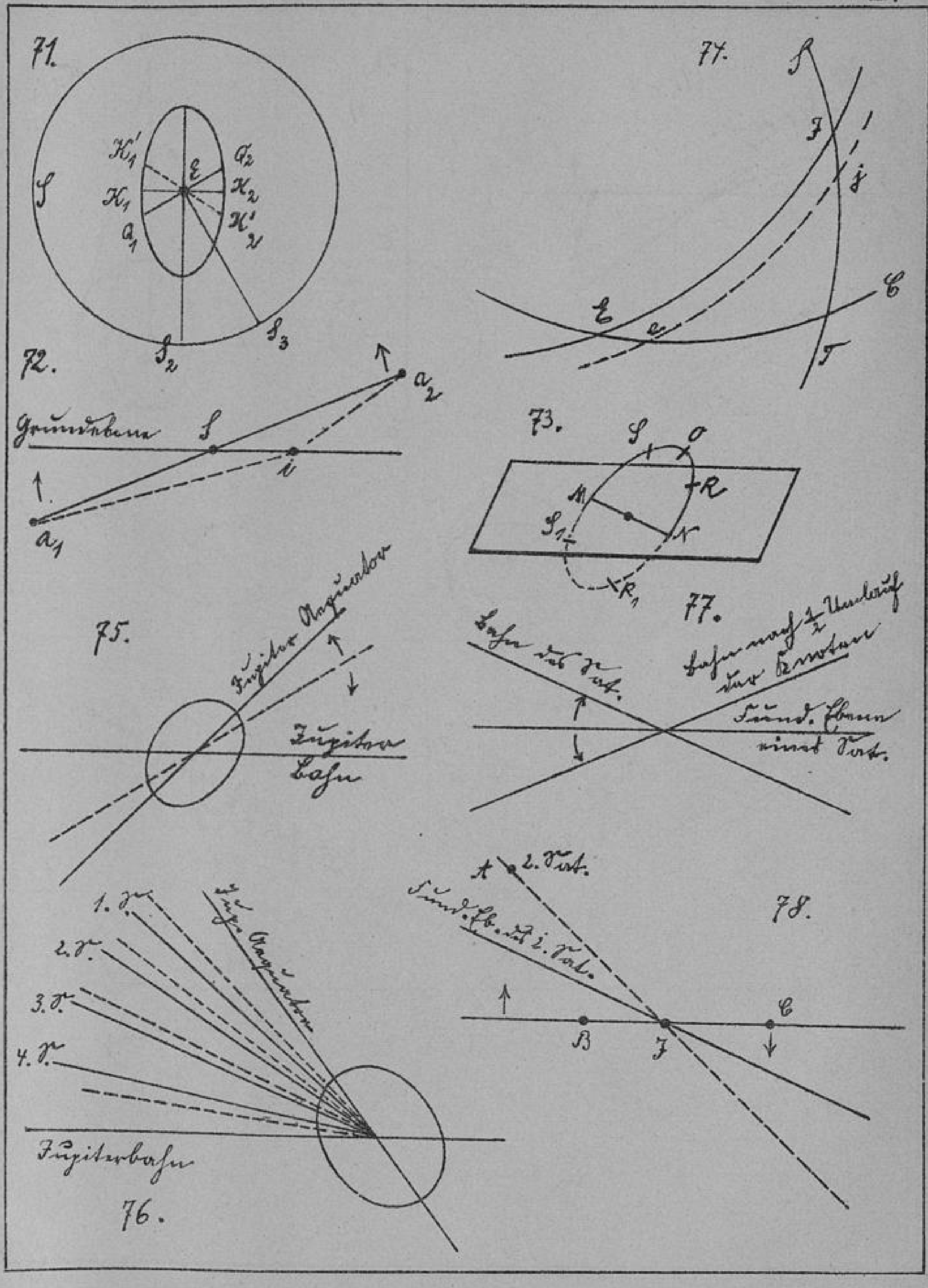


69.

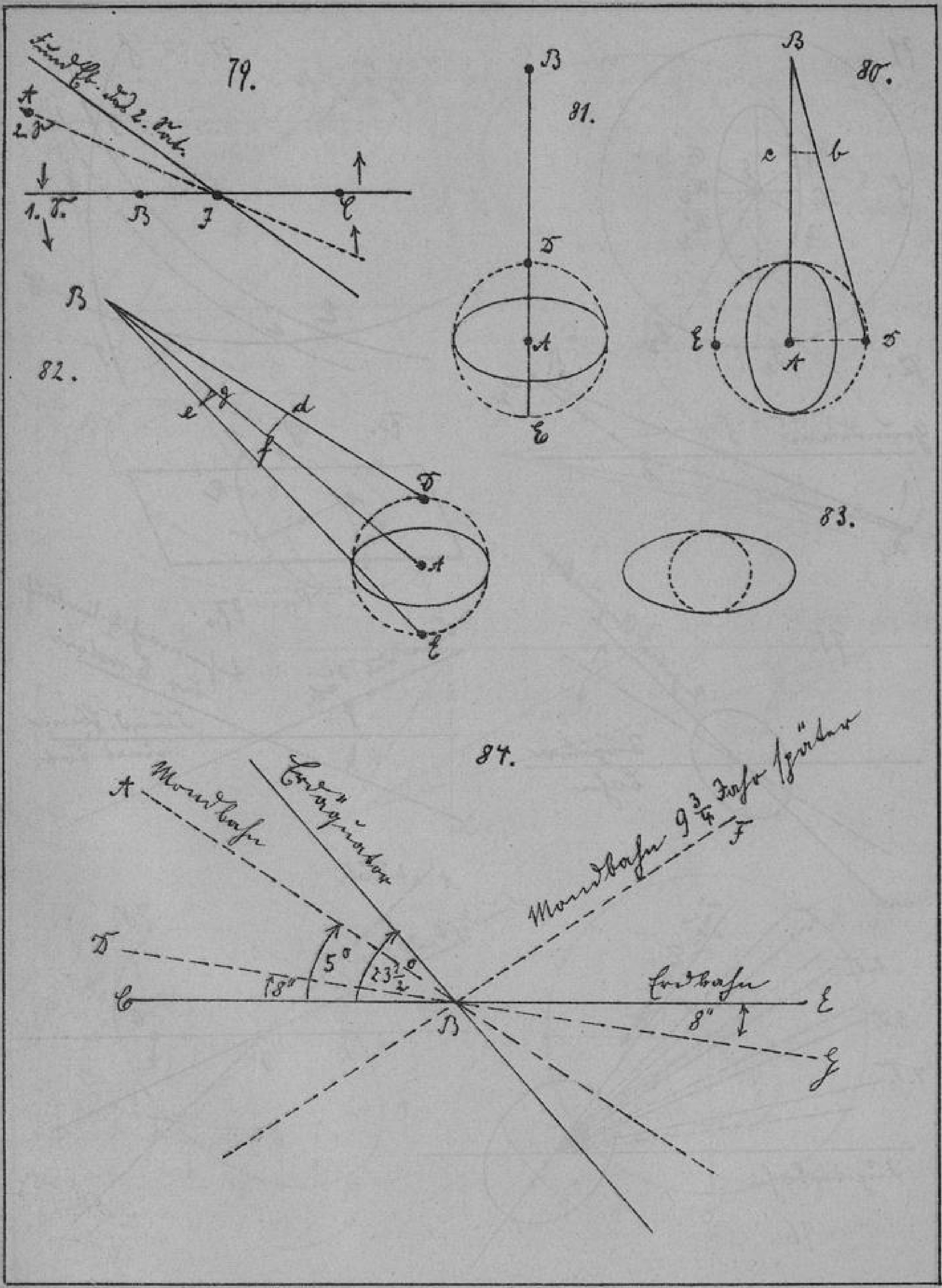


70.




71.
72.
Grundebene
73.
74.
75.
Jupiter Bahn
76.
Jupiterbahn
77.
78.

VI.



79.
80.
81.
82.
83.
84.
Mondbahn
Erdäquator
Mondbahn $9\frac{3}{4}$ Jahre später
Erdbahn
5°
$23\frac{1}{2}$°
8°

VI.