Königliche Waisen- und Schulanstalt zu Bunzlau.

Gymnasium.

Jahresbericht

über das

Schuljahr Ostern 1889 bis Ostern 1890

erstattet vom Direktor

Regierungs- und Schulrat Sander.

Beigegeben ist eine wissenschaftliche Abhandlung des Oberlehrers

Prof. Gauss.

Bunzlau 1890.
C. A. Voigt's Buchdruckerei (G. Wolf).

1890. Prgr. Nr. 174.

Schulnachrichten.

I. Allgemeine Lehrverfassung.

1. Übersicht über die einzelnen Lehrgegenstände.

<table>
<tr><th></th><th>VI.</th><th>V.</th><th>IV².</th><th>IV¹.</th><th>IIIb.</th><th>IIIa.</th><th>II.</th><th>I.</th><th>Sa.</th></tr>
<tr><td>Christliche Religionslehre . . .</td><td>3</td><td>2</td><td>2</td><td>2</td><td>2</td><td>2</td><td>2</td><td>2</td><td>17</td></tr>
<tr><td>Deutsch . . . .</td><td>3</td><td>2</td><td>2</td><td>2</td><td>2</td><td>2</td><td>b. 2 | a. 2</td><td>3</td><td>18</td></tr>
<tr><td>Latein . . . .</td><td>9</td><td>9</td><td>9</td><td>9</td><td>9</td><td>9</td><td>8</td><td>8</td><td>70</td></tr>
<tr><td>Griechisch . . . .</td><td>—</td><td>—</td><td>—</td><td>—</td><td>7</td><td>7</td><td>7</td><td>6</td><td>27</td></tr>
<tr><td>Französisch . . . .</td><td>—</td><td>4</td><td>5</td><td>5</td><td>2</td><td>2</td><td>2</td><td>2</td><td>22</td></tr>
<tr><td>Hebräisch (fakultativ) . . . . ,</td><td>—</td><td>—</td><td>—</td><td>—</td><td>—</td><td>—</td><td>(2)</td><td>(2)</td><td>(4)</td></tr>
<tr><td>Geschichte und Geographie . .</td><td>3</td><td>3</td><td>4</td><td>4</td><td>3</td><td>3</td><td>3</td><td>3</td><td>26</td></tr>
<tr><td rowspan="2">Rechnen und Mathematik . . .</td><td rowspan="2">4</td><td rowspan="2">4</td><td>M. 2</td><td>M. 2</td><td rowspan="2">3</td><td rowspan="2">3</td><td rowspan="2">b. 4 | a. 4</td><td rowspan="2">4</td><td rowspan="2">34</td></tr>
<tr><td colspan="2">R. 2</td></tr>
<tr><td>Naturbeschreibung . . . . . .</td><td>2</td><td>2</td><td colspan="2">2</td><td>2</td><td>2</td><td>—</td><td>—</td><td>12</td></tr>
<tr><td>Physik . . . .</td><td>—</td><td>—</td><td>—</td><td>—</td><td>—</td><td>—</td><td>2</td><td>2</td><td>4</td></tr>
<tr><td>Schreiben . . . .</td><td>2</td><td>2</td><td>—</td><td>—</td><td>—</td><td>—</td><td>—</td><td>—</td><td>4</td></tr>
<tr><td>Zeichnen (I—III fakultativ) . . .</td><td>2</td><td>2</td><td colspan="2">2</td><td colspan="4">2</td><td>10</td></tr>
<tr><td>Turnen . . . .</td><td colspan="2">2</td><td colspan="3">2</td><td colspan="3">2</td><td>6</td></tr>
<tr><td rowspan="2">Singen . . . .</td><td>2</td><td>2</td><td colspan="4">2</td><td colspan="2">1</td><td rowspan="2">8</td></tr>
<tr><td colspan="8">1</td></tr>
<tr><td></td><td>32</td><td>34</td><td>34</td><td>34</td><td>34</td><td>34</td><td>34</td><td>34</td><td></td></tr>
</table>

2. Tabellarische Übersicht über die Stundenverteilung,

Schuljahr 1889/90.

Nr.	Lehrer.	Prima.	Ober-Sekunda.	Unter-Sekunda.	Ober-Tertia.	Unter-Tertia.	Quarta I.	Quarta II.	Quinta.	Sexta	Stunden-Zahl.
1	**Sander,** Regierungs- u. Schulrat, Direktor.	3 Dtsch. 2 Grch. (Homer, Sophokl.)									5
2	**Faehrmann,** Prorektor. Ordinarius von IIa.	2 Franz.	2 Dtsch. 2 Französisch		2 Rel. 7 Lat. 2 Frz.						17
3	**Gauss,** Professor.	4 Math. 2 Phys.	4 Math.		3 Math.	3 Math.	2 Math.	2 Math.			20
4	**Luchterhand,** Oberlehrer. Ordinarius von II.	2 Rel. 2 Hebr.	2 Religion. 6 Latein. 2 Homer. 2 Hebräisch.			2 Rel. 2 Dtsch. 2 Ovid.					22
5	**Dr. Tegge,** Oberlehrer. Ordinarius von I.	8 Lat. 4 Grch.	2 Vergil. 5 Griechisch.		2 Ovid.						21
6	**Hering,** G.-L. Ordinarius von IV².					2 Frz.	5 Frz.	2 Rel. 2 Dtsch. 5 Frz.	2 Rel. 4 Frz.		22
7	**Comnick,** G.-L. Ordinarius von IIIb.					7 Grch. 3 Gesch. u. Gegr.	2 Gesch.	9 Lat. 2 Gesch.			23
8	**Dr. Haacke,** G.-L. Ordinarius von VI.		2 Physik.	4 Math.	2 Nat.	2 Nat.	2 Rechnen.		2 Nat. 4 Rch.	4 Rech. 2 Nat.	24
9	**Umpfenbach,** G.-L. Ordinarius von IV¹.					7 Lat.	2 Rel. 2 Dtsch. 9 Lat.			3 Rel. 1 Gesch.	24
10	**Dr. Blasius,** Gymnasiallehrer.	3 Gesch. u. Gegr.	3 Gesch. u. Gegr.	2 Dtsch.	2 Dtsch. 3 Gesch. u. Gegr.		2 Gegr.	2 Gegr.	2 Gegr.	2 Gegr.	21
11	**Rothe,** technischer Lehrer.	2 Turnen. 2 Zeichnen (fakultativ). 1 Gesang (Männerchor). 1 Gesang (Chorgesang).			2 Gesang.	2 Turnen.	2 Zeichnen. 2 Naturkunde.		2 Turnen. 2 Ges. 2 Zchn. 2 Schr.	2 Ges. 2 Zchn. 2 Schr.	28
12	**Dr. Karbaum,** Waisenhaus-Inspektor.				7 Grch.						7
13	**Scholz,** Kreisvikar, kath. Religionslehrer.	2 Religion.					2 Religion.				4
14	**Dr. Sattig,** wissenschaftl. Hilfslehrer. Ordinarius von V.								2 Dtsch. 9 Lat. 1 Gesch.	3 Dtsch. 9 Lat.	24

II. Übersicht der während des Schuljahres absolvierten Pensen.

Prima.

(Ordinarius: Oberlehrer Dr. Tegge.)

Evangelische Religionslehre, 2 Std. Lektüre der Briefe Johannis und des Römerbriefes im Grundtexte. Das Wichtigste aus der Glaubenslehre und Kirchengeschichte. Luchterhand.

Katholische Religionslehre. (In Prima befand sich kein Katholik.)

Deutsch, 3 Std. Sommer: Herder; Gedichte, namentlich Legenden, und Abhandlung über die Legende, sowie einzelne Schulreden aus dem Sophron. — Goethe; Lebenslauf mit Benutzung von Wahrheit und Dichtung, Gedichte in Auswahl, Iphigenia auf Tauris.

Winter: Goethe, Torquato Tasso. — Schiller; Lebenslauf, Abhandlung über naive und sentimentalische Dichtung, philosophische Gedichte. — Die Romantiker im kurzen Überblick. Die Vaterlandsdichter von 1813—1815, zugleich als Propheten auf die Gegenwart. Arndt, zugleich als Dichter geistlicher Lieder; dessen Nachruf an den Freiherrn von Stein.

Im ganzen Jahre: Grundbegriffe der Logik; Aufsätze; freie Vorträge über selbstgewählte Themata. Sander.

Themata der deutschen Aufsätze:

1. a) *Δεῖ διαιτητὰς ἀλλ᾽ οὐκ ἀντιδίκους εἶναι τοὺς μέλλοντας τἀληθὲς κρίνειν ἱκανῶς.* (*᾿Αριστοτ. περὶ οὐρανοῦ ά.*)
   b) Des Odysseus Rache, eine kritische Betrachtung.
2. Die Gleichnisse Homers.
3. Spotte nicht des Bildes, das die Sage sich erschuf! (Herder).
4. Vivere est militare. (Seneca).
5. Hellenen und Barbaren in Goethes Iphigenia auf Tauris.
6. Torquato Tasso von Goethe, — ein Trauerspiel?
7. Der Menschheit ihren möglichst vollständigen Ausdruck zu geben, ist der Begriff der Poesie. (Schiller)
8. *Φιλοσοφώτερον καὶ σπουδαιότερον ἱστορίας ποίησις.* (*᾿Αριστοτ. π. ποιητ.*)
9. *Αἰτία ἑλομένου. θεὸς ἀναίτιος.* (*Πλάτ. πολιτ. ί.*) (Mit Rücksicht auf Schillers Resignation).

Zur Entlassungsprüfung im Herbst 1889: *Τί λέγεις περὶ τοῦ ᾿Αχιλλέως τε καὶ τοῦ ᾿Οδυσσέως; πότερον ἀμείνω καὶ κατὰ τί φῂς εἶναι;* (*Πλάτ. ῾Ιππ. ἐλάττων*).

Frühjahr 1890: Ate und Nemesis im Schicksale des Königes Kreon (Sophokles' Antigone).

Lateinisch, 8 Std. Lectüre: S. Cic. Tuscul. I u. V; kursorisch Livius; Horaz carm. I u. II. — W. Tacitus Historien I—III; kursorisch Livius; Horaz Satiren, Auswahl. — Repetition der Grammatik; Idiomatik. Lateinsprechen im Anschluss an die Lektüre. Wöchentlich eine schriftliche Arbeit. Tegge.

Themata der lateinischen Aufsätze:

I. Vis consili expers mole ruit sua.
II. Et facere et pati fortia vere Romanum est.
III. Horatius utrum laudator an adulator Augusti appellandus sit.
IIII. *Τί λέγεις περὶ τοῦ Ἀχιλλέως τε καὶ Ὀδυσσέως; πότερον ἀμείνω καὶ κατὰ τί φῄς εἶναι;*
V. Pecuniae fugienda cupiditas; nihil enim est tam angusti animi tamque parvi quam amare divitias.
Qui studet optatam cursu contingere metam, Multa tulit fecitque puer: sudavit et alsit. (Klassenaufsatz).
VI. Secundae res acrioribus stimulis animos explorant, quia miseriae tolerantur, felicitate corrumpimur.
Ἔργα νέων, βουλαὶ δὲ μέσων, εὐχαὶ δὲ γερόντων (Klassenaufsatz).
VII. Maior post otia virtus (Ia).
Externus timor maximum est vinculum concordiae (Ib).
VIII. Quod Pyrrhus dixit hydrae Romam non dissimilem esse, omnibus bellis comprobatum est.
Ut virtutibus Alexander Magnus eluxit, sic vitiis erat obrutus (Klassenaufsatz).

Zur Entlassungsprüfung im Herbst 1889: Veteres Graeci et Romani saepe adversus eos qui optime de patria meruerant gravius statuerunt.

Im Frühjahr 1890: Concordia parvas res crescere, discordia magnas dilabi exemplis ex historia et Graecorum et Romanorum desumptis comprobatur.

Griechisch, 6 Std. Prosa: 4 Std. Wiederholung und Erweiterung der Grammatik gelegentlich der Lektüre. Lektüre: S. Lysias; kursorisch Herodot; W. Plato; Apologie, Euthyphron, Kriton; kurs. Arrian Anabasis V—VII. Tegge.

Dichtung, 2 Std. Sommer: Homers Ilias, Gesang XI—XIV einschliesslich. — Winter: Sophokles' Antigone. Ilias, Gesang XV—XVIII (teilweis privatim). Sander.

Französisch, 2 Std. Lektüre: Athalie par Racine. Ausgewählte Reden Mirabeau's. — Wiederholung des grammatischen Kursus und Synonymik. Üebersicht über die Litteraturgeschichte. Übungen im mündlichen Gebrauche der Sprache; dreiwöchentlich ein Extemporale. Faehrmann.

Hebräisch, 2 Std. Lektüre aus den historischen Büchern und Psalmen. Vervollständigung der Formenlehre und die wichtigsten syntaktischen Regeln nach der Grammatik von Kautzsch. Schriftliche Analysen nach Bedürfnis. Luchterhand.

Geschichte und Geographie, 3 Std. Geschichte der Neuzeit von 1648—1871. Geschichtliche Wiederholungen. Herbst, historisches Hilfsbuch II. u. III. — Vierwöchentlich geographische Wiederholungen. Blasius.

Mathematik, 4 Std. Algebraische Gleichungen; der binomische Lehrsatz; Kettenbrüche; Kombinationslehre (§ 19—23; 26—32). — Vervollständigung der Trigonometrie. — Dreiwöchentlich eine schriftliche Arbeit. Gauss.

Mathematische Abiturienten-Aufgaben:

Michaelis 1889: 1. Ein Dreieck aus V, m, β-γ zu konstruieren. — 2. Jemand kaufte für 1938 M. Pferde, Ochsen und Schafe, im Ganzen 26 Stück, und bezahlte für jedes Pferd 150 M., für jeden Ochsen 108 M. und für jedes Schaf 7,50 M. Wieviel Pferde, Ochsen und Schafe erhielt er? — 3. Zur Berechnung eines Dreiecks sind gegeben s_1, h, β-γ. $s_1=0{,}08148$, $h=0{,}20952$, $\beta-\gamma=11^\circ 03' 18''$. — 4. Das Volumen eines geraden Cylinders, dessen Grundkreisradius gleich dem grösseren Abschnitte der von innen stetig geteilten Höhe ist, aus der Oberfläche O zu berechnen. $\overline{O}=77$ qm, $\pi=\frac{22}{7}$.

Frühjahr 1890: 1) Ein Dreieck zu konstruieren aus $t:p\,(=m:n)$, γ, $2a-b$. — 2) Die quadratische Gleichung $a\,b\,x^2 - (a^2+b^2)\,x + a^2 - b^2 = 0$ durch Zerlegung in 2 Faktoren aufzulösen. 3) Ein Dreieck aus $b+c$, ϱ_2, ϱ_3 zu berechnen. $b+c = 0{,}63147$, $\varrho_2 = 0{,}24444$, $\varrho_3 = 0{,}18333$. — 4) Ein Cylinder und ein gerader Kegel haben gleiche Volumina und gleiche

Höhen, und die Differenz aus dem Mantel des Cylinders und der Summe seiner Grundflächen ist gleich der Differenz aus dem Mantel und der Grundfläche des Kegels. Wie gross ist das Volumen beider Körper, wenn die Höhe h desselben gegeben ist? h = 2 dm.

Physik, 2 Std. Mechanik flüssiger Körper. Akustik. Optik. Gauss.

Sekunda.

(Ordinarius: Oberlehrer Luchterhand.)

Evangelische Religionslehre, 2 Std. Bibelkunde und Geschichte des Reiches Gottes im neuen Testament. Lektüre ausgewählter Abschnitte aus dem Evangelium Matthäi im Grundtexte. Wiederholung von Kirchenliedern. Luchterhand.

Katholische Religionslehre, 2 Std. (kombiniert mit Obertertia). Kirchengeschichte. Von der abendländ. Kirchenspaltung bis auf die Gegenwart (Nach Koenigs Lehrb.) Scholz.

Deutsch, 2 Std. Sommer: Lektüre und Besprechung der Gedichte Schillers „Spaziergang", „Klage der Ceres", „Das Eleusische Fest", „Das Siegesfest", „Sprüche des Confucius", Goethes „Der Fischer", „Erlkönig". Im Anschluss daran Rhetorik und Poetik. Besprechung der Privatlektüre von Schillers „Wilhelm Tell", „Don Carlos", „Die Braut von Messina". (Geeignete Dichterstellen wurden memoriert.) — Winter: Lektüre und Besprechung von Schillers „Wallenstein" (T. 1 u. 2). Im Anschluss an die Korrektur der vierwöchentlichen Aufsätze Grammatik, Stilistik und Dispositionslehre. — Freie Vorträge aus dem Gebiete der gelesenen Dramen und des Nibelungenliedes. IIa. Faehrmann. IIb. Blasius.

Themata der deutschen Aufsätze:

Obersekunda:

1. Warum begehen wir das Andenken grosser Männer?
2. Charakteristik des Rudenz in „Wilhelm Tell" — als des Gegners und des Freundes der Volkssache.
3. Und die Sonne Homers, siehe! sie lächelt auch uns.
4. Die Freundschaft des Don Carlos und des Marquis Posa. (Mit Bezugnahme auf den dritten Brief in Schillers „Briefe über Don Carlos".)
5. Toujours en vedette!
6. Ein Vergleich zwischen dem Wachtmeister und dem Ersten Jäger in Schillers „Wallensteins Lager".
7. Nicht an die Güter hänge dein Herz,
   Die das Leben vergänglich zieren!
   Wer besitzt, der lerne verlieren,
   Wer im Glück ist, der lerne den Schmerz!
8. Siegfried, der Nibelungenheld, ein Bild des deutschen Jünglings.
9. Der Siege göttlichster ist das Vergeben! (Klassenaufsatz.)

Untersekunda:

1. Warum war der Aufstand der Gallier im Jahre 52 v. Chr. für die Römer der gefährlichste?
2. Inwiefern ist die erste Scene von Schillers „Tell" geeignet, in die Handlung einzuführen?
3. Wie begründen die Eidgenossen in der Rütli-Scene die Rechtmässigkeit ihrer Handlungsweise?
4. Inwiefern ist innere Zwietracht für ein Volk verderblicher als äussere Gefahren?
5. Rühmend darf's der Deutsche sagen,
   Höher darf das Herz ihm schlagen,
   Selbst erschuf er sich den Wert!
6. Warum ist gerade der Rhein den Deutschen so lieb?
7. Was erfahren wir aus „Wallensteins Lager" über die Person des Feldherrn?
8. Die Sendung Questenbergs an Wallenstein. (Klassenarbeit.)
9. Labor voluptasque dissimillima natura societate quadam inter se naturali sunt iuncta.

Latein, 8 Std., Prosa: Lektüre: Liv. lib. XXII. Cic. Cat. I—IV und pro Sex. Roscio. Sallust. Cat. — Repetition und Erweiterung der Grammatik. Das Notwendigste aus der Stilistik. Wöchentlich eine schriftliche Arbeit (alle 3 Wochen eine Klassenarbeit). 2 Aufsätze in IIa. — Luchterhand. Vergil Aeneis I—III. Tegge.

Themata der lateinischen Aufsätze:

I. Fabii Maximi ratio belli gerendi adversus Hannibalem quam utilis fuerit rei publicae Romanae.
II. De Themistoclis in patriam meritis.

Griechisch, 7 Std. Wiederholung und Erweiterung des Pensums von IIIa. — Syntax: Artikel, Adjektiv, Pronomen, Kasus-, Tempus- und Moduslehre, Infinitiv und Partizipium. — Alle 2 Wochen eine schriftliche Arbeit. — Lektüre: S. Xenophon Cyropaedie; W. Herodot I. Tegge. — Hom. Odyss. I—IV in IIb und V—XII in IIa. Luchterhand.

Französisch, 2 Std. Lektüre: Au coin du feu par Souvestre in Auswahl; Histoire de Jeanne d'Arc par Barante, Chap. 1–6. Übungen im mündlichen Gebrauche der Sprache. Memorieren aus Béranger. — Grammatik: Plötz, Abschnitt VII, VIII, IX. Wiederholung aus Abschnitt III. u. IV. Alle 3 Wochen eine schriftliche Arbeit. Faehrmann.

Hebräisch, 2 Std. Leseübungen. Formenlehre bis zu den verb. gutt. nach der Grammatik von Kautzsch. Analysierende Erklärung einiger Abschnitte aus dem Übungsbuche von Kautzsch. Erlernung von Vokabeln. Luchterhand.

Geschichte und Geographie, 3 Std. Römische Geschichte. Herbst, historisches Hilfsbuch I. Wiederholung der Geschichte der Neuzeit. — Geographie: Vierzehntägige Wiederholung der aussereuropäischen Erdteile. Blasius.

Mathematik, 4 Std. Obersekunda: Logarithmierung und Gebrauch der Logarithmentafeln. Arithmetische und geometrische Progressionen; Zins-, Zinseszins- und Rentenrechnung (§ 15—16; § 24—25; Anhang II–III). — Das reguläre Polygon und der Kreis; Quadratur und Rektifikation des Kreises (§ 48—50). — Trigonometrie (§ 1—11). — Dreiwöchentlich eine schriftliche Arbeit. Gauss.

Untersekunda: Potenzierung und Radizierung (§ 11—14); allgemeine Grössenlehre und Lehre von den Proportionen (17–18). — Ausmessung gradliniger Figuren; Proportionalität von Strecken und Aehnlichkeit der Polygone (§ 35—38; § 42—47). Lineare Gleichungen mit mehreren Unbekannten und quadratische Gleichungen mit einer Unbekannten. Haacke.

Physik, 2 Std. Allgemeine Eigenschaften der Körper. Wärmelehre. Haacke.

Obertertia.

(Ordinarius: Prorektor Faehrmann)

Evangel. Religionslehre, 2 Std. Bibelkunde und Geschichte des Reiches Gottes im alten Bunde bis David. Lektüre aus den historischen Büchern der Bibel A. T. Einleitung in den Katechismus. Erklärung des I. und II. Hauptstücks mit den darauf bezüglichen Bibelstellen. Wiederholung und Memorieren der übrigen Hauptstücke. Erklärung und Memorieren von 4 Kirchenliedern und Wiederholung früher gelernter. Faehrmann.

Katholische Religionslehre, 2 Std. (kombiniert mit Sekunda).

Deutsch, 2 Std. Lektüre und Erklärung ausgewählter Gedichte und Prosastücke (besonders Schillerscher und Uhlandscher Balladen und der Dichter der Freiheitskriege aus Hopf und Paulsiek, Lesebuch für Tertia, und aus Echtermeyer. Uebungen im Disponieren und Deklamieren. 5 Gedichte gelernt und die in den früheren Klassen gelernten wiederholt. Alle drei Wochen ein Aufsatz. Blasius.

Latein, 9 Std. Prosa: 7 Std. Caesar de bell. Gall. V, VI, VII. Wiederholung und Ergänzung der Kasuslehre; Tempus- und Moduslehre. Das Wesentlichste vom Infinitiv, Participium, Gerundi(v)um, Supinum, den Fragesätzen und der oratio obliqua, nach Seyffert, Schulgrammatik. Übersetzen aus Süpfle I. Phraseologie. Wöchentlich eine schriftliche Arbeit. Faehrmann. — Ovid: 2 Std. Ausgewählte Stücke aus den Metamorphosen. Tegge.

Griechisch, 7 Std. Wiederholung der regelmässigen Formenlehre. Die Verba auf *μι* und die unregelmässigen Verba wurden erlernt und durch mündliche und schriftliche Übungen befestigt. Das Wichtigste aus der Syntax. Xenoph. Anab. lib. I, II, III. — Wöchentlich eine schriftliche Arbeit. Karbaum.

Französisch, 2 Std. Wiederholung der unregelmässigen Verba nach Plötz, Abschn. I u. II. Gebrauch von avoir und être, der reflexiven und unpersönlichen Verba, nach Abschn. III. Formenlehre des Substantivs, Adjektivs, Adverbs und das Zahlwort, nach Abschn. IV. Das Hauptsächlichste aus der Tempus- und Moduslehre im Anschlusse an die Lektüre. Memorieren von Versen. Lektüre: Rollin, histoire de la seconde guerre punique. Zweiwöchentlich eine schriftliche Arbeit. Faehrmann.

Geschichte und Geographie, 3 Std. Brandenburgisch-preussische Vorgeschichte und deutsche Geschichte von 1648 bis 1871. Eckertz, Leitfaden. — Geographie 1 Std. Die ausserdeutschen Länder Europas. Daniel, Leitfaden. Blasius.

Mathematik, 3 Std. Arithmetik (§ 1—10). Lineare Gleichungen mit einer Unbekannten (zweite Stufe). — Anwendungen des Pythagoreischen Lehrsatzes; die Kreislehre (§ 33; § 22—29). Konstruktionsaufgaben. — Dreiwöchentlich eine schriftliche Arbeit. Gauss.

Naturkunde, 2 Std. Mineralogie und Geologie. Haacke.

Untertertia.

(Ordinarius: Gymnasiallehrer Comnick.)

Evangelische Religionslehre, 2 Std. Bibelkunde und Geschichte des Reiches Gottes im alten Bunde bis David. Lektüre aus den historischen Büchern und Psalmen. Erklärung des I. und II. Hauptstücks des Katechismus. Erklärung und Memorieren von 4 Kirchenliedern und Wiederholung früher gelernter. Luchterhand. (In III b befand sich kein Katholik.)

Deutsch, 2 Std. Lektüre und Erklärung ausgewählter Stücke aus dem Lesebuche von Hopf und Paulsiek und aus Echtermeyer. Übungen im Deklamieren und Disponieren. Alle drei Wochen ein Aufsatz. Luchterhand.

Latein, 9 Std. Prosa: 7 Std. Wiederholung und Erweiterung von Ellendt-Seyffert §§ 129—201. Aus §§ 234—342 das Wesentlichste im Anschluss an die Lektüre. Stilistische Übungen nach Süpfle I. Caesar de bell. gall. lib. I.—IV. Wöchentlich eine schriftliche Arbeit. (Alle 3 Wochen eine Klassenarbeit.) Umpfenbach. — Ovid. (2 Stunden.) Auswahl aus den Metamorphosen. Luchterhand.

Griechisch, 7 Std. Regelmässige Formenlehre, Koch §§ 1—51; aus §§ 57 und 61 das Wichtigste. Übersetzungsübungen nach Halm. Xenophon Anabasis I, c. 1—6. Wöchentlich eine schriftliche Arbeit. Comnick.

Französisch, 2 Std. Plötz, leç. 1—23. Repetition des Pensums von Quarta. Das Wichtigste aus der Syntax im Anschluss an die Lektüre. Lektüre: Rollin, histoire de la seconde guerre punique. 14tägig eine schriftliche Arbeit. Hering.

Geschichte und Geographie, 3 Std. Deutsche Geschichte bis zum Westfälischen Frieden. Geographie von Mittel-Europa. Comnick.

Mathematik, 3 Std. Einübung der vier ersten Rechenoperationen mit allgemeinen Zahlzeichen. Lineare Gleichungen mit einer Unbekannten (erste Stufe). — Linien im Dreieck, das Viereck; Gleichflächigkeit der Figuren bis zum Pythagoreischen Lehrsatze (§ 14—21; § 30—32). — Dreiwöchentlich eine schriftliche Arbeit. Gauss.

Naturkunde, 2 Std. Bau und Leben der Pflanzen. Bau des menschlichen Körpers. Haacke.

Quarta I. und II.

(Ordinarius von Quarta I: Gymnasiallehrer Umpfenbach; Ordinarius von Quarta II: Gymnasiallehrer Hering.)

Evangelische Religionslehre, 2 Std. Erweiterung und Vertiefung des Hauptsächlichsten aus dem Pensum der V. und VI. Genaue Durchnahme der Gleichnisse und Wunder Christi.

Kindheit Jesu, sein Leiden, seine Auferstehung und Himmelfahrt. Die Reisen des Apostels Paulus nach der Apostelgeschichte. Durchnahme des III. Artikels. 4 Kirchenlieder. IV¹ Umpfenbach. IV² Hering.

Katholische Religionslehre. Katechismus: I. Hauptstück. 9.—12. Glaubensartikel und II. Hauptstück. Die 10 Gebote Gottes. (Nach dem neuen Katechismus.) Biblische Geschichte: Von der Trennung des Reiches Israel bis zum Ende des alten Testamentes. (Nach Schusters bibl. Gesch.) Scholz.

Deutsch, 2 Std. Ausgewählte Gedichte und Prosastücke aus Hopf u. Paulsiek, Lesebuch für Quarta, gelesen und erklärt. 4 Gedichte gelernt und die in VI. und V. gelernten wiederholt. Der zusammengesetzte Satz. Alle 3 Wochen ein Aufsatz. IV¹ Umpfenbach. IV² Hering.

Latein, 9 Std. Ellendt-Seyffert, §§ 129—201 mit Auswahl. Wiederholung der Formenlehre, insbesondere § 102—116; Uebersetzungsübungen nach Süpfle I. Wöchentlich eine schriftliche Arbeit. (Alle drei Wochen eine Klassenarbeit.) — Cornelius Nepos IV¹: Hann. Them. Alcib. Con. Cim. Lysand. Agesil. Pelop. Arist. Ham. Umpfenbach. — IV²: Milt. Arist. Hann. Pelop. Epam. Conon. Thrasyb. Pausan. Hamilc. Alcib. Comnick.

Französisch, 5 Std. Plötz, Elementarbuch der französischen Sprache, leç. 54—91. Wiederholung des Pensums von V. Lesestücke des angehängten Lesebuchs. Sämtliche unregelmässige Verba in Verbindung mit mündlichen Übungen. Aus Plötz I, leç. 1—10. Alle 14 Tage eine schriftliche Arbeit. Hering.

Geschichte, 2 Std. Im Sommer: Griechische Geschichte. Im Winter: Römische Geschichte. Comnick.

Geographie, 2 Std. Grundzüge der physischen Geographie. Die aussereuropäischen Erdteile. Daniel, Leitfaden. Blasius.

Mathematik, 2 Std. Planimetrie bis zu den Kongruenzsätzen (§ 1—13). Gauss.

Rechnen, 2 Std. Repetition der Bruchrechnung. Zinsrechnung. Haacke.

Naturkunde, 2 Std. Sommer: Kleinblütige Phanerogame und einige Kryptogame. Bildung von Familien- und Gattungsbegriff. — Winter: Bau der wichtigsten Organe des menschlichen Körpers. Gruppierung der Tiere zu Ordnungen und Klassen. Rothe.

Quinta.

(Ordinarius: Dr. Sattig.)

Evangelische Religionslehre, 2 Std. Wiederholung des Pensums von VI. Die Weissagungen auf Christus. Ausgewählte biblische Geschichten des neuen Testaments. (Zahn 1—65.) Der 2. Artikel mit den dazu gehörigen Sprüchen. Das III. Hauptstück gelernt. Hering.

Katholische Religionslehre, 2 Std. (Kombiniert mit IV.)

Deutsch, 2 Std. Ausgewählte Lesestücke aus Hopf u. Paulsiek. Übungen im Deklamieren und Nacherzählen. Die Lehre von der Zeichensetzung. Der einfache Satz. Alle 14 Tage eine Arbeit, im Sommer Diktate, im Winter kleine Stilübungen. Sattig.

Latein, 9 Std. Wiederholung und Erweiterung des Sextanerpensums. Verba nach Ellendt-Seyffert, §§ 93—105. Acc. c. inf., Participialkonstruktionen, Gebrauch von ut, ne, cum, postquam; Konstruktion der Städtenamen und das Wichtigste über die Zeitbestimmungen. Wellers Erzählungen aus Herodot mit einigen Auslassungen. Wöchentlich eine schriftliche Arbeit. (Alle 3 Wochen eine Klassenarbeit.) Sattig.

Französisch, 4 Std. Plötz, Elementarbuch der französischen Sprache, leç. 1—53. Der Ind. Act. der 1. u. 2. Konj. Alle 14 Tage eine schriftliche Arbeit. Hering.

Geschichte, 1 Std. Ausgewählte Geschichtsbilder aus Mittelalter und Neuzeit. Sattig.

Geographie, 2 Std. Grundzüge der mathematischen Geographie. Europa. Daniel, Leitfaden. Blasius.

Rechnen, 4 Std. Dezimalbrüche und gewöhnliche Brüche. Propädeutischer Unt erricht in der Geometrie. Harms und Kallius Rechenbuch. Haacke.

Naturkunde, 2 Std. S.: Beschreibung von 15 Repräsentanten wichtiger phanerogamischer Familien. W.: Skelett des menschlichen Körpers. Typen von Glieder- und Weichthieren. Haacke.

Sexta.

(Ordinarius: Gymnasiallehrer Dr. Haacke.)

Evangelische Religionslehre, 3 Std. Biblische Geschichten des A. T. nach Zahn §§ 1—55 (mit Auswahl). Das erste Hauptstück mit den dazu gehörigen Sprüchen und der erste Artikel. Das 2. Hauptstück gelernt. Das christliche Kirchenjahr. 4 Kirchenlieder. Umpfenbach.

Katholische Religionslehre, 2 Std. (Kombiniert mit IV.)

Deutsch, 3 Std. Ausgewählte Lesestücke aus Hopf und Paulsiek. Übungen im Deklamieren und Nacherzählen. Das Wichtigste aus der deutschen Formen- und Satzlehre. Einübung der Rechtschreibung durch wöchentliche Klassenarbeiten. Sattig.

Latein, 9 Std. Die regelmässige Nominal- und Verbalflexion, Comparation, Pronomina, Numeralia, Adverbia, Praepositionen; aus der Syntax das Notwendigste. Vokabellernen. Wöchentlich eine schriftliche Arbeit. (Alle 3 Wochen eine Klassenarbeit.) Sattig.

Geschichte, 1 Std. Im Sommer: Griechische Heldensagen, bes. Herkules und Odysseus. Im Winter: Deutsche Heldensagen: Walter von Aquitanien, Dietrich von Bern, Wittig, Siegfried, Gudrun. Umpfenbach.

Geographie, 2 Std. Geographische Vorbegriffe. Die aussereuropäischen Erdteile. Daniel, Leitfaden. Blasius.

Rechnen, 4 Std. Die 4 Spezies mit gleich und ungleich benannten Zahlen. Elemente der Bruchrechnung. Harms und Kallius, Rechenbuch. Haacke.

Naturkunde, 2 Std. S.: Beschreibung grossblumiger Phanerogamen. W.: Das Äussere des menschlichen Körpers. Repräsentanten aus allen Klassen der Wirbeltiere. Haacke.

Von der Teilnahme am Religionsunterrichte war kein Schüler dispensiert.

Technischer Unterricht.

a. Turnen.

(Techn. Lehrer Rothe.)

S. und W. 6 Std. I. Abt. (Prima, Sekunda, Obertertia) 2 Std.: Stab-, Hantel-, Gerät- und Rüstübungen II. Abt. (Untertertia und Quarta) 2 Std.: Frei-, Ordnungs- und Stabübungen; Übungen an Reck, an Leiter und Barren; Bock-, Frei- und Tiefsprung. III. Abt. (Quinta und Sexta) 2 Std.: Frei-, Ordnungs- und Stabübungen. Einfache Stütz- und Hangübungen; Freispringen; Schwebeübungen, Turnspiele. — Dispensiert waren 12 Schüler.

b. Gesang.

(Techn. Lehrer Rothe.)

Sexta, 2 Std. Durtonleiter und Akkorde, 10 leichte Choräle, 10 Schullieder, einstimmig. Einübung der Noten. Drath, Choralmelodien und Schullieder 1. und 2. Heft. Singtafeln von Kothe.

Quinta, 2 Std. Singen nach Noten. Versetzungszeichen, Intervalle. 10 Choräle. 10 Schullieder. Drath, Choralmelodien und Schullieder, 3. Heft. Singtafeln von Kothe. Einführung in den zweistimmigen Gesang.

Quarta[1] u. [2] und Tertia a. u. b. (kombiniert), 2 Std. Molltonleiter, Treffübungen, 6 schwerere Choräle (besonders in Moll), und 6 Schullieder. (Hefte wie bei Quinta.)

Sekunda und Prima (kombiniert), 1 Std. 3- und 4-stimmiger Männergesang. Vorübung zum Gesange im gemischten Chore.

Chor (aus allen Klassen kombiniert), 1 Std. Einübung vierstimmiger Choräle, Psalmen, Motetten. Chorwerke zur Aufführung bei Schulfeiern und zum Konzert des Gymnasiums.

c. Zeichnen.

(Techn. Lehrer Rothe.)

Sexta, 2 Std. Die Elemente der Formenlehre, zuerst gerade Linien in verschiedenen Richtungen, Massen und Verbindungen als Freihandzeichnen; später auch gebogene Linien, Kreise, Rosetten, Blattformen.

Quinta, 2 Std Freihandzeichnen: Kreis, Ellipse, Fünfeck, Ornamente etc. nach Vorzeichnung des Lehrers. Die ersten Elemente des perspektivischen Zeichnens.

Quarta, 2 Std. Ornamente nach Vorzeichnung und nach Vorlagen. Unterweisung im Gebrauch von Reifsschiene, Winkeldreieck und Zirkel.

Fac.-Zeichnen (Tertia bis Prima), 2 Std. Perspektive-, Figuren-, Ornamente- und Plan-Zeichnen, zumeist nach Vorlagen.

d. Schreiben.

(Technischer Lehrer Rothe.)

Sexta, 2 Std. S.: Die deutschen und lateinischen Kleinbuchstaben in genetischer Reihenfolge. Taktschreiben. — W.: Die deutschen und lateinischen Grossbuchstaben. Anwendung derselben in Wörtern und Sätzen.

Quinta, 2 Std. Das deutsche und lateinische Alphabet in Wörtern und Sätzen; Schreiben auf einfache Linien und ohne Linien. Geschäftsaufsätze. Im letzten Quartal: Einübung der griechischen Buchstaben.

III. Verfügungen der vorgesetzten Behörde.

1. K. P. S. C. Breslau, den 21. Mai 1889. Mitteilung des Schreibens des Central-Comités des Preussischen Vereins zur Pflege im Felde verwundeter und erkrankter Krieger, unter Beilegung von „Die Organisation des Preussischen Landesvereins zur Pflege im Felde verwundeter und erkrankter Krieger und ihre Beziehung zu den Humanitätsbestrebungen der Gegenwart", Festrede gehalten am 25jährigen Stiftungstage des Vereins, den 6. Februar 1889, von Dr. W. Brinkmann — mit dem Veranlassen, die Förderung der Interessen des gedachten Vereins sich angelegen sein zu lassen.

2. K P. S. C Breslau, den 7. Juni 1889 Mitteilung des Ministerial-Erlasses vom 27. Mai v. J. — U. IIIb 6865 —, wonach Oberlehrer Dr. Jonas zum Kreisschulinspektor ernannt und ihm vom 1. Juni d J. ab die Verwaltung des Kreisschulinspektionsbezirkes Konitz übertragen worden ist.

3. K. P. S. C. Breslau, den 13. Juni 1889. Der Kandidat des höheren Schulamts Faber wird mit der Vertretung des zur militärischen Dienstleistung eingezogenen Dr. Sattig beauftragt.

4. K. P. S. C. Breslau, den 17. Juni 1889. Themata zur 9. Schlesischen Direktorenkonferenz:

1. Der Unterricht in der deutschen Grammatik nach Umfang, Methode und Lehrbüchern auf den höheren Lehranstalten (im Anschluss an die Reformen von Franz Kern).
2. Die Bedeutung und Einrichtung des lateinischen Aufsatzes auf dem humanistischen Gymnasium.
3. Was kann die Schule thun, um dem Gebrauch unnötiger Fremdwörter mit Erfolg entgegenzuarbeiten?

5. K. P. S. C. Breslau, den 25 Juni 1889. Beförderung des ordentlichen Lehrers Hering vom 1. Juni ab in die erste ordentliche Lehrerstelle, sowie der ordentlichen Lehrer Comnick, Dr. Haacke und Umpfenbach in die nächst höheren Lehrerstellen. Ernennung des bisherigen Hilfslehrers Dr. Blasius zum ordentlichen Lehrer. Übertragung der Stelle eines vollbeschäftigten wissenschaftlichen Hilfslehrers auf Dr. Sattig.

6. K. P. S. C. Breslau, den 19. November 1889. Mitteilung des Ministerialerlasses, nach welchem für die im Jahre 1890 zu Berlin abzuhaltende Turnlehrer-Prüfung Termin auf den 25. ff. Februar anberaumt ist.

7. K. P S. C. Breslau, den 6. Dezember 1889. Die Ferien für das Jahr 1890 fallen wie folgt:

Ostern. Schulschluss: Sonnabend, den 29. März. Anfang des neuen Schuljahres: Montag, den 14. April.

Pfingsten. Schulschluss: Freitag, den 23. Mai. Schulanfang: Donnerstag, den 29. Mai.

Sommerferien. Schulschluss: Freitag, den 4. Juli. Schulanfang: Mittwoch, den 6. August.

Michaelisferien. Schulschluss: Sonnabend, den 27. September. Schulanfang: Donnerstag, den 9. Oktober.

Weihnachtsferien. Schulschluss: Dienstag, den 23. Dezember. Schulanfang: Mittwoch, den 7. Januar 1891.

8. K P. S. C. Breslau, den 8 Januar 1890. Junge Leute, insbesondere Abiturienten von Realgymnasien, welche bereits in das akademische Studium eingetreten sind, sollen nach Vorschrift des Herrn Ministers nur unter vorgängiger ausdrücklicher Gutheissung des Königl. Prov.-Schulkollegiums als Gymnasiasten oder Hospitanten eines Gymnasiums aufgenommen werden. Junge Leute, welche bereits das akademische Studium begonnen haben, dürfen in die höheren Schulen von Universitätsstädten überhaupt nicht aufgenommen werden.

9. K. P. S. C. Breslau, den 11. Januar 1890. Mitteilung des Ministerial-Erlasses vom 31. Dezember 1889, wonach das Königliche Provinzial-Schulkollegium ermächtigt wird, das für das Gymnasium in Bunzlau zu beschaffende Flügelinstrument aus der Pianoforte-Fabrik von Gebauhr zu Königsberg i. Pr. zum Preise von 1000 Mk. zu beziehen.

IV. Chronik der Schule.

Das neue Schuljahr wurde am 25. April von dem Prorektor durch eine Andacht über 1 Joh. V. 4—10 eröffnet. Alsdann wurden die neu eintretenden Schüler aufgenommen und auf die ihnen eingehändigten Schulgesetze verpflichtet. Nach der Erläuterung derselben wurden in den Klassen die Stundenpläne diktiert und die nötigen Anordnungen getroffen.

Die Pfingstferien dauerten vom 8. Juni bis zum 13. Juni.

Der Gymnasiallehrer Umpfenbach und der wissenschaftliche Hilfslehrer Dr. Sattig wurden, ersterer vom 29. Juni, letzterer vom 14. Juni, je auf 8 Wochen zur militärischen Dienstleistung eingezogen.

Am Sterbetage Kaiser Friedrichs III. (15 Juni) hielt die Festrede der Gymnasiallehrer Umpfenbach über das Thema „Jugend- und Lehrjahre Friedrichs III.“

Am 17. Juni begrüsste nach der Morgenandacht der Prorektor den als Vertreter des Dr. Sattig vom Königlichen Provinzial-Schulkollegium dem Gymnasium zugewiesenen Kandidaten des höheren Schulamts Faber.

Am 21. Juni begleiteten die Lehrer und Mitschüler den am Mittwoch, dem 19 Juni, nach kurzem aber schwerem Leiden verstorbenen Zögling des Waisenhauses und Schüler der Quarta des Gymnasiums Paul Knappe zur letzten Ruhestätte. In ihm ist der Mutter ein hoffnungsvoller Sohn, dem Gymnasium ein durch Fleiss, Betragen und Leistungen ausgezeichneter Schüler entrissen. Friede sei mit ihm!

Am 22. Juni fanden Klassenspaziergänge der Schüler des Gymnasiums statt, an denen einige das Gymnasium besuchende Zöglinge des Waisenhauses teilnahmen, während die übrigen Gymnasiasten des Waisenhauses mit den der Mittelschule angehörenden Zöglingen, althergebrachter Sitte folgend, einen Ausflug nach dem Gröditzberg unternahmen.

Die Sommerferien dauerten vom 5. Juli bis 7. August. Beim Schulschluss gedachte der Berichterstatter des am 19. Juni verstorbenen hoffnungsvollen Zöglings der Anstalt Paul Knappe; sodann dankte er dem mit der Vertretung des Dr. Sattig vom 18. Juni bis zum Schulschluss vom Königlichen Provinzial-Schulkollegium betrauten Schulamtskandidaten Faber für seine treue Sorge um die auf kurze Zeit ihm anvertraute Jugend. Hieran schloss sich die dem Berichterstatter vom Königlichen Provinzial-Schulkollegium aufgetragene Einweisung des bisherigen wissenschaftlichen Hilfslehrers Dr. Blasius in das Amt eines ordentlichen Gymnasiallehrers, sowie ein herzlicher Glück- und Segenswunsch für den zum Königlichen Kreis-Schulinspektor in Konitz ernannten Oberlehrer Dr. Jonas, welchem die Anstalt ein dankbares Gedenken widmet. Über den bisherigen Lebensgang des nunmehrigen ordentlichen Gymnasiallehrers Dr. Blasius ergiebt das Nähere der Bericht, betreffend das Schuljahr 1886/7.

Bei der Mittwoch, den 28. August, unter dem Vorsitz des Königlichen Provinzial-Schulrats Herrn Hoppe abgehaltenen 49. Entlassungsprüfung erhielten die beiden Abiturienten, welche sich zur Prüfung gemeldet hatten, Arthur Dobernecker und Friedrich Augar, beide unter Befreiung von der mündlichen Prüfung, das Zeugnis der Reife.

Die Feier des Sedantages wurde Montag, den 2. September, durch einen Schulaktus von der Gesamtanstalt in der Aula des Gymnasiums begangen. Die Festrede hielt der Direktor. Im Anschluss an das Wort des Seneka: Habere eripitur, habuisse nunquam! zog er eine Parallele zwischen den deutschen Siegen von 1870 und 71 und den Tagen von Marathon und Salamis. — Die Stipendien aus der Dr. Schmidt-Dr. Rhodeschen Stiftung erhielten auf Beschluss des Lehrerkollegiums der Unterprimaner Friedrich Schwencke und der Obertertianer Arthur Gutsche.

Am 28. September erfolgte beim Schulschluss die feierliche Entlassung der beiden Abiturienten durch den Direktor.

Die Michaelisferien dauerten vom 29. September bis zum 8. Oktober (einschliesslich).

Das Wintersemester wurde am 9. Oktober mit einer Schulandacht eröffnet, welche der Prorektor abhielt.

Am Geburtstage Kaiser Friedrichs III. (18. Oktober) hielt die Festrede der Gymnasiallehrer Hering über „Kaiser Friedrich im Krieg und Frieden“.

Am 19. Oktober besuchte der Königliche Provinzial-Schulrat Herr Hoppe die Anstalt, wohnte einigen Unterrichtsstunden bei und nahm Einrichtungen und Sammlungen des Gymnasiums in Augenschein.

Am 31. Oktober, abends 5 Uhr, fand die herbstliche Abendmahlsfeier der gesamten Waisen- und Schulanstalt statt.

Die Schiller-Prämie wurde am Montage, dem 11. November, dem Ober-Primaner Karl Ender überreicht.

Die Weihnachtsferien dauerten vom 21. Dezember 1889 bis zum 7. Januar 1890.

Mittwoch, den 8. Januar 1890. Im Gymnasium wurden vor Abschluss der letzten Unterrichtsstunde die anwesenden Lehrer und Zöglinge in der Aula versammelt, um vom Prorektor Faehrmann in Vertretung des erkrankten Berichterstatters die Trauerkunde zu vernehmen, dass Ihre Majestät die Kaiserin Witwe Augusta am 7. Januar, nachmittags 4 Uhr, dem hochseligen Gatten und Sohn in die Ewigkeit gefolgt sei. Die Trauerandacht schloss sich der Verlesung des 90. Psalmes an.

Sonnabend, den 11. Januar 1890, wurde in der Stunde der Beisetzung der irdischen Hülle weiland Ihrer Majestät der Kaiserin und Königin Augusta, um 12 Uhr vormittags, im Anschluss an die Wochenschlussandacht vom Prorektor Faehrmann eine Trauerfeier abgehalten.

Donnerstag, den 16. Januar, wurden vom Königlichen Provinzial-Schulkollegium infolge Berichts des Direktors und Gutachtens des Königlichen Kreisphysikus Dr. Adelt über die bedrohliche Zunahme der Influenza unter den Schülern die hiesigen Königlichen Schulanstalten durch telegraphische Verfügung bis zum 29. Januar d. J. einschliesslich, geschlossen. Die Schüler wurden infolgedessen um 12 Uhr mittags entlassen.

Am 18. Januar erhielten die statutenmässigen Prämien aus der Kaiser-Wilhelm-stiftung von je 30 Mark der Unterprimaner Gustav Höfchen und der Quintaner Casimir von Kurnatowski als Söhne von Teilnehmern am deutsch-französischen Kriege von 1870/71.

Sonnabend, den 1. Februar 1890, wurde in der Schlussandacht, die Oberlehrer Dr. Tegge im Anschluss an Psalm 72 hielt, nachträglich des Geburtstages Sr. Majestät des Kaisers und Königs gedacht, der wegen der ausserordentlichen Ferien diesmal nicht in gewohnter festlicher Weise hatte begangen werden können.

Am Sonnabend, dem 22. Februar, fand das herkömmliche Konzert zum Zweck der Kaiser Wilhelmstiftung in der Aula des Gymnasiums statt. Der Gymnasialchor trug unter Leitung des technischen Lehrers Rothe im zweiten Teile des Konzertes „Das Lied von der Glocke", comp. von A. Romberg, vor. An dem erfreulichen Ausfalle der Aufführung hatte neben der fleissigen Einübung der Chöre die freundliche Mitwirkung mehrerer bewährter hiesiger Sänger und Sängerinnen einen sehr dankenswerthen Anteil.

Am Sterbetage Kaiser Wilhelms I. (Vorfeier am 8. März) hielt die Festrede der Gymnasiallehrer Dr. Blasius über Wilhelms I. Fürsorge für die arbeitenden Klassen der Bevölkerung; am 22. März, als dem Geburtstage des hochseligen Herrschers, Dr. Sattig über drei Regententugenden Wilhelms I.

Bei der Sonnabend, den 15. März, unter dem Vorsitze des königlichen Provinzial-Schulrats Herrn Hoppe abgehaltenen fünfzigsten Entlassungsprüfung des Gymnasiums erhielten sämmtliche 7 Abiturienten, die sich zur Prüfung gemeldet hatten, — Karl Ender, Karl Schmidt, Hans Harder, Richard Menzel, Alexander Hentschel, Curt Karbaum und Ernst Schneider — das Zeugnis der Reife, die drei ersten unter Entbindung von der mündlichen Prüfung. Dank der Verbindung des Waisenhauses und des Gymnasiums im Jahre 1886, gehen diesmal zuerst wieder seit dem Jahre 1810 Zöglinge des Waisenhauses (Harder, Menzel, Schneider) unmittelbar zur Universität ab.

Der Unterricht wird am Freitag, den 28. März geschlossen; wobei gleichzeitig die feierliche Entlassung der sieben Abiturienten erfolgt.

Die Konfirmation der einzusegnenden Schüler wird am 29. März unter gemeinsamer Abendmahlsfeier stattfinden.

V. Statistische Mitteilungen.

1. Frequenztabelle für das Schuljahr 1889/90.

	I.	IIa.	IIb.	IIIa.	IIIb.	IV¹.	IV².	V.	VI.	Sa.
1. Bestand am 1. Februar 1889	9	12	23	20	32	26	20	44	39	225
2. Abgang b. z. Schluss des Schuljahres 1888/89	—	11	17	20	28	19	17	40	36	188
3a. Zugang durch Versetzung zu Ostern . .	10	17	19	24	28	16	22	32	—	168
3b. Aufnahme zu Ostern	1	1	3	1	—	2	3	6	27	44
4. **Frequenz am Anfang des Schuljahres 1889/90**	20	19	28	25	32	26	27	42	30	249
5. Zugang im Sommer-Semester	—	—	1	—	—	—	—	—	1	2
6. Abgang im Sommer-Semester	2	—	3	1	—	2	2	1	—	11
7a. Zugang durch Versetzung zu Michaelis .	—	—	—	—	—	—	—	—	—	—
7b. Zugang durch Aufnahme zu Michaelis . .	—	—	—	—	—	1	1	3	4	9
8. **Frequenz am Anfang des Winter-Semesters**	18	19	26	24	32	25	26	44	35	249
9. Zugang im Winter-Semester	—	—	—	—	2	—	—	1	—	3
10. Abgang im Winter-Semester	1	—	1	—	—	—	—	—	1	3
11. Frequenz am 1. Februar 1890	17	19	25	24	34	25	26	45	34	249
12. Durchschnittsalter im Februar 1890 . . .	J. M. 18,10	17,7	17,1	15,10	14,4	13,5	13,4	12,4	10,2	

2. Religions- und Heimats-Verhältnisse der Schüler.

	Evgl.	Kath.	Diss.	Juden	Einh.	Ausw.	Ausl.
1. Am Anfang des Sommer-Semesters . . .	225	14	—	10	99	149	1
2. Am Anfang des Winter-Semesters	227	13	—	9	98	151	—
3. Am 1. Februar 1890	227	13	—	9	99	150	—

Das Zeugnis über die wissenschaftliche Befähigung für den einjährig-freiwilligen Dienst erhielten Ostern 1889: 17, Michaelis 1889: 3 Schüler.

3. Übersicht der Abiturienten.

Michaelis 1889.

No.	Vor- und Zuname.	Geburtstag u. Jahr.	Geburtsort.	Konfession.	Stand und Wohnort des Vaters.	Auf dem Gymn. seit	In Prima seit	Studium oder Beruf.
*185	Arthur Dobernecker	9. April 1869	Bunzlau, Kreis Bunzlau	evgl.	Feilenhauer, Bunzlau	Ostern 1878	Ostern 1887	Medizin.
*186	Friedrich Augar	6. Januar 1872	Waldau, Kreis Bunzlau	evgl.	† Aktuar, Bunzlau	Ostern 1881	Ostern 1888	Philol.
	Ostern 1890.							
*187	Karl Ender	14. Okt. 1870	Martinwaldau, Kreis Bunzlau	evgl.	Kantor	Ostern 1880	Ostern 1888	Postfach.
*188	Karl Schmidt	25. Sept. 1870	Nieder-Schönfeld, Kreis Bunzlau	evgl.	Kaufmann	Ostern 1881	Ostern 1888	Postfach.
*189	Hans Harder (W.)	7. Febr. 1871	Zittau, Kreis Loebau	evgl.	† Kaufmann	Ostern 1886	Ostern 1888	Theologie.
190	Rich. Menzel (W.)	12. Sept. 1870	Nieder-Leschen, Kreis Sprottau	evgl.	Kantor	Ostern 1886	Ostern 1888	Theologie.
191	Alexander Hentschel	18. April 1871	Bunzlau, Kreis Bunzlau	evgl.	Stadt-Kapellmeister	Ostern 1881	Ostern 1888	Postfach.
192	Kurt Karbaum	14. Mai 1870	Ratibor, Kreis Ratibor	evgl.	Kgl. Waisenhaus-Inspektor	Ostern 1886	Ostern 1888	Jura.
193	Ernst Schneider (W.)	27. Mai 1870	Gleiwitz, Kreis Tost-Gleiwitz	evgl.-luth.	Bergverwalter a. D.	Ostern 1886	Ostern 1888	Theologie.

* W bed. Zögling des Waisenhauses.

VI. Sammlungen von Lehrmitteln.

I. Bibliothek.

A. Für die Bibliothek wurden geschenkt:

Weck, Unsre Toten. Vom Königl. Provinzial-Schulkollegium in Breslau. — Bänitz, Griechisches Übungsbuch. Vom Verfasser. — Bienwald, De Crippsiano et Oxoniensi Antiphontis Dinarchi Lycurgi codicibus. Vom Verfasser. — Stahn, Die Ursachen der Räumung Belgiens im Jahre 1794. Vom Verfasser. — Frankenbach, Lehrbuch der Mathematik. Von Krumbhaar in Liegnitz. — Lutsch, Lateinische Formenlehre; Lateinisches Lehr- und Lesebuch; Vocabularium. Von Velhagen und Klasing. — Süpfle, Französisches Lesebuch. Von Jul. Groos' Verlag. — Abicht, Griechische Geschichte; Römische Geschichte. Von Winter in Heidelberg. — Goldbacher, Lateinische Grammatik. Von Schworella und Heick in Wien. — Simon, Grundzüge der Mythologie. Von Westphal in Schmalkalden. — Raydt, Die Arithmetik auf dem Gymnasium. Von Mariz in Hannover. — Hahn, Abriss der Deutschen Litteraturgeschichte. Von Hertz in Berlin. — Die Anstalt sagt den Gebern ihren verbindlichsten Dank.

B. Anschaffungen für die Lehrerbibliothek.

Der letzte Jahrgang von: Neue Jahrb. für Philol. und Pädag. — Gymnasialwesen. — Centralblatt. — Hermes. — Jahresber. über die Fortschritte der klassischen Altertumswissenschaft. — Archiv über das Studium der neueren Sprachen und Litteratur. — Annalen für Physik und Chemie. — Beiblätter zu den Annalen für Physik und Chemie. — v. Sybel, histor. Zeitschrift. — Archiv für Geschichte der Philosophie. — Statistisches Jahrbuch der höheren Schulen, 10. Jahrg. — Frick, Lehrproben und Lehrgänge, Heft 17—21. — Ergänzungsheft zum Centralblatt 1888. — Verhandlungen der Direktoren-Versammlungen 31—32. — Raydt, Ein gesunder Geist in einem gesunden Körper. — Tegge, Studien zur lat. Synonymik. — Horatius Flaccus erkl. von Kiessling, III. Teil. — Kammer, ästhetischer Kommentar zur Ilias. — Blaydes, Aristoph. Ranae. — Supplement-Band zum Jahresbericht über die Fortschritte der Altertumswissenschaft, Heft 3. — Jahrbücher für klassische Philologie, XVI. Supplementband. — Grimm, Deutsches Wörterbuch, XII, 3. — Kern, Grundriss der deutschen Satzlehre. Die deutsche Satzlehre. Zustand und Gegenstand. Zur Reform des Unterrichts in der deutschen Satzlehre. Leitfaden für den Anfangsunterricht in der deutschen Grammatik. — Die fünfte Sächsische Direktorenversammlung und die deutsche Satzlehre. — Meyer-Markau, Fremdwort und Schule. — Deutsche Blätter für erziehenden Unterricht 1888 No. 46. — Leimbach, Deutsche Dichter IV, 1. 2. — Wauer, Der Burggraf von Nürnberg. — Geschichtschreiber der deutschen Vorzeit 85—86. — Roscher, Lexikon der gr. und röm. Mythologie, Lieferg. 13—14. — Allgemeine deutsche Biographie, Bd. 28—29. — Ranke, Weltgeschichte, Bd. 9. — Ihne, Römische Geschichte, Bd. 7. — Treitschke, Deutsche Geschichte des 19. Jahrh. Teil 4. — Geographisches Jahrbuch, Bd. 12—13. — Sachregister zu den Annalen für Physik und Chemie. — Hug, Namenregister zu den Annalen für Physik und Chemie. — Schmidt-Rimpler, Schule und Auge.

C. Anschaffungen für die Schülerbibliothek.

Adami, Das Buch vom Kaiser Wilhelm. — Behaghel, Die deutsche Sprache. — Fournier, Napoleon I. — Gindely, Geschichte des dreissigjährigen Krieges. — Opitz, Schauspiel und Theaterwesen der Griechen und Römer. — Stein (Nietschmann), Königin Luise. Prinz Eugenius der edle Ritter. Der grosse Kurfürst. Das Buch vom Doktor Luther. — Pierson, Preussische Geschichte. — Ferd. Schmidt, Die Quitzows. Geschichtliche Bilder aus der Zeit des ersten hohenzollernschen Kurfürsten (Friedrich I.) — Mylius, Die Türken vor Wien. — Fron, Das Kräuterweible von Wimpfen. — Schwebel, Die Sagen der Hohenzollern. — v. Horn (W. Oertel), Aus der Maje, Bd. 7—8. — Frommel, Aus der Familienchronik eines geistlichen Herrn. Aus vergangenen Tagen. Aus dem untersten Stockwerk. Aus goldnen Jugendtagen. Das Heinerle von Lindelbronn. O Strassburg, du wunderschöne Stadt. In zwei Jahrhunderten. — Jahnke, Eberhard von Rochow oder die Schule von Reckahn. — Klee, Eines deutschen Volkes Ruhm und Untergang. — Gräbner, Robinson Crusoe. — von Horn (W. Oertel), Der Orkan auf Kuba. Feldmarschall Derfflinger. Ein Ostindienfahrer. Der Strandläufer. Der Gemsjäger. Simon. Das Leben und die Thaten Hans Joachims von Zieten Christian Fürchtegott Gellert. Von dem frischen und mutigen Seydlitz. James Cook. Was aus einem armen Hirtenbüblein werden kann. Der alte Fritz. Die letzte Ghazwah oder Sklavenjagd in Sudan. Aus den Silberminen der Cordillera in Südamerika Der Overseer. — Schupp, Auf dem Wachholder. Die Brüder. Joseph in Aegypten. Der Turmbau auf den Halligen. Das verlorene Kind. Die Klemenskirche. Die Rache ist mein. Unter den Menschenfressern von Borneo. Das Nationaldenkmal auf dem Niederwald. Theobald. James Garfield. Vom Rhein zur Donau. Kaiser Wilhelm I. — Bonnet, Am doppelten Faden Des Feldscherers Wanderschaft. Der Einarm. Die Geschwister. Der Zigeunerbub. Der Amerikaner. Feldscherers Kriegsglück. Der Reiskönig. Der Onkel von Vevey. Der Gondolier von Venedig. Der Geusenpfennig. Die Chinesenflotte. Aus dem Schiffbruch gerettet. Wiedergefunden. Sohn des Millionärs. Adlerhorst.

— Hugo Oertel, Georg von Frundsberg. William Penn. Matthias Claudius, der Wandsbecker Bote. William Wilberforce, der Sklavenfreund. — Barth, Der Negerkönig Zamba. Vier Erzählungen. Fünf Erzählungen. — Lohmeyer, Deutsche Jugend, Bd. 26. Neue Folge, Bd. 2—7. — Robinson der Jüngere von J. H. Campe, bearb. von v. Horn (W. Oertel.)

2. Lehrmittel für den geographischen Unterricht.

Kiepert, Stumme physikalische Karten der Britischen Inseln und von Italien. — E. Debes, Physikalische Erdkarte in Merkators Projektion.

3. Naturalienkabinet.

50 mikroskopische Präparate. 1 Kehlkopfmodell. Entwickelungszustände der Bienen.

4. Physikalisches Kabinet.

Ein Handwerkskasten. Eine Wasserwage.

VII. Stiftungen.

Die am Gymnasium bestehenden Stiftungen wiesen am Schlusse des Schuljahres folgenden Kapitalbestand auf:

1. Stipendienfonds	892,17	Mk.
2. Dr. Schmidt-Dr. Rhode-Stiftung	2389,26	„
3. Beisert-Stiftung	1754,94	„
4. Schiller-Legat	814,22	„
5. Kaiser Wilhelm-Stiftung	3014,59	„
Summa	8865,18	Mk.

VIII. Mitteilungen an die Schüler und an deren Eltern.

Die Osterferien, welche am 29. März beginnen, schliessen mit dem 13. April. Das neue Schuljahr wird am 14. April eröffnet werden.

Die Anmeldungen neu eintretender Schüler werden Montag, den 14. April, von 9 Uhr vormittags ab, im Konferenzzimmer entgegengenommen werden.

Zur Aufnahme ist ein Abgangszeugnis der bisherigen Anstalten bezhtl. Lehrer und ein Impfschein — bei Schülern über 12 Jahre ein Wiederimpfschein — erforderlich.

Die Wahl der Wohnung oder Pension für auswärtige Schüler bedarf der vorher einzuholenden Genehmigung des Direktors, wegen deren wie wegen etwa sonst erforderlicher besonderer Auskunft man sich an den Herrn Prorektor Faehrmann hierselbst (Görlitzer-Strasse 13) wenden wolle.

VIII. Mitteilu[...] an deren Eltern.

Die Osterferi[...] schliessen mit dem 13. April. Das neue Schuljahr wir[...]

Die Anmeldunge[...]ntag, den 14. April, von 9 Uhr vormittags ab, im Konfe[...]n.

Zur Aufnahme [...]n Anstalten bezhtl. Lehrer und ein Impfschein — bei S[...]schein — erforderlich.

Die Wahl der [...] Schüler bedarf der vorher einzuholenden Genehmig[...]wegen etwa sonst erforderlicher besonderer Auskunft ma[...]hrmann hierselbst (Görlitzer-Strasse 13) wenden woll[...]

Königliche Waisen- und Schulanstalt zu Bunzlau.

Gymnasium.

Ueber Kurven,

welche die Eigenschaft haben, daß je zwei Tangenten aus einer gegebenen Geraden eine Strecke ausschneiden, welche zu dem von den Berührungspunkten begrenzten Bogen in einem gegebenen Verhältnisse stehen.

Von

Prof. F. Gauß.

Beilage zu dem Jahresbericht des Gymnasiums der Königlichen Waisen- und Schulanstalt zu Bunzlau über das Schuljahr 1889/90.

Bunzlau 1890.
C. A. Voigt's Buchdruckerei (G. Wolf).

Prgr. Nr. 174.

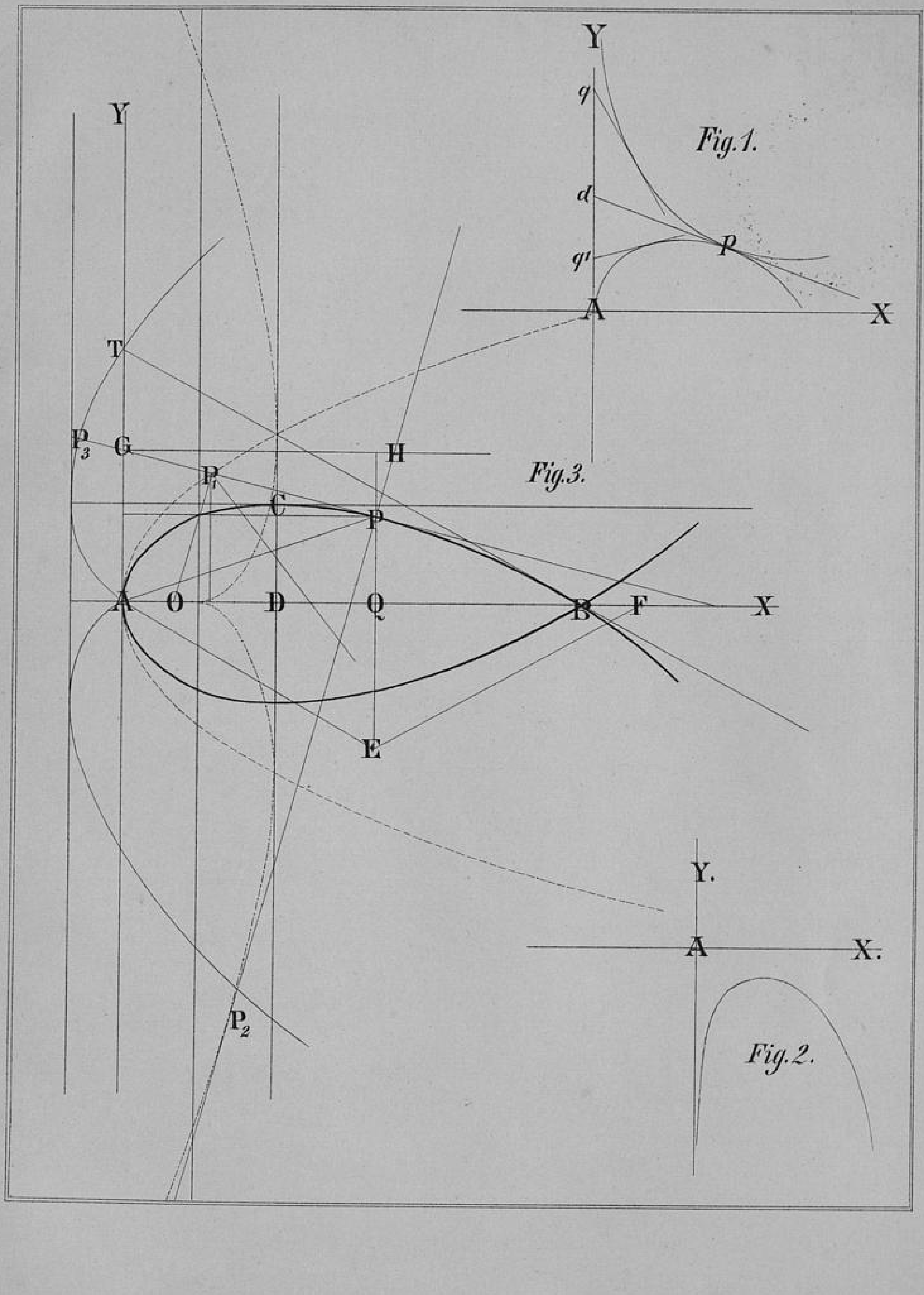

Fig.1.

Fig.2.

Fig.3.

Ueber Kurven,

welche die Eigenschaft haben, daß je zwei Tangenten auf einer gegebenen Geraden eine Strecke ausschneiden, welche zu dem von den Berührungspunkten begrenzten Bogen in einem gegebenen Verhältnisse steht.

Die vorliegende Arbeit verdankt ihre Entstehung einer Scherzfrage, nämlich der Frage: Was für eine Linie beschreibt ein seitwärts vom Wege des Herrn befindlicher Hund, wenn er mit konstanter Geschwindigkeit auf seinen gleichförmig und geradlinig fortschreitenden Herrn, stets die Richtung auf diesen innehaltend, zuläuft? Die Gleichung der Linie war ja leicht gefunden, sie erschien mir jedoch bei näherer Betrachtung interessant genug, um mich zu veranlassen, die Kurve einer eingehenderen Untersuchung zu unterwerfen. Während ich damit beschäftigt war, fand ich beim Suchen nach etwa schon vorhandenen Bearbeitungen der Kurve nur im „Lehrbuch der höheren Geometrie, in analytischer Darstellung von H. W. Brandes, Professor an der Universität in Breslau. Leipzig 1822." einen Hinweis auf die Schrift „Untersuchungen über den Weg eines gleichförmig fortrückenden Körpers, der in jedem Augenblicke sich grade gegen einen andern gleichförmig und zugleich gradlinigt fortlaufenden Körper hinbewegt. Von M. v. Prittwitz. Leipzig, 1816." Ob von dem ebenfalls bei Brandes erwähnten französischen Mathematiker Bouguer eine Abhandlung über die Kurve vorhanden ist, ist mir nicht bekannt. Von der Darstellung bei M. v. Prittwitz weicht die meinige nach Form und Inhalt sehr wesentlich ab. Die von M. v. Prittwitz gemachten Angaben über die möglichen Gestalten der Kurve sind nach meiner Ansicht nicht zutreffend; ich habe versucht, sie richtig zu stellen. Bemerkenswerte Einzelheiten, die in der Abhandlung von M. v. Prittwitz nicht enthalten sind, sind folgende: eine einfache und für den Fall, daß das in der Ueberschrift genannte Verhältnis kleiner als 1 ist, allgemein gültige konstruktive Rektifikation der Kurve; eine eingehendere Untersuchung der Kurve für den Fall, daß jenes Verhältnis gleich 1 : 2 ist, auf Grund der Polargleichung derselben ($r = \frac{1}{2} \frac{p}{\cos \frac{1}{3} v^3}$); eine einfache Lösung des Problems, einen gegebenen Winkel in drei gleiche Teile zu teilen, wenn die Kurve gegeben ist; einige nicht uninteressante Beziehungen der Kurve zu der Parabel, die mit ihr den Scheitel, die Axe und den Parameter gemein hat (ihre Polargleichung ist $r_1 = \frac{1}{2} \frac{p}{\cos \frac{1}{2} v_1{}^2} = \frac{1}{2} \frac{p}{\cos \frac{2}{3} v^2}$; die Kurve ist eine Brennlinie der Parabel); Beziehungen zwischen der Evolvente der Kurve und derselben Parabel (jeder Punkt der Parabel hat gleiche Abstände von der Axe und der Evolvente der Kurve); die Gleichung der Evolvente der Kurve in rechtwinkligen Koordinaten. — Hohen wissenschaftlichen Wert will die hier vorgelegte kleine Gelegenheitsschrift nicht beanspruchen, immerhin aber mag sie einem jungen Studenten der Mathematik willkommenen Uebungsstoff bieten. — Für die Herstellung der Figurentafel fühle ich mich meinem Kollegen Herrn Rothe zu lebhaftem Danke verpflichtet.

§ 1.

Die Gleichung der Kurve für rechtwinklige Koordinaten sei

$$y = f(x),$$

um deren Entwickelung es sich zunächst handelt. Ist e die Strecke, welche von zwei beliebigen Tangenten auf einer gegebenen Geraden, die wir die Leitlinie nennen wollen, ausgeschnitten wird, und s der von den Berührungspunkten begrenzte Bogen der Kurve, so ist

$$ne = s,$$

wo n eine beliebige positive Zahl bedeutet und der Exponent der Kurve genannt werden soll. Für zwei beliebige andere Tangenten hat man die Gleichung

$$ne' = s', \text{ also } n(e + e') = s + s'.$$

Hieraus ist ersichtlich, daß man die eine Tangente als fest ansehen kann. Diese wollen wir die Anfangstangente und ihren Berührungspunkt den Anfangspunkt der gesuchten Kurve nennen. Die Leitlinie sei die Ordinatenaxe und τ der positive oder negative spitze Winkel, welchen eine beliebige Tangente der Kurve mit dem positiven Teile der Abscissenaxe einschließt, also

$$dy = tg\tau dx, \quad ds = \pm\, dx\sqrt{1 + \left(\frac{dy}{dx}\right)^2} = \pm \frac{dx}{\cos\tau}.$$

Die Gleichung der Tangente ist

$$v - y = (u - x)tg\tau.$$

Sind q und d die Ordinaten der Schnittpunkte dieser Tangente und der Anfangstangente mit der Leitlinie, so ist $q - d = \pm\, e = \pm \frac{1}{n}\, s$, also, da $q = y - xtg\tau$ ist,

$$y - xtg\tau - d = \pm \frac{1}{n}\, s.$$

Durch Differenziation dieser Gleichung erhält man $dy - tg\tau dx - x\frac{d\tau}{\cos\tau^2} = \pm \frac{1}{n}\, ds$. Folglich ist $-x\frac{d\tau}{\cos\tau^2} = \pm \frac{1}{n}\frac{dx}{\cos\tau}$, also

$$\frac{dx}{x} = \mp\, n\frac{d\tau}{\cos\tau}. \qquad 1.$$

Wie ein Blick auf die Figur 1. lehrt, giebt es zwei verschiedene Kurven A und B, welche der Gleichung ne = s genügen. Sie liegen auf verschiedenen Seiten der Anfangstangente (Pd), der sie die konvexe Seite zukehren, sind aber von derselben Natur, wie ihre Gleichungen, die sich nur durch eine Konstante unterscheiden, zeigen werden. Da jeder Punkt der Kurve A der Anfangspunkt sein kann, so steht der Kurve A in jedem Punkte eine andere Kurve B gegenüber. Der Winkel τ nimmt bei abnehmendem x für die eine der beiden Kurven A und B zu, für die andere ab, für die eine ist daher $\frac{d\tau}{dx}$ negativ, für die andere positiv, also in der Gleichung 1. zunächst das obere Vorzeichen für die Kurve A, das untere für die Kurve B in Anspruch zu nehmen. Keineswegs ist aber die Möglichkeit ausgeschlossen, daß $\frac{d\tau}{dx}$ für die Kurve A das Zeichen wechselt, also auch für die Kurve A das untere Vorzeichen in der Gleichung 1. zulässig ist. Dies ist in der Tat der Fall, wenn für einen endlichen Punkt der Kurve A die Tangente der Ordinatenaxe parallel wird oder mit ihr zusammenfällt, τ also gleich $\pm \frac{1}{2}\pi$ wird. Da nämlich die Kurve A nicht auf die andere Seite der Tangente übertreten kann, ohne in eine Kurve B überzugehen, so muß x für diesen Punkt ein Maximum oder ein Minimum werden, während τ von $\pm \frac{1}{2}\pi$ auf $\mp \frac{1}{2}\pi$ überspringt. Wenn also vor dem Durchgange durch diesen Punkt τ bis $-\frac{1}{2}\pi$ mit x abnimmt, so muß nach diesem Durchgange τ von $+\frac{1}{2}\pi$ abnehmen, während x wieder wächst. Allgemein muß, wenn vor dem Durchgange τ mit x zugleich zu- oder abnimmt, nach dem Durchgange τ zu- oder abnehmen, während x ab- oder zunimmt, d. h. es muß beim Durchgange durch diesen Punkt $\frac{d\tau}{dx}$ das Zeichen wechseln. Läßt sich aber nachweisen, daß es keinen endlichen Punkt der Kurve A giebt, für welchen die Tangente der Ordinatenaxe parallel ist oder mit ihr zusammenfällt, so muß für alle Punkte der Kurve A $\frac{d\tau}{dx}$ dasselbe Zeichen behalten.

Wir suchen zunächst die Gleichungen

$$y = f(x) \text{ und } y_1 = f_1(x_1)$$

der beiden Kurven A und B bis zu demjenigen Punkte, wenn es einen solchen giebt, in welchem $\frac{d\tau}{dx}$ das Zeichen wechselt, uns die Verallgemeinerung der Gleichungen der Kurven A und B vorbehaltend.

Für die Linie A, deren Gleichung $y = f(x)$ ist, ist

$$\frac{dx}{x} = -n\frac{d\tau}{\cos\tau}.$$

Setzt man $\varphi = \frac{1}{4}\pi - \frac{1}{2}\tau$, wo also φ stets positiv und spitz ist, mithin $\tau = \frac{1}{2}\pi - 2\varphi$, $d\tau = -2d\varphi$, $\cos\tau = \sin2\varphi = 2\sin\varphi\cos\varphi$, $\frac{d\tau}{\cos\tau} = -\frac{d\varphi}{\sin\varphi\cos\varphi} = -\frac{dtg\varphi}{tg\varphi}$, so ist

$$\frac{dx}{x} = n\frac{dtg\varphi}{tg\varphi}, \quad lnx = nlntg\varphi + C.$$

Bezeichnet man die Abscisse des Anfangspunktes durch c und den Wert, welchen der Winkel φ für diesen Punkt erhält, durch β, so ist

$$lnc = nlntg\beta + C, \; ln\frac{x}{c} = nln\frac{tg\varphi}{tg\beta} = ln(\cot g\beta tg\varphi)^n, \text{ also } x = c(\cot g\beta tg\varphi)^n.$$

Da n ein in den kleinsten Zahlen ausgedrückter eigentlicher Bruch mit geradem Nenner sein kann, so ist es erforderlich, das Vorzeichen von $(\cot g\beta tg\varphi)^n$ zu bestimmen. Für $\varphi = 0$, also für $\tau = \frac{1}{2}\pi$, wird $x = 0$ und die Leitlinie eine Tangente der Kurve. Da die Kurve A nicht, ohne in die Kurve B überzugehen, auf die andere Seite der Leitlinie, also der Ordinatenaxe, übertreten kann, so muß die Abscisse stets dasselbe Vorzeichen behalten, also, wenn man den positiven Teil der Abscissenaxe so wählt, daß die Abscisse des Anfangspunktes positiv ist, stets **positiv** sein. Daher ist $(\cot g\beta tg\varphi)^n$ positiv. Setzt man die Konstante $c\cot g\beta^n$, den **Parameter** der Kurve, gleich a, so ist

$$x = atg\varphi^n, \quad tg\varphi = \left(\frac{x}{a}\right)^{\frac{1}{n}}, \tag{2.}$$

wo $\left(\frac{x}{a}\right)^{\frac{1}{n}}$ stets **positiv** ist, was für den Fall bemerkt sein mag, daß n eine gerade ganze Zahl oder ein eigentlicher in den kleinsten Zahlen ausgedrückter Bruch mit geradem Zähler ist.

Ferner ist

$$dy = tg\tau dx = \cot g2\varphi dx = \frac{1-tg\varphi^2}{2tg\varphi}dx, \quad dx = natg\varphi^{n-1}dtg\varphi,$$

$$2dy = na(tg\varphi^{n-2} - tg\varphi^n)dtg\varphi.$$

Ist $n \gtrless 1$, so erhält man durch Integration

$$2(y + b) = a\left(\frac{n}{n-1}tg\varphi^{n-1} - \frac{n}{n+1}tg\varphi^{n+1}\right),$$

wo b eine willkürliche Konstante bezeichnet. Da diese aber nur Einfluß auf den Koordinatenanfang hat, oder da man $y + b$ als Ordinate eines neuen Koordinatensystems ansehen und wieder durch y bezeichnen kann, so kann man die Konstante weglassen und hat also die Gleichung

$$2y = a\left(\frac{n}{n-1}tg\varphi^{n-1} - \frac{n}{n+1}tg\varphi^{n+1}\right). \tag{3.}$$

Durch Elimination von φ aus 2. und 3. erhält man die für y entwickelte Gleichung

$$2y = a\left\{\frac{n}{n-1}\left(\frac{x}{a}\right)^{\frac{n-1}{n}} - \frac{n}{n+1}\left(\frac{x}{a}\right)^{\frac{n+1}{n}}\right\}. \tag{4.}$$

Ist $n = 1$, so ist

$$x = a\,tg\varphi, \tag{5.}$$

$2dy = a\left(\frac{dtg\varphi}{tg\varphi} - tg\varphi dtg\varphi\right)$, also mit Weglassung der Konstanten 4b

$$4y = a(ln tg\varphi^2 - tg\varphi^2), \tag{6.}$$

$$4y = a\left\{ln\left(\frac{x}{a}\right)^2 - \left(\frac{x}{a}\right)^2\right\}. \tag{7.}$$

Für die Kurve B hat man in der Gleichung 1. das untere Vorzeichen zu nehmen, also ist

$$\frac{dx_1}{x_1} = n\frac{d\tau_1}{\cos\tau_1}.$$

Setzt man $\varphi_1 = \frac{1}{4}\pi + \frac{1}{2}\tau_1$, so erhält man freilich wie für die Kurve A

$$\frac{dx_1}{x_1} = n\frac{dtg\varphi_1}{tg\varphi_1},\ x_1 = a_1 tg\varphi_1{}^n.$$

Da aber $tg\tau_1 = -\cot g2\varphi_1$ ist, so erhält man als Gleichung der Kurve B

$$2y_1 = -a_1\left\{\frac{n}{n-1}\left(\frac{x_1}{a_1}\right)^{\frac{n-1}{n}} - \frac{n}{n+1}\left(\frac{x_1}{a_1}\right)^{\frac{n+1}{n}}\right\},$$

wenn $n \gtrless 1$, und

$$4y_1 = -a_1\left\{ln\left(\frac{x_1}{a_1}\right)^2 - \left(\frac{x_1}{a_1}\right)^2\right\},$$

wenn $n = 1$ ist, und zwar bedeutet a_1 das Produkt $c\cot g\beta_1{}^n$ und β_1 den Wert, welchen φ_1 für den Anfangspunkt erhält.

Für die beiden Kurven A und B haben wir also dieselben Gleichungen. Die Kurven haben eine entgegengesetzte Lage in Bezug auf die Abscissenaxe und unterscheiden sich nur durch den Parameter. Bezeichnet ω den Wert, welchen τ für die Anfangstangente hat, so ist $\cot g\beta_1 = \cot g(\frac{1}{4}\pi + \frac{1}{2}\omega) = tg(\frac{1}{4}\pi - \frac{1}{2}\omega) = tg\beta$, folglich

$$aa_1 = c^2.$$

Die Anfangstangente ist die mittlere Proportionale zwischen den Parametern der Kurven A und B.

Nach Feststellung dieser Beziehung zwischen den Kurven A und B scheidet die Kurve B gänzlich aus unserer Betrachtung aus. Es handelt sich jetzt darum, ob durch die Gleichungen 4. und 7. die gesuchte Kurve in ihrer ganzen Ausdehnung dargestellt wird, d. h. ob nach den obigen Erörterungen für einen endlichen Punkt der Kurve der Winkel τ gleich $\pm\frac{1}{2}\pi$ werden kann. Wird $\tau = -\frac{1}{2}\pi$, so wird $\varphi = \frac{1}{2}\pi$, also $x = \infty$. Wird $\tau = +\frac{1}{2}\pi$, so wird $\varphi = 0$, also zwar $x = 0$, aber $y = -\infty$, wenn $n \leq 1$ ist. Also giebt es überhaupt für den Fall, daß n nicht größer als 1 ist, keinen endlichen Punkt der Kurve, für welchen $\tau = \pm\frac{1}{2}\pi$ wird. Folglich ist, da x und $\cos\tau$ stets positiv sind, in der Gleichung 1. nur das obere Vorzeichen zulässig. Daher wird die gesuchte Kurve durch die Gleichungen

$$\varphi = \tfrac{1}{4}\pi - \tfrac{1}{2}\tau,\ x = a\,tg\varphi^n,\ 2y = -a\left(\frac{n}{1-n}\cot g\varphi^{1-n} + \frac{n}{1+n}tg\varphi^{1+n}\right); \tag{8.}$$

$$2y = -a\left\{\frac{n}{1-n}\left(\frac{a}{x}\right)^{\frac{1-n}{n}} + \frac{n}{1+n}\left(\frac{x}{a}\right)^{\frac{1+n}{n}}\right\}, \tag{9.}$$

wenn $n < 1$ ist, und durch die Gleichungen

$$\varphi = \tfrac{1}{4}\pi - \tfrac{1}{2}\tau,\ x = a\,tg\varphi,\ 4y = a(ln tg\varphi^2 - tg\varphi^2); \tag{10.}$$

$$4y = a\left\{ln\left(\frac{x}{a}\right)^2 - \left(\frac{x}{a}\right)^2\right\}, \tag{11.}$$

wenn $n = 1$ ist, in ihrer ganzen Ausdehnung karakterisiert.

Wenn $n > 1$ ist, so wird für $\tau = +\frac{1}{2}\pi$ sowohl $x = 0$ als auch $y = 0$, es fällt also im Koordinatenanfange die Tangente mit der Leitlinie zusammen. In diesem Punkte muß daher $\frac{d\tau}{dx}$ das Zeichen wechseln, und da x und $\cos\tau$ stets positiv sind, so ist in Gleichung 1. auch das untere Vorzeichen zulässig. Die gefundenen Gleichungen geben daher die Kurve nur unvollständig, und man erhält den fehlenden Teil, wenn man in der Gleichung 1. das untere Vorzeichen nimmt. Setzt man für diesen Teil $\varphi = \frac{1}{4}\pi + \frac{1}{2}\tau$, so ergiebt sich

$$x = a\,tg\varphi^n, \quad 2y = -\,a\Big(\frac{n}{n-1}tg\varphi^{n-1} - \frac{n}{n+1}tg\varphi^{n+1}\Big).$$

Für die Kurve in ihrer ganzen Ausdehnung hat man daher die Gleichungen

$$\varphi = \tfrac{1}{4}\pi \mp \tfrac{1}{2}\tau, \quad x = a\,tg\varphi^n, \quad 2y = \pm\,a\Big(\frac{n}{n-1}tg\varphi^{n-1} - \frac{n}{n+1}tg\varphi^{n+1}\Big); \qquad 12.$$

$$2y = \pm\,a\Big\{\frac{n}{n-1}\Big(\frac{x}{a}\Big)^{\frac{n-1}{n}} - \frac{n}{n+1}\Big(\frac{x}{a}\Big)^{\frac{n+1}{n}}\Big\}, \qquad 13.$$

wo sich die Zeichen in den Gleichungen für φ und y auf einander beziehen und der Winkel φ stets positiv und kleiner als $\frac{1}{2}\pi$ ist. Da die Kurve symmetrisch zu beiden Seiten der Abscissenaxe liegt, so wollen wir diese die Axe und den Koordinatenanfang den Scheitel der Kurve nennen.

§ 2.

Der Kürze wegen setzen wir den Parameter a, von dessen Wert nicht die Natur der Kurve bedingt wird, sondern nur die Dimensionen abhangen, gleich der Längeneinheit. Um die allgemeine Gestalt der Kurve kennen zu lernen, unterscheiden wir die beiden Hauptfälle, in denen $n > 1$ oder $n \leqq 1$ ist.

I.

$n > 1$.

Da die Kurve durch den Koordinatenanfang in zwei kongruente Teile geteilt wird, so genügt es, die Gleichungen

$$\varphi = \tfrac{1}{4}\pi - \tfrac{1}{2}\tau, \quad x = tg\varphi^n, \quad 2y = \frac{n}{n-1}tg\varphi^{n-1} - \frac{n}{n+1}tg\varphi^{n+1}; \qquad 1.$$

$$2y = \frac{n}{n-1}x^{\frac{n-1}{n}} - \frac{n}{n+1}x^{\frac{n+1}{n}} \qquad 2.$$

zu diskutieren. Durch Differenziation der letzten Gleichung erhält man

$$2\frac{dy}{dx} = \Big(\frac{1}{x}\Big)^{\frac{1}{n}} - x^{\frac{1}{n}}, \qquad 3.$$

$$2\frac{d^2y}{dx^2} = -\frac{1}{n}\Big\{\Big(\frac{1}{x}\Big)^{\frac{n+1}{n}} + \Big(\frac{1}{x}\Big)^{\frac{n-1}{n}}\Big\}. \qquad 4.$$

Für $\varphi = 0$ wird $x = 0$, $y = 0$, $\qquad$ 5.

und für $\varphi = \frac{1}{4}\pi$ wird $x = 1$, $y = \frac{n}{n^2-1}$. $\qquad$ 6.

In dem Intervall von $\varphi = 0$ bis $\varphi = \frac{1}{4}\pi$ ist

$$x^2 < 1, \; x < \frac{1}{x}, \; x^{\frac{1}{n}} < \Big(\frac{1}{x}\Big)^{\frac{1}{n}},$$

folglich $\frac{dy}{dx} > 0$ und $\tau > 0$. Daher muß auch, wenn x von 0 bis 1 stetig wächst, y von 0 bis $\frac{n}{n^2-1}$ stetig wachsen, d. h. in diesem Intervall stets positiv sein. Für $\varphi = 0$ wird $\tau = \frac{1}{2}\pi$, also wird die Kurve, wie wir schon gesehen haben, von der Leitlinie berührt. Für

$\varphi = \frac{1}{4}\pi$ wird $\tau = 0$, $x = 1$, $\frac{dy}{dx} = 0$ und, da $\frac{d^2y}{dx^2} = -\frac{1}{n}$ ist, $y = \frac{n}{n^2-1}$ ein Maximum, welches wir durch p bezeichnen wollen. Endlich ist in diesem Intervall, da y und der zweite Differenzialquotient ungleiche Vorzeichen haben, die Kurve gegen die Abscissenaxe konkav. Für $\varphi = \frac{1}{2}\pi$ wird $x = \infty$, und da $y = n\,tg\varphi^{n-1}\left(\frac{1}{n-1} - \frac{1}{n+1}tg\varphi^2\right)$ ist, $y = -\infty$. Wenn $\varphi > \frac{1}{4}\pi$ ist, so ist $x^{\frac{1}{n}} > \left(\frac{1}{x}\right)^{\frac{1}{n}}$, also $\frac{dy}{dx} < 0$ für alle Werte von $x = 1$ bis $x = \infty$. Daher muß y von $\frac{n}{n^2-1}$ bis $-\infty$ stetig abnehmen und in diesem Intervall einmal Null werden. Bezeichnet man den von 0 verschiedenen Wert von φ, für welchen y verschwindet, durch ε und die zugehörige Abscisse, den Durchmesser der Kurve, durch k, so ist $\frac{tg\varepsilon^{n-1}}{n-1} = \frac{tg\varepsilon^{n+1}}{n+1}$, also

$$tg\varepsilon = \sqrt{\frac{n+1}{n-1}},\quad k = \left(\frac{n+1}{n-1}\right)^{\frac{n}{2}},\quad p = \frac{n}{n^2-1}. \qquad 7.$$

Für den Winkel ω, welchen die Tangente der Kurve in diesem Punkte mit der Abscissenaxe einschließt, hat man wegen der Gleichung $tg\omega = cotg2\varepsilon = \frac{1-tg\varepsilon^2}{2tg\varepsilon}$ die Gleichungen

$$tg\omega = -\frac{1}{\sqrt{n^2-1}},\quad p = n\,tg\omega^2. \qquad 8.$$

Da der zweite Differenzialquotient und y in dem Intervall von $\varphi = \frac{1}{4}\pi$ bis $\varphi = \varepsilon$ ungleiche, in dem Intervall von $\varphi = \varepsilon$ bis $\varphi = \frac{1}{2}\pi$ aber gleiche Vorzeichen haben, so ist in dem ersten Intervall die Kurve gegen die Abscissenaxe konkav, im zweiten konvex. Die ganze Kurve hat also die durch die stark gezeichnete Linie in Figur 3. veranschaulichte Gestalt mit einem in der Abscissenaxe liegenden Knotenpunkte.

Aus 7. ergiebt sich

$$ln k^2 = n\,ln\frac{n+1}{n-1},\quad \frac{d\,lnk^2}{dn} = ln\frac{n+1}{n-1} - \frac{2n}{n^2-1}.$$

Nun ist aber

$$ln\frac{n+1}{n-1} = ln\frac{1+\frac{1}{n}}{1-\frac{1}{n}} = \frac{2}{n}\left(1 + \frac{1}{3}\frac{1}{n^2} + \frac{1}{5}\frac{1}{n^4} + \frac{1}{7}\frac{1}{n^6} + \cdot\cdot\right),$$

$$\frac{2n}{n^2-1} = \frac{2}{n}\left(1 - \frac{1}{n^2}\right)^{-1} = \frac{2}{n}\left(1 + \frac{1}{n^2} + \frac{1}{n^4} + \frac{1}{n^6} + \ldots\right),$$

folglich ist

$$\frac{d\,lnk}{dn} = \frac{1}{n}\left(-\frac{2}{3}\frac{1}{n^2} - \frac{4}{5}\frac{1}{n^4} - \frac{6}{7}\frac{1}{n^6} - \ldots\right).$$

Hiernach ist $\frac{d\,lnk}{dn}$ stets negativ, also nimmt, wenn n stetig wächst, $ln k$, mithin auch k stetig ab. Wird $n = 1$, so wird $k = \infty$ und $p = \infty$. Dem Ausdrucke $\left(\frac{n+1}{n-1}\right)^{\frac{n}{2}}$ kann man die Form $\left\{\left(1 + \frac{1}{n}\right)^n\left(1 - \frac{1}{n}\right)^{-n}\right\}^{\frac{1}{2}}$ geben. Bekanntlich nähert sich, wenn n größer als jede endliche Zahl wird, sowohl $\left(1 + \frac{1}{n}\right)^n$ als auch $\left(1 - \frac{1}{n}\right)^{-n}$ der Basis e des natürlichen Logarithmensystems, für $n = \infty$ wird also $k = e$. Zugleich nähert sich $p = \frac{n}{n^2-1} = \frac{1}{n - \frac{1}{n}}$ der Null, wie sich überhaupt, da $2y = x^{1-\frac{1}{n}}\left(\frac{1}{1-\frac{1}{n}} - \frac{1}{1+\frac{1}{n}}x^{\frac{2}{n}}\right)$ ist, für jeden beliebigen endlichen Wert von x die Ordinate der Null nähert.

Der Durchmesser der Kurve ist stets größer als e. Nimmt n ab, so entfernt sich der Knotenpunkt immer mehr von der Leitlinie, und zwar über jeden endlichen Punkt der Axe hinaus, wenn n sich der Einheit nähert, während zugleich das Maximum der Ordinate wächst, und zwar über jeden endlichen Wert hinaus.

Bei wachsendem n nähert sich der Knotenpunkt immer mehr dem Punkte der Axe, dessen Abscisse gleich e ist, ohne ihn, so lange n endlich bleibt, je zu erreichen. Zugleich nähert sich die Kurve einer Geraden, die mit der Abscissenaxe zusammenfällt.

II.

$$n \leqq 1.$$

Die Gleichungen

$$\varphi = \tfrac{1}{4}\pi - \tfrac{1}{2}\tau, \quad x = \operatorname{tg}\varphi^{n}, \quad 2y = -\left(\frac{n}{1-n}\operatorname{cotg}\varphi^{1-n} + \frac{n}{1+n}\operatorname{tg}\varphi^{1+n}\right); \qquad 9.$$

$$2y = -\left\{\frac{n}{1-n}\left(\frac{1}{x}\right)^{\frac{1-n}{n}} + \frac{n}{1+n}x^{\frac{1+n}{n}}\right\} \qquad 10.$$

$$\{n < 1\}$$

und

$$\varphi = \tfrac{1}{4}\pi - \tfrac{1}{2}\tau, \quad x = \operatorname{tg}\varphi, \quad 4y = ln\operatorname{tg}\varphi^2 - \operatorname{tg}\varphi^2; \qquad 11.$$

$$4y = lnx^2 - x^2 \qquad 12.$$

$$\{n = 1\}$$

geben für $\varphi = 0$

$$x = 0, \quad y = -\infty. \qquad 13.$$

Für $\varphi = \frac{1}{4}\pi$ wird

$$x = 1, \quad y = -\frac{n}{1-n^2}, \qquad 14.$$

$$\{n < 1\}$$

$$x = 1, \quad y = \tfrac{1}{4}. \qquad 15.$$

$$\{n = 1\}$$

Für jeden Wert von n ist

$$2\frac{dy}{dx} = \left(\frac{1}{x}\right)^{\frac{1}{n}} - x^{\frac{1}{n}}, \qquad 16.$$

$$2\frac{d^2y}{dx^2} = -\frac{1}{n}\left\{\left(\frac{1}{x}\right)^{\frac{1+n}{n}} + x^{\frac{1-n}{n}}\right\}. \qquad 17.$$

Da in dem Intervall von $\varphi = 0$ bis $\varphi = \frac{1}{4}\pi$ der erste Differenzialquotient positiv ist, so nimmt y von $-\frac{n}{1-n^2}$, wenn $n < 1$, und von $-\frac{1}{4}$, wenn $n = 1$ ist, bis $-\infty$ stetig ab, wenn x von 1 bis 0 stetig abnimmt, die Leitlinie ist also eine Asymptote der Kurve. Für $\varphi = \frac{1}{4}\pi$, also $\tau = 0$, $x = 1$ und $\frac{dy}{dx} = 0$ ist $\frac{d^2y}{dx^2} = -\frac{1}{n}$, y also ein Maximum. Für $\varphi = \frac{1}{2}\pi$ wird $x = \infty$ und $y = -\infty$, und da $\frac{dy}{dx}$ in dem Intervall von $\varphi = \frac{1}{4}\pi$ bis $\varphi = \frac{1}{2}\pi$ stets negativ ist, so nimmt y vom Maximum bis $-\infty$ stetig ab, wenn x von 1 bis $+\infty$ stetig wächst. Da endlich y und $\frac{d^2y}{dx^2}$ für die ganze Kurve gleiche Vorzeichen haben, so ist die Kurve in ihrer ganzen Ausdehnung gegen die Abscissenaxe konvex. Die Kurve hat also die in Figur 2. veranschaulichte Gestalt.

Anmerkung. Durchläuft ein Punkt die Kurve in ihrer ganzen Ausdehnung mit konstanter Geschwindigkeit, so durchläuft auch der Schnittpunkt der Tangente mit der Leitlinie diese in ihrer ganzen Ausdehnung mit konstanter Geschwindigkeit, die zur Geschwindigkeit jenes Punktes in dem Verhältnisse 1 : n steht. Wenn umgekehrt ein Körper, der sich gleichförmig bewegt, stets die Richtung, diese auch rückwärts genommen, auf einen anderen sich ebenfalls gleichförmig, aber geradlinig, bewegenden Körper beibehält, so muß er sich auf einer Kurve, deren Gleichung

$$y = f(x)$$

ist, bewegen. Man kann sie daher nach Bouguer (Mém. de l'Acad. de Paris pour l'année 1732 p. 1) Verfolgungslinie nennen. M. v. Prittwitz entwickelt in seiner Abhandlung unsere Kurve als Verfolgungslinie, unterscheidet aber einerseits nicht scharf zwischen den Kurven A und B und läßt andererseits den geradlinig fortschreitenden Punkt nicht immer die Leitlinie in ihrer ganzen Ausdehnung einmal in derselben Richtung durchlaufen. Die Folge davon ist, daß er sechs verschiedene Fälle in Bezug auf die Gestalt der Kurve unterscheidet, während in der Tat nur die beiden in Figur 2. und Figur 3. dargestellten Formen auftreten können. Die unrichtige Feststellung der Gestalt ist um so auffälliger, als gerade die Betrachtung unserer Kurve als Verfolgungslinie vor Fehlern dieser Art zu schützen geeignet ist. M. v. Prittwitz verteilt, wenn $n > 1$ ist, die beiden Teile, in welche die Kurve durch den Scheitel zerlegt wird, so, daß ihre Anfänge (bis zum Knoten) entweder in den vierten und ersten oder in den vierten und zweiten oder in den vierten und dritten Quadranten fallen. Nur im ersten Falle giebt er die richtige Gestalt der Kurve in Uebereinstimmung mit unserer Figur 3. Im zweiten Falle läßt er den verfolgenden Punkt im Scheitel auf die andere Seite der Leitlinie übertreten; wenn das gestattet wäre, so könnte man auch in jedem anderen Punkte den verfolgenden Punkt auf die andere Seite der Tangente übertreten lassen und dieses beliebig oft wiederholen, somit eine unendliche Anzahl von Kurven erhalten. Im dritten Falle läßt er ebenfalls den verfolgenden Punkt im Scheitel auf die andere Seite der Leitlinie übertreten, wobei dann aber der verfolgte Punkt, statt die ganze Ordinate, d. i. die Leitlinie, einmal zu durchlaufen, den negativen Teil derselben zweimal, nämlich vom unendlich fernen Punkte bis zum Scheitel und dann wieder zurück bis zum unendlich fernen Punkte durchlaufen müßte, was offenbar falsch ist. — Wenn $n \leq 1$ ist, so giebt M. v. P. unsere Kurve (Figur 2.) in ihrer ganzen Ausdehnung doppelt und unterscheidet wieder drei Fälle, je nachdem sich die beiden Kurven auf den ersten und zweiten oder auf den ersten und dritten oder auf den ersten und vierten Quadranten verteilen. Daß auch dieses falsch ist, geht daraus hervor, daß dann der verfolgte Punkt die Leitlinie in ihrer ganzen Ausdehnung zweimal durchlaufen müßte.

Es mag hier noch eine Bemerkung am Schlusse der Abhandlung von M. v. P. eine Stelle finden: Auch in der Taktik kommt diese Kurve vor. Wenn nämlich z. B. zwei Züge mit Distance hintereinander marschieren, und der zweite Zug soll während des Marsches links aufmarschieren, so beschreibt der rechte Flügelmann des zweiten Zuges, der immer auf den fortschreitenden linken Flügelmann des ersten Zuges seine Direktion nimmt, eine der Kurven der ersten Art, weil er geschwinder gehen muß als der linke Flügelmann des ersten Zuges. Da alle Personen des zweiten Zuges mit dem rechten Flügelmann desselben Zuges parallel gehen, so beschreiben auch sie eine verwandte Kurve. Ueberhaupt findet das Gesagte bei allen Aufmärschen statt, die während des Marsches geschehen.

§ 3.

Setzt man der Kürze wegen $x^{\frac{1}{n}} = \operatorname{tg}\varphi = z$ und betrachtet man für den Fall, daß $n > 1$ ist, nur denjenigen Teil der Kurve, für welchen $\varphi = \frac{1}{4}\pi - \frac{1}{2}\tau$ ist, so hat man nach § 2. 1, 2, 9, 10, 11, 12. die Gleichungen

$$x = z^n, \quad 2y = \frac{n}{n-1}z^{n-1} - \frac{n}{n+1}z^{n+1}, \quad 2y = \frac{n}{n-1}x^{\frac{n-1}{n}} - \frac{n}{n+1}x^{\frac{n+1}{n}}; \qquad 1.$$

$$\{n \gtrless 1\}$$

$$x = z, \quad 4y = ln x^2 - x^2. \qquad 2.$$

$$\{n = 1\}$$

Für jeden Wert von n ist $dx = nz^{n-1}dz$, $2dy = n(z^{n-2} - z^n)dz$, also

$$\frac{dy}{dx} = \frac{1}{2}\left(\frac{1}{z} - z\right) = \frac{1-z^2}{2z}, \quad \frac{dx}{dy} = \frac{2z}{1-z^2}, \qquad 3.$$

$$\left(\frac{ds}{dx}\right)^2 = 1 + \left(\frac{dy}{dx}\right)^2 = \frac{1}{4}\left(\frac{1}{z} + z\right)^2, \quad \frac{ds}{dx} = \frac{1+z^2}{2z}, \quad \frac{ds}{dy} = \frac{1+z^2}{1-z^2}. \qquad 4.$$

Bezeichnet man die auf der Ordinatenaxe genommene Subtangente und Subnormale durch S_y und S_y' und die zwischen dem Punkte (xy) und der Ordinatenaxe liegenden Teile der Tangente und der Normale durch T_y und N_y, so ist

$$S_y = x\frac{dy}{dx},\quad S_y' = x\frac{dx}{dy},\quad T_y = x\frac{ds}{dx},\quad N_y = x\frac{ds}{dy},\ \text{also}$$

$$2S_y = x\frac{1-z^2}{z} = x\,\frac{1-x^{\frac{2}{n}}}{x^{\frac{1}{n}}} = x\left(x^{-\frac{1}{n}} - x^{\frac{1}{n}}\right), \tag{5}$$

$$S_y' = 2x\frac{z}{1-z^2} = 2x\frac{x^{\frac{1}{n}}}{1-x^{\frac{2}{n}}}, \tag{6}$$

$$2T_y = x\frac{1+z^2}{z} = x\frac{1+x^{\frac{2}{n}}}{x^{\frac{1}{n}}} = x\left(x^{-\frac{1}{n}} + x^{\frac{1}{n}}\right), \tag{7}$$

$$N_y = x\frac{1+z^2}{1-z^2} = x\frac{1+x^{\frac{2}{n}}}{1-x^{\frac{2}{n}}}. \tag{8}$$

Diese Gleichungen lassen sich auch leicht aus den für jede Kurve geltenden Gleichungen

$$S_y = x\cot g2\varphi,\quad S_y' = x\,tg2\varphi,\quad T_y = \frac{x}{\sin 2\varphi},\quad N_y = \frac{x}{\cos 2\varphi}$$

herleiten.

Wenn $n > 1$ ist, so wird für den Knotenpunkt $x = k = \left(\frac{n+1}{n-1}\right)^{\frac{n}{2}}$, $y = 0$. Für diesen Punkt ist $1 + x^{\frac{2}{n}} = \frac{2n}{n-1}$, $1 - x^{\frac{2}{n}} = -\frac{2}{n-1}$, $\frac{1+x^{\frac{2}{n}}}{1-x^{\frac{2}{n}}} = -n$, also

$$S_y = -\frac{(n+1)^{\frac{n-1}{2}}}{(n-1)^{\frac{n+1}{2}}},\quad S_y' = -\frac{(n+1)^{\frac{n+1}{2}}}{(n-1)^{\frac{n-1}{2}}},\quad T_y = n\frac{(n+1)^{\frac{n-1}{2}}}{(n-1)^{\frac{n+1}{2}}},\quad N_y = -n\left(\frac{n+1}{n-1}\right)^{\frac{n}{2}}, \tag{9}$$

$$S_y = -\frac{k}{\sqrt{n^2-1}},\quad S_y' = -k\sqrt{n^2-1},\quad T_y = \frac{n}{n^2-1}k,\quad N_y = -nk, \tag{10}$$

folglich nach § 2, 8 auch

$$S_y = k\,tg\omega,\quad S_y' = k\cot g\omega,\quad T_y = -nk\,tg\omega,\quad N_y = -nk. \tag{11}$$

Wird S_y absolut genommen, so ist für den Knotenpunkt

$$S_y : T_y = 1 : n. \tag{12}$$

Hieraus und aus der Grundeigenschaft der Kurve schließen wir, daß für diesen Punkt

$$s = T_y \tag{13}$$

ist, wenn der Bogen s vom Koordinatenanfange gerechnet wird.

Der vom Knotenpunkt und dem Scheitel begrenzte Bogen ist gleich dem vom Knotenpunkte und der Leitlinie begrenzten Teile der Tangente.

Wenn $n = 1$ ist, so ist

$$2S_y = 1 - x^2,\quad S_y' = \frac{2x^2}{1-x^2},\quad 2T_y = 1 + x^2,\quad N_y = x\frac{1+x^2}{1-x^2}, \tag{14}$$

also für $x = 0$ die Subtangente und die Tangente gleich dem halben Parameter.

Wenn $n = 1$ ist, so nähert sich sowohl die Subtangente als auch die Tangente desto mehr dem halben Parameter, je mehr sich der Berührungspunkt der Leitlinie nähert und von der Axe entfernt.

Wenn $n < 1$ ist, so werden die Subtangente und die Tangente gleich ∞, und wenn $n > 1$ ist, so werden beide gleich Null für $x = 0$.

Bezeichnet man die auf die Abscissenaxe bezogene Subtangente, Subnormale, Tangente und Normale durch S_x, S_x', T_x und N_x, so ist

$$S_x = y\frac{dx}{dy}, \quad S_x' = y\frac{dy}{dx}, \quad T_x = y\frac{ds}{dy}, \quad N_x = y\frac{ds}{dx},$$

$$S_x = 2y\frac{x^{\frac{1}{n}}}{1-x^{\frac{2}{n}}}, \quad 2S_x' = y\left(x^{-\frac{1}{n}} - x^{\frac{1}{n}}\right), \quad T_x = y\frac{1+x^{\frac{2}{n}}}{1-x^{\frac{2}{n}}}, \quad 2N_x = y\left(x^{-\frac{1}{n}} + x^{\frac{1}{n}}\right). \qquad 15.$$

Bezeichnet ϱ den Krümmungshalbmesser der Kurve für den Punkt (xy), so ist, da $\frac{d^2y}{dx^2}$ negativ ist, $\varrho = \frac{\left\{1 + \left(\frac{dy}{dx}\right)^2\right\}^{\frac{3}{2}}}{-\frac{d^2y}{dx^2}}$. Nun ist, da $\frac{dy}{dx} = \operatorname{cotg} 2\varphi$ ist, $1 + \left(\frac{dy}{dx}\right)^2 = 1 + \operatorname{cotg} 2\varphi^2 = \frac{1}{\sin 2\varphi^2}$, $\left\{1 + \left(\frac{dy}{dx}\right)^2\right\}^{\frac{1}{2}} = \frac{ds}{dx}$, also $\left\{1 + \left(\frac{dy}{dx}\right)^2\right\}^{\frac{3}{2}} = \frac{1}{\sin 2\varphi^2} \cdot \frac{ds}{dx}$, und $\frac{d^2y}{dx^2} = -\frac{2}{\sin 2\varphi^2} \cdot \frac{d\varphi}{dx}$, folglich

$$\varrho = \frac{ds}{2d\varphi}. \qquad 16.$$

Für jeden Wert von n ist $\frac{ds}{dx} = \frac{1+z^2}{2z}$, $\frac{dx}{dz} = nz^{n-1}$, $\frac{dz}{d\varphi} = \frac{1}{\cos\varphi^2} = 1 + \operatorname{tg}\varphi^2 = 1 + z^2$, folglich

$$\frac{ds}{dz} = \frac{n}{2}\left(z^{n-2} + z^n\right) = \frac{n}{2}z^{n-2}\left(1 + z^2\right), \qquad 17.$$

$$\varrho = \frac{n}{4}z^{n-2}\left(1 + z^2\right)^2 = \frac{n}{4}\left(z^{n-2} + 2z^n + z^{n+2}\right), \qquad 18.$$

$$\varrho = \frac{n}{4}x\left(\frac{1+x^{\frac{2}{n}}}{x^{\frac{1}{n}}}\right)^2 = \frac{n}{4}x\left(x^{-\frac{1}{n}} + x^{\frac{1}{n}}\right)^2. \qquad 19.$$

Nach 7. ist $T_y^2 = \frac{x^2}{4}\left(x^{-\frac{1}{n}} + x^{\frac{1}{n}}\right)^2$, also

$$T_y^2 = \frac{1}{n}\varrho x. \qquad 20.$$

Für $x = 1$ ist

$$\varrho = \frac{(1+x^2)^2}{4x}, \quad T_y^2 = \varrho x. \qquad 21.$$

Die vom Berührungspunkte und der Leitlinie begrenzte Strecke der Tangente (die Entfernung des verfolgenden Punktes vom verfolgten) ist die mittlere Proportionale zwischen der Abscisse des Berührungspunktes (dem Abstande des verfolgenden Punktes von der Leitlinie) und dem nten Teile des Krümmungshalbmessers. —

Der nte Teil des Krümmungshalbmessers ist die Hypotenuse GH des rechtwinkligen Dreiecks PGH (Fig. 3.), welches man erhält, wenn man durch den Schnittpunkt der Tangente mit der Leitlinie die Parallele zur Abscissenaxe bis zum Schnittpunkte mit der Normale zieht.

Dieser Satz ermöglicht eine einfache Konstruktion des Krümmungsmittelpunktes, also der Evolute der Kurve durch Punkte.

Für ϱ seien noch die Gleichungen erwähnt:

$$\varrho = \frac{n}{4}\frac{\sin\varphi^{n-2}}{\cos\varphi^{n+2}}, \quad \varrho = n\frac{x}{\sin 2\varphi^2} = n\frac{x}{\cos\tau^2}.$$

Wenn $n > 1$ ist, so wird für den Knotenpunkt

$$\varrho = n^3 \frac{(n+1)^{\frac{n-2}{2}}}{(n-1)^{\frac{n+2}{2}}} = \frac{n^3}{n^2-1}\left(\frac{n+1}{n-1}\right)^{\frac{n}{2}}, \qquad 22.$$

also nach § 2, 7. auch

$$\varrho = n^2 kp. \qquad 23.$$

Um den Punkt zu finden, in welchem die größte Krümmung stattfindet, für welchen also der Krümmungshalbmesser den kleinsten Wert erhält, benutzen wir die Gleichung

$$\varrho = \frac{n}{4}\left(z^{n-2} + 2z^n + z^{n+2}\right).$$

Ist $n \geqq 2$ so erhält ϱ den kleinsten Wert für $z = 0$, also auch für $x = 0$ und $y = 0$. Für $n = 2$ wird $\varrho = \frac{1}{2}$ und für $n > 2$ wird $\varrho = 0$ der kleinste Wert, den ϱ haben kann. Durch Differenziation erhält man

$$\frac{d\varrho}{dz} = \frac{n}{4} z^{n-3} \{n - 2 + 2nz^2 + (n+2)z^4\},$$

$$\frac{d^2\varrho}{dz^2} = \frac{n}{4} z^{n-4} \{(n-2)(n-3) + 2n(n-1)z^2 + (n+2)(n+1)z^4\}.$$

$\frac{d\varrho}{dz}$ kann gleich 0 werden für $z = 0$. Für diesen Wert von z wird ϱ am kleinsten, wenn $n \geqq 2$ ist, wie wir schon gesehen haben, dagegen $\varrho = \infty$, wenn $n < 2$ ist, erhält also nicht den kleinsten Wert. Zweitens wird $\frac{d\varrho}{dz} = 0$, wenn $(2+n)z^4 + 2nz^2 = 2 - n$ ist, woraus man

$$z = \left(\frac{2-n}{2+n}\right)^{\frac{1}{2}} \qquad 24.$$

erhält, während die übrigen Wurzeln zu verwerfen sind. Ist $n > 2$, so wird z imaginär; ist $n = 2$, so wird $z = 0$, wofür wir schon den kleinsten Wert $\varrho = \frac{1}{2}$ gefunden haben. Ist $n < 2$, so erhält man

$$\begin{aligned}\frac{d^2\varrho}{dz^2} &= \frac{n}{4}\left(\frac{2-n}{2+n}\right)^{\frac{n-4}{2}} \left\{(2-n)(3-n) + 2n(n-1)\frac{2-n}{2+n} + (n+1)\frac{(2-n)^2}{2+n}\right\} \\ &= \frac{n}{4}\left(\frac{2-n}{2+n}\right)^{\frac{n-2}{2}} \left\{(3-n)(2+n) - 2n(1-n) + (1+n)(2-n)\right\} \\ &= 2n\left(\frac{2+n}{2-n}\right)^{\frac{2-n}{2}}.\end{aligned}$$

Also wird ϱ für $z = \left(\frac{2-n}{2+n}\right)^{\frac{1}{2}}$ ein Minimum, und da ϱ für keinen anderen Wert von z ein Minimum werden kann, so erhält ϱ für diesen Wert von z überhaupt den kleinsten Wert. Durch Substitution des Wertes von z erhält man

$$x = \left(\frac{2-n}{2+n}\right)^{\frac{n}{2}}, \qquad 25.$$

$\varrho = \frac{n}{4}\left(\frac{2-n}{2+n}\right)^{\frac{n}{2}} \cdot \frac{2+n}{2-n}\left(1 + \frac{2-n}{2+n}\right)^2$, also

$$\varrho = \frac{4n}{4-n^2}\left(\frac{2-n}{2+n}\right)^{\frac{n}{2}} = \frac{4n}{4-n^2}x. \qquad 26.$$

Es giebt stets einen Punkt, aber auch nur einen Punkt der größten Krümmung, welcher der Leitlinie näher liegt als der Punkt, für welchen die Ordinate ein Maximum ist, und sich, wenn n wächst, der Leitlinie nähert, bis er diese für $n = 2$ im Berührungspunkte erreicht.

Wenn $n = 1$ ist, so ist für den Punkt der größten Krümmung

$$x = \frac{1}{3}\sqrt{3}, \quad \varrho = \frac{4}{9}\sqrt{3}, \quad \varrho = \frac{4}{3}x. \qquad 27.$$

§ 4.

Die Größen, deren Entwicklung in diesem Paragraphen gegeben wird, werden als algebraische Größen mit gleichen Vorzeichen aufgefaßt.

I. Rektifikation der Kurve.

Um die Kurve zu rektifizieren, kann man von ihrer Grundeigenschaft ausgehen. Für die auf der Leitlinie von zwei Tangenten in $(x\,y)$ und $(x_1\,y_1)$ der Kurve ausgeschnittene Strecke hat man die Gleichung $e = y - S_y - (y_1 - S_{y_1})$, also ist nach § 1.

$$s = n\{y - S_y - (y_1 - S_{y_1})\}.$$

Rechnet man den Bogen der Kurve vom Punkt $(x_1 y_1)$, so ist $n(y_1 - S_{y_1})$ konstant und werde durch $-\frac{1}{2}C$ bezeichnet. Durch Substitution der Werte für die Ordinate y und die Subtangente S_y erhält man den Bogen s. Leicht führt auch die gewöhnliche Methode zum Ziele. Es ist nach § 3, 17.

$$2ds = n(z^{n-2} + z^n)dz, \tag{1.}$$

wo der Bogen positiv oder negativ ist, je nachdem x größer oder kleiner als die Abscisse des Anfangspunktes des Bogens ist. Ist $n \gtrless 1$, so ergiebt die Integration

$$2s = \frac{n}{n-1}z^{n-1} + \frac{n}{n+1}z^{n+1} + C. \tag{2.}$$

Wenn $n > 1$ ist, können wir den Koordinatenanfang als Anfangspunkt des Bogens nehmen, und da für diesen Punkt $C = 0$ ist, so ist

$$2s = \frac{n}{n-1}x^{\frac{n-1}{n}} + \frac{n}{n+1}x^{\frac{n+1}{n}}, \tag{3.}$$

$$s + y = \frac{n}{n-1}x^{\frac{n-1}{n}}. \tag{3*.}$$

Wenn r die Entfernung des Koordinatenanfangs vom Punkte (xy) der Kurve bezeichnet, so ist nach § 3, 1.

$$\begin{aligned}
4r^2 = 4(x^2 + y^2) &= 4z^{2n} + \left(\frac{n}{n-1}\right)^2 z^{2n-2} - \frac{2n^2}{n^2-1}z^{2n} + \left(\frac{n}{n+1}\right)^2 z^{2n+2} \\
&= \left(\frac{n}{n-1}\right)^2 z^{2n-2} + \frac{2n^2-4}{n^2-1}z^{2n} + \left(\frac{n}{n+1}\right)^2 z^{2n+2} \\
&= \left\{\frac{n}{n-1}z^{n-1} + \frac{n}{n+1}z^{n+1}\right\}^2 - \frac{4}{n^2-1}z^{2n} \\
&= 4s^2 - \frac{4}{n^2-1}x^2, \text{ also}
\end{aligned}$$

$$s^2 = r^2 + \frac{x^2}{n^2-1}. \tag{4.}$$

Nun ist nach § 2, 8. $\operatorname{tg}\omega = -\frac{1}{\sqrt{n^2-1}}$, also

$$s^2 = r^2 + x^2 \operatorname{tg}\omega^2. \tag{5.}$$

Hieraus ergiebt sich eine einfache Konstruktion des Bogens, wenn die Kurve und die Tangente des Knotenpunktes gegeben sind.

Zieht man (Fig. 3.) zu der den Knotenpunkt der Kurve enthaltenden Tangente BT durch den Koordinatenanfang A die Parallele, welche die Verlängerung der Ordinate PQ in E schneidet, und macht QF gleich der Sehne AP, so ist die Strecke EF gleich dem Bogen AP.

Für den Knotenpunkt ist $r = x = k$, also

$$s^2 = k^2(1 + \operatorname{tg}\omega^2) = \frac{k^2}{\cos\omega^2}, \quad s = \frac{k}{\cos\omega}. \tag{6.}$$

Setzt man in 6. für k und $tg\omega$ die Werte aus § 2, 7. und § 2, 8. ein, so erhält man $s^2 = \left(\frac{n+1}{n-1}\right)^n\left(1 + \frac{1}{n^2-1}\right) = n^2\frac{(n+1)^{n-1}}{(n-1)^{n+1}}$, also ist

$$s = n\,\frac{(n+1)^{\frac{n-1}{2}}}{(n-1)^{\frac{n+1}{2}}}. \qquad 7.$$

Folglich ist nach § 3, 9. $s = T_y$, wie wir schon aus der Gleichung $s : T_y = 1 : n$ geschlossen haben. Nach § 2, 7. hat man noch die Gleichung

$$s^2 = nk^2p. \qquad 7^*.$$

Für den Bogen s', der zwischen den Berührungspunkten der auf der Leitlinie lotrecht stehenden Tangenten liegt, hat man nach 3. die Gleichung

$$s' = \frac{2n^2}{n^2-1} = 2np. \qquad 8.$$

Ist $n < 1$, so nehmen wir als Anfangspunkt des Bogens den Punkt der Kurve, für welchen $x = 1$ und $y = -\frac{n}{1-n^2}$ ist. Für $s = 0$ und $x = 1$, also auch $z = 1$ wird $C = \frac{2n^2}{1-n^2}$, also

$$2s = \frac{2n^2}{1-n^2} - \frac{n}{1-n}x^{-\frac{1-n}{n}} + \frac{n}{1+n}x^{\frac{1+n}{n}}. \qquad 9.$$

Ist endlich $n = 1$, so erhält man durch Integration der Gleichung 1.

$$4s = lnz^2 + z^2 + C.$$

Für den Punkt, dessen Koordinaten 1 und $-\frac{1}{4}$ sind, als Anfangspunkt des Bogens findet man $C = -1$, also

$$4s = lnx^2 + x^2 - 1. \qquad 10.$$

II. Quadratur der Kurve.

Bezeichnet man den Flächenraum, der von der Ordinatenaxe, den Abscissen zweier Punkte und dem von diesen Punkten begrenzten Bogen eingeschlossen ist, durch F_y, so ist $dF_y = \pm\, xdy$. Nimmt man als Anfangsabscisse $x = 1$, so nimmt mit abnehmendem y die Fläche F_y zu oder ab, je nachdem x größer oder kleiner als 1 ist. Folglich ist

$$\pm\, dF_y = -\,xdy, \qquad 11.$$

wo das obere oder untere Vorzeichen gilt, je nachdem x größer oder kleiner als 1 ist. Nun ist nach § 3, 1, 3. $x = z^n$, $2dy = (z^{-1} - z)dx$, $dx = nz^{n-1}dz$, also $2xdy = n(z^{n-2} - z^{2n})dz$, folglich, da $z = 1$ für $x = 1$ ist,

$$\pm\, 2F_y = -\,n\int_1^z (z^{2n-2} - z^{2n})dz. \qquad 12.$$

Ist $n \gtrless \frac{1}{2}$, so ist

$$\pm\, 2F_y = -\frac{n}{2n-1}(z^{2n-1} - 1) + \frac{n}{2n+1}(z^{2n+1} - 1) = \frac{2n}{4n^2-1} + \frac{n}{2n+1}z^{2n+1} - \frac{n}{2n-1}z^{2n-1},$$ also

$$\pm\, 2F_y = \frac{2n}{4n^2-1} + \frac{n}{2n+1}x^{\frac{2n+1}{n}} - \frac{n}{2n-1}x^{\frac{2n-1}{n}}. \qquad 13.$$

Ist $n > \frac{1}{2}$, so wird für $x = 0$

$$-\,F_y = \frac{n}{4n^2-1}. \qquad 14.$$

Die Leitlinie ist eine Tangente der Kurve, wenn $n > 1$, eine Asymptote, wenn $n \leqq 1$ ist. In dem letzteren Falle kann sie als eine Tangente angesehen werden, deren Berührungspunkt unendlich entfernt ist.

Wenn $n > \frac{1}{2}$ ist, so ist stets die von der Leitlinie, der auf ihr lotrecht stehenden Tangente und dem zwischen den Berührungspunkten liegenden Bogen begrenzte Fläche gleich der endlichen Größe $\frac{n}{4n^2-1}$. Für $n = 1$ ist diese Fläche gleich $\frac{1}{3}$.

Ist $n > 1$, so ist für den Knotenpunkt $x = k = \left(\frac{n+1}{n-1}\right)^{\frac{n}{2}}$. Setzt man diesen Wert in die Gleichung 13. ein, so erhält man

$$F_y = \frac{n}{4n^2-1} + \frac{n}{2}\left(\frac{1}{2n+1} \cdot \frac{n+1}{n-1} - \frac{1}{2n-1}\right)\left(\frac{n+1}{n-1}\right)^{\frac{2n-1}{2}} = \frac{n}{4n^2-1} + \frac{n^2}{4n^2-1}\,\frac{(n+1)^{\frac{2n-1}{2}}}{(n-1)^{\frac{2n+1}{2}}}.$$

Bezeichnet F die Fläche, welche von den auf beiden Seiten des Durchmessers k liegenden Bogen begrenzt wird, so ist

$$\frac{1}{2}F = \frac{n^2}{4n^2-1}\,\frac{(n+1)^{\frac{2n-1}{2}}}{(n-1)^{\frac{2n+1}{2}}} = \frac{n^2}{4n^2-1}\left(\frac{n+1}{n-1}\right)^{\frac{n}{2}}\frac{(n+1)^{\frac{n-1}{2}}}{(n-1)^{\frac{n+1}{2}}}. \qquad 15.$$

Bezeichnet u den Umfang der Fläche F, so ist nach 7. der letzte Faktor gleich $\frac{1}{n}s = \frac{1}{2n}u$, also

$$F = \frac{n}{4n^2-1}ku. \qquad 16.$$

Ist $x > k$, so erhält man für die Fläche, die von dem zwischen dem Scheitel und dem Punkte (xy) liegenden Bogen, der Leitlinie und der Abscisse x begrenzt wird, die Gleichung

$$2F_y = \frac{n}{2n+1}x^{\frac{2n+1}{n}} - \frac{n}{2n-1}x^{\frac{2n-1}{n}}. \qquad 17.$$

Wenn $n = \frac{1}{2}$ ist, so ist $\pm\, 2F_y = -\frac{1}{2}\int_1^z (z^{-1} - z)dz = \frac{1}{4}(z^2-1) - \frac{1}{4}ln z^2$, also, da $z^2 = x^4$ ist,

$$\pm\, F_y = \frac{1}{8}(x^4 - ln x^4 - 1). \qquad 18.$$

Bezeichnet F_x die Fläche, welche von der Abscissenaxe, den Ordinaten zweier Punkte und dem zwischen diesen Punkten liegenden Bogen begrenzt wird, so ist $dF_x = \pm\, ydx$, wo das obere oder untere Vorzeichen genommen werden muß, je nachdem y positiv oder negativ ist. Also ist

$$F_x = \pm\int_c^x ydx, \qquad 19.$$

wenn in dem Intervall von $x = c$ bis $x = x$ die Ordinate dasselbe Vorzeichen behält. Man findet leicht, wenn $n \gtrless \frac{1}{2}$ ist,

$$2F_x = \pm\left\{\frac{n^2}{(n-1)(2n-1)}\left(x^{\frac{2n-1}{n}} - c^{\frac{2n-1}{n}}\right) - \frac{n^2}{(n+1)(2n+1)}\left(x^{\frac{2n+1}{n}} - c^{\frac{2n+1}{n}}\right)\right\}. \qquad 20.$$

Für $n > 1$, $x = k$ und $c = o$ erhält man wieder die Gleichung 15.

Ist $n = \frac{1}{2}$, so ist y stets negativ, also $dF_x = \frac{1}{4}(z^{-1} + \frac{1}{3}z)dz$, folglich

$$F_x = \frac{1}{24}(x^4 - c^4) + \frac{1}{2}ln\frac{x}{c}. \qquad 21.$$

Wenn $n = 1$ ist, so ist nach § 3, 2. $- ydx = \frac{1}{4}x^2dx - \frac{1}{2}ln xdx$. Da $\int ln xdx = ln x\int dx - \int dln x\int dx = xln x - x$ ist, so ist für $x = 1$ als Anfangsabscisse

$$F_x = \frac{1}{12}x^3 + \frac{1}{2}x - \frac{1}{2}xln x - \frac{7}{12}. \qquad 22.$$

Sind r und v die polaren Koordinaten des Punktes (xy) und F_r die Fläche, welche von zwei Leitstrahlen und dem von ihnen begrenzten Bogen eingeschlossen wird, so ist

$$4dF_r = \pm 2r^2 dv. \qquad 23.$$

Nun ist $x = r\cos v$, $y = r\sin\varphi$, $\frac{y}{x} = \operatorname{tg} v$, also

$$r^2 = (1 + \operatorname{tg} v^2)x^2,$$

$$d\operatorname{tg} v = (1 + \operatorname{tg} v^2)dv = \frac{xdy - ydx}{x^2},$$

$$\begin{aligned} 2r^2dv &= 2xdy - 2ydx \\ &= n(z^{2n-2} - z^{2n})dz - n\Big(\frac{n}{n-1}z^{2n-2} - \frac{n}{n+1}z^{2n}\Big)dz \\ &= -n\Big(\frac{1}{n-1}z^{2n-2} + \frac{1}{n+1}z^{2n}\Big)dz. \end{aligned}$$

Folglich ist

$$4dF_r = \mp n\Big(\frac{1}{n-1}z^{2n-2} + \frac{1}{n+1}z^{2n}\Big)dz.$$

Da nun, wenn $n > 1$ ist, der Faktor von n stets positiv ist, so hat man, wenn der Sektor vom Koordinatenanfang gerechnet wird, also mit wachsendem x, mithin auch mit wachsendem z, wächst, das untere Vorzeichen zu nehmen, und es ist folglich

$$4F_r = n\int_0^z\Big(\frac{1}{n-1}z^{2n-2} + \frac{1}{n+1}z^{2n}\Big)dz,$$

$$4F_r = \frac{n}{(n-1)(2n-1)}x^{\frac{2n-1}{n}} + \frac{n}{(n+1)(2n+1)}x^{\frac{2n+1}{n}}. \qquad 24.$$

$$\{n > 1\}$$

III. Komplanation der Kurve.

Bezeichnet O_y die Fläche, welche der Bogen s bei der Rotation der Kurve um die Ordinatenaxe beschreibt, so ist $dO_y = 2\pi x ds$, also nach § 3, 1. und § 3, 17.

$$dO_y = n\pi(z^{2n-2} + z^{2n})dz,$$

$$O_y = n\pi\int_1^z(z^{2n-2} + z^{2n})dz. \qquad 25.$$

Folglich ist für $n \gtrless \frac{1}{2}$

$$O_y = \Big(\frac{n}{2n-1}x^{\frac{2n-1}{n}} + \frac{n}{2n+1}x^{\frac{2n+1}{n}} - \frac{4n^2}{4n^2-1}\Big)\pi. \qquad 26.$$

Ist $n > \frac{1}{2}$, so wird für $x = 0$ nach 14.

$$-O_y = \frac{4n^2}{4n^2-1}\pi = -4nF_y\pi. \qquad 27.$$

Wenn $n > 1$ ist, so kann man den Bogen vom Koordinatenanfang rechnen und erhält

$$O_y = \Big(\frac{n}{2n-1}x^{\frac{2n-1}{n}} + \frac{n}{2n+1}x^{\frac{2n+1}{n}}\Big)\pi. \qquad 28.$$

Für den Knotenpunkt als Endpunkt des Bogens wird $x = k = \Big(\frac{n+1}{n-1}\Big)^{\frac{n}{2}}$,

$$O_y = \frac{2n(2n^2-1)}{4n^2-1}\,\frac{(n+1)^{\frac{2n-1}{2}}}{(n-1)^{\frac{2n+1}{2}}} = \frac{2n(2n^2-1)}{4n^2-1}\Big(\frac{n+1}{n-1}\Big)^{\frac{n}{2}}\frac{(n+1)^{\frac{n-1}{2}}}{(n-1)^{\frac{n+1}{2}}}. \qquad 29.$$

Also hat man für die Fläche O', welche der Umfang u der Fläche F beschreibt, nach 7. und 16. die Gleichung

$$O' = \frac{2(2n^2-1)}{4n^2-1}ku\pi = \frac{2(2n^2-1)}{n}F\pi. \qquad 30.$$

Ist $n = \frac{1}{2}$, so ergiebt sich aus 24.

$$O_y = \tfrac{1}{4}(x^4 + lnx^4 - 1)\pi. \qquad 31.$$

Wird durch O_x die Fläche bezeichnet, welche vom Bogen s bei der Rotation der Kurve um die Abscissenaxe beschrieben wird, so ist $dO_x = \pm\, 2\pi y ds$, also nach § 3, 1. und § 3, 17.

$$dO_x = \pm \frac{n^2}{2}\pi\Big(\frac{1}{n-1}z^{n-1} - \frac{1}{n+1}z^{n+1}\Big)\left(z^{n-2} + z^n\right)dz,$$

$$O_x = \pm \frac{n^2}{2}\pi\int_1^z\Big(\frac{1}{n-1}z^{2n-3} + \frac{2}{n^2-1}z^{2n-1} - \frac{1}{n+1}z^{2n+1}\Big)dz, \qquad 32.$$

wenn $n \gtrless 1$ ist, wo das obere oder untere Vorzeichen genommen werden muß, je nachdem y positiv oder negativ ist.

Wenn $n < 1$ ist, so ist y stets negativ, also in 32. das untere Vorzeichen zu nehmen. Man findet

$$O_x = \tfrac{1}{4}\Big\{\Big(\frac{n}{1+n}\Big)^2 x^{\frac{2n+2}{n}} + \frac{2n}{1-n^2}x^2 - \Big(\frac{n}{1-n}\Big)^2 x^{\frac{2n-2}{n}} + \frac{2n(3n^2-1)}{(1-n^2)^2}\Big\}\pi. \qquad 33.$$

Wenn $n > 1$ ist, so nimmt man den Koordinatenanfang als Anfangspunkt des Bogens und hat für das Intervall von $x = 0$ bis $x = k$, in welchem y positiv ist, in 32. das obere Vorzeichen und als untere Grenze des Integrats 0 statt 1 zu nehmen. Es ist daher

$$O_x = \tfrac{1}{4}\Big\{\Big(\frac{n}{n-1}\Big)^2 x^{\frac{2n-2}{n}} + \frac{2n}{n^2-1}x^2 - \Big(\frac{n}{n+1}\Big)^2 x^{\frac{2n+2}{n}}\Big\}\pi. \qquad 34.$$

Für $x = k$ wird

$$O_x = \frac{n}{2(n^2-1)}\Big(\frac{n+1}{n-1}\Big)^n\pi = \tfrac{1}{2}k^2p\pi. \qquad 35.$$

Für das Intervall von $x = k$ bis $x = \infty$ ist, da in diesem Intervall y negativ ist, das untere Vorzeichen zu nehmen. Also ist für den Knotenpunkt als Anfangspunkt

$$O_x = \frac{n}{2(n^2-1)}\Big(\frac{n+1}{n-1}\Big)^n\pi + \tfrac{1}{4}\Big\{\Big(\frac{n}{n+1}\Big)^2 x^{\frac{2n+2}{n}} - \frac{2n}{n^2-1}x^2 - \Big(\frac{n}{n-1}\Big)^2 x^{\frac{2n-2}{n}}\Big\}\pi. \qquad 36.$$

Wenn $n = 1$ ist, so ist y stets negativ. Nun ist nach § 3, 2. und § 3, 17.

$$-\,8yds = (x^3 + x - \frac{2lnx}{x} - xlnx^2)dx,$$

$$2\int\frac{lnx}{x}\,dx = 2\int lnx\,dlnx = (lnx)^2,$$

$$\int xlnx^2dx = \tfrac{1}{2}\int lnx^2dx^2 = \tfrac{1}{2}lnx^2\int dx^2 - \tfrac{1}{2}\int dlnx^2\int dx^2 = \tfrac{1}{2}x^2lnx^2 - \tfrac{1}{2}x^2.$$

Folglich ist für $x = 1$ als Anfangsabscisse

$$4O_x = \big\{\tfrac{1}{4}x^4 + x^2 - (lnx)^2 - x^2lnx - \tfrac{5}{4}\big\}\pi. \qquad 37.$$

IV. Kubatur der Kurve.

Bezeichnet man das Volumen des Körpers, der durch die Rotation der Fläche F_y um die Leitlinie entsteht, durch C_y, so ist

$$\pm\, dC_y = -\,\pi x^2 dy, \qquad 38.$$

wo, wenn $x = 1$ als Anfangsabscisse genommen wird, das obere oder untere Vorzeichen gilt, je nachdem x größer oder kleiner als 1 ist. Ist $n \gtrless \frac{1}{3}$, so findet man

$$\pm\, 2C_y = \Big(\frac{2n}{9n^2-1} + \frac{n}{3n+1}x^{\frac{3n+1}{n}} - \frac{n}{3n-1}x^{\frac{3n-1}{n}}\Big)\pi. \qquad 39.$$

Wenn $n > \frac{1}{3}$ ist, so wird

$$-C_y = \frac{n}{9n^2-1}\pi, \qquad 40.$$

und wenn $n = 1$ ist,

$$-C_y = \tfrac{1}{8}\pi \qquad 41.$$

für $x = 0$. Ist $n > 1$, so ergiebt sich für $x = k$

$$2C_y = \frac{4n^2}{9n^2-1}\frac{(n+1)^{\frac{3n-1}{2}}}{(n-1)^{\frac{3n+1}{2}}}\pi + \frac{2n}{9n^2-1}\pi. \qquad 42.$$

Folglich hat man für den Körper C', welcher durch Rotation der Fläche F entsteht, die Gleichung

$$C' = \frac{4n^2}{9n^2-1}\frac{(n+1)^{\frac{3n-1}{2}}}{(n-1)^{\frac{3n+1}{2}}}\pi = \frac{2n}{9n^2-1}k^2u\pi. \qquad 43.$$

Ist $x > k$, so erhält man für den Körper, der durch die Rotation der in 17. angegebenen Fläche entsteht,

$$2C_y = \left(\frac{n}{3n+1}x^{\frac{3n+1}{n}} - \frac{n}{3n-1}x^{\frac{3n-1}{n}}\right)\pi. \qquad 44.$$

Ist $n = \frac{1}{3}$, so ergiebt sich

$$C_y = \tfrac{1}{12}(x^6 - lnx^6 - 1)\pi. \qquad 45.$$

Für den Körper C_x, der durch die Rotation der Fläche F_x um die Abscissenaxe entsteht, ist, wenn $x = 1$ die Anfangsabscisse ist,

$$C_x = \pi\int_1^x y^2dx. \qquad 46.$$

Wenn $n \gtrless 1$ ist, so ist

$$4y^2dx = \left\{\frac{n^3}{(n-1)^2}z^{3n-3} - \frac{2n^3}{n^2-1}z^{3n-1} + \frac{n^3}{(n+1)^2}z^{3n+1}\right\}dz.$$

Ist auch $n \gtrless \frac{2}{3}$, so erhält man durch Integration

$$4C_y = \left\{\frac{n^3}{(n-1)^2(3n-2)}x^{\frac{3n-2}{n}} - \frac{2n^2}{3(n^2-1)}x^3 + \frac{n^3}{(n+1)^2(3n+2)}x^{\frac{3n+2}{n}} - \frac{4(17n^2-2)n^2}{3(n^2-1)^2(9n^2-4)}\right\}\pi. \qquad 47.$$

Ist $n > 1$, so nimmt man in dem Integral 46. als untere Grenze 0 statt 1 und erhält

$$4C_x = \left\{\frac{n^3}{(n-1)^2(3n-2)}x^{\frac{3n-2}{n}} - \frac{2n^2}{3(n^2-1)}x^3 + \frac{n^3}{(n+1)^2(3n+2)}x^{\frac{3n+2}{n}}\right\}\pi. \qquad 48.$$

Für $x = k$ wird in diesem Falle, wenn man den durch die Rotation von $\frac{1}{2}F$ erzeugten Körper durch C bezeichnet,

$$C = \frac{2n}{3(9n^2-4)}\left(\frac{n+1}{n-1}\right)^{\frac{3n}{2}}\frac{n}{n^2-1}\pi = \frac{2n}{3(9n^2-4)}k^3p\pi. \qquad 49.$$

Ist $n = \frac{2}{3}$, so erhält man für $x = 1$ als Anfangsabscisse

$$C_x = \tfrac{2}{3}\left(\tfrac{1}{100}x^6 + \tfrac{1}{5}x^3 + \tfrac{3}{2}lnx - \tfrac{21}{100}\right)\pi. \qquad 50.$$

Ist $n = 1$, so ist $16y^2dx = \{4(lnx)^2 - 4x^2lnx + x^4\}dx$. Nun ist

$$\int(lnx)^2dx = x(lnx)^2 - 2\int lnxdx = x(lnx)^2 - 2xlnx + 2x,$$

$$\int x^2lnxdx = \tfrac{1}{9}\int lnx^3dx^3 = \tfrac{1}{3}x^3lnx - \tfrac{1}{9}x^3,$$ also für $x = 1$ als Anfangsabscisse

$$16C_x = \left\{\tfrac{1}{5}x^5 + \tfrac{4}{9}x^3 + 8x - \tfrac{4}{3}x^3lnx - 8xlnx + 4x(lnx)^2 - \tfrac{389}{45}\right\}\pi. \qquad 51.$$

Für $x = 0$ wird

$$-C_x = \tfrac{389}{720}\pi. \qquad 52.$$

§ 5.

I.

In diesem Paragraphen soll die Kurve für den speciellen Fall, daß $n = 2$ ist, einer besonderen und eingehenderen Betrachtung unterworfen werden. Da auch einige merkwürdige Beziehungen zu anderen Kurven zur Sprache kommen werden, so empfiehlt es sich, nicht mehr a als Längeneinheit anzunehmen. Man hat alsdann in den Entwickelungen der §§ 3. und 4. die Längen durch ihre Verhältnisse zu a, die Flächen durch ihre Verhältnisse zu a^2 und die Körper durch ihre Verhältnisse zu a^3 zu ersetzen. Die bemerkenswertesten Ergebnisse dieser Paragraphen für unsere Kurve seien hier kurz zusammengestellt, wobei wir die auf der Leitlinie lotrecht stehenden Tangenten die Normaltangenten der Kurve nennen wollen.

Die Berührungssehne 2p der Normaltangenten ist gleich $\frac{4}{3}a$ und gleich der Hälfte des zugehörigen Bogens. Die von diesem Bogen, der Leitlinie und den beiden Normaltangenten begrenzte Fläche beträgt $\frac{4}{15}a^2$, das Volumen des durch die Rotation dieser Fläche um die Leitlinie erzeugten Körpers $\frac{4}{35}a^3\pi$ und die Oberfläche desselben $\frac{32}{15}a^2\pi$.

Der Durchmesser k ist gleich 3a und gleich $\frac{9}{2}p$. Die von den beiden zum Durchmesser gehörigen Bogen begrenzte Fläche F beträgt $\frac{8}{5}a^2\sqrt{3}$, ihr Umfang $4a\sqrt{3}$, das Volumen des von dieser Fläche durch die Rotation um die Leitlinie erzeugten Körpers $\frac{144}{35}a^3\pi\sqrt{3}$ und die Oberfläche desselben $\frac{56}{5}a^2\pi\sqrt{3}$.

Das Volumen des Körpers, der durch die Rotation der von dem Durchmesser und seinem Bogen begrenzten Fläche um die Axe erzeugt wird, beträgt $\frac{3}{4}a^3\pi$ und die Oberfläche desselben $3a^2\pi$.

Die den Knotenpunkt enthaltenden Tangenten schließen mit der Leitlinie ein gleichseitiges Dreieck ein, dessen Seite gleich dem von dem Scheitel und dem Knotenpunkt begrenzten Bogen ist.

Für den Krümmungshalbmesser ϱ und den Bogen s hat man die Gleichungen

$$\varrho = \frac{1}{2}\frac{(a+x)^2}{a}, \quad s + y = 2\sqrt{ax}\ .$$

II.

Nach § 1, 12, 13. finden die Gleichungen statt

$$\varphi = \tfrac{1}{4}\pi \mp \tfrac{1}{2}\tau, \quad x = a\,tg\varphi^2, \quad y = \pm\, a(tg\varphi - \tfrac{1}{3}tg\varphi^3); \qquad 1.$$

$$y = \pm\, a\left(1 - \frac{x}{3a}\right)\sqrt{\frac{x}{a}}, \qquad 2.$$

wo die Vorzeichen in φ und y sich aufeinander beziehen. Die letzte Gleichung läßt sich auf die Formen

$$3ay = \pm\,(3a - x)\sqrt{ax}, \quad 9ay^2 = x(3a - x)^2 \qquad 3.$$

und durch Ersetzung von a durch $\frac{3}{2}p$ auf die Formen

$$18py = \pm\,(9p - 2x)\sqrt{6px}, \quad 54py^2 = x(9p - 2x)^2 \qquad 4.$$

bringen.

Verlegt man mit Vertauschung des positiven und negativen Teils der Abscissenaxe den Koordinatenanfang A in den Punkt O, dessen Koordinaten $\frac{1}{2}p$ und 0 sind, und den wir den Pol der Kurve nennen, so hat man τ durch $-\tau$ und x durch $\frac{1}{2}p - x$ zu ersetzen. Man hat demnach die Gleichungen

$$\varphi = \tfrac{1}{4}\pi \pm \tfrac{1}{2}\tau, \quad x = \tfrac{1}{2}p(1 - 3\mathrm{tg}\varphi^2), \quad y = \pm \tfrac{1}{2}p(3\mathrm{tg}\varphi - \mathrm{tg}\varphi^3); \qquad 5.$$

$$27py^2 = (p - 2x)(4p + x)^2. \qquad 6.$$

Nun ist $\cos\varphi^3 - 3\sin\varphi^2\cos\varphi = \cos2\varphi\cos\varphi - \sin2\varphi\sin\varphi = \cos3\varphi$,

$3\sin\varphi\cos\varphi^2 - \sin\varphi^3 = \sin2\varphi\cos\varphi + \cos2\varphi\sin\varphi = \sin3\varphi$.

Folglich ist

$$\varphi = \tfrac{1}{4}\pi \pm \tfrac{1}{2}\tau, \quad x = \tfrac{1}{2}p\frac{\cos3\varphi}{\cos\varphi^3}, \quad y = \pm \tfrac{1}{2}p\frac{\sin3\varphi}{\cos\varphi^3}, \quad \mathrm{tg}3\varphi = \pm\frac{y}{x}, \qquad 7.$$

wo sich die Vorzeichen in den Gleichungen für φ, y und $\mathrm{tg}3\varphi$ auf einander beziehen. Es mag daran erinnert werden, daß für jeden endlichen Punkt der Kurve φ ein positiver spitzer Winkel ist.

Die Gleichung 6. erhält dadurch, daß man die Multiplikation auf der rechten Seite ausführt und zu beiden Seiten $27px^2$ addiert, die Form

$$27p(x^2 + y^2) = 2(2p - x)^3. \qquad 8.$$

Der positive Leitstrahl r und der positive oder negative Richtungswinkel v seien die Polar-Koordinaten des Punktes (xy) für den neuen Anfang als Pol. Alsdann ist $x = r\cos v$, $y = r\sin v$, $\frac{y}{x} = \mathrm{tg}v = \pm\,\mathrm{tg}3\varphi$, also

$$v = \pm\, 3\varphi = \tfrac{3}{2}\tau \pm \tfrac{3}{4}\pi, \qquad 9.$$

$$r^2 = x^2 + y^2 = \frac{p^2}{4\cos\varphi^6} = \frac{p^2}{4\cos\frac{1}{3}v^6}. \qquad 10.$$

Folglich ist, da der Winkel φ, also auch der absolute Wert von $\frac{1}{3}v$, $\frac{1}{2}\pi$ nicht übersteigen kann, mithin $\cos\frac{1}{3}v$ stets positiv ist,

$$r = \frac{1}{2}\frac{p}{\cos\frac{1}{3}v^3} \qquad 11.$$

die Gleichung unserer Kurve in Polar-Koordinaten. Die Gleichungen

$$x = \tfrac{1}{2}p\frac{\cos v}{\cos\frac{1}{3}v^3}, \quad y = \tfrac{1}{2}p\frac{\sin v}{\cos\frac{1}{3}v^3}; \qquad 12.$$

$$x = \tfrac{1}{2}p(1 - 3\mathrm{tg}\tfrac{1}{3}v^2), \quad y = \tfrac{1}{2}p(3\mathrm{tg}\tfrac{1}{3}v - \mathrm{tg}\tfrac{1}{3}v^3) \qquad 13.$$

geben die rechtwinkligen Koordinaten als Funktionen des **Arguments** v.

Die Aehnlichkeit der Polargleichung der Kurve mit der Polargleichung der Kegelschnitte, insbesondere der Parabel, welche $r = \frac{p}{2\cos\frac{1}{2}v^2}$ ist, veranlaßt uns, von jetzt ab p den **Parameter** der Kurve zu nennen und die Polargleichung der Kurve den weiteren Untersuchungen zu Grunde zu legen.

Die Gleichung 11. ist vorzüglich geeignet, die Gestalt der Kurve erkennen zu lassen. Der **Leitstrahl** r erhält den kleinsten Wert, wenn $\cos\frac{1}{3}v$ den größten Wert erhält, d. i. für $v = 0$. Da r wächst, wenn $\cos\frac{1}{3}v$ abnimmt, das letztere aber geschieht, sowohl wenn v größer als auch wenn v kleiner als Null wird, so ist für $v = 0$

$$r = \tfrac{1}{2}p \qquad 14.$$

ein Minimum. Weil r stets positiv ist, so ist $\frac{3}{2}\pi$ der größte absolute Wert, den v haben kann. Für $v = \pm\,\frac{3}{2}\pi$ wird $r = \infty$, und der Leitstrahl wächst stetig von $\frac{1}{2}p$ bis ∞, wenn v stetig von 0 bis $+\,\frac{3}{2}\pi$ zu- oder von 0 bis $-\,\frac{3}{2}\pi$ abnimmt. Folgende Zusammenstellung enthält einige bemerkenswerte zu einander gehörige Werte von v, r, τ; x, y.

v	r	τ	x	y
0	$\frac{1}{2}p$	$\mp\frac{1}{2}\pi$	$+\frac{1}{2}p$	0
$\pm\frac{1}{2}\pi$	$\frac{4}{9}p\sqrt{3}$	$\mp\frac{1}{6}\pi$	0	$\pm\frac{4}{9}p\sqrt{3}$
$\pm\frac{3}{4}\pi$	$p\sqrt{2}$	0	$-p$	$\pm p$
$\pm\pi$	$4p$	$\pm\frac{1}{6}\pi$	$-4p$	0
$\pm\frac{3}{2}\pi$	∞	$\pm\frac{1}{2}\pi$	$-\infty$	$\mp\infty$

Für $v = 0$ fällt die Tangente mit der Leitlinie zusammen. Die Tangenten der Punkte, für welche $v = +\frac{1}{2}\pi$ und $v = -\frac{1}{2}p$ ist, bilden mit der Berührungssehne ein gleichseitiges Dreieck, dessen Höhe gleich $\frac{4}{3}p$ ist. Für $v = \pm\frac{3}{4}\pi$ sind die Tangenten der Axe parallel. Die beiden Punkte, für welche $v = +\pi$ und $v = -\pi$ ist, fallen in einen Punkt der Axe zusammen und bilden, da es für diese zwei verschiedene Tangenten giebt, einen Knotenpunkt der Kurve. Außerdem schließen diese Tangenten mit der Leitlinie ein gleichseitiges Dreieck ein, dessen Höhe gleich $\frac{9}{2}p$ ist.

III.

Um die Kurve zu rektifizieren, differenziert man die Gleichungen 12. und erhält

$$dx = -\frac{1}{2}p\frac{\sin\frac{2}{3}v}{\cos\frac{1}{3}v^4}dv\,, \quad dy = \frac{1}{2}p\frac{\cos\frac{2}{3}v}{\cos\frac{1}{3}v^4}dv\,. \qquad 15.$$

Folglich ist

$$ds^2 = dx^2 + dy^2 = \frac{1}{4}p^2\frac{dv^2}{\cos\frac{1}{3}v^8}, \qquad 16.$$

also, wenn man den Bogen vom Scheitel an rechnet und positiv oder negativ nimmt, je nachdem v positiv oder negativ ist,

$$ds = \frac{1}{2}p\frac{dv}{\cos\frac{1}{3}v^4} = \frac{3}{2}p(1 + tg\tfrac{1}{3}v^2)dtg\tfrac{1}{3}v\,.$$

Durch Integration erhält man

$$s = \frac{1}{2}p(3tg\tfrac{1}{3}v + tg\tfrac{1}{3}v^3) \qquad 17.$$

und aus 13. und 17. durch Addition

$$s + y = 3ptg\tfrac{1}{3}v\,. \qquad 18.$$

Für $v = \frac{3}{4}\pi$, also $\tau = 0$, wird

$$s = 2p\,. \qquad 19.$$

Der vom Scheitel der Kurve und dem Berührungspunkte einer Normaltangente begrenzte Bogen ist gleich dem doppelten Parameter.

Bezeichnet man die vom Leitstrahle des Scheitels, dem Leitstrahle r und dem von ihnen begrenzten Bogen s begrenzte Fläche, welche positiv oder negativ genommen wird, je nachdem v positiv oder negativ ist, durch F, so ist

$$F = \frac{1}{2}\int_0^v r^2dv\,. \qquad 20.$$

Nun ist $r^2dv = \frac{1}{4}p^2\frac{dv}{\cos\frac{1}{3}v^6} = \frac{3}{4}p^2\frac{dtg\frac{1}{3}v}{\cos\frac{1}{3}v^4} = \frac{3}{4}p^2(1 + tg\frac{1}{3}v^2)^2dtg\frac{1}{3}v$, folglich

$$F = \frac{3}{8}p^2(tg\tfrac{1}{3}v + \tfrac{2}{3}tg\tfrac{1}{3}v^3 + \tfrac{1}{5}tg\tfrac{1}{3}v^5)\,. \qquad 21.$$

Man hat folgende zusammengehörige Werte von F und v:

$v = \frac{1}{2}\pi$, $F = \frac{7}{45}p^2\sqrt{3}$; $v = \frac{3}{4}\pi$, $F = \frac{7}{10}p^2$; $v = \pi$, $F = \frac{9}{5}p^2\sqrt{3}$.

IV.

Es seien r_1 und v_1 die polaren Koordinaten des Fußpunktes P_1 des vom Pole der Kurve auf eine beliebige Tangente gefällten Lotes. Der Winkel v_1 ist entweder ein Innenwinkel oder ein Außenwinkel desjenigen Dreiecks, dessen Eckpunkte der Pol, der Fußpunkt jenes Lotes und der Schnittpunkt der Tangente mit der Axe der Kurve sind. Folglich ist, mit Rücksicht auf die Vorzeichen von v_1 und τ, in jedem Falle $v_1 = \tau \pm \frac{1}{2}\pi$, also nach 9.

$$v_1 = \tfrac{2}{3}v. \qquad 22.$$

Hiernach ist der Winkel, welchen das vom Pole auf die Tangente gefällte Lot mit dem Leitstrahl des Berührungspunktes einschließt, gleich $\frac{1}{3}v$. Nun ist nach § 3, 5. im ursprünglichen Koordinatensysteme die Subtangente $S_y = \frac{a-x}{2a}\sqrt{ax}$, also die Tangente leicht zu konstruieren. Da nach der Grundeigenschaft der Kurve die Ordinate des Schnittpunktes der Tangente mit der Leitlinie gleich $\frac{1}{2}s$ ist, so ergiebt sich aus der zu § 4, 5. gegebenen Konstruktion des Bogens s eine noch einfachere Konstruktion der Tangente, zumal für unsere Kurve der Winkel EAQ (Fig. 3.) gleich $\frac{1}{6}\pi$ ist.

Ist die Kurve gegeben, so läßt sich das Problem lösen, einen beliebigen Winkel in drei gleiche Teile zu teilen.

Da der von r und r_1 eingeschlossene Winkel gleich $\frac{1}{3}v$ ist, so ist $r_1 = r\cos\frac{1}{3}v = \frac{p}{2\cos\frac{1}{3}v^2}$. Ersetzt man hierin v durch $\frac{3}{2}v_1$, so wird

$$r_1 = \frac{p}{2\cos\frac{1}{2}v_1^2} = \frac{p}{1+\cos v_1}. \qquad 23.$$

Der geometrische Ort des Fußpunktes des vom Pole der Kurve auf die Tangente gefällten Lotes ist eine Parabel, deren Scheitel mit dem Scheitel der Kurve und deren Brennpunkt mit dem Pole der Kurve zusammenfällt.

In Figur 3. ist die gestrichelt gezeichnete Linie die Parabel.

Sind x_1 und y_1 die rechtwinkligen Koordinaten der Parabel, so ist $x_1 = r_1\cos v_1$, $y_1 = r_1\sin v_1$, also

$$x_1 = \tfrac{1}{2}p\frac{\cos\frac{2}{3}v}{\cos\frac{1}{3}v^2}, \quad y_1 = \tfrac{1}{2}p\frac{\sin\frac{2}{3}v}{\cos\frac{1}{3}v^2}; \qquad 24.$$

$$x_1 = \tfrac{1}{2}p(1-\mathrm{tg}\tfrac{1}{3}v^2), \quad y_1 = p\,\mathrm{tg}\tfrac{1}{3}v. \qquad 25.$$

Für das ursprüngliche Koordinatensystem ist $x_1 = \frac{1}{2}p\,\mathrm{tg}\frac{1}{3}v^2$ und nach 13. $x = \frac{3}{2}p\,\mathrm{tg}\frac{1}{3}v^2$. Also ist

$$x = 3x_1. \qquad 26.$$

Das Verhältnis der Abstände je zweier entsprechenden Punkte der Kurve und der Parabel von der Leitlinie ist gleich 3.

Mit Hilfe der Sätze 23. und 26. läßt sich die Kurve mit der größten Leichtigkeit durch Punkte konstruieren.

Man konstruiert aus der beliebigen Abscisse x_1 und der mittleren Proportionale y_1 zwischen $2p$ und x_1 den Punkt P_1 der Parabel, errichtet auf dem Leitstrahle OP_1 im Punkte P_1 das Lot und erhält im Schnittpunkte desselben mit der Geraden, welche der Leitlinie parallel ist und von ihr den Abstand $3x_1$ hat, einen Punkt P der Kurve.

Nach 13. und 25. ist

$$x - x_1 = - ptg\tfrac{1}{3}v^2 = - \tfrac{1}{2}p\frac{\sin\frac{1}{3}v}{\cos\frac{1}{3}v^3} \cdot \sin\tfrac{2}{3}v\,,$$

$$y - y_1 = \tfrac{1}{2}p(tg\tfrac{1}{3}v - tg\tfrac{1}{3}v^3) = \tfrac{1}{2}p\frac{\sin\frac{1}{3}v}{\cos\frac{1}{3}v^3} \cdot \cos\tfrac{2}{3}v\,,$$

und nach 17. und 25.

$$s - y_1 = \tfrac{1}{2}p(tg\tfrac{1}{3}v + tg\tfrac{1}{3}v^3) = \tfrac{1}{2}p\frac{\sin\frac{1}{3}v}{\cos\frac{1}{3}v^3}\,,$$

folglich

$$x - x_1 = - (s - y_1)\sin\tfrac{2}{3}v\,, \quad y - y_1 = (s - y_1)\cos\tfrac{2}{3}v\,, \qquad 27.$$

$$(x - x_1)^2 + (y - y_1)^2 = (s - y_1)^2\,. \qquad 28.$$

Der Abstand zweier entsprechenden Punkte der Kurve und der Parabel ist gleich der Differenz aus dem Bogen der Kurve und der Ordinate der Parabel.

Da der Leitstrahl r_1 des Punktes der Parabel auf der Tangente der Kurve lotrecht steht, so ist auch

$$(x - x_1)^2 + (y - y_1)^2 = r^2 - r_1^2\,,$$

eine Gleichung, welche nach 11. und 23. ebenfalls zu dem vorstehenden Ergebnisse führt.

Nach 18. und 25. ist

$$s = 3y_1 - y\,. \qquad 29.$$

Der Bogen der Kurve ist gleich der Differenz aus der dreifachen Ordinate der Parabel und der Ordinate der Kurve.

Führt man in 28. den Wert für s aus 29. ein, so erhält man

$$(x - x_1)^2 + (y - y_1)^2 = (2y_1 - y)^2\,. \qquad 30.$$

Der Abstand zweier entsprechenden Punkte der Kurve und der Parabel ist gleich der Differenz aus der doppelten Ordinate der Parabel und der Ordinate der Kurve.

Bezeichnen μ und ν die positiven, π nicht übersteigenden Winkel, welche für einander entsprechende Punkte die Tangente der Kurve und die Normale der Parabel mit dem positiven Teile der Ordinatenaxe einschließen, so ist

$$tg\mu = \frac{dx}{dy}\,, \quad tg\nu = - \frac{dy_1}{dx_1}\,. \qquad 31.$$

Nach 15. ist

$$dx = - \tfrac{1}{2}p\frac{\sin\frac{2}{3}v}{\cos\frac{1}{3}v^4}dv\,, \quad dy = \tfrac{1}{2}p\frac{\cos\frac{2}{3}v}{\cos\frac{1}{3}v^4}dv\,;$$

und aus 25. erhält man

$$- dx_1 = ptg\tfrac{1}{3}vdtg\tfrac{1}{3}v\,, \quad dy_1 = pdtg\tfrac{1}{3}v\,.$$

Folglich ist

$$tg\mu = - tg\tfrac{2}{3}v = tg(\pi - \tfrac{2}{3}v)\,, \quad tg\nu = cotg\tfrac{1}{3}v = tg(\tfrac{1}{2}\pi - \tfrac{1}{3}v)\,,$$

$$\mu = 2\nu\,. \qquad 32.$$

Der von der Tangente der Kurve und der Ordinate der Parabel ein geschlossene Winkel wird durch die Normale der Parabel halbiert.

Wenn Lichtstrahlen, welche der Leitlinie parallel sind, von der Parabel zurückgeworfen werden, so sind die zurückgeworfenen Strahlen Tangenten der Kurve.

Die Kurve ist die Katakaustika der Parabel, wenn die einfallenden Strahlen auf der Axe lotrecht stehen.

V.

Für den Krümmungshalbmesser ϱ hat man die Gleichung $\varrho^2 = \frac{ds^2}{d\tau^2}$ oder, da $d\tau = \frac{2}{3}dv$ ist, die Gleichung $\varrho^2 = \frac{9}{4}\frac{ds^2}{dv^2}$. Folglich ist nach 16. $\varrho^2 = \frac{9}{16}\frac{p^2}{\cos\frac{1}{3}v^8}$, also unter Benutzung von 11. und 23.

$$\varrho = \frac{3}{4}\frac{p}{\cos\frac{1}{3}v^4} = \frac{3}{2}\frac{r}{\cos\frac{1}{3}v} = \frac{3r_1^2}{p}. \qquad 33.$$

Das vom Pole auf die Tangente gefällte Lot ist die mittlere Proportionale zwischen dem Parameter und dem dritten Teile des Krümmungshalbmessers.

Für $v = 0$ wird $\varrho = \frac{3}{4}p$ ein Minimum, der Scheitel ist also der Punkt der größten Krümmung. Wenn der absolute Wert von v von 0 bis $\frac{3}{2}\pi$ stetig wächst, so wächst auch der Krümmungshalbmesser stetig von $\frac{3}{4}p$ bis ∞. Für den Knotenpunkt ist $v = \pi$, also $\varrho = 12p$.

Sind x_2 und y_2 die Koordinaten des geometrischen Ortes des Krümmungsmittelpunktes, also der Evolute der Kurve, so ist bekanntlich

$$x_2 = x - \frac{1 + \left(\frac{dy}{dx}\right)^2}{\frac{d^2y}{dx^2}} \cdot \frac{dy}{dx}, \quad y_2 = y + \frac{1 + \left(\frac{dy}{dx}\right)^2}{\frac{d^2y}{dx^2}}.$$

Nun ist

$$\frac{dy}{dx} = tg\tau, \quad 1 + \left(\frac{dy}{dx}\right)^2 = 1 + tg\tau^2, \quad \frac{d^2y}{dx^2} = (1 + tg\tau^2)\frac{d\tau}{dx} = \frac{2}{3}(1 + tg\tau^2)\frac{dv}{dx},$$

folglich

$$x_2 = x - \frac{3}{2}\frac{dy}{dv}, \quad y_2 = y + \frac{3}{2}\frac{dx}{dv}, \qquad 34.$$

also nach 13. und 15.

$$x_2 = \frac{1}{2}p(1 - 3tg\tfrac{1}{3}v^2) - \frac{3}{4}p\frac{\cos\frac{2}{3}v}{\cos\frac{1}{3}v^4} = \frac{1}{2}p(1 - 3tg\tfrac{1}{3}v^2) - \frac{3}{4}p\frac{\cos\frac{1}{3}v^4 - \sin\frac{1}{3}v^4}{\cos\frac{1}{3}v^4},$$

$$y_2 = \frac{1}{2}p(3\,tg\tfrac{1}{3}v - tg\tfrac{1}{3}v^3) - \frac{3}{4}p\frac{\sin\frac{2}{3}v}{\cos\frac{1}{3}v^4} = \frac{1}{2}p(3tg\tfrac{1}{3}v - tg\tfrac{1}{3}v^3) - \frac{3}{4}p\frac{2\sin\frac{1}{3}v(\cos\frac{1}{3}v^2 + \sin\frac{1}{3}v^2)}{\cos\frac{1}{2}v^3},$$

$$-2(\tfrac{1}{4}p + x_2) = 2p(\tfrac{3}{2}tg\tfrac{1}{3}v^2 - \tfrac{3}{4}tg\tfrac{1}{3}v^4), \quad y_2 = -2ptg\tfrac{1}{3}v^3. \qquad 35.$$

Wählt man, unter Vertauschung des positiven und des negativen Teils der Abscissenaxe, als Ordinatenaxe eines Koordinatensystems der x', y' die Gerade, welche die Normaltangenten, begrenzt von den Berührungspunkten und der Leitlinie, lotrecht halbiert, so ist $x' = -(\frac{1}{4}p + x_2)$, $y' = y_2$, und die Gleichungen 35. erhalten die Form

$$2x' = 2p(\tfrac{3}{2}tg\tfrac{1}{3}v^2 - \tfrac{3}{4}tg\tfrac{1}{3}v^4), \quad y' = -2ptg\tfrac{1}{3}v^3. \qquad 36.$$

Bezeichnet man den absoluten Wert von $\frac{1}{3}v$ durch φ', so ist $tg\frac{1}{3}v = \pm\, tg\varphi'$, also

$$2x' = 2p(\tfrac{3}{2}tg\varphi'^2 - \tfrac{3}{4}tg\varphi'^4), \quad y' = \mp\, 2ptg\varphi'^3, \qquad 37.$$

und zwar ist in der Gleichung für y' das obere oder untere Vorzeichen zu nehmen, je nachdem v positiv oder negativ ist. Nach § 1, 12. sind

$$2x = \pm\, a(\tfrac{3}{2}tg\varphi^2 - \tfrac{3}{4}tg\varphi^4), \quad y = atg\varphi^3 \qquad 38.$$

die Gleichungen der Verfolgungslinie, für welche die Abscissenaxe die Leitlinie und 3 der Exponent ist. Da sowohl φ als auch φ' zwischen 0 und $+\frac{1}{2}\pi$ liegt, so ergiebt sich aus den Gleichungen 37. und 38. der Satz:

Die Evolute eines jeden der beiden Teile, in welche die Verfolgungslinie mit dem Exponenten 2 durch den Scheitel zerlegt wird, ist die Hälfte einer Verfolgungslinie mit dem Exponenten 3, deren Leitlinie mit der Axe der ersteren zusammenfällt, und deren Axe die Normaltangenten der ersteren, begrenzt von den Berührungspunkten und der Leitlinie, halbiert.

Die Evolvente der Kurve ist in Fig. 3. gestrichelt-punktiert gezeichnet.

Nach 13. und 35. ist $4y - y_2 = 6p\,tg\frac{1}{3}v$, also hat man nach 25. zwischen den entsprechenden Ordinaten der Kurve, der Parabel und der Evolute die Gleichung

$$4y = 6y_1 + y_2. \qquad 39.$$

Um die Gleichung der Evolute zwischen rechtwinkligen Koordinaten zu erhalten, hat man aus den Gleichungen 35. v zu eliminieren. Es ergiebt sich sofort

$$x_2 + \tfrac{1}{4}p = \tfrac{3}{4}p\left\{\left(\frac{y_2}{2p}\right)^{\frac{4}{3}} - 2\left(\frac{y_2}{2p}\right)^{\frac{2}{3}}\right\}, \qquad 40.$$

eine in Bezug auf x_2 entwickelte Gleichung. Addiert man zu beiden Seiten dieser Gleichung $\frac{3}{4}p$, so erhält man

$$x_2 + p = \tfrac{3}{4}p\left\{\left(\frac{y_2}{2p}\right)^{\frac{2}{3}} - 1\right\}^2, \qquad 41.$$

und aus dieser Gleichung findet man

$$8(x_2 + p)\sqrt[3]{2p} = 3(2p)^{\frac{4}{3}}\left\{\left(\frac{y_2}{2p}\right)^{\frac{2}{3}} - 1\right\}^2 = 3\left(\sqrt[3]{y_2^2} - \sqrt[3]{2p^2}\right)^2,$$

$$\sqrt{3}\,\sqrt[3]{y^2} = \sqrt{3}\,\sqrt[3]{4p^2} \pm 2\sqrt{2(x_2 + p)\sqrt[3]{2p}},$$

$$\sqrt{27}\,.\,y_2^2 = \sqrt{27}\,.\,4p^2 + \sqrt{27}\,.\,16p(x_2 + p) \pm 2\sqrt{2(x_2 + p)\sqrt[3]{2p}}\left\{9\sqrt[3]{16p^4} + 8(x_2 + p)\sqrt[3]{2p}\right\},$$

$$\sqrt{27}(y_2^2 - 16px_2 - 20p^2) = \pm\, 8(4x_2 + 13p)\sqrt{(x_2 + p)p}\,.$$

Folglich ist

$$27(y_2^2 - 16px_2 - 20p^2)^2 = 64p(x_2 + p)(4x_2 + 13p)^2 \qquad 42.$$

die rationale Gleichung der Evolute vom vierten Grade, aus der sich auch mit Leichtigkeit y^2 entwickeln läßt.

VI.

Um die durch Abwickelung der Kurve vom Scheitelpunkte aus erzeugte Evolvente zu erhalten, verfahren wir auf folgende Weise. Die Gleichung der Tangente für den Punkt (xy) ist

$$u - y = (t - x)tg\tau.$$

Nun ist nach 9. $\tau = \frac{2}{3}v \mp \frac{1}{2}\pi$, $tg\tau = -\cot g\frac{2}{3}v$, also

$$u - y = -(t - x)\cot g\tfrac{2}{3}v\,.$$

Sind x_3 und y_3 die Koordinaten der Evolvente, so ist hiernach

$$(x_3 - x)\cot g\tfrac{2}{3}v + (y_3 - y) = 0\,. \qquad 43.$$

Ferner ist nach dem Begriffe der Evolvente

$$(x_3 - x)^2 + (y_3 - y)^2 = s^2. \qquad 44.$$

Aus 43. erhält man $(x_3 - x)^2\cot g\frac{2}{3}v^2 - (y_3 - y)^2 = 0$, also durch Addition dieser Gleichung zu der vorhergehenden

$$(x_3 - x)^2 = s^2\sin\tfrac{2}{3}v^2. \qquad 45.$$

Für die Berührungspunkte der Normaltangenten ist nach 9. und 13. $x = -p$. Nun ist der absolute Wert der beiden vom Scheitel einerseits und den Berührungspunkten der Normaltangenten andererseits begrenzten Bogen nach 19. gleich 2p und nach dem Begriffe der Evolvente der Abstand der entsprechenden Punkte derselben von den genannten Berührungspunkten ebenfalls gleich 2p. Folglich ist $x_3 = + p$, also x_3 größer als x. Da nun für keinen endlichen Punkt der Kurve, den Anfangspunkt d. i. den Scheitel ausgenommen, die Tangente lotrecht auf der Abscissenaxe steht, oder mit anderen Worten, da die Tangente während der Abwickelung der ganzen Kurve niemals durch eine gegen die Abscissenaxe lotrechte Lage hindurchgeht, so muß für sämtliche Punkte der Kurve x_3 größer als x, also $x_3 - x$ stets positiv sein. Endlich ist, da der absolute Wert von $\frac{2}{3}v$ nicht größer als π sein kann und s und v, also auch s und $\sin\frac{2}{3}v$ stets dasselbe Vorzeichen haben, $s\sin\frac{2}{3}v$ stets positiv. Folglich ist nach 45. und 43.

$$x_3 - x = s\sin\tfrac{2}{3}v\,, \quad y_3 - y = - s\cos\tfrac{2}{3}v\,. \qquad 46.$$

Nach 13. und 17. ist

$$\begin{aligned} & x + s\sin\tfrac{2}{3}v \\ &= \tfrac{1}{2}p(1 - 3tg\tfrac{1}{3}v^2) + \tfrac{1}{2}p(3tg\tfrac{1}{3}v + tg\tfrac{1}{3}v^3)2\sin\tfrac{1}{3}v\cos\tfrac{1}{3}v \\ &= \tfrac{1}{2}p\frac{\cos\frac{1}{3}v^2 - 3\sin\frac{1}{3}v^2 + 6\sin\frac{1}{3}v^2\cos\frac{1}{3}v^2 + 2\sin\frac{1}{3}v^4}{\cos\frac{1}{3}v^2} \\ &= \tfrac{1}{2}p\frac{\cos\frac{1}{3}v^2 - \sin\frac{1}{3}v^2}{\cos\frac{1}{3}v^2} + \tfrac{1}{2}p\frac{4\sin\frac{1}{3}v^2\cos\frac{1}{3}v^2}{\cos\frac{1}{3}v^2} \\ &= \tfrac{1}{2}p\frac{\cos\frac{2}{3}v}{\cos\frac{1}{3}v^2} + \tfrac{1}{2}p\frac{\sin\frac{2}{3}v^2}{\cos\frac{1}{3}v^2}\,, \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} & y - s\cos\tfrac{2}{3}v \\ &= \tfrac{1}{2}p(3tg\tfrac{1}{3}v - tg\tfrac{1}{3}v^3) - \tfrac{1}{2}p(3tg\tfrac{1}{3}v + tg\tfrac{1}{3}v^3)(\cos\tfrac{1}{3}v^2 - \sin\tfrac{1}{3}v^2) \\ &= \tfrac{1}{2}p\frac{3\sin\frac{1}{3}v\cos\frac{1}{3}v^2 - \sin\frac{1}{3}v^3 - 3\sin\frac{1}{3}v\cos\frac{1}{3}v^4 + 2\sin\frac{1}{3}v^3\cos\frac{1}{3}v^2 + \sin\frac{1}{3}v^5}{\cos\frac{1}{3}v^3} \\ &= \tfrac{1}{2}p\frac{3\sin\frac{1}{3}v^3\cos\frac{1}{3}v^2 - \sin\frac{1}{3}v^3\cos\frac{1}{3}v^2 + 2\sin\frac{1}{3}v^3\cos\frac{1}{3}v^2}{\cos\frac{1}{3}v^3} \\ &= \tfrac{1}{2}p\frac{4\sin\frac{1}{3}v^3\cos\frac{1}{3}v}{\cos\frac{1}{3}v^2} = \tfrac{1}{2}p\frac{2\sin\frac{1}{3}v^2 \,.\, 2\sin\frac{1}{3}v\cos\frac{1}{3}v}{\cos\frac{1}{3}v^2} \\ &= \tfrac{1}{2}p\,\frac{(1 - \cos\frac{2}{3}v)\sin\frac{2}{3}v}{\cos\frac{1}{3}v^2} = \tfrac{1}{2}p\frac{\sin\frac{2}{3}v}{\cos\frac{1}{3}v^2} - \tfrac{1}{2}p\frac{\sin\frac{2}{3}v\cos\frac{2}{3}v}{\cos\frac{1}{3}v^2}\,. \end{aligned}$$

Folglich ist nach 24.

$$x + s\sin\tfrac{2}{3}v = x_1 + y_1\sin\tfrac{2}{3}v\,, \quad y - s\cos\tfrac{2}{3}v = y_1 - y_1\cos\tfrac{2}{3}v\,,$$

in Uebereinstimmung mit 27. Hiernach ist nach 46.

$$x_3 = x_1 + y_1\sin\tfrac{2}{3}v\,, \quad y_3 = y_1 - y_1\cos\tfrac{2}{3}v\,, \qquad 47.$$

$$(x_3 - x_1)^2 + (y_3 - y_1) = y_1^2\,. \qquad 48.$$

Der Fußpunkt des vom Pole auf eine Tangente gefällten Lotes ist von der Axe und der Evolvente der Kurve gleichweit entfernt.

Wir haben durch die Gleichung 32. die Kurve als die Katakaustika der Parabel erkannt, wenn die einfallenden Strahlen auf der Axe lotrecht stehen. In Bezug hierauf kann man den obigen Satz auch so ausdrücken:

Die Axe der Kurve ist eine orthogonale Transversale paralleler (Licht-) Strahlen, welche von einer Parabel, die den Scheitel, die Axe und den Parameter mit der Kurve gemein hat, so zurückgeworfen werden, daß die Evolvente der Kurve eine orthogonale Transversale der zurückgeworfenen Strahlen ist, und daß die Entfernungen eines jeden Punktes der Parabel von beiden orthogonalen Transversalen gleich sind.

Der Satz ist ein spezieller Fall eines bekannten allgemeinen Satzes aus der Theorie der Brennlinien über orthogonale Transversalen der einfallenden und der zurückgeworfenen oder gebrochenen Strahlen für eine beliebige zurückwerfende oder brechende Kurve.

Zu 26. haben wir eine einfache Konstruktion der Kurve und der Parabel angegeben. Der Satz 48. giebt uns ein Mittel an die Hand, zugleich mit der Kurve und der Parabel auch die Evolvente der Kurve auf die leichteste Weise durch Punkte zu konstruieren und zugleich auf konstruktivem Wege die Kurve zu rektifizieren. In Fig. 3. ist die Evolvente der Kurve die schwach ausgezogene Linie.

Es mag hier noch bemerkt werden, daß die Gleichung 48. mit Leichtigkeit aus den Gleichungen 29. und 30. abgeleitet werden kann. Da nämlich der Abstand der entsprechenden Punkte der Kurve und der Evolvente gleich dem Bogen s und dieser nach 29. gleich $3y_1 - y$, der Abstand der entsprechenden Punkte der Kurve und der Parabel nach 30. gleich $2y_1 - y$ ist, so ist der Abstand der entsprechenden Punkte der Parabel und der Evolvente gleich y_1. Zugleich ergiebt sich der Satz:

Der Abstand der entsprechenden Punkte der Evolvente und der Parabel ist das arithmetische Mittel zwischen dem Abstande der entsprechenden Punkte der Kurve und der Parabel und der Ordinate der Kurve.

Um die Gleichung der Kurve zwischen rechtwinkligen Koordinaten zu entwickeln, führt man in 47. die Werte für x_1 und y_1 aus 25. ein. Man erhält

$$x_3 = \tfrac{1}{2}p - \tfrac{1}{2}p\,\mathrm{tg}\tfrac{1}{3}v^2 + 2p\,\mathrm{tg}\tfrac{1}{3}v\frac{\mathrm{tg}\frac{1}{3}v}{1 + \mathrm{tg}\frac{1}{3}v^2},$$

$$y_3 = p\,\mathrm{tg}\tfrac{1}{3}v - p\,\mathrm{tg}\tfrac{1}{3}v\frac{1 - \mathrm{tg}\frac{1}{3}v^2}{1 + \mathrm{tg}\frac{1}{3}v^2} = 2p\frac{\mathrm{tg}\frac{1}{3}v^3}{1 + \mathrm{tg}\frac{1}{3}v^2}$$

und hieraus durch Elimination von $\frac{1}{1 + \mathrm{tg}\frac{1}{3}v^2}$ aus beiden Gleichungen und durch Multiplikation der zweiten Gleichung mit $1 + \mathrm{tg}\frac{1}{3}v^2$

$$2y_3 + (p - 2x_3)\mathrm{tg}\tfrac{1}{3}v - p\,\mathrm{tg}\tfrac{1}{3}v^3 = 0,$$

$$y_3 + y_3\mathrm{tg}\tfrac{1}{3}v^2 - 2p\,\mathrm{tg}\tfrac{1}{3}v^3 = 0.$$

Aus diesen beiden Gleichungen, die in Bezug auf $\mathrm{tg}\frac{1}{3}v$ vom dritten Grade sind, hat man diese Größe zu eliminieren. Durch Elimination des niedrigsten und höchsten Gliedes erhält man

$$p - 2x_3 - 2y_3\mathrm{tg}\tfrac{1}{3}v + 3p\,\mathrm{tg}\tfrac{1}{3}v^2 = 0,$$

$$3y_3 + 2(p - 2x_3)\mathrm{tg}\tfrac{1}{3}v - y_3\mathrm{tg}\tfrac{1}{3}v^2 = 0$$

und hieraus auf dieselbe Weise

$$6y_3^2 + 2(p - 2x_3)^2 - (10p - 2x_3)y_3\mathrm{tg}\tfrac{1}{3}v = 0,$$

$$(10p - 2x_3)y_3 - 2\{y_3^2 - 3(p - 2x_3)\}\mathrm{tg}\tfrac{1}{3}v = 0,$$

woraus sich

$$(5p - x_3)^2y_3^2 = \{3y_3^2 + (p - 2x_3)^2\}\{y_3^2 - 3p(p - 2x_3)\} \qquad 49.$$

als Gleichung der Evolvente zwischen rechtwinkligen Koordinaten ergiebt, welche vom vierten Grade ist. Diese Gleichung erhält eine etwas einfachere Gestalt, wenn wir zu dem ursprünglichen Koordinatensysteme zurückkehren, indem wir $\frac{1}{2}p - x_3$ durch x_3 ersetzen. Man erhält

$$(9p + 2x_3)^2y_3^2 = 4(3y_3^2 + 4x_3^2)(y_3^2 - 6px_3). \qquad 50.$$

Der Satz ist ein nen Satzes aus der Theorie der Brennlinien über orthog und der zurückgeworfenen oder gebrochenen Strahlen für nde Kurve.

Zu 26. haben w nd der Parabel angegeben. Der Satz 48. giebt uns ein A urve und der Parabel auch die Evolvente der Kurve auf nstruieren und zugleich auf konstruktivem Wege die Kurv Evolvente der Kurve die schwach ausgezogene Linie.

Es mag hier n g 48. mit Leichtigkeit aus den Gleichungen 29. und 30. der Abstand der entsprechenden Punkte der Kurve und de er nach 29. gleich $3y_1 - y$, der Abstand der entsprechende h 30. gleich $2y_1 - y$ ist, so ist der Abstand der entsprech ente gleich y_1. Zugleich ergiebt sich der Satz:

Der Abstand d lvente und der Parabel ist das arithmetische M entsprechenden Punkte der Kurve und der Parab

Um die Gleichun dinaten zu entwickeln, führt man in 47. die Werte für x_1

$$\mathrm{v}$$

$$\mathrm{g}\tfrac{1}{3}\mathrm{v}^2\,,$$

$$\mathrm{y}_3 = \qquad \mathrm{tg}\tfrac{1}{3}\mathrm{v}^3$$

$$+\ \mathrm{tg}\tfrac{1}{3}\mathrm{v}^2$$

und hieraus durch Elimin ungen und durch Multiplikation der zweiten Gleichung mi

$$= 0\,,$$

Aus diesen beiden Gleich itten Grade sind, hat man diese Größe zu eliminieren. D chsten Gliedes erhält man

$$= 0\,,$$

$$= 0$$

und hieraus auf dieselbe

$$6y_3 \qquad \mathrm{g}\tfrac{1}{3}\mathrm{v} = 0\,,$$

$$(10p \qquad \mathrm{g}\tfrac{1}{3}\mathrm{v} = 0\,,$$

woraus sich

$$(5p - x \qquad 3p(p - 2x_3)\} \qquad 49.$$

als Gleichung der Evolve rgiebt, welche vom vierten Grade ist. Diese Gleichung er nn wir zu dem ursprünglichen Koordinatensysteme zurückt setzen. Man erhält

$$(9 \qquad - 6px_3)\,. \qquad 50.$$