34/15

XVII. Jahresbericht

über

das Gymnasium zu Bunzlau,

womit zu der

Feier des Geburtstages Sr. M. des Kaisers u. Königs

am 22. März,

zu der

öffentlichen Prüfung

am 23. März,

und zu dem

Valedictions-Actus

am 24. März 1875

ehrerbietigst einladet

der Director Dr. F. W. Beisert.

Inhalt.

1. Zur Methode der Auflösung von planimetrischen Constructions- und trigonometrischen Rechenaufgaben, insbesondere solchen, die das Dreieck betreffen. Von dem Oberlehrer Gauß.
2. Schulnachrichten für das Schuljahr 1874/75 von dem Director.

Bunzlau 1875.

Druck von C. A. Voigt in Bunzlau.

9bu
8. (1875)

UNIVERSITÄTS- UND LANDESBIBLIOTHEK DÜSSELDORF

Zur Methode der Auflösung von planimetrischen Constructions- und trigonometrischen Rechenaufgaben, insbesondere solchen, die das Dreieck betreffen.

I.

Verwendung der für ein gegebenes Dreieck vereinbarten Symbole bei geometrischen Constructionsaufgaben und bei trigonometrischen Rechenaufgaben.

Nach dem Vorgange von Euler bezeichnet man jetzt wohl ziemlich allgemein die Seiten eines gegebenen Dreiecks ABC durch a, b, c, ihre Gegenwinkel*) durch α, β, γ. Hiernach bedeutet das Symbol a die Seite BC des Dreiecks ABC, ist mit BC identisch; a und BC sind nur verschiedene Namen für ein und dasselbe Ding. Wenn man aber sagt: Ein Dreieck zu construiren aus a, b, c, so will man damit ausdrücken, daß ein Dreieck ABC**) so construirt werden soll, daß die Seite BC gleich einer gegebenen Strecke a, die Seite CA gleich einer gegebenen Strecke b und die Seite AB gleich einer gegebenen Strecke c ist. Hier bedeuten also die Symbole a, b, c nicht die Seiten eines Dreiecks, sondern drei in der Zeichenfläche gegebene Strecken, sind also durchaus nicht mit den Seiten BC, CA, AB des zu construirenden Dreiecks ABC, welches ja bei der Stellung der Aufgabe überhaupt noch gar nicht vorhanden ist, identisch, sondern die Seiten des zu construirenden Dreiecks ABC sollen nur gleiche Größen mit den Strecken a, b, c haben. Es ist daher durchaus unstatthaft, daß man etwa in der für die Analysis entworfenen Figur die Buchstaben a, b, c an die Seiten BC, CA, AB oder die Buchstaben α, β, γ in die Winkel CAB, ABC, BCA setzt. Was hier von den Seiten und Winkeln gesagt ist, gilt auch für beliebige andere gegebene Stücke des Dreiecks. Nun ist es unmöglich, die Bedingungen, welche ein zu construirendes Dreieck erfüllen soll, einfacher und präciser als dadurch auszudrücken, daß man diejenigen

---

*) Die Ausdrücke „Gegenwinkel von Seiten eines Dreiecks", „Gegenwinkel eines Vierecks" mögen wohl bei Vielen Anstoß erregen, weil das Wort „Gegenwinkel" schon die bekannte Verwendung bei zwei Geraden, die von einer dritten in zwei Punkten geschnitten werden, gefunden hat; ich meine aber mit Unrecht. Warum soll dasselbe Wort nicht in verschiedenem Sinne gebraucht werden dürfen, wenn nur jede Zweideutigkeit ausgeschlossen ist? Und ist es zweideutig, wenn ich z. B. sage: „An parallelen Geraden sind die Gegenwinkel gleich"; oder: „Wenn zwei Seiten eines Dreiecks gleich sind, so sind auch ihre Gegenwinkel gleich"; oder: „Die Gegenwinkel eines Parallelogramms sind gleich"?

**) Es ist natürlich an sich gleichgültig, ob man die Eckpunkte des Dreiecks durch A, B, C oder durch beliebige andere Buchstaben P, Q, R bezeichnet, doch zur leichteren Verständigung zwischen Lehrer und Schülern empfiehlt es sich, in der Schule auch darüber ein gewisses Uebereinkommen zu treffen.

Stücke, welche eine gegebene Größe oder ein gegebenes Verhältnis haben sollen, durch die für ein gegebenes Dreieck vereinbarten Bezeichnungen angiebt. Es kann daher nicht zweifelhaft sein, daß bei der Stellung von Dreiecksaufgaben, wenn es angeht, nur diese Form zu wählen ist. Dann aber halte ich es, um Verwirrung zu vermeiden, für durchaus geboten, bei Constructionsaufgaben die für ein gegebenes Dreieck vereinbarten Symbole von der Verwendung zur Bezeichnung von Größen, die nicht gegeben sind, ganz auszuschließen und die erforderlichen Bezeichnungen dafür nur der Figur zu entnehmen. Was von den einfachen Symbolen gilt, gilt namentlich auch von den zusammengesetzten für Summen, Differenzen, Verhältnissen von Größen u. s. w. Gehört z. B. der Ueberschuß der Summe zweier Seiten eines Dreiecks über die dritte zu den gegebenen Größen und wird diese, wie gewöhnlich und zweckmäßig ist, durch $a + b - c$ bezeichnet, so bedeutet dieses unzertrennbare Symbol $a + b - c$, eigentlich $(a + b - c)$, eine Strecke, und in dem zu construirenden Dreieck soll $BC + CA - AB$ eben dieser Strecke gleich sein. Ist das Verhältnis $a : b$ gegeben, so bedeutet das soviel als: In dem verlangten Dreieck ABC sollen die Seiten BC und CA sich verhalten, wie zwei gegebene Strecken m und n (nicht a und b) oder wie zwei gegebene unbenannte Zahlen m und n. Wenn $a^2 - b^2$ gegeben ist, so soll damit gesagt werden, daß in dem verlangten Dreieck die Differenz der Quadrate über den Seiten BC und CA einer (gewöhnlich in Form eines Quadrats mit gegebener Seite, z. B. q^2, des Quadrats über der gegebenen Strecke q) gegebenen Fläche gleich sein soll. Es ist wohl zu beachten, daß solche Ausdrücke wie $a + b - c$, $b^2 - c^2$, bc u. s. w. unzertrennbare Symbole für eine Größe sind, die man unter Umständen zweckmäßig durch besondere Buchstaben ersetzt (was ich jedoch so viel wie möglich vermeide). Wie es nun nicht zulässig ist, die Gleichung $BC + CA = a + b$ zu bilden, wenn zwar $a + b - c$, nicht aber $a + b$ oder a und b gegeben sind, ebensowenig darf man bei Behandlung einer vorliegenden Constructionsaufgabe mit rein geometrischer Analysis (s. unten Seite 10) aus den gegebenen Strecken $a + b$ und $a - b$ die Gleichungen

$$a = \tfrac{1}{2}\{(a + b) + (a - b)\}, \quad b = \tfrac{1}{2}\{(a + b) - (a - b)\}$$

ableiten, da die Strecken a und b nicht gegeben sind. Bei der Besprechung und Durchnahme der sogenannten Data im Allgemeinen, oder wenn man kurz die Lösung einer Aufgabe andeuten will, mag man sich immerhin des Ausdrucks bedienen: Mit $a + b$ und $a - b$, oder mit $a + b$ und $a : b$ u. s. w. sind die Strecken a und b gegeben, nicht aber halte ich diese Ausdrucksweise für zulässig bei einer vollständigen Bearbeitung einer Aufgabe, wie man sie vom Schüler verlangen muß. Wie ich meine, daß derartige Aufgaben zu behandeln seien, mögen folgende Beispiele zeigen.

Aufgabe 1. Dreieck aus $a + b$, $a - b$, γ.

Analysis (Fig. 1). Es sei ABC das verlangte Dreieck, d. h. es sei $BC + CA = a + b$, $BC - CA = a - b$, $\angle\, BCA = \gamma$.*) Beschreibt man mit CA um C den Kreis, der die Strecke CB in D und den Gegenstrahl von CB in E schneidet, so ist

$$BE = a + b, \; BD = a - b,$$

*) Es mag an dieser Stelle die Bemerkung Platz finden, daß die Analysis meines Erachtens stets mit einer Einleitung, wie ich es nenne, beginnen muß, welche die Bedingungen enthält, die das zu construirende Dreieck erfüllen soll. Ich halte eine solche Einleitung zur Orientirung und scharfen Auffassung der

also sind die Punkte B, E und D bestimmt, und damit auch der Punkt C als Mittelpunkt der Strecke DE. Ein Ort für A ist der Strahl CA, bestimmt durch den Winkel $BCA = \gamma$, ein zweiter der Kreis mit dem Mittelpunkte C und dem Radius CD.

Construction (Fig. 2). Construire die Strecke BE gleich $a + b$, beschreibe um B mit $a - b$ einen Kreisbogen, welcher die Strecke BE im Punkte D schneidet, halbire die Strecke DE durch den Punkt C, lege an den Strahl CB den Winkel γ an, dessen freier Schenkel den mit CD um C beschriebenen Kreis in A schneidet, und ziehe AB.

Behauptung. ABC ist das verlangte Dreieck, d. h. es ist

$$BC + CA = a + b,\ BC - CA = a - b,\ \angle BCA = \gamma.$$

Beweis. Nach der Construction ist

$$BE = BC + CE = a + b,\ CE = CD = CA,$$

also $BC + CA = a + b$. Ferner ist nach der Construction $BD = BC - DC = a - b$, also $BC - CA = a - b$. Endlich ist nach der Construction $\angle BCA = \gamma$.

Determination. Das Dreieck ist möglich und eindeutig bestimmt, wenn $a + b > a - b$ ist.

Aufgabe 2. Dreieck aus $u - v$, $u : v$ ($= m : n$), h. (u und v bezeichnen die Abschnitte, in welche die Seite a durch die Halbirungslinie des Winkels α getheilt wird; u liegt an C).

Analysis (Fig. 3). Es sei ABC das verlangte Dreieck, d. h. es sei $\angle CAD = DAB$, $DC - BD = u - v$, $DC : BD = m : n$, $AE \perp BC$, $AE = h$. Beschreibt man um D mit DB einen Kreisbogen, der die Strecke DC in F schneidet, so ist $FC = u - v$, also sind die Punkte F und C bestimmt. Es verhält sich ferner $DC : DF = m : n$, also ist der Punkt D als derjenige Punkt bestimmt, welcher die Strecke CF nach dem Verhältnisse $m : n$ in äußere Abschnitte theilt. Ein Ort für B ist der Gegenstrahl von DC, ein zweiter der Kreis mit dem Mittelpunkte D und dem Radius DF. Da $CA : AB = DC : BD$ ist, so ist ein Ort für A der Apollonische Kreis für die Punkte C und B und das Verhältnis $DC : BD$. Ein zweiter Ort für A besteht aus den Parallelen zu BC im Abstande h.

Construction (Fig. 4). Construire die Strecke $CF = u - v$ und theile sie durch den Punkt D so in äußere Abschnitte, daß $DC : DF = m : n$ ist, beschreibe um D mit DF einen Kreisbogen, welcher den Gegenstrahl von DF in B schneidet, construire für die Punkte C und B und das Verhältnis $DC : BD$ den Apollonischen Kreis, welcher von einer im Abstande h zu BC gezogenen Parallelen im Punkte A geschnitten wird, und ziehe CA und AB.

Behauptung. ABC ist das verlangte Dreieck, d. h. es ist $\angle CAD = DAB$, $DC - BD = u - v$, $DC : BD = m : n$ und, wenn $AE \perp BC$ ist, $AE = h$.

Beweis. Nach der Construction ist $DC - DF = u - v$ und $BD = DF$, also $DC - BD = u - v$. Ferner verhält sich $DC : DF = m : n$, also auch $DC : BD = m : n$. Da A ein Punkt des Apollonischen Kreises für die Punkte C und B und das Verhältnis $DC : BD$ ist, so ist $CA : AB = DC : BD$, also $\angle CAD = DAB$. Endlich ist $AE = h$, weil A in einer Parallelen zu BC mit dem Abstande h liegt.

Aufgabe für unumgänglich nothwendig. Kommen darin Stücke vor, welche nicht Seiten oder Winkel sind, z. B. Höhen, Schwerlinien u. s. w., so sind sie als solche zu charakterisiren, ehe von ihnen etwas Anderes (Größe, Verhältnis u. s. w.) ausgesagt wird. Nach der Construction wird in einer Behauptung, der ich am liebsten einen besonderen Absatz eingeräumt sähe, ausgesprochen, daß das construirte Dreieck die gegebenen Bedingungen wirklich erfüllt.

Determination. Es muß $m > n$ und h darf nicht größer als der Radius des Apollonischen Kreises sein. Der Punkt D ist ein Punkt des Apollonischen Kreises; G sei der Gegenpunkt desselben und M der Mittelpunkt der Strecke GD. Nun ist

$$DC : BD = GC : GB = m : n,$$
$$(u - v) : BD = (m - n) : n.$$
$$BC : (u - v) = (m + n) : (m - n),$$
$$GB : BC = n : (m - n),$$
$$GB : (u - v) = (m + n)n : (m - n)^2.$$
$$GB + BD = \left\{ \frac{(m + n)n}{(m - n)^2} + \frac{n}{m - n} \right\} (u - v) = \frac{2mn}{(m - n)^2} (u - v),$$
$$MD = \frac{mn}{(m - n)^2} (u - v).$$

Es ist daher das Dreieck eindeutig oder zweideutig bestimmt, je nachdem

$$h \overset{=}{<} \frac{mn}{(m - n)^2} (u - v)$$

ist.

Ganz anders liegt die Frage über Verwendung der vereinbarten Symbole, wenn aus gegebenen Stücken die übrigen durch Rechnung gefunden werden sollen, also besonders bei trigonometrischen Aufgaben. Hier wird gar nicht verlangt, daß ein Dreieck ABC gezeichnet wird, so daß gewisse Stücke desselben eine gegebene Größe oder ein gegebenes Verhältnis haben. Hier kann man sich das Dreieck ABC als gegeben denken und setzt nur die Maßzahlen gewisser Stücke als bekannt voraus, die man etwa durch directe Messungen oder durch Rechnung gefunden hat. Hier handelt es sich zunächst um die Aufgabe, zwischen diesen und den übrigen Stücken Gleichungen aufzustellen, durch deren Auflösung die verlangten Stücke gefunden werden, und es stellen die gegebenen Stücke die bekannten und die gesuchten Stücke die unbekannten Größen in den zu bildenden Gleichungen dar. Hier ist es daher erlaubt, auch die Stücke, welche nicht gegeben sind, durch die vereinbarten Symbole zu bezeichnen und diese Bezeichnungen in der Figur, wenn eine solche erforderlich sein sollte, an die betreffenden Stücke zu setzen. Nur eins halte ich für geboten, worauf schon vor einigen Jahren von Sturm (in der Zeitschrift für mathematischen und naturwissenschaftlichen Unterricht, herausgegeben von Hoffmann, III. S. 22, 23.) hingewiesen worden ist, nämlich auch in der Bezeichnung streng zu unterscheiden zwischen der Maßzahl einer Größe und dieser Größe selbst. Wie es überhaupt im Verlaufe einer mathematischen Untersuchung unstatthaft ist, durch ein und dasselbe Symbol zwei ganz verschiedene Dinge zu bezeichnen, so kann es auch nicht zulässig sein, daß bei der Behandlung einer vorgelegten Aufgabe z. B. das Symbol a bald eine Strecke bald eine Zahl bedeutet. Der von Sturm a. a. O. gemachte Vorschlag, die Strecke BC durch $\bar{a}$ und die Maßzahl dieser Strecke durch a zu bezeichnen, scheint mir durchaus acceptabel zu sein und läßt sich, wie ich aus eigener Erfahrung weiß, in der Schulpraxis mit der größten Leichtigkeit durchführen.

II.

Scharfe Bestimmung geometrischer Oerter.

Man hat schon soviel über die Wichtigkeit der Unterscheidung zwischen Strecke, Strahl und Gerade geschrieben und so triftige Gründe für ihre Nothwendigkeit beigebracht, daß es geradezu unbegreiflich ist, wie man sich noch dagegen sträuben kann, diesen Unterschied zu machen. In sehr vielen Fällen ist es allerdings nicht erforderlich, der Bezeichnung AB das Wörtchen Strecke, Strahl oder Gerade hinzuzufügen, je nachdem man die Strecke, den Strahl oder die Gerade AB meint, da der Zusammenhang oft unzweideutig erkennen läßt, was gemeint ist. Wenn ich z. B. die Gleichung AB = CD bilde oder vom Mittelloth von AB oder von AB als Seite eines Polygons spreche, so ist es unzweifelhaft, daß ich die Strecke AB im Sinne habe; ist von AB als Schenkel des Winkels CAB die Rede, so kann nur der Strahl AB gemeint sein; und gebrauche ich den Ausdruck: AB ist parallel CD, so ist es selbstverständlich, daß AB als Gerade gedacht werden soll. In andern Fällen dagegen, insbesondere bei Punktbestimmungen durch geometrische Oerter, halte ich es für durchaus geboten, sich der größten Schärfe und Genauigkeit zu befleißigen und stets die Bestimmung, ob Strecke, Strahl oder Gerade, hinzuzufügen. Es wäre zu wünschen, daß auch die Unterscheidung zwischen Grundseite und Grundlinie, wie in der Stereometrie zwischen Grundfläche und Grundebene, allgemein würde, und daß man für die Verlängerung des Strahls AB über den Ausgangspunkt A hinaus die Benennung „Gegenstrahl von AB" gebrauchte.

Aber nicht allein bei der Angabe geometrischer Oerter, wenn dieselben Theile von Geraden sind, pflegt man sich ungenau auszudrücken und für Strecken und Strahlen die Geraden, denen sie angehören, zu setzen, sondern man gestattet sich auch, und wie ich meine mit Unrecht, ganze Kreislinien als geometrische Oerter anzugeben, während nur die Punkte von Kreisbogen eine gegebene Bedingung erfüllen. Wenn im eigentlichen Lehr-Cursus geometrische Oerter angegeben werden, so werden freilich meist solche Ungenauigkeiten vermieden. Man sagt z. B.: Der geometrische Ort für den Scheitelpunkt eines Winkels von gegebener Größe, dessen Schenkel zwei gegebene Punkte enthalten, besteht aus zwei Kreisbogen, welche von diesen Punkten begränzt werden. Warum denn aber nicht dieselbe Genauigkeit bei Behandlung einer vorgelegten Constructionsaufgabe? Die Analysis muß so beschaffen sein, daß man, wenn man in der Construction stricte nach den Angaben derselben verfährt, unter allen Umständen eine Figur enthält, welche den gegebenen Bedingungen genügt (vorausgesetzt, daß die zur Construction der einzelnen Punkte angegebenen Oerter sich schneiden). Das würde aber durchaus nicht immer der Fall sein, wenn man die geometrischen Oerter nicht stets scharf umgränzt. (Vergl. unten die Anmerkung zur Analysis der Aufgabe 5). Ist nun ein Strahl der geometrische Ort eines Punktes, so darf man sich nicht mit der Festlegung der Geraden, welcher er angehört, begnügen, sondern es ist unumgänglich nothwendig, auch seinen Ausgangspunkt in der Analysis zu bestimmen und in der Synthesis zu construiren; und sind Strecken und Kreisbogen geometrische Oerter, so ist die Bestimmung ihrer Endpunkte in der Analysis und die Construction derselben in der Synthesis eben so wenig von der Hand zu weisen wie diejenige anderer nothwendiger Punkte der Figur. Die Wichtigkeit einerseits, besonders auch für die Determination, und andererseits die Leichtigkeit einer schärferen

Bestimmung geometrischer Oerter will ich durch einige Beispiele in ein helleres Licht zu setzen suchen.

Aufgabe 3. Dreieck aus $b - c$, t, α.

Analysis (Fig. 5). Es sei ABC das verlangte Dreieck, d. h. es sei $CA - AB = b - c$, $BD = DC$, $AD = t$, $\angle\ CAB = \alpha$. Verlängert man die Strecke AD um sich selbst bis E, so ist das Viereck ABEC ein Parallelogramm, also $BE = AC$. Beschreibt man ferner um B mit BE einen Kreisbogen, welcher den Gegenstrahl von AB in F schneidet, und zieht die Strecke FE, welche die Strecke AC in G schneidet, so ist $AF = b - c$, $\angle\ BEF = AGF = GFA$, also $AG = AF$. Durch den Winkel $CAB = \alpha$ sind die Strahlen AC und AB bestimmt. Ein Ort für die Punkte F und G ist der Kreis mit dem Mittelpunkte A und dem Radius $b - c$, ein zweiter für jenen der Gegenstrahl von AB, für diesen der Strahl AC. Ein Ort für E ist der Gegenstrahl von GF, ein zweiter der Kreis mit dem Mittelpunkte A und dem Radius $2t$. Ein Ort für B ist der Strahl AB, ein zweiter EB, bestimmt als Parallele durch E zu AC. Ein Ort für C ist der Strahl AC, ein zweiter EC, bestimmt als Parallele durch E zu AB.

Determination. Da E im Gegenstrahl von GF liegt und der Winkel AGE als Außenwinkel an der Basis eines gleichschenkligen Dreiecks stumpf ist, so muß $AE > AG$ oder $2t > b - c$ sein.

Aufgabe 4. Dreieck aus $b - c$, $p - q$, β, wenn $\beta < R$ ist.

Analysis (Fig. 6). Es sei ABC das verlangte Dreieck, d. h. es sei $CA - AB = b - c$, $AD \perp BC$, $DC - BD = p - q$, $\angle\ ABC = \beta$, $\angle\ ABC < R$. Beschreibt man mit DB um D einen Kreisbogen, welcher die Strecke DC in E schneidet, so ist $EC = p - q$. Da A ein Punkt des Mittelloths von BE ist, so ist $AE = AB$. Beschreibt man ferner um A mit AC einen Kreisbogen, der den Gegenstrahl von EA in F schneidet, so ist $EF = b - c$, $\angle\ CEF = BEA = ABE = \beta$. Durch den Winkel $CEF = \beta$ sind die Strahlen EC und EF bestimmt. Bestimmt man nun zuerst den Punkt C, für welchen ein Ort der Strahl EC, ein zweiter der Kreis mit dem Mittelpunkte E und dem Radius $p - q$ ist, so ist der Strahl EF nicht ein Ort für den Punkt F, da der Winkel EFC als Basiswinkel des gleichschenkligen Dreiecks AFC spitz ist, also der Punkt F, wenn $CG \perp EF$ ist, gar nicht in der Strecke EG liegen kann; vielmehr stellt der Gegenstrahl von GE die Gesamtheit derjenigen Punkte, deren jeder der Punkt F sein kann, d. h. den geometrischen Ort des Punktes F dar, soweit die Bedingungen in Betracht kommen, daß der Winkel ABC des gesuchten Dreiecks spitz sein und eine gegebene Größe und die Projectionen der Seiten CA und AB auf die Seite BC eine gegebene Differenz haben sollen. Der Punkt G, dessen Bestimmung (und nachherige Construction) hiernach nicht als überflüssig erscheint, ist bestimmt als Fußpunkt des von C auf EF gefällten Lothes. Soweit es sich nun um die Bedingung handelt, daß die Differenz der Seiten CA und AB gleich der gegebenen Strecke $b - c$ sein soll, ist ein zweiter Ort für F der Kreis mit dem Mittelpunkte E und dem Radius $b - c$. — Man konnte auch anders verfahren; man konnte, nachdem man die Strahlen EF und EC (aber nicht den Punkt C) bestimmt hatte, zuerst den Punkt F bestimmen, für welchen dann allerdings der Strahl EF ein geometrischer Ort gewesen wäre, und hierauf den Punkt C; dann aber wäre nicht etwa der Strahl EC, sondern, wenn $FH \perp EF$ ist, die Strecke EH ein geometrischer Ort für C gewesen. — Nimmt man ferner, nachdem man die Punkte E, C, F bestimmt hat, als einen Ort für A das Mittelloth von FC, so wird damit, und das ist hier auch völlig ausreichend, nur die Eigenschaft des Punktes A berücksichtigt, daß er die Spitze eines gleichschenkligen Dreiecks mit der Basis FC ist. Giebt man aber als zweiten Ort für A nicht den Strahl FE, sondern den Gegenstrahl von EF an, so findet auch der Umstand, daß die Punkte A und F auf verschiedenen Seiten des Punktes E liegen müssen, seine volle Berücksichtigung; und daß er diese finde, ist durchaus erforderlich. Für B endlich ist ein Ort der Kreis mit dem Mittelpunkte A und dem Radius AE, ein zweiter der Gegenstrahl von DC, dessen Ausgangspunkt D als Fußpunkt des von A auf EC gefällten Lothes bestimmt ist.

Die Determination dieser Aufgabe macht jetzt weiter keine Schwierigkeit. Da A im Gegenstrahl von EF und im Mittelloth von FC liegt, so liegen die Punkte F und E auf derselben Seite dieses Mittelloths, also ist $EF < EC$, $b - c < p - q$; und da F im Gegenstrahl von GE liegt, so ist $EF > EG$, $b - c > (p - q)\cos\beta$. Die Aufgabe ist also stets möglich und das Dreieck eindeutig bestimmt, wenn $p - q > b - c > (p - q)\cos\beta$ ist.

Aufgabe 5. Dreieck aus b, r, $\beta - \gamma$.

Analysis. (Fig. 7a und 7b). Es sei ABC das verlangte Dreieck, d. h. es sei $CA = b$, $AM = BM = CM = r$, $\angle ABC - BCA = \beta - \gamma$. Wenn man den Durchmesser AE zieht, von A auf BC das Loth fällt, welches die Gerade BC in H und den Kreis ABC in D schneidet, und $EF \parallel DA$ construirt, so ist der Winkel HAE gleich dem Peripheriewinkel in dem Kreisabschnitte ABCF (in Fig. 7b ist dieser Winkel das Supplement vom Peripheriewinkel AEF), also $\angle HAE = ABC - FAC$, und da $AF \parallel DE$ ist, $\angle HAE = ABC - BCA = \beta - \gamma$. Die Punkte A und E sind bestimmt als Gegenpunkte des Kreises M mit dem Radius r. Ein Ort für D ist dieser Kreis, ein zweiter die Gerade AH, bestimmt durch den Winkel $HAE = \beta - \gamma$. Ein Ort für den Punkt C ist, wenn G der Mittelpunkt des Bogens BC ist, auf welchem der Peripheriewinkel CAB steht, derjenige Bogen GF, in welchem der Punkt A nicht liegt. Von den Endpunkten dieses Bogens ist der Punkt F als Schnittpunkt des Kreises M mit der Parallelen durch A zu DE, und der Punkt G als derjenige Schnittpunkt des Kreises M mit dem Mittelloth von DE (da $DE \parallel BC$ ist) bestimmt, welcher innerhalb des Winkels HAE liegt. Ein zweiter Ort für C ist der Kreis mit dem Mittelpunkte A und dem Radius b. Der Punkt B ist bestimmt durch denjenigen Bogen GA, in welchem der Punkt C nicht liegt, und durch die Parallele durch C zu DE.

Anmerkung. Hätte man sich in der Analysis so ausgedrückt: Ein Ort für C ist der Kreis M mit dem Radius r, ein zweiter der Kreis mit dem Mittelpunkte A und dem Radius b, so würde man in der Construction berechtigt sein, als den Punkt C denjenigen Schnittpunkt dieser Oerter zu nehmen, welcher nicht in dem Bogen GCF liegt, und würde zwar ein Dreieck (AB'C' in Fig. 7b) erhalten, dasselbe würde aber nicht den gegebenen Bedingungen genügen.

Determination. Zunächst darf b nicht größer als 2r sein. Liegt nun der Punkt M innerhalb des Winkels FAH, und das ist der Fall, wenn $\beta - \gamma < R$ ist, so ist das Dreieck BAC zweideutig bestimmt, wenn die beiden Ungleichungen $AC > AF$ und $AC > AG$ oder

$$b > 2r\sin(\beta - \gamma) \text{ und } b > 2r\cos\tfrac{1}{2}(\beta - \gamma)$$

erfüllt sind, und beide Dreiecke fallen in eins zusammen, wenn $b = 2r$ ist. Ist nur eine der beiden Bedingungen erfüllt, so ist das Dreieck eindeutig bestimmt und ist keine erfüllt, so ist die Aufgabe unmöglich. Wenn der Punkt M in AF oder außerhalb des Winkels FAH liegt, und diese Lage hat der Punkt M, wenn $\beta - \gamma \overline{\overline{>}} R$ ist, so ist das Dreieck eindeutig bestimmt, wenn

$$2\,r\cos\tfrac{1}{2}(\beta-\gamma) < b < 2\,r\sin(\beta-\gamma)$$

ist, dagegen die Aufgabe unmöglich, wenn eine dieser Ungleichungen nicht stattfindet.

(Vergl. Aufgabe 9.)

Man begegnet oft der Ansicht, wenn sie auch nicht immer offen ausgesprochen ist, daß eine geometrische Constructionsaufgabe durch die Analysis als gelöst zu betrachten sei. In sofern die Aufgabe aber die wirkliche Zeichnung einer Figur, gewissen Bedingungen gemäß, verlangt, kann ich einer solchen Ansicht nicht beistimmen, da durch die Analysis der in der Aufgabe gestellten Forderung nicht genügt wird. Die eigentliche Lösung der Aufgabe st und bleibt unter allen Umständen die Construction, und am allerwenigsteu darf man auf dieselbe verzichten, wenn, wie oft geschieht, in der Analysis nur die theoretische Möglichkeit der Construction nachgewiesen, nicht aber die gebührende Rücksicht auf die praktische Ausführbarkeit derselben genommen worden ist. Doch glaube ich, daß man bei einer Behandlung der geometrischen Analysis, wie ich sie in den obigen Ausführungen gefordert habe, den Schülern der obersten Stufe einer höheren Lehranstalt, den Primanern, für gewöhnlich die Construction erlassen kann. Denn wenn in der Analysis durch eine scharfe Angabe der geometrischen Oerter gezeigt worden ist, wie der Reihe nach die einzelnen Punkte der verlangten Figur construirt werden können, so erscheint es mir auf dieser Stufe nur noch von untergeordneter Bedeutung, die Constructionen auch wirklich ausführen zu lassen, vorausgesetzt, daß man in der Analysis zur Lösung nur die Benutzung der allereinfachsten Aufgaben, Grundaufgaben, und der im Lehr-Cursus besprochenen geometrischen Oerter gestattet, unter keinen Umständen aber die Angabe sogenannter Data zuläßt. In Tertia und Secunda freilich wird man stets darauf bestehen müssen, daß aus den gegebenen Stücken die verlangte Figur auch wirklich aufgebaut werde. (Vergl. unten Abschn. IV.)

III.

Vermeidung von Rechnungen bei geometrischen und von Constructionen bei trigonometrischen Aufgaben.

Die geometrische Aufgabe (ich sehe ab von Aufgaben, die durch algebraische Analysis gelöst werden sollen) ist eine Constructionsaufgabe, d. h. sie verlangt, durch Zeichnung eine Figur so herzustellen oder eine gegebene Figur so zu erweitern, daß gewissen, meist ebenfalls durch Zeichnung gegebenen, Bedingungen genügt wird. Die trigonometrische Aufgabe dagegen ist wesentlich eine Rechenaufgabe, sie stellt die Forderung, aus Bedingungen, die in Zahlen gegeben sind, die Maßzahlen von Seiten, Winkeln, Flächen oder sonstigen verlangten Größen zu berechnen. Dieser grundverschiedene Charakter der genannten Arten von Aufgaben bedingt nicht nur äußerlich, wie ich im ersten Abschnitt dargethan zu haben glaube, eine verschiedene Anwendung von Symbolen für gegebene und nicht gegebene Stücke, sondern er verlangt weit mehr noch eine grundverschiedene Behandlung und Durchführung in der Auflösung der Aufgabe: die Lösung einer geometrischen Aufgabe soll rein synthetisch, die einer trigonometrischen rein analytisch sein; mit andern Worten: Die Behandlung einer geometrischen Aufgabe soll alle Rechnung, diejenige einer trigonometrischen alle Construction, soweit sie nicht unerläßlich zur Gewinnung der nöthigen Gleichungen ist, vermeiden. Die Sammlung trigonometrischer Aufgaben von Lieber und v. Lühmann, die vorzüglichste, die mir bis jetzt zu Gesicht gekommen ist (auf die gleichfalls vorzügliche und in der trefflichen Zusammenstellung und Anordnung des Stoffs meines Erachtens bis jetzt unerreichte Sammlung geometrischer Constructionsaufgaben von denselben Verfassern werde ich ebenfalls Gelegenheit haben zu verweisen), steht auf diesem Standpunkte. Die Verfasser sagen in der Vorrede: Wir haben „eine rein analytische Methode angewendet; die Methode auf Grund von geometrischen Constructionen die Aufgaben zu lösen, ist ganz übergangen. Von selbst versteht es sich, daß, um die trigonometrische Lösung anzubahnen, diejenigen Linien, welche unmittelbar gegeben, in der Figur gezogen sein müssen, aber sonst keine Hülfslinien. Befindet sich z. B. ϱ unter den gegebenen Elementen eines Dreiecks, so ist der Radius des eingeschriebenen Kreises zu ziehen; ist aber $a + b$ oder $\varrho_a + \varrho_b$ eins der gegebenen Elemente, so darf bei einer rein analytischen Lösung nicht $a + b$, resp. $\varrho_a + \varrho_b$ wirklich construirt werden, sondern es genügt im letzteren Falle, wenn ϱ_a und ϱ_b gezeichnet werden. Entschieden ist in didactischer Beziehung die Vermengung beider Methoden zu verwerfen, da sie nur dazu geeignet ist, bei den Schülern Unklarheit hervorzurufen." Gegen diese Bemerkungen hätte ich nur einzuwenden, daß mir der rein analytische Charakter noch nicht entschieden genug gewahrt zu sein scheint. Ich würde z. B. $\varrho_a + \varrho_b$ nicht allein nicht construiren, sondern auch die Construction von ϱ_a und ϱ_b (welche übrigens nicht „unmittelbar gegeben" sind, wenn „$\varrho_a + \varrho_b$ eins der gegebenen Elemente" ist) vermeiden, die Construction von ϱ_b neben derjenigen von ϱ_a aber geradezu für logisch fehlerhaft halten. Um mich deutlicher zu erklären, bemerke ich zunächst, daß r den Radius des Kreises ABC, ϱ den Radius des inneren, $\varrho_1, \varrho_2, \varrho_3$ die Radien der äußeren den Seiten a, b, c angeschriebenen Berührungskreise, s_1, s_2, s_3 die von den Eckpunkten A, B, C ausgehenden Tangenten (begränzt von den Eckpunkten und den Berührungspunkten) des inneren Berührungskreises und s die vom Eckpunkte A ausgehende Tangente des äußeren, der Seite a angeschriebenen Berührungskreises bedeuten, daß ferner s_3 und s_2 gleich den von den Eckpunkten B und C ausgehenden Tangenten des zuletzt erwähnten Kreises sind, daß endlich s gleich dem halben Umfange des Dreiecks und $s_1 = s - a$, $s_2 = s - b$, $s_3 = s - c$ ist. Handelt es sich nun darum, eine Relation zwischen $\varrho_1 + \varrho_2$ und r zu gewinnen, so hat man sich zunächst zu fragen, ob man nicht mit dem aus dem trigonometrischen Lehr-Cursus bekannten Formel-Apparat auskommen kann, und nur im äußersten Nothfalle seine Zuflucht zu einer Figur zu nehmen. Die Gleichungen $F = \varrho s = \varrho_1 s_1 = \varrho_2 s_2 = \varrho_3 s_3 = \sqrt{s s_1 s_2 s_3}$, $\varrho = s_1 \operatorname{tg} \frac{1}{2}\alpha = s_2 \operatorname{tg} \frac{1}{2}\beta = s_3 \operatorname{tg} \frac{1}{2}\gamma$ sollten in keinem Lehrbuche der Trigonometrie fehlen. Hieraus ergiebt sich aber für unseren Fall $\varrho_1 = s \operatorname{tg} \frac{1}{2}\alpha$, $\varrho_2 = s \operatorname{tg} \frac{1}{2}\beta$, $\varrho_1 + \varrho_2 = s \dfrac{\cos \frac{1}{2}\gamma}{\cos \frac{1}{2}\alpha \cos \frac{1}{2}\beta}$. Ferner ist

$$s = \tfrac{1}{2}(a + b + c) = r(\sin\alpha + \sin\beta + \sin\gamma) = 4r\cos \tfrac{1}{2}\alpha \cos\tfrac{1}{2}\beta \cos\tfrac{1}{2}\gamma,$$

$$\varrho_1 + \varrho_2 = 4r\cos \tfrac{1}{2}\gamma^2.$$

Sind jene Formeln nicht aus dem trigonometrischen Lehr-Cursus bekannt, so hat man allerdings an einer (sei es im Kopfe oder auf dem Papiere) zu entwerfenden Figur zunächst eine

Gleichung für ϱ_1 zu entwickeln. Man findet $a = \varrho_1 (\operatorname{tg}\frac{1}{2}\beta + \operatorname{tg}\frac{1}{2}\gamma)$,

$2r\sin\alpha = \varrho_1 \dfrac{\cos\frac{1}{2}\alpha}{\cos\frac{1}{2}\beta\,\cos\frac{1}{2}\gamma}$, $\varrho_1 = 4r\sin\frac{1}{2}\alpha\,\cos\frac{1}{2}\beta\,\cos\frac{1}{2}\gamma$. Hiermit ist aber bewiesen, daß $\varrho_2 = 4r\cos\frac{1}{2}\alpha\,\sin\frac{1}{2}\beta\,\cos\frac{1}{2}\gamma$ ist, und den Beweis der Richtigkeit dieser Gleichung noch für nöthig halten enthält einen gewissen logischen Fehler. Durch Addition der beiden letzten Gleichungen erhält man die gesuchte Relation zwischen $\varrho_1 + \varrho_2$ und r. (Vergl. die trigonometrischen Aufgaben in Abschnitt V.)

Wie nun meines Erachtens dem Wesen der trigonometrischen Aufgabe ein Zurückgreifen auf eine Construction wenig angemessen ist, vielmehr die Behandlung derartiger Aufgaben jede unnöthige Zeichnung zurückzuweisen hat, ebenso glaube ich umgekehrt, daß die geometrische Constructionsaufgabe nur dann ihren eigenthümlichen Charakter rein bewahren kann, wenn die ganze Entwickelung sich nur an Größen vollzieht, die man in der Zeichnung wirklich vor Augen hat, daß also jede überflüssige Rechnung zu verschmähen ist, und daß man dabei in der Beurtheilung dessen, was an Rechnung nothwendig oder überflüssig ist, nicht zu peinlich sein kann. Für die Aufgabe: Zwei Strecken zu construiren, deren Summe und Differenz gegeben sind, giebt man gewöhnlich folgende Analysis: Wenn a und b die gesuchten Strecken, also die Strecken a + b und a — b gegeben sind, so ist

$$a = \tfrac{1}{2}\left\{(a + b) + (a - b)\right\},\quad b = \tfrac{1}{2}\left\{(a + b) - (a - b)\right\}.$$

Gegen diese Lösung ist an sich gewiß nichts einzuwenden, die Aufgabe ist aber nicht durch geometrische, sondern durch algebraische Analysis gelöst, und von Aufgaben mit algebraischer Analysis soll hier nicht die Rede sein. Lieber und v. Lühmann scheinen in der schon oben angeführten Aufgabensammlung für die Aufgaben in § 4, nach der Ueberschrift zu schließen, solche Lösungen im Sinne gehabt zu haben. Dann würden sie aber gar nicht hierher gehören, sondern in den fünften Abschnitt ihrer Sammlung („Aufgaben, welche durch algebraische Analysis zu lösen sind") zu verweisen sein. Wie derartige Aufgaben auf rein constructivem Wege zu lösen seien, zeigt schon die oben S. 3 zu einem andern Zwecke behandelte Aufgabe 1; an dieser Stelle mag eine etwas complicirtere Platz finden.

Aufgabe 6. Dreieck aus a + b — c, a — b, b + c.

Analysis. (Fig. 8.) Es sei ABC das verlangte Dreieck, d. h. es sei BC + CA — AB = a + b — c, BC — CA = a — b, CA + AB = b + c. Ist EA = BC, AD = CA, FD = AB, so ist EF = a + b — c, also sind die Punkte E und F bestimmt. Ferner ist EC = a — b, also der Punkt C bestimmt. Ist endlich DG = CA, so ist FG = b + c, also der Punkt G bestimmt. Die Punkte A und D sind als diejenigen Punkte bestimmt, welche die Strecke CG in drei gleiche Theile theilen. Mithin ist das Dreieck ABC durch die drei Seiten bestimmt.

Wie man die Analysis solcher Aufgaben am besten einrichtet, erfordert freilich etwas mehr Nachdenken als das Rechnen. Durch Rechnung würde man sofort finden

$$3b = (a + b - c) + (b + c) - (a - b).$$

Zur Bestimmung von Größen durch Rechnung ist man insbesondere geneigt, wenn es sich um Winkel handelt, was wohl darin seinen Grund hat, daß die Summe der Winkel eines Polygons von gegebener Seitenzahl eine gegebene Größe ist. Und doch läßt sich auch in diesen Fällen meist alle Rechnung vermeiden, wie ich an einigen Beispielen zeigen zu können hoffe.

Bei Lieber und v. Lühmann a. a. O. findet man § 16, c die Bemerkung, daß, wenn (Fig. 9) $AC > AB$, $AD = AC$, $AE = AB$ ist, $\angle ADC = R - \frac{1}{2}\alpha$, $\angle CEB = R + \frac{1}{2}\alpha$ ist. Und doch ist diese Wahrheit für keine der folgenden Aufgaben von dem geringsten Interesse, wenn man entweder $BF \parallel AC$ oder $CG \parallel BA$ oder $EH \parallel AB$ zieht. Denn man findet leicht, daß

$$\angle FBD = ECG = CEH = \alpha,\ BF = BD,\ CG = CE,\ \angle BEA = HEB$$

ist. Je nach der vorgelegten Aufgabe benutzt man als Ausgangspunkt für die Analysis die eine oder die andere Hülfslinie oder wählt beliebig zwischen allen dreien. Gehören $b - c$ und α zu den gegebenen Stücken, so ist sowohl das Dreieck BDF als auch das Dreieck ECG, folglich sowohl die Gerade DC als auch die Gerade EB bestimmt. Oder bestimmt man die Punkte E und C und den Strahl EH, so hat man damit die Strahlen EA und EB. Sind zur Construction des Dreiecks $b - c$, h_3, α gegeben, so bestimmt man zunächst das Dreieck AJC, in welchem $CJ \perp AJ$ ist, hierauf den Punkt E, den Strahl CG, den Punkt G (oder den Strahl EH und den Strahl EB) und findet den Punkt B als Schnittpunkt von GE und AJ. Ist h_2 statt h_3 gegeben, so hat man, wenn $BK \perp AC$ ist, zuerst die Punkte A, B, K, dann die Punkte D, F, C zu bestimmen. Analog verfahre ich nun auch bei Aufgaben, in welchen $b + c$ und α gegeben sind, z. B. bei der Aufgabe: Dreieck aus $b + c$, α, β. Nachdem CA um AB bis M verlängert ist (Fig. 9), ziehe ich zu AB durch C die Parallele, welche den Gegenstrahl von BM in O schneidet, und erhalte dadurch das gleichschenklige Dreieck MOC. Ist CX der Gegenstrahl von CM, so sind durch $OCX = \alpha$ die Strahlen CO und CX, also auch der Strahl CM, folglich auch, da $CM = CO = b + c$ ist, die Punkte M und O bestimmt. Durch den Winkel $OCB = ABC = \beta$ ist der Strahl CB und als Schnittpunkt desselben mit der Strecke MO der Punkt B bestimmt. Für den Punkt A endlich ist ein Ort die Strecke CM, ein zweiter das Mittelloth von MB.

Wenn (Fig. 10) $AC > AB$, $AD = AE = AB$ ist, so finden bekanntlich die gewöhnlich ebenfalls durch Rechnung gefundenen Gleichungen $\angle EBC = \frac{1}{2}(\beta - \gamma)$, $\angle DBC = R + \frac{1}{2}(\beta - \gamma)$ statt. Unter den geometrischen Beweisen der Richtigkeit dieser Gleichungen ist folgender wohl der einfachste. Ist F der Schnittpunkt des Kreises DEB mit dem Strahl CB (er liegt im Gegenstrahl von BC, wenn $\beta > R$ ist), so ist der Centriwinkel $CAF = BFA - \gamma = \beta - \gamma$, folglich der Peripheriewinkel $EBC = \frac{1}{2}(\beta - \gamma)$, $\angle DBC = R + \frac{1}{2}(\beta - \gamma)$. (Liegt F im Gegenstrahl von BC, so ist $\angle$ EBC ein Außenwinkel des Sehnenwinkels DEBF und als solcher gleich dem gegenüberliegenden Innenwinkel EDF). Zu analogen Resultaten gelangt man, wenn man (Fig. 10*) den Kreis um A mit AC construirt.

Daß die Höhe AH und die Halbirungslinie AG des Winkels α (Fig. 10) ebenfalls den Winkel $\frac{1}{2}(\beta - \gamma)$ einschließen, folgt daraus, daß sie auf den Schenkeln des Winkels $EBC = \frac{1}{2}(\beta - \gamma)$ lothrecht stehen. Doch läßt sich dieser Satz auch leicht mit Hülfe des Kreises ABC beweisen.

Bei Lieber und v. Lühmann findet sich folgende Beweisführung: Wenn (Fig. 10) $AH \perp BC$, $HF = BH$ (also $AF = AB$) ist, so ist

$$\angle EFC = 2R - BFA - AFE = 2R - \beta - [R - \tfrac{1}{2}(\beta - \gamma)]$$

$$= 2R - \beta - R + \tfrac{1}{2}\beta - \tfrac{1}{2}\gamma = R - \tfrac{1}{2}(\beta + \gamma) = R - (R - \tfrac{1}{2}\alpha) = \tfrac{1}{2}\alpha.$$

Nun ist aber EFC ein Außenwinkel des Sehnenvierecks DEFB, folglich $\angle$ EFC = CDB = $\frac{1}{2}\alpha$. (Liegt F im Gegenstrahl von BC, so sind die Winkel EFC und CDB Peripheriewinkel auf demselben Bogen). Statt des Kreises mit dem Mittelpunkte A und dem Radius AB kann man auch hier den Kreis mit dem Mittelpunkte A und dem Radius AC construiren (Fig. 10*).

Den Beschluß dieser Bemerkungen möge ein Beweis des Satzes machen, daß der Kreis ABC die sechs Centralen der vier Berührungskreise des Dreiecks ABC halbirt (der Feuerbach'sche Kreis oder der Kreis der neun Punkte), und man vergleiche diesen Beweis mit dem von Lieber und v. Lühmann in § 40 gegebenen.

Es seien (Fig. 11) die Punkte M, M_1, M_2, M_3 die Mittelpunkte der vier Berührungskreise des Dreiecks ABC, D Mittelpunkt von MM_1, E der Mittelpunkt von M_1M_2. Da der Winkel MBM_1 recht ist, so ist

$$BD = DM, \text{ also } \angle DMB = MBD = CBD + MBC.$$

Nun ist $\angle$ MAB + ABM = DMB = CBD + MBC, $\angle$ ABM = MBC, folglich $\angle$ MAB = CBD, also auch, da $\angle$ MAB = CAM_1 ist, $\angle$ CBD = CAM_1. Daher liegt der Punkt D in der Peripherie des Kreises ABC. Ferner ist

$$EB = M_1E, \text{ also } \angle EM_1X = M_3BE = ABE + M_3BA.$$

Nun ist $\angle$ M_1CB + CBM_1 = EM_1X = ABE + M_3BA, $\angle$ CBM_1 = M_3BA, folglich $\angle$ M_1CB = ABE, also auch, da $\angle$ M_1CB = ACM_2 ist, $\angle$ ABE = ACM_2, folglich liegt der Punkt E in der Peripherie des Kreises ABC. Hiermit ist der Satz bewiesen.

IV.

Zurückführung der Aufgaben auf andere oder auf Data.

„Es scheint, daß man im Allgemeinen bis jetzt noch zu wenig Sorgfalt auf die geometrischen Constructionen verwendet habe. Die hergebrachte, von den Alten uns überlieferte Weise, wonach man nämlich Aufgaben als gelöst betrachtet, sobald nachgewiesen worden, durch welche Mittel sie sich auf andere, vorher betrachtete, zurückführen lassen, ist der richtigen Beurtheilung dessen, was ihre vollständige Lösung erheischt, sehr hinderlich. So geschieht es denn auch, daß auf diese Weise häufig Constructionen, die, wenn man in die Nothwendigkeit versetzt wäre, alles was sie einschließen, wirklich und genau auszuführen, bald aufgegeben würden, indem man dadurch sich gewiß bald überzeugen müßte, daß es eine ganz andere Sache sei, die Constructionen in der That, d. h. mit den Instrumenten in der Hand, oder, um mich des Ausdrucks zu bedienen, bloß mittelst der Zunge auszuführen*). Es läßt sich gar leicht sagen: ich thue dies und dann das, und dann jenes; allein die Schwierigkeit, und man kann in gewissen Fällen sagen die Unmöglichkeit, Constructionen, welche in einem hohen Grade zusammengesetzt sind, wirklich zu vollenden, verlangt, daß man bei einer vorgelegten Aufgabe genau erwäge, welches von den verschiedenen Verfahren bei der gänzlichen Ausführung das einfachste, oder welches unter besonderen Umständen das zweckmäßigste sei, und wie viel von dem, was die Zunge etwas leichtfertig ausführt, zu umgehen sei, wenn

*) „Ich brauche hierbei z. B. nur an die frühere Construction desjenigen Kreises, welcher drei gegebene Kreise berühren soll, zu erinnern. Und daß selbst beim gewöhnlichen Schulunterrichte, bei viel einfacheren Aufgaben ähnliche Beispiele vorkommen, davon wird sich jeder aufmerksame Lehrer leicht überzeugen können."

es darauf ankommt, alle überflüssige Mühe zu sparen, oder die größte Genauigkeit zu erreichen, oder den Plan (das Papier), worauf gezeichnet wird, möglichst zu schonen, u. s. w. Es käme also, mit einem Worte, darauf an: „zu untersuchen, auf welche Weise jede geometrische Aufgabe, theoretisch oder practisch, am einfachsten, genausten oder sichersten construirt werden könne, und zwar 1) welches im Allgemeinen, 2) welches bei beschränkten Hülfsmitteln, und 3) welches bei obwaltenden Hindernissen das zweckmäßigste Verfahren sei."" (Steiner, „die geometrischen Constructionen, ausgeführt mittelst der geraden Linie und eines festen Kreises," Berlin 1833, S. 88 f.)

Ich finde nicht, daß diese Worte unseres Altmeisters der synthetischen Geometrie bis jetzt die Beachtung, die sie verdienen, gefunden haben, soweit ich nach meinen, sowohl an Lehrern als auch an Schülern, die von andern Lehrern unterrichtet waren, gemachten Erfahrungen und nach meiner Kenntnis der in den letzten vierzig Jahren erschienenen zahlreichen, zum Theil trefflichen Aufgabensammlungen zu urtheilen vermag. Die schon mehrfach angeführte Sammlung geometrischer Constructionsaufgaben von Lieber und v. Lühmann macht auch in dieser Beziehung eine rühmliche Ausnahme. Lieber sagt in der Vorrede zur ersten Auflage: „In den meisten der bis jetzt erschienenen Aufgabensammlungen besteht die Anleitung, welche den Schülern gegeben wird, hauptsächlich darin, daß auf früher dagewesene Aufgaben und Lehrsätze verwiesen wird; ich finde diese Methode höchst unpraktisch, da sie nur dazu dient, die Schüler zu verwirren und ihnen die Lust zum Lösen der Aufgaben zu benehmen, denn zur Lösung der eigentlichen Aufgabe müssen erst successive mehrere andere gelöst werden." Es läßt sich in einer Aufgabensammlung, welche ja nur Anleitungen und Andeutungen zur Lösung der vorgelegten Aufgaben geben kann, natürlich nicht vermeiden auf andere Aufgaben zu verweisen, und das ist auch in der Sammlung von Lieber und v. Lühmann vielfach geschehen. Aber wie mir scheint, sind diese Anleitungen mit sorgfältiger Erwägung der Zweckmäßigkeit und praktischen Ausführbarkeit der Constructionen gegeben. —

Es ist nicht genug, in der Analysis durch Zurückführung auf bekannte Aufgaben und durch Angabe bekannter Data die theoretische Möglichkeit der Lösung einer vorgelegten Aufgabe nachzuweisen, vielmehr soll die vollständig ausgeführte Analysis, eingedenk der Hauptforderung, aus den in der Zeichenfläche durch Zeichnung gegebenen Bedingungen die verlangte Figur auch wirklich aufzubauen, die praktische Ausführbarkeit der gefundenen Lösung darthun und nachweisen, wie alle Punkte der Figur, deren Construction zur Lösung erforderlich ist, der Reihe nach auch wirklich construirt werden können. Es ist auch nicht gestattet, die Schwierigkeit complicirter Aufgaben etwa nach dem Princip der Theilung der Arbeit dadurch zu vermindern, daß man einzelne Theile der Figur in sogenannten Nebenconstructionen, gleichsam in besonderen Werkstätten, herstellt und dann in der Central-Werkstätte diese Stücke zu der verlangten Figur zusammensetzt; sondern alle Hülfsmittel der Lösung sollen derart zu einem einheitlichen Ganzen gestaltet werden, daß die Analysis in der möglichst zweckmäßigen Anordnung alle Angaben enthält, wie mit Hülfe der einfachsten Aufgaben, ich nenne sie Grundaufgaben, und der wichtigsten geometrischen Oerter, wie sie im Lehr-Cursus besprochen zu werden pflegen und deren Constructionen als bekannt vorausgesetzt werden, durch eine einheitliche Zeichnung der gestellten Forderung genügt werden kann. (In meinem an unserem Gymnasium eingeführten Lehrbuche*) habe ich die Grundaufgaben — es sind mit Einschluß von sieben Constructionen algebraischer Ausdrücke im Ganzen 25 — auf der letzten Seite zusammengestellt). Nur auf diese Grundaufgaben und geometrischen Oerter gestatte ich meinen Schülern in einer durchgeführten Analysis in Worten bloß hinzuweisen, während in der Figur für die Synthesis auch deren Ausführung sichtbar sein muß. Bei der Durchnahme einer Aufgabe in der Klasse empfiehlt es sich, mitunter am Schluß der Analysis alle zur Lösung der Aufgaben nöthigen Punkte in der Reihenfolge, in welcher sie bestimmt sind, noch einmal zusammenzustellen. (Vergl. unten Aufgabe 8 S. 16). — Die Anführung von Daten muß überhaupt vermieden werden. In einer bloßen Anleitung zur Lösung einer Aufgabe kann wohl auf ein Datum hingewiesen werden, in der Durchführung derselben darf aber nicht z. B. der Ausdruck gebraucht werden: Mit h_1 und m_1 ist $\frac{1}{2}(\beta - \gamma)$ gegeben. Aber auch bei einer Anleitung ist von der Angabe eines Datums mit großer Vorsicht Gebrauch zu machen. Nur die Gewohnheit, sich lediglich mit dem Nachweis der theoretischen Möglichkeit der Lösung einer Aufgabe zu begnügen, macht es erklärlich, daß man vielfach in Aufgabensammlungen als Hülfsmittel zur Lösung ein Datum findet, welches bei der Ausführung anzuwenden niemand in den Sinn kommen wird. Beim Gebrauch der mit Recht sich vielfacher Anerkennung erfreuenden Aufgabensammlung von Gandtner und Junghans habe ich oft Gelegenheit gehabt, diese Bemerkung zu machen. Von den zahlreichen allein auf Seite 157 und 158 sich vorfindenden Belegen hierfür will ich nur zwei hier anführen und eingehender besprechen. Zu der schon oben (Aufgabe 5) behandelten Aufgabe: Dreieck aus r, b, $\beta - \gamma$ findet sich als Anleitung zur Lösung die Angabe des Datums, daß mit r und b der Winkel β gegeben sei. Hieraus kann man nur den Schluß ziehen, daß durch r und b zuerst der Winkel β, dann der Winkel γ mit Hülfe des gegebenen Winkels $\beta - \gamma$ und endlich das Dreieck ABC aus b, β, γ construirt werden soll. Nun ist für viele Aufgaben desselben Paragraphen in Datum 10 bewiesen, daß, wenn (Fig. 12) AD || BC ist, $\angle$ ACD $= \beta - \gamma$ ist. Die einfachste Lösung ist daher die, daß man, nachdem man den Kreis ABC und die Sehne AC construirt hat, den Winkel ACD gleich $\beta - \gamma$ zeichnet und CB parallel zu DA zieht. Was interessirt uns nun jenes Datum? (Oben S. 7 habe ich eine andere Lösung gegeben, die für die Determination, auf die bei der Wahl der Lösung füglich auch Rücksicht zu nehmen ist, sich besser [eignet). — Eine andere Aufgabe ist folgende:

Aufgabe 7. Ein Dreieck ABC, in welchem der Winkel ABC spitz ist, aus h, m, p — q zu construiren.

Analysis (Fig. 13). Es sei ABC das verlangte Dreieck, d. h. es sei AD $\perp$ BC, AD $=$ h, DC $-$ BD $=$ p $-$ q, $\angle$ CAE $=$ EAB, AE $=$ m. Das Dreieck ADE ist durch zwei Seiten und den Gegenwinkel der größeren bestimmt. Ist M der Mittelpunkt des Kreises ABC und G der Schnittpunkt dieses Kreise mit dem Gegenstrahl von EA, so ist $\widehat{BG} = \widehat{GC}$, also MG das Mittelloth von BC, MG || AD, $\angle$ EAD $=$ AGM $=$ MAG, also der Strahl AM bestimmt. Ist ferner FC $=$ BD, so ist DF $=$ p $-$ q und MG auch das Mittelloth von DF. Da nun der Winkel DEG stumpf ist, so schneidet MG den Gegenstrahl von ED, folglich ist EF $>$ DE, DF $>$ 2DE oder, wenn EH $=$ DE ist, DF $>$ DH. Daher ist ein Ort für F

*) Die Hauptsätze der Elementar-Mathematik von A. F. G. Th. Gauß. Bunzlau 1873.

der Gegenstrahl von HD, ein zweiter der Kreis mit dem Mittelpunkte D und dem Radius $p - q$. GM, ein zweiter Ort für M, ist bestimmt als Mittelloth von DF. Ein Ort für die Punkte B und C ist der Kreis mit dem Mittelpunkte M und dem Radius MA, ein zweiter für jenen der Gegenstrahl von DE, für diesen der Gegenstrahl von FE.

Determination. Es müssen folgende Bedingungen erfüllt sein:

$$1.\ m > h,\quad 2.\ DF > 2DE,\quad 3.\ MA > MD.$$

Die dritte Bedingung ist erfüllt, wenn M und D auf derselben Seite des Mittelloths der Strecke AD liegen. Ist $MJ \perp AD$, so ist diese Bedingung erfüllt, wenn J und D auf derselben Seite des Mittelloths von AD liegen, wenn also der Winkel MAJ oder $2x$ spitz und $AJ > \frac{1}{2}h$ ist. Nun ist $\angle MAJ$ spitz, wenn $\angle EAD < DEA$ oder $DE^2 < AD^2$ oder $m^2 - h^2 < h^2$, $m^2 < 2h^2$ ist. Da $AJ = \frac{1}{2}(p - q)\operatorname{cotg} 2x$ ist, so muß $\frac{1}{2}(p - q)\operatorname{cotg} 2x > \frac{1}{2}h$ oder, da $\operatorname{cotg} 2x$ positiv ist, man also diese Ungleichung mit $2\operatorname{cotg} 2x$ multipliciren darf, $p - q > h \operatorname{tg} 2x$ sein. Nun ist

$$\operatorname{tg} 2x = \frac{2\sin x\cos x}{\cos x^2 - \sin x^2} = \frac{2 m\sin x\, m\cos x}{m^2\cos x^2 - m^2\sin x^2} = 2\,\frac{DE\,.\,h}{h^2 - DE^2} = 2\,\frac{h\sqrt{m^2 - h^2}}{2h^2 - m^2}.$$

Also ist die dritte Bedingung erfüllt, wenn $2h^2 > m^2$, $p - q > \dfrac{2h^2\sqrt{m^2 - h^2}}{2h^2 - m^2}$ ist. Wenn aber die letzte Ungleichung stattfindet, so ist, da wegen der ersten Bedingung $h^2 > 2h^2 - m^2$ ist, umsomehr $p - q > 2\sqrt{m^2 - h^2}$ oder $DF > 2DE$. Die Aufgabe ist also möglich und das Dreieck eindeutig bestimmt, wenn

$$1.\ h < m,\quad 2.\ 2h^2 > m^2,\quad 3.\ p - q > \frac{2h^2\sqrt{m^2 - h^2}}{2h^2 - m^2}$$ ist. (Vergl. Aufgabe 10.)

Wie man an der hier gegebenen Auflösung sieht, die an Einfachheit und Zweckmäßigkeit doch gewiß nichts zu wünschen übrig läßt, ist die an sich ganz interessante und vielfach verwendbare Wahrheit, daß der $\angle EAD = \frac{1}{2}(\beta - \gamma)$ ist, für die vorliegende Aufgabe auch nicht von dem geringsten Interesse. Nach der bei Gandtner und Junghans gegebenen Andeutung soll man offenbar zuerst, etwa in einer Nebenconstruction, den Winkel $\beta - \gamma$ und dann (Fig. 12) ein Dreieck aus $p - q$ als Grundseite, $\beta - \gamma$ als gegenüberliegendem Winkel und h als Höhe construiren. Bei Lieber und v. Lühmann finde ich die Zusammenstellung derartiger Aufgaben sowie die Anleitungen zur Lösung derselben unvergleichlich zweckmäßiger gegeben. Doch ist mir auch hier manches aufgefallen, z. B. daß die Aufgaben: Dreieck aus h, m, ϱ; h, m, ϱ_1 unter denen zu finden sind, die mit Hülfe des Umstandes gelöst werden sollen, das von den drei Stücken $h, m, \beta - \gamma$ jedes mit den beiden andern gegeben ist (§ 28); es ist mir durchaus unerfindlich, welche Rolle bei jenen beiden Aufgaben das genannte Datum spielen soll.

Zum Schluß dieser Bemerkungen möge noch die Lösung einer schwierigeren Aufgabe hier eine Stelle finden, um zu zeigen, in welcher Weise, wenn eine Aufgabe auf andere schon an sich nicht einfache Aufgaben sich zurückführen läßt, diese zu einem einheitlichen Ganzen zu verarbeiten sind.

Aufgabe 8. Dreieck aus $b + c, h, r:a\ (= m:2n)$. (In der Aufgabensammlung von Hofmann, die ich im Uebrigen recht brauchbar gefunden und auch vielfach benutzt habe, ist die Aufgabe: Dreieck aus $b + c, h, \alpha$ auf diejenige: Dreieck aus α, m, a, und diese wieder darauf zurückgeführt worden, eine gegebene Strecke so in äußere Abschnitte zu theilen, daß die mittlere Proportionale zwischen denselben gleich einer gegebenen Strecke sei).

Analysis. (Fig. 14). Es sei ABC das verlangte Dreieck, d. h. es sei $CA + AB = b + c$, $AD \perp BC$, $AD = h$, $AM = BM = CM$, $BM : BC = m : 2n$. Ist, wie in Fig. 14, der Winkel CAB stumpf, so ist $\frac{1}{2}BMC$ das Supplement von CAB. Daher ist, wenn $MP \perp BC$, $\angle ACH = CAB$, $HC = m$, $JH \perp AC$ ist, $\angle BMP = HCJ$, also $\triangle BMP \sim HCJ$, $BM : PB = HC : JH$, folglich, da $BM : PB = m : n$ ist, $JH = n$. Daher ist das Dreieck HCJ durch zwei Seiten und den Gegenwinkel der größeren bestimmt. Verlängert man CA um AB bis E, so ist $CE = b + c$. Ist F der Schnittpunkt des Kreises ABE mit der Geraden BC, so ist $\angle AFC = AEB = EBA = EFA$, also auch $\angle AFC + EFA = AEB + EBA$, mithin $\angle EFC = CAB = ACH$. Ist G der Schnittpunkt des Gegenstrahls von AF und der Halbirungslinie des Winkels ACH, so ist $\angle EFG = ECG$, also das Viereck EFCG ein Sehnenviereck, folglich $CG = GE$, da $\angle GFC = EFG$ ist. Daher ist ein Ort für G das Mittelloth RG von CE, ein zweiter der Strahl CG, bestimmt als Halbirungslinie des Winkels ECH. Da $\angle ACG = GFC$ ist, so ist $\triangle ACG \sim CFG$, also $GA : GC = GC : GF$. Es sei nun $CK = FD$, $KL \perp CE$, dann ist $\triangle FDA \cong CKL$, also $KL = DA$ und $CL = FA$. Der Punkt L ist bestimmt durch den Strahl CL und die Parallele zu CE im Abstande h. Ist ferner $CN \perp CG$, $CN = \frac{1}{2} CL$, $GO = GA$ und $FQ \parallel AO$, so ist $GF = GQ$, $AF = OQ = LC$ und $GO : GC = GC : GQ$. Folglich ist GC eine Tangente des Kreises OCQ, dessen Mittelpunkt, da $CN \perp GC$ ist, im Strahl CN liegt. Da nun $2\,CN = OQ$ ist, so muß N dieser Mittelpunkt sein; denn wäre CN der kleinere oder der größere von zwei ungleichen Abschnitten eines Durchmessers, so wäre $2\,CN$ kleiner oder größer als jede Sehne des Kreises OCQ, welche den Punkt N enthält, also auch kleiner oder größer als die Sehne OQ. Da $CN \perp GC$ und $CN = \frac{1}{2} CL$ ist, so ist der Punkt N bestimmt. Ein Ort für die Punkte O und Q ist der Kreis mit dem Mittelpunkte N und dem Radius NC, ein zweiter für jenen die Strecke GN, für diesen der Gegenstrahl von NG. Da im Allgemeinen die Seiten CA und AB ungleich sind und keine derselben eine besondere Beziehung zu den gegebenen Stücken des Dreiecks ABC hat, so ist es gestattet, CA als die größere Seite anzunehmen. Dann ist ein Ort für A die Strecke RE, ein zweiter der Kreis mit dem Mittelpunkte G und dem Radius GO. Ein Ort für F ist der Gegenstrahl von AG, ein zweiter QF, bestimmt als Parallele durch Q zu AO. Ein Ort für B ist der Strahl CF, ein zweiter der Strahl AB, bestimmt durch den Winkel $CAB = ACH$. Die Construction des Dreiecks ABC erfordert also der Reihe nach die Construction folgender Punkte: C, H, J, E, R, G, L, N, O, Q, A, F, B. (Vgl. oben S. 14.)

Determination. Ist m nicht kleiner als n, so sind die Punkte C, H, J eindeutig bestimmt. (Ist $m = n$, so fällt J mit C und die Gerade CJ mit dem Loth der Geraden CH im Punkte C zusammen). Der Punkt E ist stets construirbar und zweideutig bestimmt, da er sowohl in dem Strahl CJ als auch in dessen Gegenstrahl liegen kann. Hat man den Punkt E, so sind die Punkte R und G stets construirbar und eindeutig bestimmt, ebenso die Punkte L, N, O, Q. Der Punkt A, und damit auch die Punkte F und B, ist, wenn $GC > GO$ und $GR \overline{<} GO$ ist, stets construirbar und eindeutig bestimmt. Die erste Bedingung ist stets erfüllt, da GC die mittlere Proportionale zwischen GO und GQ ist. Bezeichnet x den Winkel ACG, so ist $GR = \frac{1}{2}(b + c)\,\mathrm{tg}\,x$, also $GR \sin 2x = (b + c) \sin x^2$. Ferner ist

$$GO\,(GO + OQ) = GC^2,\quad OQ = CL = \frac{h}{\sin x},\quad GC = \frac{b + c}{2 \cos x},\quad GO^2 + \frac{h \,.\, GO}{\sin x} = \frac{(b + c)^2}{4 \cos x^2},$$

$$4GO^2\sin x^2\cos x^2 + 4h.GO\sin x\cos x^2 = (b+c)^2\sin x^2,$$

$GO^2\sin 2x^2 + 2h.GO\sin 2x\cos x = (b+c)^2\sin x^2$, folglich, da $\sin 2x$ und $\cos x$ positiv, mithin auch $GO\sin 2x + h\cos x$ positiv ist, $GO\sin 2x = -h\cos x + \sqrt{h^2\cos x^2 + (b+c)^2\sin x^2}$. Da $\sin 2x$ positiv ist, so ist die zweite Bedingung erfüllt, wenn $GR\sin 2x \leqq GO\sin 2x$ oder wenn

$$(b+c)\sin x^2 \leqq -h\cos x + \sqrt{h^2\cos x^2 + (b+c)^2\sin x^2} \text{ oder}$$

$$h\cos x + (b+c)\sin x^2 \leqq \sqrt{h^2\cos x^2 + (b+c)^2\sin x^2}$$

ist. Da beide Seiten dieser Gleichung oder Ungleichung positiv sind, so ist die zweite Bedingung erfüllt, wenn $\{h\cos x + (b+c)\sin x^2\}^2 \leqq h^2\cos x^2 + (b+c)^2\sin x^2$ oder

$$2h(b+c)\cos x\sin x^2 + (b+c)^2\sin x^4 \leqq (b+c)^2\sin x^2 \text{ oder}$$

$$2h(b+c)\cos x\sin x^2 \leqq (b+c)^2\cos x^2\sin x^2,$$

oder wenn, da man beide Seiten dieser Gleichung oder Ungleichung durch die positive Zahl $2(b+c)\cos x\sin x^2$ dividiren darf, $h \leqq \frac{1}{2}(b+c)\cos x$ ist. Der Winkel x ist bestimmt durch die Gleichung $\sin 2x = \frac{n}{m}$. Man findet hieraus $\cos 2x^2 = \frac{m^2-n^2}{m^2}$. Liegt der Punkt E im Strahl CJ, so ist $2x < \frac{1}{2}\pi$, also $\cos 2x > 0$; liegt der Punkt E im Gegenstrahl von CJ, so ist $2x > \frac{1}{2}\pi$, also $\cos 2x < 0$. Daher ist in den folgenden Gleichungen das obere oder untere Zeichen zu nehmen, je nachdem der Punkt E im Strahl CJ oder in dessen Gegenstrahl liegt:

$$\cos 2x = \pm\sqrt{\frac{m^2-n^2}{m^2}},\quad 1+\cos 2x = 2\cos x^2 = 1 \pm \sqrt{\frac{m^2-n^2}{m^2}},$$

$$4\cos x^2 = \frac{m+n}{m} + \frac{m-n}{m} \pm 2\sqrt{\frac{m+n}{m}\cdot\frac{m-n}{m}} = \left(\sqrt{\frac{m+n}{m}} \pm \sqrt{\frac{m-n}{m}}\right)^2,$$

$$2\cos x = \sqrt{\frac{m+n}{m}} \pm \sqrt{\frac{m-n}{m}}.$$

Die Bedingung $GR \leqq GO$ ist also erfüllt, wenn $h \leqq \frac{1}{4}(b+c)\left(\sqrt{\frac{m+n}{m}} \pm \sqrt{\frac{m-n}{m}}\right)$ ist. Das Dreieck ist daher stets construirbar und

I. eindeutig bestimmt, wenn $m = n$ und h nicht größer als $\frac{1}{4}(b+c)\sqrt{2}$ ist; das Dreieck ist bei A rechtwinklig;

II. zweideutig bestimmt, wenn $m > n$ und h nicht größer als $\frac{1}{4}(b+c)\left(\sqrt{\frac{m+n}{m}} - \sqrt{\frac{m-n}{m}}\right)$ ist. Das eine Dreieck ist bei A spitzwinklig, das andere stumpfwinklig;

III. eindeutig bestimmt, wenn $m > n$ und h größer als $\frac{1}{4}(b+c)\left(\sqrt{\frac{m+n}{m}} - \sqrt{\frac{m-n}{m}}\right)$ aber nicht größer als $\frac{1}{4}(b+c)\left(\sqrt{\frac{m+n}{m}} + \sqrt{\frac{m-n}{m}}\right)$ ist; das Dreieck ist bei A spitzwinklig. (Vgl. unten Aufgabe 14).

V.

Determination trigonometrischer Aufgaben.

Man nimmt allgemein an, daß zur vollständigen Lösung einer geometrischen Aufgabe die Erfüllung der Forderung gehört, die Bedingungen nachzuweisen, welchen die gegebenen Stücke genügen müssen, damit aus ihnen die verlangte Figur auch wirklich construirt werden kann, sowie auch die Beantwortung der Frage, wie viel Lösungen die gestellte Aufgabe zuläßt, d. h. eine Determination.

Geht man nun bei der trigonometrischen Aufgabe von dem Gesichtspunkte aus, daß die gegebenen Stücke als an einer gegebenen Figur durch directe Messung oder durch Rechnung gefunden gedacht werden, so ist eine Untersuchung der Möglichkeit der Figur freilich unnöthig, da sie gar nicht in Frage steht; denn die Figur existirt ja faktisch. Doch bleibt einerseits die Frage, die auch praktisch wichtig sein kann, ob die Aufgabe ein- oder mehrdeutig ist, unbeantwortet, andererseits enthält die trigonometrische Determination so viel interessante Momente und ist eine die Verstandesthätigkeit in so hohem Maße in Anspruch nehmende Aufgabe und darum eine so vortreffliche gymnastische Uebung, daß sie an einer höheren Lehranstalt nicht außer Acht gelassen zu werden verdient. Zudem liefert sie namentlich zu Uebungen, für die sich sonst wenig Gelegenheit findet, reiches Material, nämlich zu Uebungen in der Behandlung und Entwickelung von Ungleichungen*) und in der Anwendung der Sätze über die Zunahme und Abnahme eines Winkels und seiner goniometrischen Functionen. Die folgenden Aufgaben sollen einerseits zeigen (und in sofern als Ergänzungen zu den Bemerkungen auf S. 8 ff. dienen), wie trigonometrische Aufgaben überhaupt, andererseits insbesondere, wie ihre Determinationen zu behandeln seien.

Aufgabe 9. Dreieck aus r, b, $\beta - \gamma$.

Auflösung. Durch die Gleichung $\sin\beta = \frac{b}{2r}$ erhält man den Winkel β und in Verbindung mit dem gegebenen Winkel $\beta - \gamma$ die Winkel γ und α. Ferner ist $a = 2r\sin\alpha$, $c = 2r\sin\gamma$, $F = 2r^2\sin\alpha\sin\beta\sin\gamma$.

---

*) So schlimm steht es nun freilich in dieser Beziehung mit der mathematischen Disciplin an unseren höheren Lehranstalten nicht, wie man meinen könnte, wenn man wahrnimmt, daß in einer Zeitschrift für mathematischen Unterricht an Gymnasien, Realschulen u. s. w. (ich meine die in Leipzig bei Teubner erscheinende und von J. C. V. Hoffmann herausgegebene) eine Warnung der Leser, die doch nicht Schüler sind, vor Fehlschlüssen, die man macht, wenn man die Seiten einer Ungleichung ohne Aenderung des Ungleichheitszeichens mit einer negativen Zahl multiplicirt, oder wenn man die Seiten einer Gleichung ohne Weiteres durch Null dividirt, nicht für überflüssig gehalten wird. Was soll man dazu sagen, wenn man in der genannten Zeitschrift unter der Ueberschrift „Mathematische Sophismen" u. A. Folgendes (V. S. 225) liest:

Das Ganze ist gleich der Hälfte:

$$x^2 - x^2 = (x + x)(x - x),\ x(x - x) = (x + x)(x - x),\ x = x + x = 2x \text{ folglich } \frac{x}{2} = x.$$

Jede positive Zahl ist kleiner als Nichts. Wenn n eine ganze positive Zahl ist (!), gilt

$$2n - 1 < 2n, \text{ multiplicirt mit } -a,\ -2an + a < -2an,\ a < 0.$$

Warum macht es sich der Einsender (G. Hellmann in Berlin) dieser „Mathematischen Sophismen" (vielmehr mathematischen Unsinns) nicht bequemer und schreibt einfach: Aus $\frac{x}{2}.0 = x.0$ folgt $\frac{x}{2} = x$; und: Aus $-1 < 0$ erhält man durch Multiplication mit $-a$ die Ungleichung $a < 0$, was freilich auf den Schluß hinausliefe: Aus $a = b$ und $c > d$ folgt $a - c > b - d$. Ein Ober-Tertianer muß schon sehr gedankenlos sein, wenn er ohne Weiteres die Seiten einer Ungleichung mit einer Zahl multiplicirt, ohne sich Gewißheit darüber verschafft zu haben, ob diese Zahl positiv oder negativ ist, oder wenn er die Seiten einer Gleichung durch eine Zahl dividirt, von der er nicht weiß, daß sie von Null verschieden ist. Und solche Sachen finden sich in mehreren Heften jener Zeitschrift! Was soll ein ausländischer Leser von dem Zustande des mathematischen Unterrichts an den höheren Lehranstalten Deutschlands denken?

Determination. Durch die Gleichung $\sin\beta = \frac{b}{2r}$ ist der Winkel β, und damit auch das Dreieck ABC, im Allgemeinen zweideutig bestimmt, wenn b nicht größer als 2r ist. Im Uebrigen müssen die Bedingungen 1. $\beta > \beta - \gamma$ und $\beta + \gamma < \pi$ oder

2. $\beta < \frac{1}{2}\pi + \frac{1}{2}(\beta - \gamma)$ erfüllt sein. Man unterscheidet zwei Hauptfälle.

I. $\beta - \gamma < \frac{1}{2}\pi$.

Nimmt man $\beta < \frac{1}{2}\pi$, so ist die erste Bedingung erfüllt, wenn $\sin\beta > \sin(\beta - \gamma)$ oder $b > 2r\sin(\beta - \gamma)$ ist, während die zweite Bedingung stets erfüllt ist. — Nimmt man $\beta > \frac{1}{2}\pi$, so ist die erste Bedingung stets erfüllt. Da die Winkel β und $\frac{1}{2}\pi + \frac{1}{2}(\beta - \gamma)$ im zweiten Quadranten liegen und in diesem Quadranten der Sinus abnimmt, wenn der Winkel wächst, so ist die zweite Bedingung erfüllt, wenn $\sin\beta > \sin\left\{\frac{1}{2}\pi + \frac{1}{2}(\beta - \gamma)\right\}$ oder $b > 2r\cos\frac{1}{2}(\beta - \gamma)$ ist. Das Dreieck ist daher zweideutig oder eindeutig bestimmt oder unmöglich, wenn von den Ungleichungen

$$b > 2r\sin(\beta - \gamma),\quad b > 2r\cos\tfrac{1}{2}(\beta - \gamma)$$

beide oder nur eine oder keine stattfindet. (Ist $b = 2r$, so fallen beide Lösungen in eine zusammen).

II. $\beta - \gamma \geqq \frac{1}{2}\pi$.

Wegen der ersten Bedingung muß $\angle\beta > \frac{1}{2}\pi$ sein. Da nun die Winkel β, $\beta - \gamma$, $\frac{1}{2}\pi + \frac{1}{2}(\beta - \gamma)$ im zweiten Quadranten liegen, so sind die beiden Bedingungen erfüllt, wenn

$$\sin(\beta - \gamma) > \sin\beta > \cos\tfrac{1}{2}(\beta - \gamma) \text{ oder}$$
$$2r\sin(\beta - \gamma) > b > 2r\cos\tfrac{1}{2}(\beta - \gamma)$$

ist. Das Dreieck ist daher eindeutig bestimmt, wenn diese beiden Ungleichungen stattfinden, dagegen unmöglich, wenn eine derselben nicht stattfindet. (Vergl. Aufgabe 5.)

Aufgabe 10. Ein Dreieck ABC, in welchem der Winkel β spitz ist, aus h, m, p — q zu berechnen.

Auflösung (Fig. 13). Es ist

$$\sin AEH = \sin(\beta + \tfrac{1}{2}\alpha) = \frac{h}{m}, \text{ also}$$

$$\sin\left\{\beta + \tfrac{1}{2}\pi - \tfrac{1}{2}(\beta + \gamma)\right\} = \cos\tfrac{1}{2}(\beta - \gamma) = \frac{h}{m}. \text{ Ferner ist}$$

$$p - q = h(\operatorname{cotg}\gamma - \operatorname{cotg}\beta) = h\frac{\sin(\beta - \gamma)}{\sin\beta\sin\gamma},$$

$$2(p - q)\sin\beta\sin\gamma = 2h\sin(\beta - \gamma),$$

$$(p - q)\left\{\cos(\beta - \gamma) - \cos(\beta + \gamma)\right\} = 2h\sin(\beta - \gamma),$$

$$(p - q)\cos\alpha = 2h\sin(\beta - \gamma) - (p - q)\cos(\beta - \gamma),$$

da $\cos(\beta + \gamma) = -\cos\alpha$ ist. Setzt man

$$2h = (p - q)\operatorname{cotg}\varphi, \text{ also } \operatorname{tg}\varphi = \frac{p - q}{2h}, \text{ so ist}$$

$$\cos\alpha = \sin(\beta - \gamma)\operatorname{cotg}\varphi - \cos(\beta - \gamma) = \sin\frac{(\beta - \gamma - \varphi)}{\sin\varphi}.$$

Ferner ist $\quad b = \frac{h}{\sin\gamma},\ c = \frac{h}{\sin\beta},\ a = \frac{h\sin\alpha}{\sin\beta\sin\gamma},\ F = \frac{1}{2}h^2\frac{\sin\alpha}{\sin\beta\sin\gamma}.$

Determination. Damit die Berechnung der Winkel überhaupt möglich sei, müssen die Brüche $\frac{h}{m}$ und $\frac{\sin(\beta - \gamma - \varphi)}{\sin\varphi}$ echt sein. (Ist $h = m$, so muß $p - q = 0$ sein). Ferner müssen, da $\beta < \frac{1}{2}\pi$, also $2\beta < \pi$ oder $2\beta < \alpha + \beta + \gamma$ sein soll, die Bedingungen

1. $\beta - \gamma < \alpha$, 2. $\beta - \gamma < \frac{1}{2}\pi$, und die Bedingung 3. $\beta - \gamma < \beta + \gamma$

erfüllt sein. Da α und $\beta - \gamma$ zwischen 0 und π liegen und in diesem Intervall der Cosinus abnimmt, wenn der Winkel wächst, so ist die erste Bedingung erfüllt, wenn

$$\cos\alpha < \cos(\beta - \gamma) \text{ oder } \frac{\sin(\beta - \gamma - \varphi)}{\sin\varphi} < \cos(\beta - \gamma)$$

ist. Ist nun $\beta - \gamma < \varphi$, so ist der absolute Werth von $\sin(\beta - \gamma - \varphi)$ stets kleiner als $\sin\varphi$, der Bruch $\frac{\sin(\beta - \gamma - \varphi)}{\sin\varphi}$ also stets echt; ist dagegen $\beta - \gamma > \varphi$, so ist jener Bruch echt, wenn die erste Bedingung erfüllt ist. Diese ist erfüllt, wenn

$$\sin(\beta - \gamma - \varphi) < \cos(\beta - \gamma)\sin\varphi,$$
$$\sin(\beta - \gamma)\cos\varphi - \cos(\beta - \gamma)\sin\varphi < \cos(\beta - \gamma)\sin\varphi,$$
$$\sin(\beta - \gamma)\cos\varphi < 2\cos(\beta - \gamma)\sin\varphi$$

oder wenn, da nach der zweiten Bedingung $\cos(\beta - \gamma)$ positiv sein muß, man also die Seiten der letzten Ungleichung durch die positive Zahl $\cos(\beta - \gamma)\cos\varphi$ dividiren darf,

$$2\operatorname{tg}\varphi > \operatorname{tg}(\beta - \gamma) \text{ oder } p - q > h\operatorname{tg}(\beta - \gamma)$$

ist. Die zweite Bedingung ist erfüllt, wenn $\frac{1}{2}(\beta - \gamma) < \frac{1}{4}\pi$, $\operatorname{tg}\frac{1}{2}(\beta - \gamma) < 1$, $\sin\frac{1}{2}(\beta - \gamma)^2 < \cos\frac{1}{2}(\beta - \gamma)^2$, $1 - \frac{h^2}{m^2} < \frac{h^2}{m^2}$ oder $m^2 < 2h^2$ ist. Da $\beta + \gamma$ und $\beta - \gamma$ zwischen 0 und π liegen, so ist die dritte Bedingung erfüllt, wenn $\cos(\beta + \gamma) < \cos(\beta - \gamma)$,

$$-\cos\alpha < \cos(\beta - \gamma), \ -\frac{(\sin\beta - \gamma - \varphi)}{\sin\varphi} < \cos(\beta - \gamma),$$
$$-\sin(\beta - \gamma)\cos\varphi + \cos(\beta - \gamma)\sin\varphi < \cos(\beta - \gamma)\sin\varphi$$

ist, und diese Ungleichung findet immer statt. Da nun

$$\operatorname{tg}(\beta - \gamma) = \frac{2\cos\frac{1}{2}(\beta - \gamma)\sqrt{1 - \cos\frac{1}{2}(\beta - \gamma)^2}}{2\cos\frac{1}{2}(\beta - \gamma)^2 - 1} = \frac{2h\sqrt{m^2 - h^2}}{2h^2 - m^2}$$

ist, so ist die Aufgabe möglich und das Dreieck eindeutig bestimmt, wenn

$$1.\ h < m,\ 2.\ 2h^2 > m^2,\ 3.\ p - q > \frac{2h^2\sqrt{m^2 - h^2}}{2h^2 - m^2}$$

ist. (Vergl. Aufgabe 7.)

Aufgabe 11. Dreieck aus a, ϱ_1, $\beta - \gamma$.

Auflösung. Es ist $\operatorname{tg}\frac{1}{2}\alpha = \frac{\varrho}{s_1} = \frac{\varrho_1}{s}$, $\varrho_1 = s\operatorname{tg}\frac{1}{2}\alpha$,

$$s = r(\sin\alpha + \sin\beta + \sin\gamma) = 4r\cos\tfrac{1}{2}\alpha\ \cos\tfrac{1}{2}\beta\ \cos\tfrac{1}{2}\gamma,$$
$$\varrho_1 = 4r\sin\tfrac{1}{2}\alpha\ \cos\tfrac{1}{2}\beta\ \cos\tfrac{1}{2}\gamma,\quad a = 4r\sin\tfrac{1}{2}\alpha\cos\tfrac{1}{2}\alpha,$$
$$\varrho_1\cos\tfrac{1}{2}\alpha = a\cos\tfrac{1}{2}\beta\ \cos\tfrac{1}{2}\gamma,\ 2\varrho_1\cos\tfrac{1}{2}\alpha = a\left\{\cos\tfrac{1}{2}(\beta - \gamma) + \cos\tfrac{1}{2}(\beta + \gamma)\right\}.$$

Setzt man $2\varrho_1 = a\operatorname{tg}\frac{1}{2}\varphi$, $\operatorname{tg}\frac{1}{2}\varphi = \frac{2\varrho_1}{a}$, so erhält man $\operatorname{tg}\frac{1}{2}\varphi\cos\frac{1}{2}\alpha - \sin\frac{1}{2}\alpha = \cos\frac{1}{2}(\beta - \gamma)$,

$\sin\frac{1}{2}(\varphi - \alpha) = \cos\frac{1}{2}(\beta - \gamma)\cos\frac{1}{2}\varphi$. Durch eine Seite und die Winkel ist das Dreieck bestimmt.

Determination. Da der Winkel $\frac{1}{2}(\varphi - \alpha)$ spitz ist, so ist durch die Gleichung $\sin\frac{1}{2}(\varphi - \alpha) = \cos\frac{1}{2}(\beta - \gamma)\cos\frac{1}{2}\varphi$ der Winkel α eindeutig bestimmt. Es müssen nun die Bedingungen

$$1.\ \beta + \gamma < \pi, \quad 2.\ \beta + \gamma > \beta - \gamma$$

erfüllt sein. Die erste Bedingung ist erfüllt, wenn $\frac{1}{2}\pi - \frac{1}{2}\alpha < \frac{1}{2}\pi$ oder $\frac{1}{2}(\varphi - \alpha) < \frac{1}{2}\varphi$ oder $\sin\frac{1}{2}(\varphi - \alpha) < \sin\frac{1}{2}\varphi$ oder $\cos\frac{1}{2}(\beta - \gamma)\cos\frac{1}{2}\varphi < \sin\frac{1}{2}\varphi$ oder $\cos\frac{1}{2}(\beta - \gamma) < \operatorname{tg}\frac{1}{2}\varphi$ ist. Die zweite Bedingung ist erfüllt, wenn $\frac{1}{2}\pi - \frac{1}{2}\alpha > \frac{1}{2}(\beta - \gamma)$ oder $\frac{1}{2}(\varphi - \alpha) > \frac{1}{2}(\beta - \gamma + \varphi) - \frac{1}{2}\pi$ oder wenn, da der absolute Werth von $\frac{1}{2}(\beta - \gamma + \varphi) - \frac{1}{2}\pi$ kleiner als $\frac{1}{2}\pi$ ist und in dem Intervall von $-\frac{1}{2}\pi$ bis $+\frac{1}{2}\pi$ der Sinus zu- oder abnimmt, wenn der Winkel zu- oder abnimmt, $\sin\frac{1}{2}(\varphi - \alpha) > \sin\left\{\frac{1}{2}(\beta - \gamma + \varphi) - \frac{1}{2}\pi\right\}$ oder

$$\cos\tfrac{1}{2}(\beta - \gamma)\cos\tfrac{1}{2}\varphi > -\cos\tfrac{1}{2}(\beta - \gamma + \varphi) \text{ oder}$$

$$\cos\tfrac{1}{2}(\beta - \gamma)\cos\tfrac{1}{2}\varphi > -\cos\tfrac{1}{2}(\beta - \gamma)\cos\tfrac{1}{2}\varphi + \sin\tfrac{1}{2}(\beta - \gamma)\sin\tfrac{1}{2}\varphi \text{ oder}$$

$2\operatorname{cotg}\frac{1}{2}(\beta - \gamma) > \operatorname{tg}\frac{1}{2}\varphi$ ist. Die Aufgabe ist daher nur dann möglich und das Dreieck eindeutig bestimmt, wenn $\cos\frac{1}{2}(\beta - \gamma) < \frac{2\varrho_1}{a} < 2\operatorname{cotg}\frac{1}{2}(\beta - \gamma)$ ist.

Aufgabe 12. Dreieck aus $a - b$, h, $\alpha - \beta$.

Auflösung. Es ist $a - b = 4r\sin\frac{1}{2}\gamma\sin\frac{1}{2}(\alpha - \beta)$, $h = 4r\sin\beta\sin\frac{1}{2}\gamma\cos\frac{1}{2}\gamma$, $(a - b)\sin\beta\cos\frac{1}{2}\gamma = h\sin\frac{1}{2}(\alpha - \beta)$, $(a - b)\left\{\sin(\beta + \frac{1}{2}\gamma) + \sin(\beta - \frac{1}{2}\gamma)\right\} = 2h\sin\frac{1}{2}(\alpha - \beta)$, also, da $\sin(\beta + \frac{1}{2}\gamma) = \sin\left\{\beta + \frac{1}{2}\pi - \frac{1}{2}(\alpha + \beta)\right\} = \sin\left\{\frac{1}{2}\pi - \frac{1}{2}(\alpha - \beta)\right\} = \cos\frac{1}{2}(\alpha - \beta)$ ist, $(a - b)\sin(\beta - \frac{1}{2}\gamma) = 2h\sin\frac{1}{2}(\alpha - \beta) - (a - b)\cos\frac{1}{2}(\alpha - \beta)$. Setzt man $2h = (a - b)\operatorname{cotg}\frac{1}{2}\varphi$, $\operatorname{tg}\frac{1}{2}\varphi = \frac{a - b}{2h}$, so erhält man $\sin(\beta - \frac{1}{2}\gamma) = \frac{\sin\frac{1}{2}(\alpha - \beta - \varphi)}{\sin\frac{1}{2}\varphi}$.
Durch h und die Winkel ist das Dreieck bestimmt.

Determination. Es müssen die Bedingungen
1. $\alpha + \beta > \alpha - \beta$, 2. $\alpha + \beta < \pi$, 3. val. abs. $\sin\frac{1}{2}(\alpha - \beta - \varphi) < \sin\frac{1}{2}\varphi$ erfüllt sein.
Nun ist $\alpha + \beta - \frac{1}{2}(\alpha - \beta) - (\beta - \frac{1}{2}\gamma) = \frac{1}{2}\pi$, $\alpha + \beta = \frac{1}{2}\pi + \frac{1}{2}(\alpha - \beta) + \beta - \frac{1}{2}\gamma$.
Also ist die erste Bedingung erfüllt, wenn $\frac{1}{2}\pi + \frac{1}{2}(\alpha - \beta) + \beta - \frac{1}{2}\gamma > \alpha - \beta$, $\beta - \frac{1}{2}\gamma > \frac{1}{2}(\alpha - \beta) - \frac{1}{2}\pi$ oder wenn, da $\beta < \alpha$, also $\beta < \frac{1}{2}\pi$ und daher der absolute Werth von $\beta - \frac{1}{2}\gamma$, und ebenso der absolute Werth von $\frac{1}{2}(\alpha - \beta) - \frac{1}{2}\pi$, kleiner als $\frac{1}{2}\pi$ ist, $\sin(\beta - \frac{1}{2}\gamma) > -\cos\frac{1}{2}(\alpha - \beta)$, $\sin\frac{1}{2}(\alpha - \beta - \varphi) > -\cos\frac{1}{2}(\alpha - \beta)\sin\frac{1}{2}\varphi$ ist, und diese Ungleichung findet immer statt. Die zweite Bedingung ist erfüllt, wenn
$\frac{1}{2}\pi + \frac{1}{2}(\alpha - \beta) + \beta - \frac{1}{2}\gamma < \pi$, $\beta - \frac{1}{2}\gamma < \frac{1}{2}\pi - \frac{1}{2}(\alpha - \beta)$, $\sin(\beta - \frac{1}{2}\gamma) < \cos\frac{1}{2}(\alpha - \beta)$, $\sin\frac{1}{2}(\alpha - \beta - \varphi) < \cos\frac{1}{2}(\alpha - \beta)\sin\frac{1}{2}\varphi$, $\operatorname{tg}\frac{1}{2}(\alpha - \beta) < 2\operatorname{tg}\frac{1}{2}\varphi$ ist. Die dritte Bedingung endlich ist, wenn $\frac{1}{2}(\alpha - \beta) < \frac{1}{2}\varphi$ ist, stets erfüllt. Ist $\frac{1}{2}(\alpha - \beta) > \frac{1}{2}\varphi$, so ist sie erfüllt, wenn die zweite Bedingung erfüllt ist, da nach dieser $\sin\frac{1}{2}(\alpha - \beta - \varphi) < \cos\frac{1}{2}(\alpha - \beta)\sin\frac{1}{2}\varphi$

sein muß. Die Aufgabe ist also nur möglich und das Dreieck eindeutig bestimmt, wenn $\mathrm{tg}\frac{1}{2}(\alpha - \beta) < \frac{a - b}{h}$ ist.

Aufgabe 13. Dreieck aus a, $\varrho + \varrho_1$, β.

Auflösung. Man findet $a = 4r\sin\frac{1}{2}\alpha\cos\frac{1}{2}\alpha$,

$$\varrho = 4r\sin\frac{1}{2}\alpha\sin\frac{1}{2}\beta\sin\frac{1}{2}\gamma,\quad \varrho_1 = 4r\sin\frac{1}{2}\alpha\cos\frac{1}{2}\beta\cos\frac{1}{2}\gamma,$$

$$\varrho + \varrho_1 = 4r\sin\frac{1}{2}\alpha\cos\frac{1}{2}\beta - \gamma),\quad \frac{\varrho + \varrho_1}{a} = \frac{\cos\frac{1}{2}(\beta - \gamma)}{\cos\left\{\frac{1}{2}\pi - \frac{1}{2}(\beta + \gamma)\right\}},$$

$$\frac{\varrho + \varrho_1 + a}{\varrho + \varrho_1 - a} = \frac{\cos(\frac{1}{4}\pi - \frac{1}{2}\gamma)\cos(\frac{1}{4}\pi - \frac{1}{2}\beta)}{\sin(\frac{1}{4}\pi - \frac{1}{2}\gamma)\sin(\frac{1}{4}\pi - \frac{1}{2}\beta)},$$

$$\mathrm{tg}(\tfrac{1}{4}\pi - \tfrac{1}{2}\gamma) = \frac{\varrho + \varrho_1 - a}{\varrho + \varrho_1 + a}\mathrm{cotg}(\tfrac{1}{4}\pi - \tfrac{1}{2}\beta) = \frac{a - (\varrho + \varrho_1)}{a + (\varrho + \varrho_1)}\mathrm{cotg}(\tfrac{1}{2}\beta - \tfrac{1}{4}\pi.$$

Durch eine Seite und die Winkel ist das Dreieck bestimmt.

Determination. Wenn $\beta = \frac{1}{2}\pi$, also $\alpha = \beta - \gamma$ ist, so ist, wie aus der Gleichung $\frac{\varrho + \varrho_1}{a} = \frac{\cos\frac{1}{2}(\beta - \gamma)}{\cos\frac{1}{2}\alpha}$ folgt, die Aufgabe nur dann möglich, wenn $a = \varrho + \varrho_1$ ist, sie ist aber unbestimmt, weil nur zwei Elemente gegeben sind. — Ist $\beta \gtrless \frac{1}{2}\pi$, so ist der Winkel γ eindeutig bestimmt, muß aber die Bedingungen

$$1.\ \gamma > 0,\quad 2.\ \beta + \gamma < \pi$$

erfüllen. Die erste Bedingung ist erfüllt, wenn $\frac{1}{4}\pi - \frac{1}{2}\gamma < \frac{1}{4}\pi$ oder wenn, da **beide Seiten dieser Ungleichung spitze Winkel** sind, $\mathrm{tg}(\frac{1}{4}\pi - \frac{1}{2}\gamma) < 1$, $\frac{a - (\varrho + \varrho_1)}{a + (\varrho + \varrho_1)}\mathrm{cotg}(\frac{1}{2}\beta - \frac{1}{4}\pi) < 1$ ist. Die zweite Bedingung ist erfüllt, wenn

$$\tfrac{1}{4}\pi - \tfrac{1}{2}\gamma > \tfrac{1}{2}\beta - \tfrac{1}{4}\pi \text{ oder wenn } \mathrm{tg}(\tfrac{1}{4}\pi - \tfrac{1}{2}\gamma) > \mathrm{tg}(\tfrac{1}{2}\beta - \tfrac{1}{4}\pi),$$

$\frac{a - (\varrho + \varrho_1)}{a + (\varrho + \varrho_1)}\mathrm{cotg}(\frac{1}{2}\beta - \frac{1}{4}\pi) > \mathrm{tg}(\frac{1}{2}\beta - \frac{1}{4}\pi)$ ist. Die Aufgabe ist daher möglich und das Dreieck eindeutig bestimmt, wenn die Ungleichungen

$$1 > \frac{a - (\varrho + \varrho_1)}{a + (\varrho + \varrho_1)}\mathrm{cotg}(\tfrac{1}{2}\beta - \tfrac{1}{4}\pi) > \mathrm{tg}(\tfrac{1}{2}\beta - \tfrac{1}{4}\pi)$$

stattfinden. Ist $\beta > \frac{1}{2}\pi$, also $\mathrm{tg}(\frac{1}{2}\beta - \frac{1}{4}\pi) > 0$, so darf man diese Ungleichungen mit $\mathrm{tg}(\frac{1}{2}\beta - \frac{1}{4}\pi)$ **ohne Aenderung der Ungleichheitszeichen** multipliciren. Man erhält dadurch

$$\mathrm{tg}(\tfrac{1}{2}\beta - \tfrac{1}{4}\pi) > \frac{a - (\varrho + \varrho_1)}{a + (\varrho + \varrho_1)} > \mathrm{tg}(\tfrac{1}{2}\beta - \tfrac{1}{4}\pi)^2.$$

In diesem Falle muß also $a > \varrho + \varrho_1$ sein. Ist $\beta < \frac{1}{2}\pi$, also $\mathrm{tg}(\frac{1}{2}\beta - \frac{1}{4}\pi) < 0$, so muß man, wenn man jene Ungleichungen mit $\mathrm{tg}(\frac{1}{2}\beta - \frac{1}{4}\pi)$ multiplicirt, die **Ungleichheitszeichen ändern**. Man erhält

$$\mathrm{tg}(\tfrac{1}{2}\beta - \tfrac{1}{4}\pi) < \frac{a - (\varrho + \varrho_1)}{a + (\varrho + \varrho_1)} < \mathrm{tg}(\tfrac{1}{2}\beta - \tfrac{1}{4}\pi)^2.$$

In diesem Falle ist, wenn $a > \varrho + \varrho_1$ ist, die erste, und wenn $a < \varrho + \varrho_1$ ist, die zweite Bedingung stets erfüllt.

Aufgabe 14. Dreieck aus $b + c$, h, α.

Auflösung. Es ist $b + c = 2r(\sin\beta + \sin\gamma) = 4r\cos\frac{1}{2}\alpha\cos\frac{1}{2}(\beta - \gamma)$,

$$h = 2r\sin\beta\sin\gamma = 8r\cos\tfrac{1}{2}\beta\cos\tfrac{1}{2}\gamma\sin\tfrac{1}{2}\beta\sin\tfrac{1}{2}\gamma,$$

$$\frac{b+c}{h} = \frac{2\cos\frac{1}{2}\alpha\cos\frac{1}{2}(\beta-\gamma)}{\left\{\cos\frac{1}{2}(\beta-\gamma) + \cos\frac{1}{2}(\beta+\gamma)\right\}\left\{\cos\frac{1}{2}(\beta-\gamma) - \cos\frac{1}{2}(\beta+\gamma)\right\}},$$

$$(b + c)\left\{\cos\tfrac{1}{2}(\beta-\gamma)^2 - \sin\tfrac{1}{2}\alpha^2\right\} = 2h\cos\tfrac{1}{2}\alpha\cos\tfrac{1}{2}(\beta - \gamma).$$

Setzt man $\cos\frac{1}{2}(\beta - \gamma) = \sin\frac{1}{2}\alpha\,\mathrm{tg}\frac{1}{2}\varphi$, wo $\frac{1}{2}\varphi$ einen positiven spitzen Winkel bedeutet, so erhält man

$$(b + c)(\sin\tfrac{1}{2}\alpha^2\,\mathrm{tg}\tfrac{1}{2}\varphi^2 - \sin\tfrac{1}{2}\alpha^2) = 2h\cos\tfrac{1}{2}\alpha\sin\tfrac{1}{2}\alpha\,\mathrm{tg}\tfrac{1}{2}\varphi,$$

$$(b + c)\sin\tfrac{1}{2}\alpha(\sin\tfrac{1}{2}\varphi^2 - \cos\tfrac{1}{2}\varphi^2) = 2h\cos\tfrac{1}{2}\alpha\sin\tfrac{1}{2}\varphi\cos\tfrac{1}{2}\varphi,$$

$$-(b + c)\sin\tfrac{1}{2}\alpha\cos\varphi = h\cos\tfrac{1}{2}\alpha\sin\varphi,\ \mathrm{tg}\varphi = -\frac{b+c}{h}\mathrm{tg}\tfrac{1}{2}\alpha.$$

Durch diese Gleichung ist φ als stumpfer Winkel, also auch vermöge der Gleichung $\cos\frac{1}{2}(\beta - \gamma) = \sin\frac{1}{2}\alpha\,\mathrm{tg}\frac{1}{2}\varphi$ der Winkel $\beta - \gamma$ eindeutig bestimmt, wenn man $\beta > \gamma$ nimmt. Durch eine Höhe und die Winkel ist das Dreieck bestimmt. Mit Benutzung der Mollweide'schen Gleichung $(b + c)\sin\frac{1}{2}\alpha = a\cos\frac{1}{2}(\beta - \gamma)$ erhält man noch

$$a = (b + c)\,\mathrm{cotg}\tfrac{1}{2}\varphi,\ F = \tfrac{1}{2}ah = \tfrac{1}{2}h(b + c)\,\mathrm{cotg}\tfrac{1}{2}\varphi.$$

Determination. Es müssen die Bedingungen

$$1.\ \sin\tfrac{1}{2}\alpha\,\mathrm{tg}\tfrac{1}{2}\varphi \leqq 1,\quad 2.\ \beta - \gamma < \beta + \gamma$$

erfüllt sein. Da die Seiten der Gleichung $\mathrm{cotg}\frac{1}{2}\varphi = \frac{1 + \cos\varphi}{\sin\varphi}$ oder $\mathrm{cotg}\frac{1}{2}\varphi = \sqrt{1 + \mathrm{cotg}\varphi^2} + \mathrm{cotg}\varphi$ positiv sind, so ist die erste Bedingung erfüllt, wenn $\sin\frac{1}{2}\alpha \leqq \sqrt{1 + \mathrm{cotg}\varphi^2} + \mathrm{cotg}\varphi$ oder $\sin\frac{1}{2}\alpha - \mathrm{cotg}\varphi \leqq \sqrt{1 + \mathrm{cotg}\varphi^2}$ ist. Da der Winkel φ im zweiten Quadranten liegt, so ist $\mathrm{cotg}\varphi$ negativ, also $\sin\frac{1}{2}\alpha - \mathrm{cotg}\varphi$ positiv, daher die erste Bedingung erfüllt, wenn $(\sin\frac{1}{2}\alpha - \mathrm{cotg}\varphi)^2 \leqq 1 + \mathrm{cotg}\varphi^2$ oder $\sin\frac{1}{2}\alpha^2 - 2\sin\frac{1}{2}\alpha\,\mathrm{cotg}\varphi \leqq 1$ oder $-2\sin\frac{1}{2}\alpha\,\mathrm{cotg}\varphi \leqq \cos\frac{1}{2}\alpha^2$ oder, da $\mathrm{cotg}\varphi = -\frac{h}{b+c}\mathrm{cotg}\frac{1}{2}\alpha$ ist, wenn $\frac{2h}{b+c}\cos\frac{1}{2}\alpha \leqq \cos\frac{1}{2}\alpha^2$ oder $h \leqq \frac{1}{2}(b+c)\cos\frac{1}{2}\alpha$ ist. Die zweite Bedingung ist erfüllt, wenn $\cos\frac{1}{2}(\beta - \gamma) > \cos\frac{1}{2}(\beta + \gamma)$ oder $\sin\frac{1}{2}\alpha\,\mathrm{tg}\frac{1}{2}\varphi > \sin\frac{1}{2}\alpha$ oder $\mathrm{tg}\frac{1}{2}\alpha > 1$ ist, und diese Ungleichung findet immer statt, weil $\varphi > \frac{1}{2}\pi$, also $\frac{1}{2}\varphi > \frac{1}{4}\pi$ ist. Die Aufgabe ist daher nur dann möglich und das Dreieck eindeutig bestimmt, wenn $h \leqq \frac{1}{2}(b + c)\cos\frac{1}{2}\alpha$ ist. (Vergl. Aufgabe 8.)

Aufgabe 15. Dreieck aus m, F, α.

Auflösung. Es ist $c : m = \sin(\beta + \frac{1}{2}\alpha) : \sin\beta = \cos\frac{1}{2}(\beta - \gamma) : \sin\beta$,

$$m^2\cos\tfrac{1}{2}(\beta - \gamma)^2 = c^2\sin\beta^2 = 4r^2\sin\beta^2\sin\gamma^2,$$

$$m^2\{1 + \cos(\beta - \gamma)\} = 8r^2\sin\beta^2\sin\gamma^2,\ 2F = 4r^2\sin\alpha\sin\beta\sin\gamma,$$

$$\frac{m^2\sin\alpha}{2F} = \frac{2\sin\beta\sin\gamma}{1 + \cos(\beta - \gamma)} = \frac{\cos(\beta - \gamma) - \cos(\beta + \gamma)}{1 + \cos(\beta - \gamma)} = \frac{\cos\alpha + \cos(\beta - \gamma)}{1 + \cos(\beta - \gamma)}.$$

Da die Zahlen $\cos\alpha$ und $\cos(\beta-\gamma)$ nicht zugleich negativ sein können und $\cos\alpha < 1$ ist, so ist der Bruch $\frac{\cos\alpha + \cos(\beta-\gamma)}{1+\cos(\beta-\gamma)}$, also auch der Bruch $\frac{m^2\sin\alpha}{2F}$ echt. Daher kann man $\frac{m^2\sin\alpha}{2F} = \cos\varphi$ setzen und erhält dadurch $\cos\varphi = \frac{\cos\alpha + \cos(\beta-\gamma)}{1+\cos(\beta-\gamma)}$,

$$\cos(\beta-\gamma)\,(1-\cos\varphi) = \cos\varphi - \cos\alpha,\quad \cos(\beta-\gamma) = \frac{\sin\frac{1}{2}(\alpha+\varphi)\sin\frac{1}{2}(\alpha-\varphi)}{\sin\frac{1}{2}\varphi^2}.$$

Ferner ist $4r^2 = \frac{2F}{\sin\alpha\sin\beta\sin\gamma}$, $a = 2r\sin\alpha$, $b = 2r\sin\beta$, $c = 2r\sin\gamma$.

Determination. Es müssen die Bedingungen

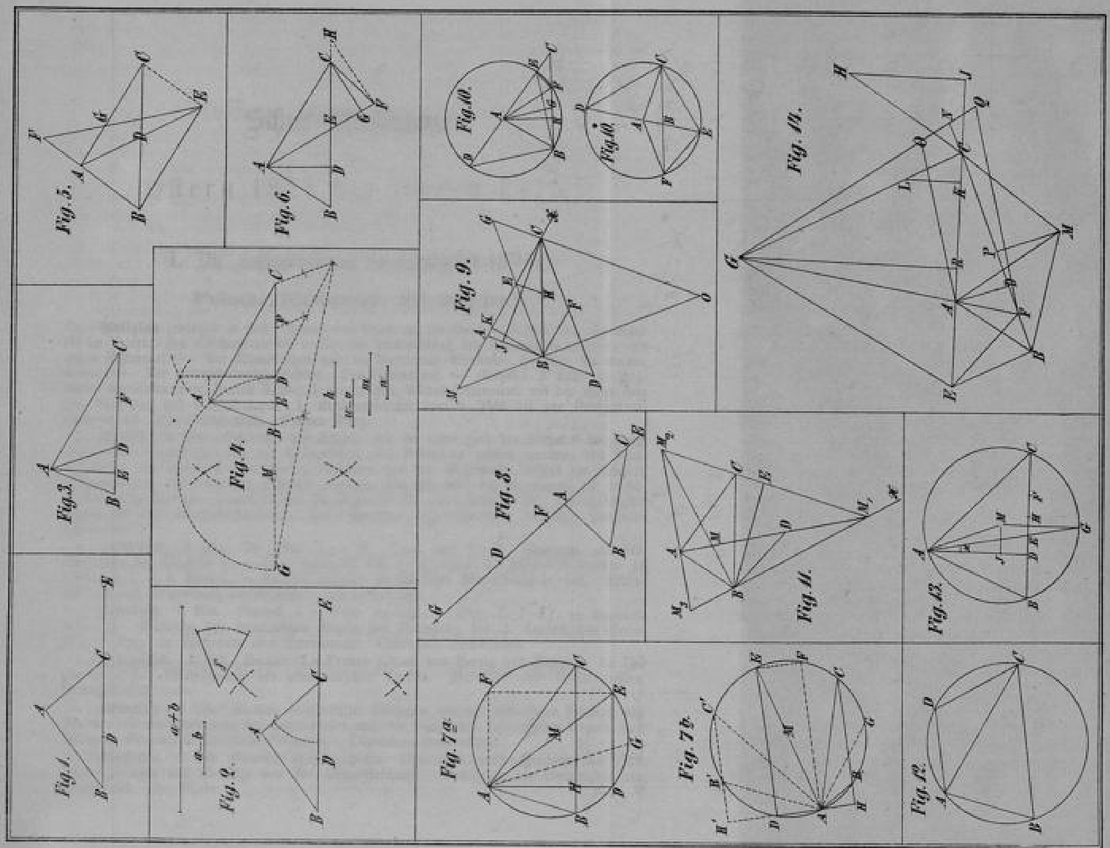
$$1.\ \text{val.abs.}\frac{\cos\varphi-\cos\alpha}{1-\cos\varphi} \leqq 1,\quad 2.\ \tfrac{1}{2}\sin\alpha < \frac{F}{m^2},\quad 3.\ \beta-\gamma < \beta+\gamma$$

erfüllt sein. Ist $\cos\alpha < \cos\varphi$, so ist die erste Bedingung erfüllt, wenn

$$\cos\varphi - \cos\alpha \leqq 1-\cos\varphi,\ 2\cos\varphi \leqq 1+\cos\alpha,\ \cos\varphi \leqq \cos\tfrac{1}{2}\alpha^2,\ \frac{m^2\sin\alpha}{2F} \leqq \cos\tfrac{1}{2}\alpha^2,$$

$\operatorname{tg}\frac{1}{2}\alpha \leqq \frac{F}{m^2}$ ist. Ist dagegen $\cos\alpha \geqq \cos\varphi$, also $\cos\alpha > 0$ und $\frac{1}{2}\alpha < \frac{1}{4}\pi$, so ist der Bruch $\frac{\cos\alpha - \cos\varphi}{1-\cos\varphi}$ stets echt, die erste Bedingung daher stets erfüllt. Aber auch in diesem Falle ist $\operatorname{tg}\frac{1}{2}\alpha < \frac{F}{m^2}$, da $\cos\alpha \geqq \frac{m^2\sin\alpha}{2F}$, $\frac{1}{2}\operatorname{tg}\alpha \leqq \frac{F}{m^2}$, $\frac{\operatorname{tg}\frac{1}{2}\alpha}{1-\operatorname{tg}\frac{1}{2}\alpha^2} \leqq \frac{F}{m^2}$, $\operatorname{tg}\frac{1}{2}\alpha < \frac{\operatorname{tg}\frac{1}{2}\alpha}{1-\operatorname{tg}\frac{1}{2}\alpha^2}$ ist. Da nun $\sin\frac{1}{2}\alpha\frac{1}{\cos\frac{1}{2}\alpha} > \sin\frac{1}{2}\alpha\cos\frac{1}{2}\alpha$, also $\operatorname{tg}\frac{1}{2}\alpha > \frac{1}{2}\sin\alpha$, und in jedem Falle $\operatorname{tg}\frac{1}{2}\alpha \leqq \frac{F}{m^2}$ ist, so ist stets $\frac{1}{2}\sin\alpha < \frac{F}{m^2}$, also die zweite Bedingung stets erfüllt, wenn die erste erfüllt ist. Die dritte Bedingung ist erfüllt, wenn $\cos(\beta-\gamma) > \cos(\beta+\gamma)$ oder $\frac{\cos\varphi-\cos\alpha}{1-\cos\varphi} > -\cos\alpha$ oder $\cos\varphi - \cos\alpha > -\cos\alpha + \cos\varphi\cos\alpha$ ist, und diese Ungleichung findet immer statt, weil $\cos\varphi$ positiv ist. Es ist daher nur dann die Aufgabe möglich und das Dreieck eindeutig bestimmt, wenn $\operatorname{tg}\frac{1}{2}\alpha \leqq \frac{F}{m^2}$ ist.

ticht zugleich negativ sein können und $\cos\alpha < 1$ ist,
also auch der Bruch $\frac{m^2 \sin\alpha}{2F}$ echt. Daher kann man
rch $\cos\varphi = \frac{\cos\alpha + \cos(\beta - \gamma)}{1 + \cos(\beta - \gamma)}$,
$\cos\alpha$, $\cos(\beta - \gamma) = \frac{\sin\frac{1}{2}(\alpha + \varphi)\sin\frac{1}{2}(\alpha - \varphi)}{\sin\frac{1}{2}\varphi^2}$.
$\text{in}\,\alpha$, $b = 2r\sin\beta$, $c = 2r\sin\gamma$.
die Bedingungen
$2.\ \frac{1}{2}\sin\alpha < \frac{F}{m^2}$, $3.\ \beta - \gamma < \beta + \gamma$
ie erste Bedingung erfüllt, wenn
$\leqq 1 + \cos\alpha$, $\cos\varphi \leqq \cos\frac{1}{2}\alpha^2$, $\frac{m^2 \sin\alpha}{2F} \leqq \cos\frac{1}{2}\alpha^2$,
$\cos\varphi$, also $\cos\alpha > 0$ und $\frac{1}{2}\alpha < \frac{1}{4}\pi$, so ist der Bruch
gung daher stets erfüllt. Aber auch in diesem Falle
$\frac{1}{2}\text{tg}\alpha \leqq \frac{F}{m^2}$, $\frac{\text{tg}\frac{1}{2}\alpha}{1 - \text{tg}\frac{1}{2}\alpha^2} \leqq \frac{F}{m^2}$, $\text{tg}\frac{1}{2}\alpha < \frac{\text{tg}\frac{1}{2}\alpha}{1 - \text{tg}\frac{1}{2}\alpha^2}$
$\text{s}\frac{1}{2}\alpha$, also $\text{tg}\frac{1}{2}\alpha > \frac{1}{2}\sin\alpha$, und in jedem Falle
, also die zweite Bedingung stets erfüllt, wenn die
g ist erfüllt, wenn $\cos(\beta - \gamma) > \cos(\beta + \gamma)$ oder
$\cos\alpha > -\cos\alpha + \cos\varphi\cos\alpha$ ist, und diese Ungleichung
st. Es ist daher nur dann die Aufgabe möglich und
$\frac{1}{2}\alpha \leqq \frac{F}{m^2}$ ist.



Schul-Na

vo

Ostern 1874 bi

I. Die Lehrverfassung

Prima. (Ordinari

Religion (evang.). 2 Std. Lectüre der
(I) im Urtext. Im Anschluß an die Lectüre di
neuen Testament. — Die ökumenischen und di
August. — Die Unterscheidungs-Lehren. Der
matik: die Sakramente, speciell Taufe, Firmung
heil. Meßopfer und Bußsakrament. b. Kirchen
nung im 16. Jhdt einschließlich. Pfarrer Kreu

Deutsch. 3 Std. Geschichte der ältesten
Dichter der neuesten Zeit von den Romantikern
lungenlied (mit Auswahl) und Lieder Walthe
Göthe's Tasso, Abschnitte aus Lessing's Laoko
hochdeutschen Sprache. Uebersicht über die Gesc
Lehren der Logik (Dispositionslehre). Freie V
Fährmann.

Lateinisch. 8 Std. Cic. Tusc. I. u.
Oberlehrer Dr. Schmidt I. — Hor. carm. II.
Oden des 1. u. 2. Buches. — Stilistik eingeübt
poralien und Besprechung der Aufsätze. Der O

Griechisch. 6 Std. Thucyd. I. — Plat.
Antigone. Einübung der syntactischen Regeln
Alle 14 Tage ein Exercitium oder Extemporale.

Französisch. 2 Std. Lectüre: La Franc
par Corneille. Wiederholung des grammatische
Prorector Fährmann.

Hebräisch. 2 Std. Lectüre ausgewählter
Psalmen; Vervollständigung der Formenlehre u
Rödigers Grammatik; schriftliche Uebungen. O

Geschichte. 3 Std. Römische Kaisergeschi
Wiederholungen und Vorträge aus der alten
Deutschland. Dr. Rhode.

Schul-Nachrichten

von

Ostern 1874 bis Ostern 1875.

I. Die Lehrverfassung im Schuljahre 1874/75.

Prima. (Ordinarius: Der Director.)

Religion (evang.). 2 Std. Lectüre der Briefe an die Galater, Römer und Corinther (I) im Urtext. Im Anschluß an die Lectüre die Entwickelung des Heilsplanes im alten und neuen Testament. — Die ökumenischen und die Particular-Symbole, specieller die confes. August. — Die Unterscheidungs-Lehren. Der Ordinarius. — (kathol.) 2 Std. a. Dogmatik: die Sakramente, speciell Taufe, Firmung, heil. Altars-Sacrament, mit der Lehre vom heil. Meßopfer und Bußsakrament. b. Kirchengeschichte vom 8. Jhdt. bis zur Kirchentrennung im 16. Jhdt einschließlich. Pfarrer Kreuz.

Deutsch. 3 Std. Geschichte der ältesten und der alten Zeit der Literatur bis Opitz. Dichter der neuesten Zeit von den Romantikern an. Besonders gelesen wurden: das Nibelungenlied (mit Auswahl) und Lieder Walthers von der Vogelweide (beides im Urtexte), Göthe's Tasso, Abschnitte aus Lessing's Laokoon. Die Elemente der Grammatik der mittelhochdeutschen Sprache. Uebersicht über die Geschichte der alten Philosophie. Die wichtigsten Lehren der Logik (Dispositionslehre). Freie Vorträge, vierwöchentliche Aufsätze. Prorector Fährmann.

Lateinisch. 8 Std. Cic. Tusc. I. u. V. Tacit. ann. I—II. (Auswahl.) 3 Std. Oberlehrer Dr. Schmidt I. — Hor. carm. II. III. 1—6; epist. I. Memorirt wurden 16 Oden des 1. u. 2. Buches. — Stilistik eingeübt an Seyfferts Materialien I—XII. Extemporalien und Besprechung der Aufsätze. Der Ordinarius.

Griechisch. 6 Std. Thucyd. I. — Plat. Apolog. — Hom. Il. I—IV. — Sophocl. Antigone. Einübung der syntactischen Regeln mit Benutzung des 2. Cursus von Halm. Alle 14 Tage ein Exercitium oder Extemporale. Oberlehrer Luchterhand.

Französisch. 2 Std. Lectüre: La France Litter. von Herrig und Burguy. Le Cid par Corneille. Wiederholung des grammatischen Cursus. Exercitien und Extemporalien. Prorector Fährmann.

Hebräisch. 2 Std. Lectüre ausgewählter Abschnitte aus den historischen Büchern und Psalmen; Vervollständigung der Formenlehre und die wichtigsten syntactischen Regeln nach Rödigers Grammatik; schriftliche Uebungen. Oberlehrer Luchterhand.

Geschichte. 3 Std. Römische Kaisergeschichte. Mittelalter, neuere Geschichte bis 1648. Wiederholungen und Vorträge aus der alten Geschichte. Repetition der Geographie von Deutschland. Dr. Rhode.

Mathematik. 4 Std. Algebraische Gleichungen vom 2. Grade mit mehreren Unbekannten. Der Moivre'sche Lehrsatz und die binomische Gleichung vom nten Grade. Der binomische Lehrsatz. Arithmetische Reihen höherer Ordnung. Stereometrie. Zweiwöchentlich ein Exercitium oder ein Extemporale. Oberlehrer Gauß.

Physik. 2 Std. Mechanik. Oberlehrer Gauß.

Secunda. (Oberlehrer: Luchterhand.)

Religion. (evang.) 2 Std. Im Sommer das Leben Jesu. Im Winter Gründung und Ausbreitung der christlichen Kirche. Lectüre der Apostelgeschichte und des Römerbriefes (bis Cap. 10). 5 Kirchenlieder. Erklärung der Sonntagsevangelien, Prorector Fährmann. — (kathol.) 2 Std. cfr. Prima.

Deutsch. 2 Std. Lectüre und Besprechung von Göthe's „Hermann und Dorothea", und Schillers „Maria Stuart." Anleitung zum Disponiren; Uebung im freien Vortrage. Vierwöchentliche Aufsätze. Der Ordinarius.

Lateinisch. Im Sommer 14 Std.: Lectüre in II. a. und II. b. Liv. II. 3 Std. Der Ordinarius. Virg. Aen. II. und III. erste Hälfte; metrische Uebungen. 3 Std. Dr. Rhode. In II. a. Cicero de amicit. 1 Std. Der Ordinarius. In II. b. stilistische Uebungen nach Süpfle II., Repetition und Erweiterung der Grammatik von § 129—268. Wöchentlich ein Exercitium oder Extemporale. 4 Std. Oberlehrer Dr. Schmidt. In II. a. stilistische Uebungen nach Seyffert's Uebungsbuche, Repetition der Casuslehre und orat. obliqua. Wöchentlich ein Exercitium oder Extemporale, Aufsätze. 3 Std. Der Ordinarius. — Im Winter 10 Std. Lecture in II. a. und II. b. Cicero. orationes in Catil. — Livius III Anfang. 4 Std. Der Ordinarius. — Virg. Aen. III. 2. Hälfte und IV. 2 Std. Dr. Lilie. Repetition der Grammatik von § 269—342; stilistische Uebungen nach Süpfle II.; wöchentlich ein Extemporale oder Exercitium; Aufsätze. 4 Std. Der Ordinarius.

Griechisch. 6 Std. Casuslehre, Gebrauch des Artikels und der Pronomina, Wiederholung der Formenlehre. Wöchentlich ein Extemporale oder Exercitium. Herodot I. von Cap. 95 an; Xenoph. Memorab. III. und IV. mit Auswahl. Homer Odyss. 23, 1, 2, 6, 7, 8 (memorirt Buch 2, von 1—150). Dr. Rhode.

Französisch. 2 Std. Lectüre: Charles douze liv. I, VI, VII. Relationen. Grammatik: Abschn. 6, 7, 8 (Plötz), Exercitien und Extemporalien. Prorector Fährmann.

Geschichte. 3 Std. Griechische Geschichte; Wiederholungen aus der preußischen Geschichte. Dr. Rhode.

Mathematik. 4 Std. Potenzirung, Radizirung, Logarithmirung; lineare Gleichungen mit mehreren Unbekannten und quadratische Gleichungen. — Ausmessung geradliniger Figuren; Proportionalität von Strecken, Aehnlichkeit der Polygone; das reguläre Polygon und der Kreis; Rectification und Quadratur des Kreises. Zweiwöchentlich ein Exercitium oder ein Extemporale. Oberlehrer Gauß.

Physik. Grundprincipien der Chemie. — Wärmelehre. Oberlehrer Gauß.

Real-Secunda. (Ordinarius: Prorector Fährmann.)

Religion. 2 Std. cfr. Secunda.

Deutsch. 3 Std. Uebersicht über die älteste und alte Literatur, außerdem über die Dichter der neuesten Zeit von den Romantikern an. Das Wichtigste aus der Metrik und Poetik. Gelesen wurden: Das Nibelungenlied, Göthe's Hermann und Dorothea, Göthe's Götz von Berlichingen, Uebersetzung der Homerischen Ilias (I II). Gedichte von Schiller, Göthe und Uhland (erklärt und zum Theil memorirt). Uebung im freien Vortrage (aus der alten Geschichte). Vierwöchentliche Aufsätze. Prorector Fährmann.

Lateinisch. 4 Std. Caesar (Bellum civ. lib. 1. Auswahl), Livius (lib. 3. Auswahl). Ovid. met. Auswahl aus Buch 8, 10, 6 (Verse memorirt). Wiederholung der Casuslehre und das Wichtigste aus der Tempus- und Moduslehre. Uebersetzen aus Süpfle. Sentenzen. Extemporalien und Exercitien. Prorector Fährmann.

Französisch. 4 Std. Im Sommer: Lectüre: Mort de Louis XVI (Lamartine). Grammatik: Leç. 25—45. — Im Winter: Lectüre, L'avare p. Molière. Grammatik: leç. 45—58, 76—78. Exercitien und Extemporalien. In Ober-Secunda: Aufsatz und Sprechübungen. Im Sommer Dr. van der Velde, im Winter, Prorector Fährmann.

Englisch. 4 Std. Lectüre ausgewählter Abschnitte aus Herrig's British Classical Authors (Swift, Macaulay, Th. Moore). Retrovertir- und Sprechübungen. Ausführlichere Grammatik nach Plate's Lehrg. 2. Cursus. Alle 14 Tage ein Exercitium oder Extemporale. Oberlehrer Dr. Schmidt.

Geschichte. 2 Std. Im Sommer: Neuere deutsche Geschichte. Oberlehrer Dr. Schmidt. Im Winter: Brandenburgisch-Preußische Geschichte. Hering.

Geographie. 2 Std. Im Sommer: Die allgemeinen Verhältnisse der Erdoberfläche vergleichend. Europa übersichtlich. Die südlichen Halbinseln Europas, physisch und politisch. Oberlehrer Dr. Schmidt. Im Winter: Nord- und Mittel-Europa. Hering.

Mathematik. 5 Std. a) Im Sommer: Gleichungen 1. und 2. Grades, Logarithmen, Exponential-Gleichungen, arithmetische und geometrische Reihen, Zinseszins- und Rentenrechnung. b) Im Winter: Ebene Trigonometrie. c) Geometrische Constructions-Aufgaben. Exercitien und Extemporalien. Dr. Adler.

Naturkunde. 5 Std. a) Physik: Allgemeine Eigenschaften der Körper und Wärmelehre. b) Chemie: Einleitung in die Chemie mit Berücksichtigung der Typentheorie, die Grundstoffe Stickstoff, Phosphor, Bor, Arsen, Antimon, Wismuth, Silicium, Zinn, Kohlenstoff und deren wichtigste Verbindungen. c) Naturbeschreibung. Im Sommer: Wiederholung der wichtigsten Pflanzensysteme; die wichtigsten natürlichen Pflanzenfamilien. Im Winter: Geognosie mit Berücksichtigung Deutschlands, besonders Niederschlesiens. Dr. Adler.

Tertia. (Ordinarius: Dr. Lilie.)

Religion. 2 Std. Erklärung des Evang. Marci. Das Leben Jesu im Zusammenhange. Katechismuslehre, specieller das 1. u. 2. Hauptstück. 5 Kirchenlieder. Oberlehrer Dr. Schmidt. — (kathol.) 2 Std. cfr. Prima.

Deutsch. 2 Std. Lesestücke, meist aus Wackernagel. III. Schillers Wilhelm Tell. Aufsätze. Der Ordinarius.

Lateinisch. 10 Std. Caes. b. gall. V—VII, 37. Ovid. metam. V—VIII. mit Auswahl. Wiederholung der Formen- und Casuslehre. Tempora und Modi. Seyffert § 234—246, 248—309. Uebersetzen aus Süpfle I. Wöchentlich ein Exercitium oder Extemporale. Der Ordinarius.

Griechisch. 6 Std. Xen. anab. 3, 5—5, 6 excl. Hom. Od. III., 100 Verse, dieselben wurden auch auswendig gelernt. Wiederholung der regelmäßigen, Einübung der unregelmäßigen Formenlehre. Mündliches Uebersetzen aus Halm I., 2. Exercitien und Extemporalien. Der Ordinarius.

Französisch. 2 Std. Plötz II. Cursus Lection 1—23, Ober-Tertia bis Lection 34. Lectüre aus Plötz's Chrestomathie. 1½ wöchentlich ein Exercitium oder Extemporale. Im Sommer Prorector Fährmann, im Winter Oberlehrer Dr. Schmidt.

Geschichte. 3 Std. Im Sommerhalbjahr: Deutsche Geschichte bis zum Interregnum. Geographie von Deutschland. Dr. Rhode. — Im Winter: Deutsche Geschichte vom Interregnum bis zum westphälischen Frieden. In der Geographie wurden die 6 östlichen preußischen Provinzen speciell durchgenommen. Dr. Schmidt II.

Mathematik. 4 Std. Arithmetik bis zur Lehre von den Potenzen; allgemeine Größenlehre und Proportionen, lineare Gleichungen mit einer Unbekannten. — Linien im Dreieck, das Viereck, der Kreis; Gleichflächigkeit geradliniger Figuren. Oberlehrer Gauß.

Naturkunde. 1 Std. Botanik. Zoologie. Oberlehrer Gauß.

Real-Tertia. (Ordinarius: Dr. Adler.)

Religion. 2 Std. cfr. Tertia.

Deutsch. 3 Std. cfr. Tertia.

Lateinisch. 5 Std. Wiederholung der regelmäßigen und unregelmäßigen Formenlehre nach der Grammatik von Ellendt-Seyffert. Die Casuslehre wurde durch mündliches Uebersetzen aus Süpfle und häufige Dictate eingeübt. Zweiwöchentlich 1 Extemporale. Dr. Schmidt II. Weller, Lesebuch aus Livius, Stück 16—21 incl. Dr. Lilie.

Französisch. 4 Std. Plötz, 2. Cursus, Lect. 1—23 und Lection 50—55. Lectüre: Voltaire's Charles XII, Buch 8. $1^1/_2$ wöchentlich 1 Exercitium oder Extemporale. Im Sommer Dr. van der Velde, im Winter Oberlehrer Dr. Schmidt.

Englisch. 4 Std. Elementargrammatik nach Plate's Lehrgang, 1. Cursus, Lect. 1—60. Lectüre aus Plate's Blossoms. $1^1/_2$ wöchentlich 1 Exercitium oder Extemporale. Im Sommer Dr. v. d. Velde, im Winter Oberlehrer Dr. Schmidt.

Geschichte. 2 Std. Im Sommer: brandenburgisch-preußische Geschichte bis zum großen Kurfürsten. Hering. — Im Winter: Fortsetzung der brandenburgisch-preußischen Geschichte bis 1815. Dr. Schmidt II.

Geographie. 2 Std. Im Sommer: Der preußische Staat. Hering. — Im Winter: Schweiz, Niederlande, Skandinavien, Türkei und Griechenland. Dr. Schmidt II.

Mathematik. 6 Std. a) Im Sommer Arithmetik: Die 4 Species der Buchstabenrechnung, Potenzen mit positiven und negativen Exponenten, Proportionen und Gleichungen 1. Grades mit 1 Unbekannten. b) Im Winter Geometrie: Planimetrie nach Kambly's Lehrbuch, Abschnitt III., IV. und V. Exercitien und Extemporalien. c) Bürgerliches Rechnen: Termin-, Gesellschafts- und Mischungsrechnung. Der Ordinarius.

Naturgeschichte. 2 Std. Im Sommer: Beschreibung von Pflanzen mit Berücksichtigung des Linné'schen, Jussieu'schen und Decandolle'schen Systems. Im Winter: Mineralogie mit besonderer Berücksichtigung der wichtigsten schlesischen Mineralien. Der Ordinarius.

Quarta. (Ordinarius: Dr. Schmidt II.)

Religion. (evang.) 2 Std. Das Evangelium Lucae wurde gelesen und erklärt. Die Hauptstücke wurden wiederholt und die ersten beiden mit Heranziehung von Bibelstellen besonders erklärt. Uebersicht über die Geschichte Luther's und der Reformation. Kirchenlieder. Der Ordinarius. — (kath.) 2 Std. a) Katechismus: Das apostolische Glaubensbekenntniß vom 4.—10. Artikel; die Sakramente im Allgemeinen und Taufe, Buße u. Heil. Altars-Sakrament im Besonderen, nach dem Diözesankatechismus. b) Biblische Geschichte vom König Paul bis zur babylonischen Gefangenschaft, nach Stern. Pfarrer Kreuz.

Deutsch. 2 Std. Eingehende Besprechung der Aufsätze. Ausgewählte Stücke aus Wackernagel II. wurden gelesen und erklärt. Declamationsübungen. Der Ordinarius.

Lateinisch. 10 Std. Lectüre: Corn. N. I—XVI. Casuslehre eingeübt durch Sätze aus der Lectüre. Wöchentlich 2 schriftliche Uebungen. Mündliches und schriftliches Uebersetzen nach Süpfle 1—118. Der Director.

Griechisch. 6 Std. Regelmäßige Formenlehre bis zu den Verbis auf $\mu\iota$ excl. Vocabellernen. Uebersetzen aus Gottschicks Lesebuche. Wöchentlich eine schriftliche Uebung. Der Ordin.

Französisch. 2 Std. Plötz. 1. Cursus, Lect. 50—85. Lectüre aus dem angehängten Lesebuche. Alle 14 Tage ein Exercitium oder Extemporale. Im Sommer Oberlehrer Dr. Schmidt I., im Winter Hering.

Geschichte. 2 Std. Griechische und römische Geschichte. Der Ordinarius.

Geographie. 1 Std. Im Sommer: Deutschland in orographischer und hydrographischer Beziehung. Im Winter: Die preußischen Provinzen. Der Ordinarius.

Mathematik. 3 Std. Decimalbrüche; Procentrechnung. Planimetrie bis zu den Congruenzsätzen. Oberlehrer Gauß.

Quinta. (Ordinarius: Hering.)

Religion. (evang.) 3 Std. Biblische Geschichte im Zusammenhange nach Zahn, und zwar aus dem alten Testamente 1—58 und aus dem neuen 1—66; die ersten 3 Hauptstücke wurden dem Standpunkt der Klasse angemessen erläutert. 8 Kirchenlieder. Der Ordinarius. — (kath.) 2 Std. cfr. Quarta.

Deutsch. 2 Std. Uebungen im mündlichen und schriftlichen Wiedererzählen. Dictate. Der Ordinarius.

Lateinisch. 10. Std. Wiederholung und Vervollständigung des Pensums von Sexta. Verb. irreg., anomala und defectiva. Das Wichtigste aus der Syntax. Alle 8 Tage ein Extemporale. Außerdem wöchentliche schriftliche Arbeiten. Lectüre: Weller, Lesebuch aus Herodot I—XIV. Der Ordinarius.

Französisch. 3 Std. Es wurden aus Plötz 1. Cursus 1—50 durchgenommen und die dazu gehörigen Vokabeln repetirt. Das Grammatische wurde außerdem durch mündliche Uebungen befestigt. Alle 14 Tage ein Extemporale. Der Ordinarius.

Geographie. 2 Std. Im Sommer: die außereuropäischen Erdtheile. Dr. Rhode. — Im Winter Europa und Deutschland speciell. Schwartz.

Rechnen. 4 Std. Die Bruchrechnung. Einfache und zusammengesetzte Regeldetri (Stubba, Heft 3—5). Kopfrechnen. Wochenarbeiten. Schwartz.

Naturgeschichte. 2 Std. Im Sommer: Beschreibung von Pflanzen mit Berücksichtigung des Linné'schen Systems. Im Winter: Beschreibung von Amphibien und Fischen. Dr. Adler.

Sexta. (Ordinarius: Im Sommer: Dr. v. d. Velde, im Winter: Schwartz.)

Religion. (evang.) 3 Std. Ausgewählte biblische Geschichten des A. u. N. T. wurden unter Benutzung des Lehrbuches von Zahn memorirt und zum Verständniß gebracht. Die drei ersten Hauptstücke wurden memorirt und dem Standpunkt der Klasse angemessen erläutert; die darauf bezüglichen wichtigsten Sprüche wurden gelernt, dazu 8 Kirchenlieder. Schwartz. — (kath.) 2 Std. cfr. Quarta.

Deutsch. 2 Std. Lesestücke aus Wackernagel I. Orthographische Uebungen. Declamirübungen. Alle 8 Tage ein Dictat. Schwartz.

Latein. 10 Stdn. Regelmäßige Formenlehre; die gebräuchlichsten unregelmäßigen Verba. Lesestücke aus Henneberger's Elementarbuch. Wöchentlich ein Extemporale und ein Exercitium. Im Sommer Dr. van der Velde, im Winter Dr. Rhode.

Geographie. 3 Std. Im Sommer: die Elemente der allgemeinen Geographie. Dr. Schmidt II. Im Winter: Topographie von Europa. Dr. Adler.

Rechnen. 4 Std. Die vier Species mit benannten Zahlen. Addition und Subtraction gleichnamiger Brüche. Einfache Regeldetri (Stubba, Heft 2 und 3). Wöchentliche häusliche Arbeiten. Schwartz.

Naturgeschichte. 2 Std. cfr. Quinta.

Vorbereitungs-Klasse. (Ordinarius: Engmann.)

Religion. (evang.) 4 Std. Ausgewählte biblische Geschichten des A. u. N. T. (29), die 3 ersten Hauptstücke mit Luthers Erklärung und bezüglichen Bibelstellen, 8 Kirchenlieder und Psalmen memorirt.

Deutsch. 11 Std. Lectüre von Paulsiek's Lesebuch für Septima, verbunden mit schriftlichen Reproductionen. Denkübungen im einfachen und erweiterten Satze. Einübung der Declination und Conjugation, tägliche Uebungen im Abschreiben; orthographische Dictirübungen, das Alphabet der Klein- und Großbuchstaben in deutscher und lateinischer Schrift; erste Abtheilung schreibt nach Vorlegeblättern.

Geographie. 2 Std. Landkarte; die elementaren Vorkenntnisse; Uebersicht von Europa, Asien, Afrika, Amerika und Australien mit besonderer Berücksichtigung Europa's. Nach dem Leitfaden von Ph. Jac. Beumer.

Rechnen. 5 Std. Die vier Grundrechnungen in unbenannten und benannten Zahlen, sowohl im Kopf- als Tafelrechnen. Resolviren und Reduciren. (2 Abtheilungen.)

Zeichnen. 2 Std. Vorübungen. Figuren darstellend, die aus geraden und krummen Linien zusammengesetzt sind. (Abtheilung I. Vorlegeblätter.)

Technische Fertigkeiten.

Kalligraphie. 2 Std. (Sexta und Quinta combinirt.) Uebungen in deutscher und lateinischer Schrift im Anschluß an die systematische Schreibschule von Schwartz. Einübung der Buchstabenformen und Ziffern in genetischer Reihenfolge. Taktschreiben. Schwartz.

Zeichnen. 6 Std. (2 in Sexta. Engmann.) (2 in Quinta mit Quarta und 2 in Real-Tertia mit Real-Secunda combinirt. Schwartz.) Für Sexta: Einfache geradlinige Figuren mit Zirkel und Lineal nach Domschke; für Quinta und Quarta: freies Handzeichnen theils nach Vorlagen, theils nach den Dupuis'schen Modellen; für Real-Tertia und Real-Secunda: Linear- und Planzeichnen, Maschinen- und Bauzeichnen, Körperstudien und Köpfe in zwei Kreiden, Landschaften und Blumen, Thierstudien, Perspective, Projectionslehre und Schattenconstruction, Anfänge im Malen mit Wasser- und Honigfarben.

Gesang. 6 Std. (2 in Sexta mit Quinta, 2 in Quarta mit Tertia und Real-Tertia combinirt, 1 für den gemischten Chor und 1 für den Männerchor.) Belehrungen über Dur- und Molltonleitern, Accorde, Tonarten, Tactarten, Vorsetzungszeichen, Intervalle, verbunden mit Treffübungen im Anschluß an die Gesangschule von Kotzold. Einübung von ein-, zwei- und mehrstimmigen Chorälen und Liedern nach den Liederbüchern von Drath und Erk. — Die beiden Sängerchöre übten vierstimmige Choräle, Psalmen, Motetten, Oratorien ꝛc. Schwartz.

Gymnastische Uebungen. 4 Std. Im Sommer-Semester. Dr. van der Velde.

Facultativer Unterricht im Englischen.

I. Abtheilung. 2 Std. (10 Primaner, 9 Secundaner.) Lectüre aus W. Irving's Sketchbook mit Retrovertir- und Sprechübungen. Im Winter systemat. Grammatik (Lehre vom Pronomen) und alle 3 Wochen ein Exercitium. Oberlehrer Dr. Schmidt.

II. Abtheilung. 2 Std. (1 Primaner, 5 Secundaner, 21 Tertianer.) Aussprache, Elementar-Grammatik, Lesestücke aus Gräser. Dr. Rhode.

Privat-Lectüre.

Prima. Cicero, Tuscul. disp. II. u. orat. pro Sulla. Hor. carm. III. — Hom. Il. V-XII.
Secunda. Liv. V. — Hom. Od. IX—XII.
Real-Secunda. Stücke von Scott u. Hume. Histoire de la première croisade (Michaud). Schillers Braut von Messina.

Verzeichniß der bearbeiteten Themata.

Prima.

I. Im Deutschen:

1. a. Wer befehlen will, muß gehorchen lernen.
   b. Worauf beruht unser Interesse an den Homerischen Dichtungen?
2. Welche Vergleichungspunkte für Brunhild im Nibelungenliede lassen sich im Mythus und in der nordischen Ueberlieferung auffinden? —
3. Welchen Einfluß haben die Kreuzzüge auf die Bildung der Deutschen gehabt?
4. „Was habe ich davon?" Eine Frage der Selbstsucht, aber auch der Weisheit? (Clausur=Arbeit.)
5. Charakterbild des Paris, nach Homer.
6. a. Ueber die Behauptung Cicero's, daß nur gute Menschen wahre Freunde sein können.
   b. Walther's von der Vogelweide patriotische Lieder.
7. a. Gedankengang der Horazischen Ode „Odi profanum vulgus" (III, 1.).
   b. Gedankengang in Ode 1, 1.
   c. Der Stoicismus, der Epikuräismus und der Skepticismus.
8. Warum preist der Deutsche mit Vorliebe die hohenstaufischen Kaiser? —
9. Sind die Franzosen die Erbfeinde der Deutschen zu nennen?
10. Clausur=Arbeit. (Das Thema wird im nächsten Programm angegeben werden.)

II. Im Lateinischen:

1. a. (Ober=Prima.) Gens Fabia de republica Romana optime merita.
   b. (Unter=Prima.) In rebus difficillimis Caesaris et virtute et prudentia Galliam subjectam esse.
2. a. Periclem regendae civitatis peritissimum fuisse.
   b. Themistoclis exitus nobilior fuit turpi morte Pausaniae.
3. a. Caesaris caedem cum scelestam fuisse, tum funestam reipublicae.
   b. Samnium exercuit virtutem Romanam.
4. a. Dignus fuit Socrates, qui a Deo Delphico sapientissimus hominum judicaretur.
   b. Evanescunt vitia Alexandri prae virtutum splendore.
5. a. Cajus Marius imperator optimus, pessimus civis fuisse existimandus est.
   b. Pompeji famam magis felicitate partam esse, quam virtute.
6. Persarum opes fractas esse Graecorum virtute. (Clausur.)
7. a. Ciceronis consulatus egregie gestus.
   b. Bellum Jugurthinum magnum et atrox, variaque victoria fuit. (Sall. b. Jug. V.)
8. a. Epaminondas docet, patriae salutem in unius viri virtute niti posse.
   b. Recte judicavit Corn. Nepos, nihil Alcibiade fuisse excellentius vel in vitiis vel in virtutibus.
9. a. Gravissimae de natura deorum sententiae ex Ciceronis libro decerptae uno conspectu proponantur.
10. Cur bellum nuper contra Gallos gestum et dignissimum memoria et maximi fuerit momenti? (Klassen=Arbeit.)
11. Socrates accusatus quibus argumentis sese defenderit?
12. Cur Hannibal in summorum imperatorum numero ponendus sit?
13. Clausur=Arbeit.

Secunda.

I. Im Deutschen:

A. Ober=Secunda.

1. Rast' ich, so rost' ich.
2. Worin zeigen sich die Schwächen im Charakter des Apothekers in Göthe's „Hermann und Dorothea?"

3. Woher rühren die Thränen Hermanns im vierten Gesange von Göthe's „Hermann und Dorothea?
4. Welche Gründe sprechen dafür, daß man verdienten Männern Denkmäler errichtet?
5. Die Versuche des vertriebenen Tarquinius den Thron wieder zu erlangen. (Nach der Darstellung des Livius.)
6. Sagunts Eroberung und Zerstörung. (Nach der Darstellung des Livius.)
7. Warum geziemt grade dem Jünglinge Bescheidenheit und worin äußert sich dieselbe?
8. Worin bestehen nach Sokrates in Xenophons Memorabilien die Pflichten eines guten Feldherrn?
9. Welche Hoffnungen setzt Maria Stuart auf eine Zusammenkunft mit Elisabeth und warum gehen dieselben nicht in Erfüllung?
10. Vergleichende Charakteristik der Charaktere von Mortimer und Leicester.

B. Unter-Secunda.

1. Welche Vortheile gewährt das Meer den Küstenbewohnern?
2. Welche Charakterzüge offenbart der Wirth im ersten Gesange von Göthe's „Herrmann und Dorothea?"
3. Die Erlebnisse der Dorothea, bevor sie im Gedichte auftritt.
4. Der Schiffbruch des Aeneas. (Nach Virgil.)
5. Die Versuche des Tarquinius, den Thron wieder zu erlangen. (Nach der Darstellung des Livius.)
6. Der helvetische Krieg. (Nach Cäsars Darstellung.)
7. Der Kampf der Horatier und Curiatier. (Nach der Darstellung des Livius.)
8. Auf welche Weise sucht Sokrates den Glaukon von seiner Eitelkeit zu heilen?
9. Welche Gründe veranlassen die Königin Elisabeth in Schillers „Maria Stuart", das Todesurtheil der Maria Stuart zu unterzeichnen?
10. „Man lebt nur einmal in der Welt", ein ebenso trefflicher als verwerflicher Ausspruch.

II. Im Lateinischen. (Ober-Secunda.)

1. Quibus ex causis ortum sit bellum, quod Caesar cum Ariovisto gessit.
2. Caesar cum Usipetibus et Tencteris bellum gerit.
3. Enumerantur ea bella, quae reges Romani gesserunt.
4. Quibus rebus Caesar adductus sit, ut Helvetiis bellum inferret, exponitur.
5. De Caesaris altera in Britanniam expeditione.
6. Hanno in senatu Carthaginiensium Hannibalem tradendum suadet.
7. Quorum virorum opera res Romana altero bello Punico sustentata atque aucta sit.

Themata zu den deutschen Aufsätzen in Real-Secunda.

1. a. Von der Stirne heiß, rinnen muß der Schweiß,
   Soll das Werk den Meister loben; doch der Segen kommt von oben.
   b. Mit des Geschickes Mächten ist kein ew'ger Bund zu flechten.
2. Siegfried's Besuch bei seinen Nibelungen.
3. Lebenslauf.
4. Eine Scene aus dem Kampfe um Ilerda.
5. Darstellung der Scenerie und des Gedankenganges in Göthe's Romanze „Der Sänger".
6. Schilderung des Zuges der Vertriebenen, aus Göthe's „Hermann und Dorothea".
7. Gedankengang des Liedes „Klage der Ceres."
8. „Der Bruder Martin" in Göthe's „Götz von Berlichingen."
9. Zukunftspläne (Brief).
10. Das Wasser in seiner verschiedenartigen Anwendung. (Clausur-Arbeit.)
11. Der Streit zwischen Agamemnon und Achilles (nach Homer's Ilias).

Aufgaben für die schriftlichen Arbeiten der Abiturienten.

Michaelis 1874.

1. Im Deutschen: „Welchen Einfluß soll die Erinnerung an die große Zeit von 1870/71 auf den studirenden Jüngling ausüben?“
2. Im Lateinischen: „Quibus causis factum sit, ut summa imperii a Lacedaemoniis ad Atheniensis transferretur?“
3. In der Mathematik:
   a. Zur Construction eines Dreiecks sind gegeben ein Winkel α, das Verhältniß $t:h$ $(=m:n)$ der Schwerlinie und der Höhe, die vom Scheitelpunkt dieses Winkels ausgehen, und der Radius r des umgeschriebenen Kreises.
   b. Jemand, der eine Schuld von 20,000 Mark hat, die er zu $4\frac{1}{2}$ Procent verzinsen muß, will dieselbe in 8 Jahren abtragen. Wieviel hat er jährlich zu bezahlen?
   c. Ein Dreieck zu berechnen aus der Differenz $p-q$ der Projectionen zweier Seiten auf die dritte, dem von jenen Seiten eingeschlossenen Winkel α und der zur dritten Seite zugehörigen h. Beispiel: $p-q=167{,}5$, $h=210$, $\alpha=32^\circ\,36'\,30''$.
   d. In einem geraden Kegelstumpf, in welchem sich eine Kugel mit dem Radius R beschreiben läßt, beträgt der Mantel das nfache der Differenz d der beiden Grundflächen. Wie groß ist das Volumen des Kegelstumpfs?
      Beispiel: $n=3$, $R=6$, $\pi=\frac{22}{7}$.
4. Im Hebräischen: 1. Samuel. Cap. 16, v. 1—5.

Ostern 1875.

1. Im Deutschen: „Warum preist der Deutsche mit Vorliebe die Hohenstaufischen Kaiser?“
2. Im Lateinischen: „Regulus egregius exsul.“ (Hor. III. 5. 48.)
3. In der Mathematik:
   a. Zur Construction eines Dreiecks sind gegeben eine Seite a, die Differenz $\beta-\gamma$ der anliegenden Winkel und das Verhältniß $h_2:h_3$ $(=n:m)$ der den beiden andern Seiten zugehörigen Höhen.
   b. $3xy+x^2+y^2=79$, $2xy+x+y=38$.
   c. Ein Dreieck zu berechnen aus der Summe $a+b$ zweier Seiten, dem von ihnen angeschlossenen Winkel γ und dem Radius ϱ, des der einen Seite (a) angeschriebenen äußeren Berührungskreises. Beispiel: $\overline{a}+\overline{b}=752{,}72^{m}$, $\overline{\varrho},=688{,}478^{m}$, $\gamma=14^\circ\,18'\,30''$.
   d. Aus einer Kugel mit dem Radius r soll ein gerader Cylinder mit größtmöglichem Mantel herausgeschnitten werden. Wie viel beträgt der Abfall? Beispiel: $\overline{r}=1{,}59615^{m}$.
4. Im Hebräischen: 1. Samuel Cap. 24, v. 1—7.

II. Verfügungen des Königlichen Provinzial-Schul-Collegiums.

1. Den 17. März 1874. Die Directoren werden veranlaßt zu berichten, ob das Einkommen der Unterbedienten der unter ihrer Leitung stehenden Anstalten erhöht werden müsse, eventuell um welchen Betrag.

2. Den 3. April 1874. Der Lectionsplan für das Schuljahr 1874—75 wird genehmigt.

3. Den 13. April 1874. Der Ministerial-Erlaß vom 8. April 1874, welcher die Einführung der Elementar-Mathematik von dem Oberlehrer A. Gauß an dem Gymnasium genehmigt, wird zu weiterer Veranlassung mitgetheilt.

4. Den 20. Mai 1874. Die diesmaligen Sommerferien sind mit Rücksicht auf die Abiturienten-Prüfungen des Michaelis-Termins auf den Zeitraum vom 5. Juli bis 2. August zu legen.

5. Den 6. Juni 1874. Abschriftliche Mittheilung des Ministerial-Erlasses vom 28. Mai 1874, welcher zur Anschaffung für die Lehrer-Bibliotheken empfiehlt: a. Heroen- und Göttergestalten der griechischen Kunst, erläutert von Al. Conze, Wien 1874, 1. Abtheilung, 51 Tafeln, 4 Thlr.; — b) Denkmäler der Baukunst, herausgegeben von Studirenden der Königl. Bau-Akademie zu Berlin; Berlin, Beelitz, 8 Lieferungen, à 25 Sgr.

6. Den 6. Juni 1874. Nachdem die höheren Bürgerschulen der Provinz Schlesien in das Ressort des Provinzial-Schul-Collegiums übergegangen und dem Programme-Austausch-Verbande beizutreten verpflichtet sind, sind 360 Exemplare der an den Anstalten erscheinenden Programme nach Breslau einzusenden.

7. Den 23. Juni 1874. Betreffend die Theilnahme an dem im Oktober 1874 beginnenden Cursus der Central-Turnanstalt zu Berlin für Civil-Eleven.

8. Den 30. Juni 1874. Abschrift der Verfügung an die Herren Kreis-Physiker, von Zeit zu Zeit die höhere Lehranstalt an dem Orte ihres amtlichen Wohnsitzes einer auf die Salubrität der Anlage nach allen Richtungen hin (gesunde Luft und Licht, Trockenheit und Reinlichkeit, Cloakenwesen 2c.) gerichteten Besichtigung, unter Zuziehung des Dirigenten der Anstalt, zu unterziehen, und über den Befund und etwaige Verbesserungs-Vorschläge Bericht zu erstatten.

9. Den 4. Juli 1874. Zufolge Ministerial-Rescripts vom 20. Juni 1874 wird auf das von dem Wirklichen Geheimen-Rath Grafen v. Stillfried zum Besten des Augusta-Hospitals in Berlin herausgegebene Werk: „Friedrich Wilhelm III. und seine Söhne König Friedrich Wilhelm IV. und Kaiser und König Wilhelm, drei Lebens-Scizzen nebst einer Stammtafel und vier Kunst-Beilagen“ aufmerksam gemacht. Bei Bestellungen für Schulen, welche direct an die Verlagshandlung von Al. Duncker in Berlin gerichtet werden, tritt eine Berechnung unter dem Ladenpreise mit 1½ Thlr. für das Exemplar ein.

10. Den 24. September 1874. Von der Nähmaschinenfabrik Leipziger-Straße Nr. 112 in Berlin ist das Anerbieten gemacht, den Lehrern der höheren Lehranstalten Nähmaschinen zum Preise von 30 Thlr. zu liefern, wenn derselben die Bestellungen gesammelt zugehen. Jede Maschine wird von einem Abnahme-Attest des Technikers des Kaiserlichen Generalpostamts, für dessen Beamten bereits 5000 solcher Maschinen geliefert worden sind, begleitet sein.

11. Den 26. September 1874. Außerordentliche Schulacte und Schulfeste, mögen sie auf den engeren Kreis der Schule beschränkt bleiben, oder unter Betheiligung des Publikums und öffentlicher Aufforderung zur Theilnahme vor sich gehen sollen, dürfen nicht eher eingeleitet werden, bis die Zustimmung des Provinzial-Schul-Collegiums durch Angabe des Zweckes und des beabsichtigten Programm's nachgesucht und auch erlangt ist.

12. Den 5. October 1874. Es wird ein Fragebogen communicirt, um eine Gleichmäßigkeit bei Behandlung der die Salubrität in den Schulen betreffenden Berichte herbeizuführen.

13. Den 12. October 1874. Eine Dispensation vom Griechischen darf nur an den Gymnasien der Städte stattfinden, in welchen keine Real- oder höhere Bürgerschule vorhanden ist.

14. Den 16. October 1874. Die Vorschläge, betreffend die Beibehaltung der Real-Tertia bis Ostern 1875, und der bezügliche Stundenplan für das Winterhalbjahr 1874/75 werden genehmigt.

15. Den 19. October 1874.*) Das Ueberhandnehmen des Wirthshausverkehrs der Schüler und das mehrfach constatirte Bestehen von Schülerverbindungen nöthigt uns, dem

*) Die wichtige Verfügung wird wörtlich mitgetheilt, damit die Angehörigen der Schüler und Freunde der Anstalt das Lehrer-Collegium in dem Bestreben, den Uebelstand völlig zu beseitigen, unterstützen, und die Inhaber öffentlicher Locale erfahren, daß die etwaige Verabreichung von Getränken an Schüler für letztere die strengste Bestrafung nach sich ziehen wird.

hierin liegenden schweren Uebelstande unsere ganz besondere Aufmerksamkeit zuzuwenden und hierdurch Folgendes anzuordnen, resp. in Erinnerung zu bringen:

1) Der Besuch von öffentlichen Gasthäusern, Restaurationen, Conditoreien und Schankwirthschaften ist Schülern, sofern dieselben sich nicht in Begleitung erwachsener Angehöriger oder eines Lehrers befinden, streng untersagt.

2) Ebenso ist Schülern die Theilnahme an Verbindungen irgend welcher Art ernstlich verboten.

3) Zuwiderverhandlungen gegen das Verbot ad 1 werden je nach der Schwere der Verfehlung geahndet; ein Zuwiderhandeln gegen das Verbot ad 2 aber wird in jedem Falle mit Verweisung von der Anstalt bestraft.

4) Diese Vorschriften finden namentlich auch auf die vielfach üblichen Abiturienten-Commerse Anwendung, und es werden, um insonderheit auch die Abiturienten für die vor ihrer Entlassung begangenen Contraventionen haftbar zu machen, die Abgangs-Zeugnisse ihnen in der Regel erst acht Tage nach der Entlassung ausgehändigt. Sollte bis zu derselben, oder am Tage der Entlassung selbst, ein derartiger Contraventionsfall vorgekommen sein, so haben die Abiturienten nach Umständen Verweisung von der Anstalt und Entziehung des Prüfungs-Zeugnisses zu gewärtigen.

5) Den vorstehenden Anordnungen entsprechende Bestimmungen sind in die Schulgesetze aufzunehmen, und es ist dafür zu sorgen, daß von denselben auch die Eltern, resp. Vormünder der Schüler in geeigneter Weise Kenntniß erhalten.

6) Die Durchführung dieser Anordnungen haben sich die Directoren in jeder Weise angelegen sein zu lassen, und es ist, soweit erforderlich, zur Entdeckung etwa bestehender Verbindungen, Aufhebung von Trinkgelagen und Herbeiführung der Bestrafung der betreffenden Gastwirthe ꝛc. unverzüglich die Mithülfe der Orts-Polizei in Anspruch zu nehmen.

16. Den 21. October 1874. Hinsichtlich der Ertheilung von Unterrichtsstunden an anderen Anstalten, sowie der Uebernahme von Nebenämtern außerhalb der Schule hat neben der Circular-Verfügung vom 14. Mai 1868 die Allerhöchsten Orts auch auf Lehrer an öffentlichen Schulen übertragene Circular-Verfügung vom 31. October 1841 noch Gültigkeit. Wegen des den Patronen und Gemeinden zustehenden Rechts sind dieselben daher in jedem das Lehrer-Collegium der Anstalt betreffenden Falle dieser Art vorher zu hören und deren Erklärung dem Provinzial-Schul-Collegium mit einzusenden.

17. Den 27. October 1874. Die von der Redaction des deutschen Reichs- und Königlichen Preußischen Staatsanzeigers herausgegebenen Zeitschrift für die gesammten Kultur-Interessen des deutschen Vaterlandes hat die Allerhöchste Anerkennung Sr. Maj. des Kaisers und Königs gefunden. Demgemäß wird ein Heft gedachter Zeitschrift mit dem Anheimstellen übersendet, deren Anschaffung für die Bibliothek nach Maßgabe der Mittel zu bewirken. Der Preis eines Jahrganges beläuft sich auf 4 Thlr.

18. Den 30. October 1875. Betreffend Form der zu erstattenden Berichte und Anzeigen.

19. Den 5. November 1874. Franz Lachner's „Macte Imperator," Op. 165, Schleusingen, Verlag von Gläser, wird als geeignet zu Aufführungen an patriotischen Festen empfohlen.

20. Den 6. November 1874. Abschrift eines Ministerial-Rescripts vom 29. October 1874, welches die Circular-Verfügung vom 28. October 1871 (die Zulassung zur Portepee-fähnrichs-Prüfung erfordert Beibringung eines Zeugnisses der Reife für Prima) durch die Bestimmung ergänzt, daß den früheren Schülern eines Gymnasiums oder einer Realschule I. Ordnung die Darlegung der Reife für die Prima nur nach Ablauf derjenigen Zeit zu gestatten ist, welche sie auf der Schule zu diesem Zweck gebraucht haben würden.

21. Den 13. November 1874. Ein Auszug aus dem Protokoll der 36. Sitzung des deutschen Bundesraths vom 16. October d. J., die Formulare zum Impfgesetz betreffend, nebst den Anlagen der Drucksachen des Bundesraths Nr. 118, wird abschriftlich mitgetheilt.

22. Den 26. November 1874. Vom nächsten Jahre ab sind 362 Exemplare der an der Anstalt erscheinenden Programme nach Breslau einzusenden.

23. Den 2. December 1874. Die Directoren werden veranlaßt, die Veröffentlichung der in den Schulbibliotheken etwa vorhandenen alten Handschriften und seltenen alten Drucke nach Anleitung des abschriftlich mitgetheilten Ministerial-Rescripts vom 20. November d. J. in dem nächsten Schulprogramme zu bewirken.

24. Den 3. December 1874. Die Uebersicht der Lehrer und der Stundenvertheilung ist den jährlich erscheinenden Schulprogrammen jedesmal auf dem letzten Blatte abdrucken zu lassen.

25. eodem. Der Abdruck des Statuts der „Charlotten-Stiftung" für Philologie und der diesjährigen Preisaufgaben wird zur Mittheilung an die sämmtlichen Lehrer übersendet.

26. Den 5. December 1874. Die diesjährigen Weihnachtsferien an den höheren Schulen der Provinz sollen am 23. d. M. beginnen und 14 Tage dauern, so daß der Unterricht den 6. Januar fut. wieder beginnt.

27. Den 12. December 1874. Der Gebrauch des Lehrbuches der Religion von Dr. Martin und der 7. Auflage des Leitfadens von Dubelmann wird fernerhin nicht mehr zugelassen.

28. Den 22. December 1874. Von Schulprogrammen, in denen ein Gegenstand der vaterländischen Geschichte behandelt wird, ist dem Curatorium des Reichs- und Staats-Anzeigers in Berlin 1 Exemplar zuzusenden.

29. eodem. Der gegenwärtige Lehrplan der mit den höheren Lehr-Anstalten verbundenen Vorschule ist einzureichen.

30. Den 24. December 1874. Mit Genehmigung des Herrn Ministers sind für die im Juni 1876 abzuhaltenden 4. Versammlung der Schlesischen Directoren folgende Themata festgestellt:

1) Zur schriftlichen Berichterstattung:
   a. Vereinfachung der Abiturienten-Prüfung, der schriftlichen und mündlichen;
   b. Regelung des Disciplinar-Verfahrens gegen Schüler;
   c. Wie kann der Unterricht der Realschulen I. Ordnung centralisirt werden?
2) Zur mündlichen Relation:
   a. Gleichmäßige Gestaltung des Censurwesens in den höheren Schulen der Provinz;
   b. In welcher Weise kann die Schule ihre pflichtmäßige Sorge für die Gesundheit der Schüler bethätigen?
   c. Aufstellung allgemein gültiger Schulgesetze für die höheren Schulen der Provinz.

31. Den 29. December 1874. Die Ferien für das Jahr 1875 sind folgendermaßen festgesetzt: Osterferien: Schluß Mittwoch den 24. März, Wiederbeginn Donnerstag den 8. April. Pfingstferien: Schluß Sonnabend den 15. Mai, Schulanfang Donnerstag den 20. Mai. Große Ferien: I. Für diejenigen Anstalten, welche Sommer- und Michaelisferien halten, beginnen die Sommerferien Sonntag den 11. Juli und dauern bis Sonntag den 8. August; die Michaelisferien beginnen Donnerstag den 30. September, so daß am Donnerstage den 14. October der Unterricht wieder eröffnet wird. — II. Für diejenigen Anstalten, welche das Schuljahr im Herbste anfangen, beginnen die Ferien Sonnabend Mittag den 14. August, und wird das neue Schuljahr eröffnet Montag den 27. September. Weihnachtsferien: Schulschluß Mittwoch den 22. December, Schulanfang Donnerstag den 6. Januar.

32. Den 6. Januar 1875. Der Ministerial-Erlaß vom 28. December 1874 bestimmt, daß bei Anstellung derjenigen Religionslehrer, welche nicht aushülfsweise einige Stunden

übernehmen und dafür remunerirt werden, sondern mit der vollen Stundenzahl und dem Gehalte eines ordentlichen Lehrers in das Lehrer-Collegium einer höheren Schule eintreten, ohne Unterschied der Confession, sowohl hinsichtlich der Anforderungen an ihre Qualification, wie hinsichtlich des ihnen zu gewährenden Gehaltes und Ranges nicht anders verfahren werden soll, als bei den übrigen wissenschaftlichen Lehrern. Demgemäß finden in Betreff der Qualification die in dem Reglement vom 12. December 1866 enthaltenen Bestimmungen über die evangelischen Candidaten auf die katholischen analoge Anwendung. Die zur Zeit bereits fest angestellten Religionslehrer sind übrigens, sofern sie den Unterricht in der Religion und im Hebräischen bis einschließlich Prima zu ertheilen sich befähigt erwiesen haben, von der Ascension innerhalb der ordentlichen und der Oberlehrerstellen nicht ausgeschlossen.

33. Den 19. Januar 1875. Der jetzige Besitzer des Bades zu Cudova in der Grafschaft Glatz, Rentier A. Phiebig zu Berlin, hat sich erboten, den Elementarlehrern, sowie den Candidaten des Lehramts und der Theologie bei dem Besuche des Bades vom laufenden Jahre ab, freie Badekur in der Zeit vom 15. Mai bis zum 15. Juni und vom 15. August bis Ende September zu gewähren, beziehungsweise denselben die Kosten für die Bäder und für das Trinken des Mineralwassers, sowie die Kurtaxe zu erlassen. Die Meldung ist an die Bade-Direction zu Cudowa zu richten und die Betreffenden haben sich zu ihrer Legitimation mit einem Ausweis ihrer Dienstbehörde zu versehen.

34. Den 26. Januar 1875. Der Professor Dr. Forchhammer zu Kiel hat sich bereit erklärt, neue Abzüge von seiner Karte der Gegend um Troja veranstalten zu lassen, um sie den noch nicht damit bedachten Gymnasien mitzutheilen.

35. Den 30. Januar 1875. Ein Tableau über die periodisch wiederkehrenden Berichtserstattungen wird communicirt.

36. Den 9. Februar 1875. Die Circular-Verfügung vom 30. October v. J., betreffend die bei Berichtserstattungen zu befolgenden Vorschriften, ist auch zur Kenntniß der Mitglieder der Anstalts-Kassen-Verwaltung zu bringen.

37. Den 11. Februar 1875. Das Gutachten der Königlichen wissenschaftlichen Prüfungs-Commission über die zu Michaeli v. J. abgehaltene Abiturienten-Prüfung wird abschriftlich mitgetheilt.

38. Den 16. Februar 1875. Unter abschriftlicher Mittheilung des Ministerial-Rescripts vom 2. Februar 1875 werden Tabellen über die Farbe der Augen, der Haare und der Haut sämmtlicher Schüler behufs einer genauen ethnologischen Erforschung der gegenwärtigen Bevölkerung Deutschlands eingefordert.

39. Den 24. Februar 1875. Die Statuten der Lehrer-Wittwen- und Waisen-Stiftung des hiesigen Gymnasiums sind einzureichen, da sie der Bestätigung der Königlichen Ministerien des Innern und der geistlichen, Unterrichts- und Medicinal-Angelegenheiten bedürfen.

40. Den 27. Februar 1875. Von Rawicz aus sind Aufforderungen zur Theilnahme an einer in Magdeburg zu druckenden und ebendaselbst zu leitenden Schülerzeitung „Freya" ergangen. Den Schülern wird jede Betheiligung an derselben, ebenso wie an der früher erschienenen „Walhalla" (cfr. Verfügungen vom 12. Juni und 15. Juli 1873), untersagt, und soll ein Zuwiderhandeln angemessen bestraft werden.

III. Chronik des Gymnasiums.

Das Schuljahr begann am 13. April in vorschriftsmäßiger Weise mit der Erläuterung der Schulgesetze, die sich an die Morgenandacht anschloß.

Am 13. Juni wurden an Stelle des früher üblichen gemeinsamen Sommer-Schulfestes Spaziergänge der einzelnen Klassen unter Leitung ihrer Ordinarien in die Umgebung veranstaltet. Die beiden oberen Klassen unternahmen gleichzeitig in Begleitung einiger Lehrer eine Turnfahrt auf den Gröditzberg.

Am 25. August fand unter Vorsitz des Königlichen Commissarius, Herrn Provinzial-Schulrath Dr. Sommerbrodt, die zwanzigste Maturitäts-Prüfung an dem Gymnasium statt. Der mündlichen Prüfung hatte sich nur ein Abiturient unterzogen, welcher das Zeugniß der Reife erlangte. (cfr. das nachfolgende Verzeichniß Nr. 76).

Am 2. September feierte die Anstalt das Nationalfest des Sedantages durch öffentlichen Schulactus, bei welchem der Prorector die Festrede hielt. Zu der Betheiligung an dem Nachmittags auf dem Schießplane veranstalteten allgemeinen Volksfeste hatten die städtischen Behörden in liberaler Weise Geldmittel bewilligt und dem Gymnasium einen besonderen Platz für Turnübungen und Spiele eingeräumt.

Am 24. September starb der Quartaner Adolf Gründel, Sohn des Stations-Assistenten Herrn Gründel, nach mehrtägigen schmerzlichen Leiden. Der hoffnungsvolle und wohlgesittete Schüler gehörte erst seit wenigen Monaten der Anstalt an, hatte sich aber bereits durch Fleiß und Eifer das Wohlwollen und die Theilnahme seiner Lehrer erworben.

Am 25. September fand die gemeinsame Feier des heiligen Abendmahls statt.

Am 26. September wurde das Sommer-Semester mit der Abiturienten-Entlassung und Censur geschlossen. Mit diesem Tage schied Herr Dr. van der Velde aus dem Lehrer-Collegium, um einer Berufung an die neu organisirte Gewerbeschule zu Görlitz Folge zu leisten. Seit Ostern 1870 an der hiesigen Anstalt wirkend hat er sich durch den Eifer und das Geschick seiner Lehrthätigkeit um die Förderung der Schüler anerkennenswerthe Verdienste erworben und sich durch Wohlwollen und Gefälligkeit ein dauerndes Andenken im Kreise der Schule gesichert.

Am 10. November überreichte der Berichterstatter dem Ober-Primaner Drath vor dem versammelten Schüler-Coetus die Bücher-Prämie aus dem Schiller-Legat. (Vilmar's Literaturgeschichte. 16. Auflage.)

Am 18. Januar empfing gemäß § 3 des Statuts*) aus der Kaiser-Wilhelm-Stiftung des Gymnasiums der Secundaner Haase eine Unterstützung im Betrage von 36 Mark. — Das zur Feier dieses Tages bestimmte Concert konnte wegen localer Hindernisse erst am 25. Januar gegeben werden. Unter Leitung seines Gesanglehrers und unterstützt durch gütige Mitwirkung einiger geehrten Dilettanten brachte der Gymnasial-Sängerchor das Oratorium „Des Lebens Kampf und Friede", ged. von R. Jacobs und comp. von M. F. Kähler, mit Instrumental-Begleitung vor einem zwar nicht zahlreichen, aber gewählten Publikum zur Aufführung. Aus der Einnahme ergab sich für die Stiftung ein Reinertrag von 52 Mark 75 Pfennigen.

Am 5. Februar wurde unter Vorsitz des Königl. Commissarius, Herrn Provinzial-Schulrath Dr. Sommerbrodt, die 21. Maturitäts-Prüfung am Gymnasium abgehalten. Sämmtliche 7 Examinanden erhielten das Zeugniß der Reife (cfr. das nachfolgende Verzeichniß Nr. 77—83). Die beiden Abiturienten Göbel und Drath waren von der mündlichen Prüfung dispensirt worden.

27 evangelischen Zöglingen ertheilte von Weihnachten bis Ostern Herr Pastor prim. Kretschmar 2 mal wöchentlich besonderen Confirmanden-Unterricht. Ihre Prüfung und feierliche Confirmation wird nebst gemeinsamer Feier des heiligen Abendmahls am 18. März statt finden.

---

*) Der betreffende § lautet: Empfänger darf nur ein Schüler der Anstalt sein, welcher seine Abstammung (resp. directe Verwandtschaft) von einem Theilnehmer an dem Nationalkriege von 1870—71 nachzuweisen vermag. Unter mehreren qualificirten Bewerbern ist neben der Würdigkeit besonders die Bedürftigkeit zu berücksichtigen.

Verzeichniß der Abiturienten.

Lauf. Nr.	Name des Abiturienten.	Geburts-Ort.	Alter. Jahre.	Confession.	Stand des Vaters.	Dauer des Aufenthalts auf dem Gymnasium.	Dauer des Aufenthalts in Prima.	Studium oder Beruf.	Universität.
76.	Carl Förster	Wiesenthal bei Lähn	19¾	evgl.	Pastor in Tillendorf	10½	2	Theologie	Breslau
77.	Adolf Birner	Ober-Mednitz bei Sagan	21 11/12	"	Hofbesitzer †	¾	2½	"	Berlin
78.	Ludwig Drath	Münsterberg	18¼	"	Seminarlehrer	4	2	Militair	
79.	Ernst Falkenthal	Breslau	16⅚	"	Kaufmann	½	2½	Jura	Heidelberg
80.	Oskar Geith	Nieder-Adelsdorf	19⅓	"	Rendant	4	2	Philologie	Halle
81.	Felix Göbel	Bunzlau	18⅓	"	Kreis-G.-Rath	10	2½	Jura	Leipzig
82.	Martin Klein	"	21⅓	"	Pastor in Friedland.	2½	2	Theologie	Breslau
83.	Otto Schiemang	Lüben.	18⅙	"	Theater-Director	4	2	Jura	Leipzig

IV. Statistische Nachrichten.

A. Frequenz.

Das Schuljahr 1873/74 schloß mit einer Frequenz von 210 Schülern (excl. der Vorbereitungsklasse) ab. In dem Schuljahre 1874/75 betrug der Zugang 51, der Abgang 52. Die Zahl der Schüler hat sich daher um 1 vermindert und beträgt gegenwärtig 209. — Die nachfolgende Tabelle giebt die Vertheilung der Schüler nach Klassen, Confession und Wohnort an.

Klasse.	Schüler. Evangelische.	Katholische.	Jüdische.	Einheimische.	Auswärtige.	Summa der Klasse.	Frequenz der Klassen-Systeme.	Gesammtzahl.
Gymnasial-Prima .	23	2	—	11	14	25		
" Secunda	25	2	—	9	18	27		
" Tertia .	32	2	2	21	15	36	Gymnasial-Klassen.	
" Quarta .	30	2	1	23	10	33		
" Quinta .	38	3	1	24	18	42		
" Sexta. .	19	8	—	20	7	27		
							190	
Real-Secunda . .	9	—	—	5	4	9	Real-Klassen.	
" Tertia . . .	10	—	—	3	7	10	19	.
Summa	186	19	4	116	93			209
Dazu Vorber.-Klasse	29	1	2	29	3	32	32	32
Gesammtsumme	215	20	6	145	96			241

B. Vermehrung der Lehrmittel und Sammlungen.

An Geschenken für die Bibliotheken gingen ein:

Von dem Königl. Kultusministerium: 156 Programme.

Von dem Königl. Provinzial-Schul-Collegium zu Breslau: 330 Programme.

Von der Oberlausitzischen Gesellsch. d. Wissensch.: Neues Lausitzisches Magazin, Band 50, Heft 2, Band 51.

Von der schlesischen Gesellschaft für vaterl. Cultur: 51. Jahresbericht und Abhandlungen von 1873—74.

Von Herrn Director Dr. Bonitz: Festschrift zur dritten Säcularfeier des Berlinischen Gymnasiums zum grauen Kloster.

Von Herrn Dr. med. Müller: Lappenberg und Pauli, Geschichte Englands; Schmidt, Gesch. Frankreichs; Schellenberg, Freund Heins Erscheinungen.

Von Herrn Instituts-Vorsteher Matthäi: Rosenkranz, Geschichte der deutschen Poesie im Mittelalter.

Von den Verlagsbuchhandlungen: Lax in Hildesheim: Heskamp, lat. Vocabularium; Teubner in Leipzig: Wesener, griech. Elementarbuch; Koch, griech. Gramm.; Boselli in Frankfurt: Hübner, statistische Tafel; Bädecker in Essen: Spieß, Uebungsbücher zum Uebersetzen aus dem Deutschen in das Lateinische (2 Expl.).

Von Schülern des Gymnasiums: Vom Abitur. Klinge: Arrian, ed. Hartmann. — v Schöning, bair. Erbfolgekrieg.

Für die bibl. pauperum: Abitur. Hollstein 4, Krause 5, Förster 4, Secundaner Järschky 2, Munczki 2, Kranzfelder 2 Bücher.

Für diese Geschenke wird hiermit Namens des Gymnasiums der gebührende Dank abgestattet.

Angeschafft wurden für die Lehrerbibliothek folgende Werke (Fortsetzungen werden nicht erwähnt):

Theologie: Winer, neutestamentl. Grammatik. — Bengel, Gnomon.

Philosophie: Hartmann, Philosophie des Unbewußten.

Lateinische Sprache und Literatur: Vanicek, etymol. Wörterbuch der lateinischen Sprache. — Cicero, epist. selectae von Süpfle. — Horaz, ed. Dillenburger. — Horaz, Oden und Episteln, übersetzt von O. Frh. v. Nordenflycht. — Virgil's Aeneis, herausgegeben von Kappes.

Griechische Sprache und Literatur: Aristoteles Poetik von Susemihl. — Düntzer, die homerischen Fragen.

Deutsche Sprache und Literatur: Cholevius, Erläuterungen zu Herrmann und Dorothea.

Geschichte und Antiquitäten: Overbeck, Pompeji. — v. Hellwald, Culturgeschichte. — Wachsmuth, Grundriß der allgem. Geschichte. — Holtzmann, germanische Mythologie. — Wolfgang Menzel, Gesch. der Deutschen. — Gervinus, Gesch. des 19. Jahrh. — Oscar Jäger, neuste Geschichte von 1815—1871.

Mathematik: Euclidis elementa graece edita. ab E. F. August.

Die Lehrerbibliothek enthält jetzt 1021 Werke.

Von Musikalien wurden angeschafft: Macte Imperator von Lachner; — Kähler, des Lebens Kampf und Friede.

Für das Naturalien-Kabinet gingen Geschenke ein: Von Gönnern der Anstalt: Von Herrn Partikulier Kunzendorf 1 Haliaëtus albicilla; von Herrn Apotheker Kubale in Klitschdorf 1 Ardea cinerea.

Für das chemische Laboratorium wurden angeschafft: Die für die Lehrversuche nothwendigen Präparate und Glasgefäße.

C. Stiftungen.

Die 4 von dem Gymnasium ausgegangenen Stiftungen ergaben beim Schluß des Schuljahres die nachfolgenden Kapitalbestände:

a. Das Schillerlegat: 536 Mark 53 Pfennige.
b. Die Stipendienstiftung: 1759 Mark 93 Pfennige.
c. Die Wittwen- und Waisenstiftung: 2234 Mark 22 Pf.
d. Die Kaiser-Wilhelm-Stiftung: 1078 Mark 57 Pf.

Gesammtbetrag des Stiftungs-Vermögens 5609 Mark 25 Pf., mithin gegen das Vorjahr eine Erhöhung von 711 Mark 42 Pf.

Der Stiftung sub d sind im Laufe des Schuljahres an Geldbeiträgen zugegangen von den Herren: Kreisgerichts-Rath Franzki in Löwenberg 3 M.; Hallig 1 M. 50 Pf.; Schichtmeister Laske in Brzenskowitz 6 M.; Bürgermeister Stahn 3 M.; Ungenannt 6 M.; von einer patriotischen Gesellschaft 29 M. 21 Pf.; durch Schüler-Sammlungen 82 M. 5 Pf. (und zwar aus Prima 23,12 — aus Secunda 13,75 — aus Tertia 16,23 — aus Quarta 14 — aus den anderen Klassen 14,95 — Summa 82,5.).

Für diese den patriotischen Zweck der Stiftung fördernde Gaben wird hiermit der gebührende Dank ausgesprochen.

V. Programm des Fest-Actus, der am 22. März, Vormittags 10 Uhr, in der Aula zur Feier des Geburtstages Sr. Majestät des Kaisers und Königs abgehalten werden wird.

1. **Choral** gemeinsam, mit Posaunenbegleitung:

1. Lobe den Herren, den mächtigen König der Ehren!
Meine geliebete Seele, das ist mein Begehren.
Kommet zu Hauf'!
Psalter und Harfe, wacht auf!
Lasset den Lobgesang hören!

2. Lobe den Herren, der Alles so herrlich regieret,
Der Dich auf Adelers Fittigen sicher geführet,
Der Dich erhält,
Wie es Dir selber gefällt;
Hast Du nicht dieses verspüret?

2. **Declamationen:**
   a. Tertianer Eugen von Waldheim: „Des Rheinstroms Gruß“ von Rückert.
   b. Tertianer Gustav Ryssel: „Blüchers Marsch nach Waterloo“ von Scherenberg.
3. **Chorgesang** mit Orchesterbegleitung: Macte Imperator, comp. v. Lachner.
4. **Festrede** des Herrn Dr. Lilie.
5. **Nationallied** gemeinsam, mit Posaunenbegleitung:

1. Heil Dir im Siegerkranz,
Herrscher des Vaterlands,
Heil, Kaiser Dir!
Fühl' in des Thrones Glanz
Die hohe Wonne ganz,
Liebling des Volks zu sein!
Heil, Kaiser Dir!

2. Heilige Flamme, glüh!
Glüh' und erlösche nie
Für's Vaterland!
Wir Alle stehen dann
Muthig für einen Mann,
Kämpfen und bluten gern
Für Thron und Reich!

3. Sei, Kaiser Wilhelm, hier
Lang' Deines Volkes Zier,
Der Menschheit Stolz!
Fühl' in des Thrones Glanz
Die hohe Wonne ganz,
Liebling des Volks zu sein!
Heil, Kaiser Dir!

VI. Ordnung der öffentlichen Prüfung und der Declamations- und Rede-Uebungen.

Dienstag, den 23. März.

Vormittags von 8 Uhr ab:

Choral: Nr. 141 v. 1 und 2. Chorgesang: Te Deum laudamus vom Sängerchore.

$8^1/_4 - ^3/_4$. **Vorbereitungsklasse.** Religion, Sprach-Denkübungen, } Engmann.

Declamationen der Septimaner:
1. Tschierschke und Schüller: „Die Räthselkette."
2. Breyer: „Die Schlittenfahrt."

$8^3/_4 - 9^1/_2$. **Sexta.** Latein. Dr. Rhode.
Geographie. Dr. Adler.

Declamationen der Sextaner:
1. Kummer: „Der Mops."
2. Schmieder: „Kutschke's Einzugsgruß an Paris."

$9^1/_2 - 10^1/_4$. **Quinta.** Latein. Hering.
Rechnen. Schwartz.

Declamationen der Quintaner:
1. Erich Göbel: „Der Maler" von Gellert.
2. Oskar Küttner: „Der alte Fritz und der Schneider" von Rückert.

$10^1/_4 - 11$. **Quarta.** Griechisch. Dr. Schmidt II.
Französisch. Hering.

Declamationen der Quartaner:
1. Oswald Knoll: „Der Reiter und der Bodensee" von Schwab.
2. Oscar Höfig: „Michel unter den Räubern" von Simrock.

11—12. Die **Realklassen.**
a. **Tertia.** Mathematik. Dr. Adler.
b. **Secunda.** Französisch. Prorector Fährmann.

Declamationen und Vorträge der Realschüler:
1. Tertianer Weiß: The Savoyard's return by Kirke White.
2. Secundaner Bethke: La Russie avant Pierre le grand. (Eigene Arbeit.)

Nachmittags von 2 Uhr ab:

$2 - 2^3/_4$. **Tertia.** Latein. Dr. Lilie.
Geschichte. Dr. Schmidt II.

Declamationen der Tertianer:
1. Hugo Brixy: „Des Sängers Fluch" von Uhland.
2. Gotthardt Baier: „Rückkehr in die Heimath" von Hölderlin.

$2^3/_4 - 3^1/_2$. **Secunda.** Latein. Oberlehrer Luchterhand.
Griechisch. Dr. Rhode.

Vorträge der Secundaner:
1. Franzky: Hom. Odyss. II., 35—79.
2. v. Stöltzer: „Ueber den Schmerz der Trennung von der Heimath."

$3^1/_2$—$4^1/_4$. **Prima.** Tacitus. Oberlehrer Dr. Schmidt I.
Mathematik. Oberlehrer Gauß.

Reden der Primaner:

1. Bethke: „Nil mortalibus arduum est.“ (Hor. carm. I. 3. 37.)
2. König: „Causes et effets des croisades.“ (Eigene Arbeit.)

Die Prüfungen werden im Zeichensaale abgehalten. — Zeichnungen und Probeschriften der Schüler liegen während der Prüfung zur Ansicht aus.

VII. Ordnung des öffentlichen Valedictions-Actus und der Abiturienten-Entlassung.

Mittwoch, den 24. März, Vormittags 9 Uhr, in der Aula.

1. **Choral,** gemeinsam: Nr. 131 des Schulgesangbuches, Vers 1 und 2.
2. **Valedictions-Reden:**
   a. Abschiedsrede des Abiturienten Göbel.
   b. Entgegnungsrede des Primaners Beninde.
3. Dazwischen **Abschiedslied:** „Nun Ade, du mein lieb Heimathland ꝛc.“
4. **Chor- und Sologesang:** Te Deum laudamus.
5. **Entlassung** der Abiturienten durch den Director.
6. **Schluß-Choral,** gemeinsam: Nr. 131 des Schulgesangbuches, Vers 7.

VIII. Bekanntmachung.

Das neue Schuljahr wird den 8. April beginnen. Die Prüfung und Aufnahme neu [illegible]tender Schüler erfolgt für Einheimische am 5., für Auswärtige am 6. April. Die Auf[illegible] in die Vorbereitungsklasse wird am 7. April, früh 8 Uhr, in dem Klassenzimmer der Sep[illegible]a stattfinden.

Bunzlau, den 20. März 1875.

Dr. Beisert.

Tabellarische Uebersicht über den gesammten Lehrbetrieb im Winter-Semester 1874/75.

Lehrer.	Stundenzahl in jeder Klasse. Prima.	Secunda.	Real-Secunda.	Tertia.	Real-Tertia.	Quarta.	Quinta.	Sexta.	Vorber.-Klasse.	Summa.
Director Dr. Beisert, Ordin. in I.	Religion 2 Latein 5					Latein 10				17
Prorector Fährmann, Ordinarius in R. II.	Deutsch 3 Französ. 2	Religion 2 Französ. 2	(Relig. 2) Deutsch 3 Latein 4 Französ. 4							20
Oberlehrer Gauß.	Mathem. 4 Physik 2	Mathem. 4 Physik 1		Mathem. 4 Naturk. 1		Mathem. 3				19
Oberlehr. Luchterhand, Ordin. in II.	Griechisch 6 Hebräisch 2	Deutsch 2 Latein 8 Hebräisch 2								20
Oberl. Dr. Schmidt I, Prem.-Lieuten. u. Ritter des eisernen Kreuzes.	Latein 3 (Englisch facultativ 2)		Englisch 4	Religion 2 Französ. 2	(Relig. 2) Französ. 4 Englisch 4					19 (2)
Dr. Rhode, Bibliothekar.	Geschichte 3	Griechisch 6 Geschichte 3		(Englisch facultat. 2)				Latein 10		22 (2)
Dr. Lilie, Ordin. in III.		Latein 2		Deutsch 2 Latein 10 Griechisch 6	(Deutsch 2) Latein 2					22
Dr. Adler, Ordin. in R. III.			Mathem. 5 Naturk. 5		Mathem. 6 Naturk. 2		Naturg. 2	Geogr. 3 (Naturg. 2)		23
Hering, Ordin. in V.			Gesch. u. Geogr. 4			Französ. 2	Religion 3 Deutsch 2 Latein 10 Französ. 3			24
Dr. Schmidt II, Ordin. in IV.				Geschichte 3	Latein 3 Gesch. u. Geogr. 4	Religion 2 Deutsch 2 Griechisch 6 Geschichte 3				23
Schwartz, Ordin. in VI.			Zeichnen 2	Gesang 2	(Zeichn. 2) (Gesang 2)	Zeichnen 2 (Gesang 2)	Geogr. 2 Rechnen 4 (Zeichn. 2) Schreiben 2 Gesang 2	Religion 3 Deutsch 2 Rechnen 4 (Schreib. 2) (Gesang 2)		25 (2)
	(Chorgesang 2)									
Engmann, Ordin. in der Vorbereitungs-Klasse.								Zeichnen 2	Religion 4 Deutsch 11 Geogr. 2 Rechnen 5 Zeichnen 2	26
Pfarrer Krenz, kath. Religions-Lehrer.	(Religion 4)									(4)
Summa	32	32	31 (2)	32	25 (8)	30 (2)	30 (2)	24 (6)	24	260 (20) (10)

Unterrichts-Gegenstand.	Stundenzahl in jeder Klasse. I.	II.	Real-II.	III.	Real-III.	IV.	V.	VI.	VII.	Summa.
Religion (evang.)	2	2	(2)	2	(2)	2	3	3	4	18 (4)
" (kathol.)	—	—	—	—	—	—	—	—	—	4
Deutsch	3	2	3	2	(2)	2	2	2	11	27 (2)
Lateinisch	8	10	4	10	5	10	10	10	—	67
Griechisch	6	6	—	6	—	6	—	—	—	24
Französisch	2	2	4	2	4	2	3	—	—	19
Hebräisch	2	2	—	—	—	—	—	—	—	4
Englisch	Facult.	4	4	—	4	—	—	—	—	12
Geschichte	3	3	2	3	2	3	—	—	—	16
Geographie	—	—	2	—	2	—	2	3	2	11
Mathematik	4	4	5	4	4	3	—	—	—	24
Rechnen	—	—	—	—	2	—	4	4	5	15
Physik	2	1	3	—	—	—	—	—	—	6
Naturkunde	—	—	2	1	2	—	2	(2)	—	7 (2)
Zeichnen	—	—	2	—	(2)	2	(2)	2	2	8 (4)
Kalligraphie	—	—	—	—	—	—	2	(2)	—	2 (2)
Gesang	Chorgesang		2	2	(2)	(2)	2	(2)	—	6 (6)
Gymnast. Uebungen	im Winter-Semester vacat.									
Summa	32	32	33	32	33	32	32	30	24	270 (20)

Tabellarische Uebersicht über den gesammten Lehrbetrieb im Winter-Semester 1874/75.

Lehrer.	Stundenzahl in jeder Klasse.									Summa.
	Prima.	Secunda.	Real-Secunda.	Tertia.	Real-Tertia.	Quarta.	Quinta.	Sexta.	Vorber.-Klasse.	
Director Dr. Beisert, Ordin. in I.	Religion 2 Latein 5					Latein 10				17
[illegible]	[illegible]	[illegible]	[illegible]	[illegible]	[illegible]	[illegible]	[illegible]	[illegible]	[illegible]	[illegible]
[illegible] Ordin. in III.	[illegible]	[illegible]	[illegible]	[illegible] Griechisch 6	[illegible]	[illegible]	[illegible]	[illegible]	[illegible]	[illegible]
Dr. Adler, Ordin. in R. III.			Mathem. 5 Naturk. 5		Mathem. 6 Naturk. 2		Naturg. 2	Geogr. 3 (Naturg. 2)		23
Hering, Ordin. in V.			Gesch. u. Geogr. 4			Französ. 2	Religion 3 Deutsch 2 Latein 10 Französ. 3			24
Dr. Schmidt II., Ordin. in IV.				Geschichte 3	Latein 3 Gesch. u. Geogr. 4	Religion 2 Deutsch 2 Griechisch 6 Geschichte 3				23
Schwartz, Ordin. in VI.			Zeichnen 2	Gesang 2	(Zeichn. 2) (Gesang 2)	Zeichnen 2 (Gesang 2)	Geogr. 2 Rechnen 4 (Zeichn. 2) Schreiben 2 Gesang 2	Religion 3 Deutsch 2 Rechnen 4 (Schreib. 2) (Gesang 2)		25 (2)

(Chorgesang 2)