Die Schul-Algebra

als niederste Analysis.

Herrn Dr. Felix Klein,

o. ö. Professor der Universität Göttingen,

in Hochverehrung gewidmet

von

Aug. Moroff, k. Gymnasialprofessor.

Programm des k. alten Gymnasiums zu Bamberg
für das Schuljahr 1899/1900.

Bamberg 1900.
Druck von W. Gärtner's Buchdruckerei.

Nach dem Reindruck bemerkte Versehen.

Seite 12, Zeile 2 von unten: Für den Anfangssatz präziser „a ersetzt hier — b — c".

Seite 13, Zeile 7 von unten lies „eignet sich bei" statt „liefert".

Seite 16, Zeile 14 von oben sollte durchschossen sein.

Seite 16, Zeile 2 von unten lies „Fünfecks" statt „Fünftels".

Seite 21, Zeile 14 von oben lies „$-22\frac{1}{2}$" statt „$22\frac{1}{2}$".

Seite 23, Zeile 16 von unten lies „Nr. 8" statt „Nr. 18".

Seite 23, Zeile 2 von unten muß heißen:

$$(x-y)(3a+4b)\mp(5b-4a)(-y\mp x)\mp 2(x-y)(-4b\mp a).$$

Seite 26, Zeile 2 von unten lies „$35x$" statt „$5x$".

Seite 27, oberste Zeile, lies „x^3" statt „x^2" und „x^2" statt „x".

Seite 27, Zeile 18 von unten lies „der beiden" statt „derbeiden".

Seite 46, Zeile 8 von oben lies „Π" statt „$\triangle^2$".

Seite 50, Zeile 6 von unten lies „$\frac{a}{1-q}$" statt „$\frac{1-q}{a}$".

Vorrede, zugleich Einleitung.*)

Umstände haben dahin geführt, eine für eines der nächsten Jahre gemachte Zusage schon jetzt einzulösen. Die Erhebungen — geologische — für den anfangs in Aussicht genommenen Stoff sind aber noch nicht genügend gefördert. Daher mußte ein neues, das behandelte, Thema an die Stelle treten. Ein altes, resp. des Verfassers altes Lied ist es, mit neuer Aufschrift und neuem Text; beide hoffentlich so deutlich, daß die Absicht nicht mehr verkannt werden mag, wie es im früheren Falle geschehen sein will. Nebenbei soll noch die Probe gemacht werden, ob die Passivität der Kollegenschaft auch jetzt siegreich bleiben will, oder berechtigte Vorstellungen erheblicher Art nunmehr Gehör finden. Das Landshuter Programm pro 1883/84: „Die Algebra in natürlicher Herleitung", hat erstmals ohne schönen Willkommen zu finden angepocht. Auch die versuchte Erinnerung an dasselbe im Hofer Programm pro 1890: „Das Winkelfeld", ist anscheinend erfolglos geblieben. Dem Verfasser schien durch ungünstige Auffassung der Arbeit sogar Schaden zu drohen, bis eine Rezension Hoppe's in Grunert's Archiv die Situation bessern mochte. — Es erschien für das Landshuter Programm nur noch eine Rezension, soweit erinnerlich, im „Gymnasium" (Paderborn). Die Oberflächlichkeiten derselben zurückzuweisen gelang leicht. Seitdem ist es völlig still.

Schon lange ist man in allen Zweigen der Schulmathematik emsig daran, alte Zöpfe abzuschneiden, und immer bessere Methoden zu erfinden. Nur mit der Algebra will es nicht recht vorwärts gehen. Dadurch ist die Schulalgebra rückständig. An ihrer Reformbedürftigkeit wird dabei selten gezweifelt und die Mehrzahl der Fachleute wäre für Reformen

*) Die Disposition des Themas findet sich im vorletzten Absatz dieser Einleitung. Weitere Bemerkungen zu letzterer sind nach dem Schlußabsatz derselben, alle übrigen am Schluß der Arbeit zusammengestellt. Ohne gleichzeitige Berücksichtigung der Bemerkungen verlohnt es sich nicht, das Thema vorzunehmen.

zu haben. Daß es aber tief einschneidende sein müssen, glaubt man nicht. Gleicht ein Versuch einer völligen Umwälzung, so besinnt man sich gewöhnlich darauf, daß Vorsicht die Mutter der Weisheit ist, und merkt überhaupt nichts. Doch zum Thema!

Die Schulalgebra ist rückständig. Innerhalb der Gesamtmathematik beansprucht die Algebra Hand in Hand mit der schriftlichen Darstellung die Gesetze der allgemeinen Größenlehre abzuleiten und sich zum corpus juris der Mathematik auszubauen. Jedes benützte Schriftzeichen spiegelt an sich und durch seine Stellung unter den übrigen einen mathematischen Gedanken in aller Treue wieder. Wer den Sinn aller Zeichen eines Ausdrucks und ihrer gegenseitigen Stellung kennt, ist von dessen Bedeutung genau unterrichtet. Kann damit der Zweck der Schulalgebra ein anderer sein, als das Verständnis dafür zu wecken und das Idiom, welches die Wiedergabe der Gedanken in der Größenlehre beherrscht, durch Lesen-, Schreiben- und Deutenlassen der Ausdrücke zu lehren? (Genau so ist es, wenn ein Fremder das deutsche Idiom durch Lesen, Schreiben und Deuten der Bezeichnungen, welche wir zur Gedankendarstellung benützen, wirklich erlernt.) Nicht der rein äußerliche Überblick über eine Buchstaben- und Zeichenmosaik soll also erworben werden, nicht die bloße mechanische Fertigkeit im Rahmen gewisser Schemata diese Mosaik in hergebrachter Weise umzugestalten! Das Mittel mit dem Zweck, welcher immer die Hauptsache bleiben muß, verwechseln wäre solches Beginnen. — Jedes Zeichen also, auch das unscheinlichste, ja nur ein Anzeichen, hat seinen nicht ungestraft zu vernachlässigenden Sinn. Um bei einem Beispiel zu bleiben, fragen wir nach dem Sinn des Zeichens „=". Wie oft mag man sich da mit dem Standpunkt „gleich ist eben gleich" versündigen? Nun „=" ist das Zeichen für die gegenseitige Ersetzbarkeit der zwei vollständigen Ausdrücke, zwischen welchen es steht. Noch mehr, auf Grund des gerade der Mathematik wie angegossen sitzenden kategorischen Prinzips darf „=" so gut als der Befehl gelten, die Ersetzung vorzunehmen, wie für den Vollzug an einer vorausgegangenen Identität. Eine Bestimmungsgleichung soll man aber nie, ohne „E. s. s.", d. h. „Es soll sein" vorzusetzen, aus dem Übungsbuch schreiben. Unser niedliches Zeichen ist eine der wichtigsten Beihilfen der Algebra bei ihrer Tendenz, die anfängliche Kurrentschrift in eine vorzügliche Kurzschrift übergehen zu machen und dabei die Reihe der Gesetze weiter zu führen. — Die sogen. Vorzeichen der vier Spezies andererseits haben für die Schüler vom Rechnen her einen Sinn erlangt, welcher der Auffassung dieser Zeichen in der Mathematik nur unvollkommen entspricht. Hier ist eine Umprägung erforderlich. Schritt für Schritt gehen Ausprägung der Zeichen und Entwickelung der Gesetze neben einander her. Ein einziges schlichtes Stenographierezept, welches unten als Reduktionsregel R (r ist ein bloßer Vorläufer) angeführt wird, ist der Eckstein, auf dem sich die Gesamtheit der Gesetze der zweiten Rechenstufe aufbaut. Das nämliche Rezept fügt die Klammern, deren übliche Einführung stets etwas Gezwungenes hat, organisch in das System ein. In Wirklichkeit fließen die Klammern ja allerdings aus zwei Quellen. Die weitaus stärkere läßt sie als Umschließung von Aggregaten auftreten. Die andere liefert sie als Vorsichts-, als Sonderungszeichen und als Zeichen dafür, wie weit ein erkennbarer Bezug erstreckt werden soll. Diese Art Klammern, die klammerähnliche Umschließung, hindert aber niemals das Umschlossene als Aggregat anzusehen. Hinwiederum sind die echten Klammern dem Rezept R gemäß doch eben Zeichen dafür, wie weit ein bestimmter Bezug gelten soll. Sonach hat man auch das Recht, die Dyas der Klammerformen als Einheitliches aufzufassen. — Alle Gesetze der dritten Rechenstufe stützen sich auf ϱ. Während des Ausbaues der zweiten Stufe erscheinen Multiplizieren und Dividieren immer deutlicher als eng verwachsene Seiten dieser Stufe. Muß man da in der dritten Stufe nicht jeden Unterschied in der Geltung von Faktoren in Vielfachen- und Teilmengen beiseite lassen? Darf die geringfügige Verschiedenheit, etwa „statt des einzelnen Faktors sollen zwei solche gelten" und „statt zwei übereinstimmender Faktoren soll nur einer gelten", im Ernst zum Anlaß genommen werden, Potenzieren und Radizieren wie zwei grundverschiedene Rechnungsarten aus einander zu reißen? Nein! Auch die Thatsache des Auftauchens der neuen Zahlenarten „Irrationale, Imaginäre und Komplexe" beim Radizieren nötigt nicht dazu. Diese Zahlen werden so oder so gleich leicht verdaut. Die Zerreißung indessen bewirkt, daß fortan ein geheimnisvoller Schleier über dem wichtigen Zusammenhang wallt, welchen ein mäßig scharfes Schülerauge nimmermehr durchdringt. Wenn das Logarithmieren dennoch abseits stehen muß, so liegt das einzig an dem besonderen Algorithmus, welcher ersonnen ist, damit jeder vorliegende Faktor als „seinerseits gefügt speziell aus Faktoren 10" hingestellt werden kann. — Die zwei Rezepte R und ϱ bedingen die ganze Mannigfaltigkeit der Rechenformen und diese hinwiederum den immer breiter fließenden Strom der Gesetze. Dabei lassen sie aber den Strom vollständig überschauen! Nötig ist freilich, daß man der Gestaltungskraft der Rezepte den Ausbau der Formen und des Systems überläßt. Die Richtung dieser Kraft ist jedoch immer einmal entgegengesetzt zum üblichen Kunstweg. Zum Beispiel führt sie über das Faktorenausscheiden zum Auflösen der Produkte in mehr kurrente Aggregatformen. Oder die Rechnung mit Brüchen, der zweiten Art aus Faktoren geknüpfter Zahlen, beschließt, als Kombinationsaufgabe der Faktorenrechnung mit Rechnungen der ersten Stufe, die Reduktion von Bruchaggregaten. — Die Vermutung, daß das Gehen im Landshuter Programm auf dem eben vorgezeichneten Weg, sein Schwimmen mit dem Strom der Rechnungsformen, dem Verfasser als krasse Ignoranz oder als dreister Frevel ausgelegt wurde, mag wohl zutreffen. Wie kann man aber freche Auffassung, wie Revolution statt Reform dahinter wittern wollen? Und was ist eigentlich der Unterschied zwischen Reform und Revolution auf wissenschaftlichem Gebiet, aus welchem das Schwören auf Autoritäten bekanntlich ja verbannt ist?

Die Schulalgebra ist rückständig, wenn sie das der Mathematik als gutes Recht zustehende kategorische Prinzip nicht ihrem Kodex einverleibt, nicht ausgiebig benützt und nicht darauf dringt, daß der Schüler seinen wertvollen Gebrauch kennt. — Nicht genug, die Schulalgebra arbeitet direkt gegen den prinzipiellen Begriff „Größe". Groß an sich ist gar nichts, rein gar nichts. Und doch: Alles Bemessungsfähige ist als solches im gewissen Grade groß, je nach dem Maßstab, welcher verfügbar ist. Wenn man den Schüler veranlaßt auszusprechen, was ein Engel über den Besitz eines Millionenmannes urteilen würde, so trifft er das Richtige. Die Antwort ist die gleiche wie für einen Mann, welcher nur ebenso viel Hunderte besitzt. Der reiche Mann wie der gering Bemittelte haben Null, mit dem Maßstab des Engels gemessen. Der Engel, wahrhaftig wie er ist, gibt auch das Urtheil ab: Das eine Null ist 10,000 Mal so groß als das andere. Oder aber, man mutet dem Schüler zu, die Länge der Bank, auf welcher er sitzt, mit dem Maßstab der Siriusentfernung zu messen. Für ihn ist die Banklänge bald genug Null. Dann mit dem Maßstab eines geringfügigen Details, welches man ihn bei tausendfacher Vergrößerung an einer Pilzspore sehen lassen kann: er kommt auf unermeßlich groß. Das nämliche ist ihm der Reihe nach bemeßbar groß, unendlich geringfügig und unermeßlich groß. Ja, wenn man ihn auf Maßstäbe hinweist, welche gegen die vorigen unermeßlich groß bezw. geringfügig sind, führt man ihn ein in das System der stufenmäßig vorhandenen unendlich Geringfügig und Groß. Trotzdem liegt nur ein einziger stetiger Übergang vor. Das muß man nicht verschweigen! — Gibt es überhaupt eine Insel, wo man die unendlich zählige Mannigfaltigkeit des stetigen Übergangs nicht kennt? πάντα ῥεῖ! Und doch, die Insel gibt es, sie heißt Schlaraffenland! Da zählt man nach Äpfeln, Nüssen und anderen guten Dingen. Da herrscht vor allem die Klöserechnung. Klos, als das klotzig bezw. ohne (eigentliche) Gliederung Vorhandene, steht dadurch im Bedeutungsübergang zu individuum. Und wie leuchtet es den Schülern aus den Augen, wenn der Lehrer, welcher als Ursächer eines angeblichen, des pennalen, Zustandes wahrlich keinen Begriff von Schlaraffenleben hat, sie führt ins herrliche Fabelland! Ja, noch das Mannesherz schlägt froh im Gedenken solcher heiterer Momente des einstigen Schullebens. Leider muß der eigentliche Pennäler die Schüler gleich wieder scheiden lassen von der glücklichen Insel hinaus ins Meer, in welchem blos singulärer Auszählung fähige Fische zwar auch leben, aber viel mehr andere gefischt werden, welche unter der Hand noch in eines der Unermeßlich übergehen können. — Die Scheu vor dem Unermeßlich treibt sonderbare Blüten (vergl. Hofer Programm, S. 5). S o l a n g e m a n B e z i e h u n g e n z w i s c h e n g e g e n s e i t i g B e m e ß b a r e n h a t, i s t m a n a u f s i c h e r e m G r u n d! Ist der Ausgang doch einmal ein Unermeßlich, was verschlägt's? Man weiß dann eben: er ragt über das Bemessungsbereich hinaus. Oder er ist in ihm ein „Nichtzuzählen" bezw. „Nichtgezählt". Jenes Unermeßlich weicht selbst von uns zurück. Zu diesem fühlen wir uns unwiderstehlich gezogen: zu Null, dem Mephisto der Zahlen, wie es der unvergeßliche Heße liebreich und respektvoll genannt hat. Uns ist Null der Hauptmeridian und die Verankerungsstelle im Zahlenmeer, die Geburtsstätte aller selbständigen Zahl-Individuen; der gütige Freund im schulalgebraischen Entwickelungsleben, der uns als erstes Angebinde den wertvollen Begriff „Gegensätze", welchen er sich gegenüber zu leugnen so glücklich sein darf, mit auf den Weg gibt. Zuletzt ist er der sichere Rückhalt, auf welchen wir uns bei den Bestimmungen höheren Grades stützen können. Wie sollten wir von ihm lassen, wenn er gleich einmal spröde erscheint in der rauhen Schale von a^0 oder gar $\frac{0}{0}$ u. s. w? Was ist uns dagegen das allerdings gewaltig herrschende, aber pedantisch-herzlose 1? Eine Auflehnung dagegen soll aber nicht gepredigt sein!

Die Schulalgebra ist rückständig gegenüber der gewöhnlichen rechnenden Praxis. Da weiß man ohne Mathematik recht gut, was thatsächlich und was blos auf dem Papier ausführbar ist. Auch die Jungen, welche wir unterrichten, wissen es schon. Und die rechnende Praxis handhabt im zweiten Fall das Ergebnis so sicher, wie im übrigen eine wirkliche Zahl. Dem entspräche in der Schulalgebra die Benützung der vollständigen zwischen $-\infty$ und $+\infty$[1)] erstreckten Zahlenreihe. Zur Zeit verfährt sie anders! Sie stößt den noch zutraulich bereitwilligen Anfänger zurück an den Anfang der Dinge. — Wenn die Mathematik der Größenlehre ein künstliches Gepräge gibt, kann man ihr keinen Vorwurf daraus machen, weil sie die (freilich teilweise noch zu entwickelnden) Mittel das Feld zu halten beherrscht. Wenn aber die Schulalgebra anstrebt, dieses künstliche System von allem Anfang geläufig zu machen, etwa darum, weil der Rechenunterricht (mit nur fraglichem Vorteil) das Schema benützt, so schlägt sie einen Irrweg ein. Unbenommen muß es jedoch der Mathematik bleiben von denjenigen, welchen der spätere Beruf höhere mathematische Ziele steckt, die sichere Kenntnis auch des künstlichen Systems bewährt zu sehen. Die Zeit, es zu erlernen, kann freilich nur diejenige des Beginnes der eigentlichen Berufsstudien sein.[II)]

Im schon zitierten Hofer Programm ist auf ein eigentümliches Wechselverhältnis, welches infolge des verordneten Lehrganges zwischen Geometrie und Algebra bei uns geschaffen ist, hingewiesen. Die Stelle, welche auch für diesen Zusammenhang Bedeutung hat, lautet: „Die Mittel, deren sich ein Unterrichtszweig bedient, müssen zuvor wohl erworben sein. Schon frühzeitig im geometrischen Unterricht benützt man die Gleichungen. Wenn nun, wie bei uns in Bayern, der erste Unterricht in der Algebra neben dem in der Geometrie hergeht, so muß das Notwendigste über die Gleichungen dortselbst zuerst vermittelt werden. Es geschieht, wenn man die Algebra als eine von unnützem Formel- und Regelkram freie niederste Analysis III) von Haus aus betreibt. Man hat noch den Vorteil, daß das Zahlenrechnen im fortwährenden Gebrauch steht, ja die wirkliche Begründung in allen Hauptwendungen jetzt erst findet. Dieses Verfahren, im Programm der königl. Studienanstalt Landshut pro 1883/84, dann bei van Hengel und inzwischen vielleicht noch bei Einzelnen in mehr oder minder zielbewußter und erfolgreicher Weise eingeschlagen, erschließt dem Lehrenden wie dem Lernenden fortwährend neue Reize und erhält alle Beteiligten in lebhafter Spannung. Ihm gehört, sobald sich nur einmal die Aufmerksamkeit weiterer Kreise darauf lenkt, die Zukunft.“ Dazu sei bemerkt: das Verfahren ist vermutlich recht alt. Ein im Lieblingsgebrauch des Verfassers stehendes Übungsbuch ist die Sammlung arithmetischer und algebraischer Aufgaben von Dr. Fr. X. Pollak, fünfte Auflage 1866. Wenn der Verfasser aus diesem Buch die Art des verdienstvollen Mannes, dem er ja nie näher getreten, richtig versteht, so hat Dr. P. die Algebra im Stil einer niedersten Analysis s. Z. betrieben. Auch sonst finden sich in Werken gediegener älterer Schulmänner immer wieder Anzeichen dafür. Verfasser sieht in ihm den natürlichen Betrieb.

Das natürliche System der drei Stufen hat aber weniger und andere Kapitelsüberschriften als das künstliche System der sieben Spezies! 1. Einfaches und zusammengesetztes Zählen. 2. Reduktionen und Gegenreduktionen r; R [ϱ]. 2a. Division auf Grundlage von R; gebrochene Zahlen. 3. Reduktion ϱ; a) Potenzieren und Radizieren, b) Logarithmieren. — Die Gleichungen ziehen als roter

Faden durch das ganze System. Ihrer Wichtigkeit halber müssen ihnen noch Schaltkapitel gewidmet werden, nämlich 2'. Bestimmungsaufgaben ersten Grades; Bestimmungen aus Systemen ersten Grades. 3'. Bestimmungsaufgaben zweiten Grades; Bestimmungen aus Systemen zweiten Grades; Bestimmung gesetzmäßiger Folgen von Zahlen incl. Zinseszinsen- und Rentenrechnung; reelle quadratische Formen mit nur reellen Zahlen (Diskriminante). Alles kann im Gleichschritt mit dem bayerischen Gymnasial-Lehrplan geschehen.

Im Landshuter Programm sind Kap. 1, 2 und 2a behandelt worden mit der Tendenz, einen Lehrgang in „konzinner, logisch-wissenschaftlicher Sprache", wie es Hoppe in seiner Rezension nannte, zu bieten. Hier liegt der Ton durchaus auf „wirklicher Lehrgang". Anmerkungen sind vorgesehen. Das 1. Kapitel gibt die abgeschlossene heurige Darbietung; die Übungsbeispiele nebst solchen, wie sie für Schulaufgaben verfaßt wurden, folgen anhangsweise. Das 2. Kapitel wird aus den Lehrgängen in den vorjährigen Parallelabteilungen vertreten sein. Dieses und die übrigen Kapitel werden des beschränkten Raumes halber nur Beispiele aufweisen, welche für die Darstellung erheblicher sind.

Anmerkungen.

I) Man kann die Meinung hören, daß $+\infty$ und $-\infty$, ähnlich wie $+0$ und -0, die nämliche Zahl sind. Diese Meinung ist so mystisch wie das bekannte Symbol der Ewigkeit. Das Koinzidieren beider in manchen Bestimmungen läuft vielmehr auf das Auftreten der maximalsten reellen Unstetigkeit hinaus.

II) Mathematik in höherer Vollendung ist Kunst und ihre Darbietungen fallen unter den Kunstbegriff. Namentlich gilt dieses von der Zahl selbst. Sie in wirklich vertiefter künstlerischer Auffassung zu vermitteln ist bei den Elementen ausgeschlossen. Um einer Seite des Zahlbegriffs etwas näher zu treten, so kann in der Mittelschule das Irrationale nicht etwa wie bei Dedekind (Stetigkeit und irrationale Zahlen, 1. Auflage 1872; 2. unveränderte Auflage 1892) disponiert werden. Dedekind zeigt: Wenn D eine ganze positive Zahl ist, ohne Quadrat einer solchen zu sein, und x_1 bez. x_2 alle möglichen Rationalzahlen vorstellen, deren Quadrate kleiner bez. größer als D sind, so erweist sich ein y, von welchem gilt $\frac{y}{x} = \frac{x^2 + 3\,D}{3\,x^2 + D}$, zugleich größer als jedes x_1 und kleiner als jedes x_2, ist aber keine Rationalzahl. Dieses y als Schnitt (Dedekind's Benennung) zwischen den beiderlei x für eine Zahl (als Irrationalzahl) anzuerkennen sieht man sich genötigt. Es weisen nämlich jede zwei Rationalzahlen — solche der Reihe, welche, die Einheit begreifend, mit der Einheitsdifferenz auf einander folgen, bez. der Einheit nebst deren Vielfachen, und auch der Reihen der Vielfachen aller Zahlen, zu deren Vielfachen die Einheit gehört, — eine von Null verschiedene, angebbare Differenz auf. Die Gruppe der Rationalzahlen ist deshalb ganz unzulänglich für die Bemessung von stetig d. i. mit der Differenz Null in einander übergehenden Ausdehnungen. — Mit der Adoption des y ist man aber noch durchaus entfernt vom gesteckten Ziel. So eine Art Spionkop ist erst eingenommen. Wird man ihn aber behaupten können? Ja, wird sich das auch nur verlohnen? In der ersteren Hinsicht ist notwendig y mit Schnitten y' gegen die x, die y' mit Schnitten y'' gegen y einer- und die x andererseits u. s. f. in infinitum zu umgeben, resp. es muß eine irrationale Variation Y zur Trennung von zwei rationalen x aufgestellt oder vielmehr das einzelne x als rationale Singularität innerhalb einer irrationalen Variation Z nachgewiesen werden. In der anderen Hinsicht lassen sich keine wesentlichen Vorteile für die praktischen Anwendungen absehen. Es besitzt nämlich von unmerklich in einander übergehenden Ausdehnungen eine einzelne bloß durch Nebenumstände, welche dem Ausdehnungsbegriff selbst fremd gegenüberstehen, die Wahlfähigkeit zur Einheit. Die Theorie dagegen hätte größeren Gewinn, indem gewährleistet wäre, daß die Auswahl einer Einheit unter allen den nämlichen Anfang nehmenden Ausdehnungen begleitet ist vom Hervortreten je einer Rationalzahl unter den Maßzahlen für die Variation einer Ausdehnung, und daß die Variation der Einheit innerhalb der so gezogenen Grenzen die durchaus verschiedenen Variationen der rationalen Zahlen vollständig liefert. — Für die Lösung der einen oder anderen hiemit berührten Frage muß der Meister wohl noch erst erstehen. Eine Meisteraufgabe ist es auch den werdenden Fachmann in die so subtilen Wendungen des Zahlbegriffs einzuweisen. Ein richtiger Meister wird sich dieser vornehmsten unter den allgemeinen Meisteraufgaben schon darum nicht entziehen dürfen, weil kaum einer von denjenigen, welche den Zugang zu den Höhen unserer Wissenschaft suchen, den ganzen Vorzug der Gaben besitzt, durch welche er sich aus den Schriften allein und ohne Meisterhilfe zurecht findet. Die Elementarmathematik muß man also wohl oder übel die Wege ziehen lassen, welche dem Fassungsvermögen von Knaben angemessen sind.

III) Hier liegt, so zu sagen, bereits die Ankündigung des jetzt behandelten Themas vor. Wenn es bis heute ausgesetzt geblieben ist, so gab sich der Verfasser der Hoffnung hin, es möchte von einem Berufeneren in Angriff genommen werden.

Kapitel I.

Einfaches und zusammengesetztes Zählen.

Vorbemerkung. Alles Rechnen ist ein Zählen und dient zur Bemessung von irgend welchen Ausdehnungen, welche in übereinstimmende Stücke, Einheiten, zerlegt oder aus solchen verbunden sind. Das Mittel für das Zählen ist die Zahlenreihe[1]), welche derart abgeschritten wird, daß man für jedes Stück eine Stelle vor- oder zurückgeht, je nach der Bedeutung des Stücks für die ganze Menge. Jeder vollständig zum Abschluß kommende Zählungsvorgang beginnt bei 0.

Nr. 1. Was drückt eine bestimmte Zahl z. B. 10 aus?

Sie fordert, daß man von derjenigen Stelle der Zahlenreihe, wo man sich befindet, so viel Stellen fortschreite, als diejenige Zählung umfaßt, welche von 0 unternommen nach 10 führt, nämlich wie die Zählung 1;2;3; . . . . 9;10! — Zugleich drückt sie aus, daß so schon gezählt ist.

Nr. 2. Man steht auf 7 und soll eine Zählung (vom Grad) 10 ausführen[2]). Wie geschieht es?

Man zählt entweder 8;9;10; . . . 16;17! oder zählt 6;5;4 . . . — 2; — 3!

Nr. 3. Wie unterscheidet man aber beide Zählungen?

Jene gilt als Zählung + 10, diese als eine Zählung — 10, indem vereinbart ist: bei den bestimmten Zahlen weist + den Weg nach dem ohne Ende zunehmenden +, nach $+\infty$, und — den Weg nach $-\infty$. + 10 und — 10 sind reine Gegensätze und machen beim Eintreten in die nämliche zusammengesetzte Zählung einander wirkungslos bez. heben einander.

Nr. 4. Was hat man sich bei 0 vorzustellen?

0 hat den Sinn von „nicht zu zählen“ bez. „nicht gezählt“, wie es der Fall ist bei blos zwei gegensätzlichen Zählungen; z. B. gilt $-5+5=0$. Ehe überhaupt gezählt wird, liegt ebenfalls ein „nicht gezählt“ vor.

Nr. 5. Eine Zählung ist nur aus einfachen Zählungen 7;12 und 9 zusammengesetzt und folgt dabei keiner andern nach, resp. beginnt bei Null (vergl. Vorbemerkung). Welches ist dieselbe, wenn die aus den meisten Einheiten gefügte, resp. absolut größte Einzelzählung den andern entgegenwirkt?

Sie ist 1;2;3;...6;7! 6;5;4;...—4;—5! —4;—3;—2;...3;4! oder —1;—2;—3;...—6;—7! —6;—5;—4;...4;5! 4;3;2;... —3;—4!

Nr. 6. Wie ist es üblich, diese Zählungen kurz anzuschreiben?

Man schreibt $7-12+9=+4$ bez. $-7+12-9=-4$.

Nr. 7. Worin stimmen sie trotz aller Verschiedenheit überein?

Beide laufen auf das nämliche hinaus wie eine einzelne Zählung 4 {1;2;3;4! bez. —1;—2;—3;—4!}. Das „=“ drückt überhaupt aus, daß die vollständigen Zählungen, zwischen welchen es steht, einander ersetzen, wenn es auf den Ausgang bezw. Wert der Zählungen und, wie in der Regel bei Bestimmungen, nicht auf eine besondere Möglichkeit der Durchführung ankommt.

Nr. 8. Es wird behauptet, daß bei der Ausführung gefehlt wurde, da mit der letzten Einzelzählung zu beginnen war. Welches ist die richtige Zählung?

Sie ist entweder $9-12+7=+4$ oder $-9+12-7=-4$ oder $9+7-12=+4$ oder $-9-7+12=-4$. — Aber es zeigt sich, daß nichts verfehlt war, wenn es nur auf den Wert der Zählung ankommt. Nun nennt man eine zusammengesetzte Zählung Aggregat oder algebraische Summe, während die einzelnen Zählungen Glieder des Aggregats bez. algebraische Summanden heißen. Es gilt und ist ein wichtiger Satz: Die Reihenfolge der Glieder ist ohne Einfluß auf den Wert des Aggregats (die Reihenfolge der algebraischen Summanden ꝛc.).

Nr. 9. Sind beide Zählungen wirklich ganz gleich bedeutend?

Sie können für den nämlichen Zählungsvorgang stehen[3]), thun es dann aber im Sinn rein gegensätzlicher Auffassungen. Steht da der Vorgang in Verbindung mit anderen, deren Sinn bereits feststeht, so ist nur diejenige Zählung die richtige, bei welcher alle sich verstärkenden Einzelzählungen — über sie ist kein Zweifel möglich — die nämlichen Vorzeichen besitzen.

Nr. 10. Können zwei Zählungen wie die in Nr. 6 im nämlichen Zusammenhang vereinigt vorkommen, und wie ist es da?

Allerdings treffen solche Zählungen auch zusammen, wie überhaupt zu jedem Vorgange der rein entgegengesetzte so gut als sonst einer sich gesellen kann. Da aber machen die beiden, wie nicht minder die Zählungen dafür, einander wirkungslos, z. B. gilt $7-12+9-7+12-9=0$ u. dgl.

Nr. 11. Wenn a,b,c bez. $+a, +b, +c$, wie es auch heißen darf, fortan irgend welche Zahlen bedeuten, so ist $a+b+c=0$, wenn die eine Zählung den übrigen vollständig entgegenwirkt. Welche von den Zählungen ist es?

Zu $a+b$ ist c, aber eben so gut ist b zu $a+c$ oder auch a zu $b+c$ hier entgegengesetzt und hebt es auf. — Man merke: α) + steht vor unbestimmten Zahlen zunächst im Hinblick auf das immer mögliche Zusammentreffen mit dem reinen Gegensatz, welcher ebenso, nur — statt + voran, geschrieben wird. β) Das Zusammengehören von Zählungen drückt man durch bloßes Nebeneinanderschreiben derselben aus; aber eine andern folgende Zählung muß, was ihr zukommt, + oder —, frei voran haben[4]). γ) Indem a oder b oder c das + als Vorzeichen führen können, geht es auch, sie als nachfolgende Zählungen zu schreiben.

Nr. 12. Wieder sei $a+b+c=0$. Was vermag da a oder b oder c zu ersetzen?

Hier leistet a dasselbe wie $-b-c$; also gilt $a=-b-c$; ebenso gilt $b=-a-c$ und $c=-a-b$.

Nr. 13. Was läßt sich von $10+a$ bezüglich der Art der Zählung, was bezüglich des Wertes behaupten?

$10+a$ ist eine zusammengesetzte Zählung und zwar aus Zählungen gleicher bez. entgegengesetzter Art verbunden, je nachdem a positiv (bestimmte Zahl zwischen 0 u. $+\infty$) oder negativ (bestimmte Zahl zwischen 0 und $-\infty$) ist[5]. — Was den Wert anlangt, so ist $10+a$ größer als a[6], also je nach der Beschaffenheit von a alles mögliche und insbesondere 10, wenn $a=0$ ist; dagegen nie so groß als a, außer 10 hat gegenüber a Nullgröße. Man bedenke noch: Von jeder Stelle der Zahlenreihe kann man mit einer einzigen Zählung zu irgend einer andern übergehen.

Nr. 14. Wie muß a beschaffen sein, damit gilt $28\frac{7}{18}+a=13\frac{11}{12}$?

Mit gehöriger Beachtung von Nr. 12 erhält man der Reihe nach $28\frac{7}{18}+a=13\frac{11}{12}$ bez. $a=13\frac{11}{12}-28\frac{7}{18}$ bez. $a=\mathbf{-14\frac{17}{36}}$, w. g. i. Man entnimmt nämlich aus Nr. 12, daß man bei der Gleichheit von zwei Zählungen aus einer ein Glied zur andern überführen (transponieren) darf, so zwar, daß dabei gilt: Ein Glied verwandelt sich beim Transponieren in seinen Gegensatz (Regel von der Gliedertransposition.)

Nr. 15. Den Wert von $a-b-c+d-e+f-g$ zu bestimmen, wenn α) $a=28$; $b=-11$; $c=23$; $d=16$; $e=-8$; $f=-31$; $g=21$, β) $a=-51\frac{13}{18}$; $b=-13\frac{17}{24}$; $c=42\frac{31}{36}$; $d=30\frac{5}{12}$; $e=-19\frac{5}{6}$; $f=-26\frac{7}{8}$; $g=-53\frac{3}{4}$ gilt!

Die angegebenen Werte eingesetzt, so wird der Ausdruck d. R. n. zu α) $28+11-23+16+8-31-21=\mathbf{-12}$, w. g. i. β) $-51\frac{13}{18}+13\frac{17}{24}-42\frac{31}{36}+30\frac{5}{12}+19\frac{5}{6}-26\frac{7}{8}+53\frac{3}{4}=\mathbf{-3\frac{3}{4}}$, w. g. i. — Folgende Nebenrechnung liefert β)

+	−	+	−
13	51	$\frac{17}{24}=\frac{51}{\cdot}$	$\frac{13}{18}=\frac{52}{\cdot}$
30	42	$\frac{5}{12}=\frac{30}{\cdot}$	$\frac{31}{46}=\frac{62}{\cdot}$
19	26	$\frac{5}{6}=\frac{60}{\cdot}$	$\frac{7}{8}=\frac{63}{\cdot}$
53		$\frac{3}{4}=\frac{54}{\cdot}$	

Σ: 115; Σ: 119; $\triangle$: -4. Σ: $\frac{195}{72}$; Σ: $\frac{177}{72}$; $\triangle$: $+\frac{18}{72}$ bez. $\frac{1}{4}$.

Nr. 16. Graphische Darstellung von Nr. 15 α)![7])

Der Gang des Thermometers gelte als vorbildlich! — Man benützt die Darstellung vorteilhaft zu einem Beweis des Satzes in Nr. 8, etwa wie folgt: Eine Zählung an der richtigen Stelle übersehen, so ist man um so viel zurück oder vor, als sie vor- oder zurückgeführt hätte. Die Zählung irgend später nachgeholt, so ist man um nichts mehr zurück oder vor, insbesondere wird die nämliche Endstelle wie ohne das Übersehen erreicht.

Nr. 17. $a - 27{,}252 + b - c - d + e$ soll den Wert 0 erhalten; ferner seien a und e Gegensätze, b und c gleich groß. Wie muß d beschaffen sein?

E. s. s. $a - 27{,}252 + b - c - d + e = 0$ (Hauptgleichung); ferner $a + e = 0$ bez. $e = -a$ und $b = c$ bez. $b - c = 0$ (Nebengleichungen). In die Hauptgl. eingesetzt, so kommt d. R. n. $\mp 27{,}252 \mp d = 0$[8]) bez. $d = -$ **27,252**, w. g. i.

Nr. 18. Der vorige Ausdruck soll wieder zu 0 werden, aber von den Zahlen a;b;c;d und e die nächstfolgende immer um 100 größer sein! Wie ist zu wählen?

E. s. s. $a - 27{,}252 + b - c - d + e = 0$ (Hauptgl.); ferner $b = a + 100$; $c = a + 200$; $d = a + 300$; $e = a + 400$ (Nebengl.). J. d. H. g. k. d. R. n.

$a - 27{,}252 + a + 100 - a - 200 - a - 300 + a + 400 = 0$ bez. $a =$ **27,252**; also $b =$ **127,252**; $c =$ **227,252**; $d =$ **327,252**; $e =$ **427,252**, w. g. i.

Nr. 19. Der Ausdruck in Nr. 17 soll den Wert 72,748 erhalten und a;b;c und d im Verhältnis von 1:2:3:4 stehen, e endlich um 100 kleiner sein als a. Wie muß gewählt werden? Probe!

E. s. s. $a - 27{,}252 + b - c - d + e = 72{,}748$ (Hptgl.); ferner $a = E$[9]); $b = 2E$; $c = 3E$; $d = 4E$; $e = E - 100$ (Nbgl.). J. d. H. g. k. d. R. n.

$$E - 27{,}252 + 2E - 3E - 4E + E - 100 = 72{,}748$$

$$\text{bez. } \mp 3E = -200 \text{ bez. } E = -66\tfrac{2}{3};$$

also $a = -66\frac{2}{3}$; $b = -$ **$133\frac{1}{3}$**; $c = -$ **200**; $d = -$ **$266\frac{2}{3}$**;

$e = -$ **$166\frac{2}{3}$**, w. g. i.

Die gefundenen Werte in die Hauptgleichung gesetzt, so kommt d. N. n.

L. $-66\frac{2}{3}-27{,}252-133\frac{1}{3}+200+266\frac{2}{3}-166\frac{2}{3}=+72{,}748$, wie **R.** steht und sein soll. Nebenrechnung konnte sein:

+	—	+	—
200	66	$\frac{2}{3}$	$\frac{2}{3}$
266	27,252		$\frac{1}{3}$
	133		$\frac{2}{3}$
	166		$\triangle: -1.$

$\Sigma: 466$; $\Sigma: 392{,}252$; $\triangle: +73{,}748$.

Nr. 20. Was ist Summe, was Differenz von zwei Zahlen?[10])

Jedes zweigliederige Aggregat (das einzelne Glied mag einfache oder zusammengesetzte Zahl sein) kann mit gleich viel Recht als Summe oder Differenz von zwei Zahlen angesehen werden. Denn: Summe bez. Differenz von zwei Zahlen ist die Erweiterung der erstgenannten Zahl durch die zweite bez. den Gegensatz der zweiten. — Z. B. $18-27$ ist die Summe von 18 und -27; es ist die Differenz von 18 und 27; ja, wenn man will, Umformung der Differenz von -27 und -18, der Summe von -27 und 18.

Abschluß. + und —, sowie die Ketten aus ihnen betreffend.

Es ist vereinbart, daß von den Zeichen +; —; ·; : niemals zwei ungesondert auf einander folgen dürfen. Auf dieses hin wird für $10+a$ im Falle von $a=-5$, lediglich einsetzend, geschrieben $10+(-5)$. Man weiß aber auch (vergl. allgemein Nr. 11 und speziell Nr. 15 des Kap.), daß es $10-5$ heißen darf. Also gibt es keinen Unterschied zwischen $+(-5)$ u. -5. Es gilt $+(-5)=-5$; ebenso $+(+5)=+5$; $-(+5)=-5$ und $-(-5)=+5$. Eine Kette von zwei Zählzeichen (+; —) läßt sich durch ein einziges — ersetzen, wenn ein einziges — in ihr vorkommt; andernfalls darf + dafür stehen. — Ein Zeichen kann betrachtet werden, einmal als Anweisung, das andere Mal als Vollzug. Bei $+(+5)$; $+(-5)$; $-(+5)$; $-(-5)$ faßt man jedoch gern das in der Umschließung stehende Zeichen als Vollzug, das andere als Anweisung auf ohne einen Fehler zu begehen, wenn dieses nicht geschieht. Es geschieht aber überhaupt blos um sich die betreff. Zahlen bequem als Zugang bez. Wegfall von Vorteil bez. Nach=

teil zu vergegenwärtigen. $+$ steht in der Auffassung des Günstigen (Zugang; Vorteil), $-$ in der des Ungünstigen (Wegfall; Nachteil). Beispielsweise deutet man $-(+5)$ als Wegfall von Vorteil (im Betrag) 5. — Mit Zahlen der betrachteten Art wird auch weiter gerechnet. Z. B. man benützt $x = +(-7)$ zur Bestimmung von $10 + x$. Es wird $10 + [+(-7)] = 10 - 7 = 3$ erhalten. Nichts steht im Weg bei einer Zahl eine Kette von noch so viel $+$ und $-$ anzunehmen. Unter allen Umständen gilt α) $+$ ist das den Sinn des nachfolgenden bestätigende, $-$ das ihn verkehrende Vorzeichen. β) Die Reihenfolge der $+$ und $-$ in der Kette ist ohne Einfluß auf den Werth der Zählung. γ) Eine Kette läßt sich durch ein einziges $-$ bez. $+$ ersetzen, je nachdem eine ungerade bez. gerade Menge $-$ in ihr vorkommt.

Anhang von Übungsaufgaben.

(Übungen zu Nr. 1—16 des Kap. ergeben sich bei der Durchnahme von selbst. Hier sind nur Nr. 17—20 berücksichtigt, die selbstverständlichen Fragen sind weggeblieben, thunlichst oft sind Proben zu liefern. Übungen zum Kapitelabschluß s. im Landshuter Programm.)

Nr. 1. a ist zu b entgegengesetzt und um 5 kleiner (größer).

Nr. 2. Die Summe von a und b ist zu 27 entgegengesetzt und b um 13 größer (kleiner) als a.

Nr. 3. Summe und Differenz von a und b sind Gegensätze; ferner verhalten sich a und b wie $3:5$ [a ist um 6 größer als b; b ist um 6 größer als a].

Nr. 4. a verhält sich zur Differenz [Summe] von a und b wie $1:3$; die Summe (Differenz) von a und b ist 210.

Nr. 5. Zwei Komplemente [Supplemente, Implemente] verhalten sich wie $1:14$ [unterscheiden sich um $\frac{5}{12}$ R].

Nr. 6. Von 2 Nebenwinkeln (Scheitelwinkeln) ist die Differenz (Summe) $\frac{7}{8}$ R.

Nr. 7. Die halbe Differenz von 2 Implementen [Supplementen, Komplementen] ist der vierte Teil der Summe.

Nr. 8. Die Winkel eines Dreiecks (Fünftels) stufen sich um je $11{,}2^0$ ab.

Nr. 9. Ein Winkel eines Dreiecks ist so groß als die zwei andern zusammen; diese verhalten sich wie 11:13 [unterscheiden sich um $16^0 25' 34''$].

Nr. 10. Die viererlei Außenwinkel eines Vierecks verhalten sich wie 3:6:5:4 [stufen sich je um $5\frac{1}{4}^0$ ab]. Wie groß sind die Viereckswinkel? Probe!

Nr. 11. Aus einem Punkt strahlen sechs Halbgerade und sondern sechs Winkel von einander, welche abwechselnd um $17\frac{1}{2}^0$ wachsen und um $\frac{1}{8}$ R abnehmen.

Nr. 12. Die einen alternierenden Winkel eines Achtecks messen zusammen so viel als die andern; jene bilden eine fortwährend um $11\frac{5}{12}^0$ fallende Reihe; diese verhalten sich wie 7:9:5:6.

Nr. 13. Es gilt $a - b = 15 - c$; ferner müssen a; b und c je um 7 [-5] vergrößert werden, um Zahlen im Verhältnis von 7:6:2 zu liefern.

Nr. 14. Es gilt $a - b + c = 210 - c$; ferner müssen a; b und c je um 3[-4] verkleinert werden, um Zahlen im Verhältnis von 8:4:3 zu liefern.

Nr. 15. Es gilt $a - 2b = c + 3$; wenn man a um 3, b um -2, c um 1 vergrößert (verkleinert), entstehen Zahlen im Verhältnis von 3:2:5.

Nr. 16. Es gilt $2a - 3b = 5c - 12$; wenn man a; b und c je um 2 vergrößert (verkleinert), entstehen Zahlen im Verhältnis von $1:1\frac{2}{3}:2\frac{1}{3}$.

Nr. 17—20. (Vierfaches Thema zu einer Schulaufgabe.)

a; b und c verhalten sich wie 8:7:4; d ist um 1 kleiner, e um 1 größer als b. Wie sind a; b; c; d und e zu wählen, daß $a + c - d$ und $25 - b + e$ Gegensätze werden? Wie, daß die Summe dieser Ausdrücke 6 wird? Wie, daß die Differenz -6 ist? Zu einem Falle die Probe!

a; b und c verhalten sich wie 7:4:8; c ist um 1 größer, d um 1 kleiner als a. Wie sind a; b; c; d und e zu wählen, daß $b - c + e$ und $25 - a + d$ Gegensätze werden? Wie, daß die Summe dieser Ausdrücke 9 wird? Wie, daß die Differenz -3 ist? Zu einem Fall die Probe!

a; d und e verhalten sich wie 4 : 8 : 7; b ist um 2 größer, c um 2 kleiner als e. Wie sind a; b; c; d und e zu wählen, daß $a - b + d$ und $25 + c - e$ Gegensätze werden? Wie, daß die Summe dieser Ausdrücke 14 wird? Wie, daß die Differenz -3 ist? Zu einem Fall die Probe!

c; d und e verhalten sich wie 8 : 7 : 4; a ist um 2 kleiner, b um 2 größer als d. Wie sind a; b; c; d und e zu wählen, daß $c - a + e$ und $25 + b - d$ Gegensätze werden? Wie, daß die Summe dieser Ausdrücke 17 wird? Wie, daß die Differenz -8 ist? Zu einem Fall die Probe!

Nr. 21—24. (Vierfaches Thema in der Parallelabteilung.)

a; b und c verhalten sich wie 7 : 5 : 3; d ist zu $b + 1$, e zu $b - 1$ entgegengesetzt. Wie müssen a; b; c; d und e gewählt werden, daß $a + c - d$ und $25 - b + e$ gleich groß werden? Wie, daß die Summe dieser Ausdrücke -10 wird? Wie, daß die Differenz -32 ist? Zu einem Fall die Probe!

a; b und e verhalten sich wie 5 : 3 : 7; c ist zu $a - 1$, d zu $a + 1$ entgegengesetzt. Wie sind a; b; c; d und e zu wählen, daß $b - c + e$ und $25 - a + d$ gleich groß werden? Wie, daß die Summe dieser Ausdrücke -15 wird? Wie, daß die Differenz -29 ist? Zu einem Falle die Probe!

a; d und e verhalten sich wie 3 : 7 : 5; b ist zu $e - 2$, c zu $e + 2$ entgegengesetzt. Wie sind a; b; c; d und e zu wählen, daß $a - b + d$ und $26 + c - e$ gleich groß werden? Wie, daß die Summe dieser Ausdrücke -5 wird? Wie, daß die Differenz -33 ist? Zu einem Fall die Probe!

c; d und e verhalten sich wie 7 : 5 : 3; a ist zu $d + 2$, b zu $d - 2$ entgegengesetzt. Wie sind a; b; c; d und e zu wählen, daß $c - a + e$ und $25 + b - d$ gleich groß werden? Wie, daß die Summe dieser Ausdrücke -8 wird. Wie, daß die Differenz -34 ist? Zu einem Fall die Probe!

Nr. 25—28. (Vierfaches Thema neben Geometrie).

a; b; c und d zu bestimmen, wenn die Summe von a und b um 24 größer ist als die Differenz von c und d; ferner d um 2 vergrößert, a um 2 verkleinert werden muß, damit Zahlen im Verhältnis von 2 : 3 entstehen; endlich b um 4 größer ist als d, während c der Gegensatz von d ist. [Cyklische Vertauschung lieferte die Aufgaben der drei anderen Abteilungen.]

Nr. 29—32. (Vierfaches Thema in der Parallelabteilung.)

a; b u. c zu bestimmen, wenn gilt $4a - 7b = 15 - c$ u. a; b und c je um 7 vergrößert werden müssen, damit Zahlen im Verhältnis von 4:2:1 entstehen! Probe! [Bei den andern Abt. war um 8 bez. 9 bez. 10 zu vergrößern.]

Nr. 33—36. (Vierfaches Thema in einer ungeteilten Klasse. Überall war die Erklärung von a) Summe, b) Differenz, c) Gegensätzen verlangt.)

Die Summe von $23 - a$ und $b - 62$ ist so groß als die Differenz von $c - d$ und $15 - e$. Wie sind a; b; c; d und e beschaffen, wenn sich b; d und e wie 4:5:3 verhalten, c zu e entgegengesetzt, endlich a um 16 kleiner ist als die Summe von b und e? Probe!

$a + 20 - b$ ist entgegengesetzt zur Summe von $c - 28$ und $14 - d - e$. Wie sind a; b; c; d und e beschaffen, wenn a; b und c sich wie 4:3:5 verhalten, d zu b entgegengesetzt, endlich e um 18 größer ist als die Differenz von b und d? Probe!

Die Differenz von $a - 36 + b - c$ und $27 - d + e$ hat den Wert 7. Wie sind a; b; c; d und e beschaffen, wenn b um 2 größer ist als a, c um 3 größer als b, d entgegengesetzt zur Summe von a und b, endlich e Doppeltes von a? Probe!

$a - 58$ ist entgegengesetzt zur Differenz von $b + 13 - c$ und $d - 21 + e$. Wie sind a; b; c; d und e beschaffen, wenn a; b und c sich wie 4:5:3 verhalten, d zu e entgesetzt, e um 18 kleiner ist als die Summe von a und c? Probe!

Nr. 37—40. (Vierfaches Thema in einer ungeteilten Klasse.)

Gegeben $t = 10m - 54 - 2k - 12l$; $u = 2k - 10m - 4l$; $v = 6l + 2k - 8m - 35$; $w = 12k + 15l - 3m + 6$, endlich $x = 3m - 2l - 20 - 4k$. A) Bilde die Differenz von t und x; die Differenz von t und der Summe der vier andern entsprechend ausgedrückten Zahlen; die Summe aller fünf! B) Der Wert der unter A) betrachteten Differenz $t - x$ verhält sich zu k; l und m wie 7:6:5:4; wie groß sind k; l; m und die Differenz? C) Wie groß sind t; u; v; w; x und ihre Summe für die unter B) ermittelten Werte von k; l und m?

[Die andern Gruppen enthielten unter A) die Frage nach der Differenz von u bez. v bez. w und x einer-, der Summe der vier übrigen andererseits, sowie die nach der Summe von allen fünf. B) entsprechend, als Verhältniszahlen jedoch 6 : 5 : 4 : 3 bez. 3 : 4 : 5 : 6 bez. 4 : 5 : 6 : 7. C) gleichlautend.]

Kapitel II.

Reduktionen und Gegenreduktionen r; R [ρ].

r. Kommt in einem Aggregat ein Glied wiederholt vor, so reduziert man (kürzt ab), indem man es nur einmal schreibt und hinter dem (einem) + bez. — desselben notiert, wie oft es vorkommt. Z. B. $a - b - b + c + a - b + c + c - b$ reduziert man zu $2a - 4b + 3c$. — Die (Ziffer-) Notiz nennt man Koëffizient der reduzierten Zählung, diese selbst das Produkt[11]) von zwei Zahlen. In unserem Beispiel erhielt man ein Aggregat von drei Produkten als Gliedern.

Bemerkungen. Bei der Anwendung von r bedarf man in gewissen Fällen ein Sonderungszeichen, nämlich einen Punkt (· oder ×). Da man nun bei Produkten das deren Sinn so angemessene „mal" gerne spricht, so wird der Punkt gewöhnlich als Multiplikationszeichen angesehen, eigentlich ohne Recht[12]), denn die Regel r weiß nichts von einem Punkt. Nur in den Fällen, wo eine bestimmte Zahl, ohne daß ihr eine Kette vorausgeht, wiederholt ist, braucht man ihn. So schreibt man, um von der Zählung 38 die Reduktion von 3 Zählungen 8 zu unterscheiden, für letztere $3 \cdot 8$; oder für $-2-2-2-2-2$ setzt man $-5 \cdot 2$. Formen wie $-22\frac{1}{2} \cdot (-9)$ und $-22\frac{1}{2}(-9)$ bedeuten bereits genau das gleiche. Kommt vollends eine unbestimmte Zählung wiederholt vor, so bleibt der Punkt in der Kurzschrift regelmäßig weg, ohne daß verwehrt ist ein „mal" zu sprechen. — Auf die Form $-22\frac{1}{2}(-9)$ stößt man bei Reduktion des Aggregats, welches aus 22 Gliedern $-(-9)$ und einem halb so großen gefügt ist (das nämliche wie ein aus 45 Gliedern halb so groß als $-(-9)$ bez. je $4\frac{1}{2}$ gebildetes Aggregat). Beim Lesen dieser Form nimmt man in Gedanken eine Sonderung des durch den Koëffizienten abgespaltenen „—" und seine Verknüpfung mit dem Koëffizienten vor, indem man die Form als $22\frac{1}{2}$maligen Wegfall des Nachteils 9 deutet. Dem kommt die Mathematik entgegen dadurch, daß sie $-22\frac{1}{2}$ als Koëffizienten im erweiterten Sinn gelten läßt und sich so den Vorteil sichert, daß der Koëffizient genau wie eine jede Zählung alles mögliche, auch ein negatives, sein darf. — Daß $3 \cdot 8 = 8 \cdot 3$ ist, wissen wir längst. Ebenso, daß es andere Zahlen wie 3 und 8 sein können. Auch $22\frac{1}{2}$ und -9 können es sein und es gilt $-22\frac{1}{2}(-9) = -9(-22\frac{1}{2})$. Faßt man nämlich den Koëffizienten in der eben erläuterten Erweiterung auf, so hat man links den $22\frac{1}{2}$maligen Wegfall des Nachteils 9, rechts den 9maligen Wegfall des Nachteils $22\frac{1}{2}$. Beides ist Vorteil im Betrag $202\frac{1}{2}$. Den Koëffizienten in der ursprünglichen Beschränkung genommen, so hat man links das aus $22\frac{1}{2}$ Zählungen $-(-9)$ bez. $+9$ gebildete Aggregat in Kurzschrift vor sich, rechts diejenige des aus 9 Gliedern $-(-22\frac{1}{2})$ bez. $+22\frac{1}{2}$ bestehenden Aggregats. Beidemal erhält man, wie schon oben, $202\frac{1}{2}$. Was wir auch für zwei Zahlen haben, ob wir, allgemein ausgedrückt, a und b haben, stets gilt $ab = ba$ d. h. die Reihenfolge der Faktoren eines Produkts ist ohne Einfluß auf dessen Wert. Man nennt nämlich im Produkt von zwei Zahlen jede derselben, das „Was" der Wiederholung nicht minder wie deren „Wie", Faktor und betont mit der Gleichbenennung, daß beide die Rolle tauschen können. Nichts steht im Weg, den wirklichen Vorgängen nachkommend, Produkte von mehr als zwei Faktoren zu bilden, und auch da gilt der hochwichtige Satz[13]). Infolge der zweifachen Auffassung des Koëffizienten dürfen dabei die $+$ und $-$, welche die einzelnen Faktoren als Vorzeichen führen, samt und sonders als Zeichen einer einzigen an Faktor 1 geknüpften Kette gelten.

R. Kommt in allen Gliedern eines Aggregats der nämliche Faktor vor, so schreibt man ihn nur einmal neben

(vor oder hinter) die Umklammerung des Aggregats ohne diesen Faktor in den einzelnen Gliedern zu wiederholen. Zum Beispiel reduziert man $2a-2ab-6ac+3ad$ beliebig zu $a(2-2b-6c+3d)$ oder $2a(1-b-3c+1{,}5d)$ oder $-2a(-1+b+3c-1{,}5d)$ u. dgl. mehr.

Bemerkung. Die durch R gewonnenen Reduktionsformen sind (ebenfalls) vollwertige Zeichen für die reduzierten Aggregate. Man nennt solche Form „das Produkt von einem Aggregat mit einer Zahl". Oben war es das Produkt von dem in Klammern gefaßten Aggregat mit der jemals vorausgehenden Zahl a bez. 2a bez. $-2a$. Der Name ist zu Recht gegeben; denn betrachtet man $mx-nx+px$, so kann man reduzieren zu $x(m-n+p)$; man kann aber auch auflösen zu dem Aggregat $m-n+\overset{1}{p}+m-n+\overset{2}{p}\cdots+m-n+\overset{x}{p}$ und erkennt hierin thatsächlich die x-fache Wiederholung des Aggregats $m-n+p$, wie es der obigen Deutung der Reduktion $x(m-n+p)$ entspricht [vergl. auch die Deutung von $-22\frac{1}{2}(-9)$ in der Bemerkung zu r]. — Den beispielsweise angeführten Reduktionen entnimmt man noch den Satz: Das Produkt von zwei Zahlen stimmt überein mit dem Produkt von deren Gegensätzen[14]).

ϱ. Es verlohnt sich, die später eingehend zu erörternde Regel bereits jetzt zu benützen: **Kommt in einem Produkt ein Faktor wiederholt vor, so schreibt man ihn nur einmal und notiert rechts oben, wie oft er vorkommt.** Zum Beispiel reduziert man $2abc\cdot 4ac\cdot 4abd$ zu $2^5a^3b^2c^2d$. — Die erhaltene Kurzschrift ist ein vollwertiges Zahlzeichen, heißt Potenz des wiederholt auftretenden Faktors bez. ihrer Basis; die Notiz rechts oben ist der (Potenz-) Exponent. — Obige Form ist ein Produkt, dessen Faktoren die Potenzen $2^5; a^3; b^2; c^2; d^1$ — wie man für d zur Bekräftigung, daß es einmal als Faktor gilt, schreiben darf — sind.

Nr. 1. Bardey[15]), S. 12, die Aggregate unter 18 zusammenzufassen! Probe mit $a=-1$; $b=2$; $x=-3$!

M. H. d. N. n.

$$7-x+a-5+7a-x+2a-3b+2x-10+2-3a$$
$$+2x-5a+3b+a=\mathbf{2x-6+3a}.$$

— Die angegebenen Werte eingesetzt, so kommt d. R. n.

L. $7+3-1-5-7+3-2-6-6-10+2+3-6+5+6-1$ bez. -15;

R. $-6-6-3$ bez. -15, wie L. steht und sein soll!

Nr. 2. Wie müssen a; b und x gewählt werden, soll der bei Nr. 1 gegebene Ausdruck zu 0 werden und x halb so groß als a sein?

Für den Ausdruck kann man seine reduzierte Form benützen. E. s. s. $2x-6+3a=0$ (Hauptgl.); ferner $2x=a$ (Nebengl.). J. d. H. g. k. d. R. n. $a-6+3a=0$ bez. $4a=6$ bez. $a=\frac{3}{2}$; also $x=\frac{3}{4}$; b kann jede Zahl sein. Die Aufgabe ist gelöst[16].

Nr. 3. B., S. 30 und 31, 3;8;13;..., ferner $a+a+a+a=$! .... 23) $ax+ay+bx+by=a(x+y)+b(x+y)$ $=(x+y)(a+b)$ oder auch $\cdots=x(a+b)+y(a+b)$ $=(a+b)(x+y)$. — Hinweis, daß der Wortlaut von R dem Verfahren nicht entgegensteht. An welchen Satz erinnert der doppelte Ausgang?

28) $ab-a-b+1=a(b-1)-(b-1)=(b-1)(a-1)$ oder auch $\cdots=(1-b)-a(1-b)=(1-b)(1-a)$[17]. — An welchen Satz erinnert hier der doppelte Ausgang? (Vergl. auch Kap. I, Nr. 18.) $28_3)$ $10n^2+21xy-14nx-15ny$ $=5n(2n-3y)\underset{-}{+}7x(\underset{-}{}3y\underset{+}{-}2n)=(2n-3y)(5n-7x)$. — Eine Zahl und deren Gegensatz sind im Grund die nämliche Zahl nur mit der gegensätzlichen Einweisung in die Verknüpfung mit andern Zahlen. Darauf oder auf den Schlußabsatz in der Bemerkung zu R stützt sich der hier angewendete Mechanismus, welcher unter die Rubrik: Verwandlung einer „—" Reduktion in eine „+" Reduktion fallen mag. 34) $2ax-5ay+a-2bx+5by-b=\ldots$. Ein Faktor wird dreigliederiges Aggregat! Man kann sich da fragen: Ist es in ähnlichen Fällen vorteilhafter das Aggregat in zwei Gruppen von je drei Gliedern, oder in drei Gruppen von je zwei Gliedern zu überschauen? [In allen Fällen aber Gruppen von gleichviel Gliedern!] $34_4)$ Umformung!

$(x-y)(3a+4b)\underset{-}{+}(5b-4a)(\underset{-}{}y\underset{-}{+}x)\underset{-}{+}2(x-y)(\underset{-}{}4b\underset{-}{+}a)$

$=(x-y)\{(3a+4b)+(5b-4a)+2(a-4b)\}$[18])

$$=(x-y)\{3a+4b+5b-4a+2a-8b\}=(x-y)(a+b).$$
$$a+a+a+a=a(1+1+1+1)=4a.$$

Bemerkungen. Aus dem letzten Beispiel wird klar, inwiefern R auf r im ausgezeichneten Fall hinauskommt, r also als Unterfall in R begriffen ist. — Bei anderen Beispielen ergibt sich als Regel: Ist eine Zählung ein von Klammern umschlossenes Aggregat mit dem Vorzeichen + bez. —, so darf sie ersetzt werden durch das Aggregat bez. dessen Gegensatz. — Die Hauptsache jedoch ist: Es hat sich eine neue Reduktionsform, das Produkt von zwei Aggregaten, als vollwertige Zahlform eingestellt. Man konnte in den betreffenden Fällen Gruppen von gleichviel Gliedern mit je einem gemeinsamen Faktor wahrnehmen und dann jede so reduzieren, daß die Gesamtheit der erhaltenen Produkte die Reduktion wieder erlaubt hat[19]). Wir haben die Veranlassung, eine zweifache Handhabung von R anzuerkennen: 1) Die ein Gesamtaggregat sofort umfassende; sie führt zum Produkt eines Aggregats mit einer Zahl. 2) Die erst Gruppen von gleichviel Gliedern und danach deren sämtliche Reduktionen umfassende; sie führt zum Produkt von zwei Aggregaten. Wo beide Handhabungen möglich sind, empfiehlt es sich die gruppenweise Zerlegung zu wählen. Die bisherigen Sätze für Produkte gelten fort, ob viel, ob wenig Faktoren Aggregate sind. — Vor dem Versuch der Reduktion von viergliederigen Aggregaten zu Produkten von zwei zweigliederigen resp. zu binomischen Faktoren sollte man sich vergewissern, ob man zum Ziele kommt bez. ob das Aggregat in zweifacher Weise aus zwei Vielfachen je eines Binoms zusammengesetzt ist, d. h. die Eigentümlichkeit des Aggregats der vier Glieder einer geometrischen Proportion zeigt. Bei allen bearbeiteten Beispielen dieser Art ist thatsächlich auch das Produkt von zwei bestimmten Gliedern des Aggregats gleich dem Produkt der zwei andern. Noch mehr; läßt man überall die Koëffizienten außer Spiel, so bleiben Glieder von der Art derjenigen einer geometrischen Proportion bestehen, und auch die Koëffizienten dieser Glieder halten eine eben solche Proportion ein. Wo ein viergliederiges Aggregat diese Merkmale nicht besitzt. kann gruppenweise Reduktion nicht gelingen.

Nr. 4. Zu verschiedenen Beispielen unter Nr. 3) Proben, zum Beispiel zu 34_4) die Probe mit $x = 3$; $y = -2$; $a = 1\frac{1}{4}$; $b = -1{,}25$!

Nr. 5. Ohne weiteres steht fest: Ein Produkt ist Null, sobald ein Faktor Null geworden ist[20]). Daraufhin zu ermitteln, unter welchen Umständen einzelne der unter Nr. 3 bearbeiteten Aggregate Nullwert erlangen!

...33) Das Aggregat ist 0 entweder, wenn x und y beliebig, etwa 3 und -4, sind und gilt $a - b + c = 0$, was beispielsweise der Fall ist, sobald außer $a = -5$ und $b = 4$ noch gilt $c = 9$; oder, wenn a, b und c beliebig, etwa $\frac{1}{2}; -\frac{1}{3}; -\frac{1}{6}$, sind und x der Gegensatz zu y, etwa $x = 5$ und $y = -5$ ist. — 34_5) Das Aggregat ist 0 entweder, wenn a und b beliebig, etwa 0 und 1, sind und $2m - 3p = 0$ bez. m und p sich wie $3:2$ verhalten; oder, wenn $21a + b = 0$ ist bez. a und $-b$ sich wie $1:21$ verhalten, während m und p beliebig sind.

Nr. 6. Proben zu Bestimmungen unter Nr. 5!

....33) I) Die festgesetzten Werte $a = -5, \ldots$ eingesetzt, so wird das vorgelegte Aggregat d. R. n. z..... II).... 34_5) I) Den Ermittelungen entspr. $a = 0$; $b = 1$; $m = 3E$; $p = 2E$ in das Aggregat eingesetzt, so k. d. R. n.

$$3(2 \cdot 0 + 7 \cdot 1)(2 \cdot 3E - 3 \cdot 2E) + 5(3 \cdot 0 - 4 \cdot 1)(2 \cdot 3E - 3 \cdot 2E) = 3 \cdot 7 \cdot 0 + 5 \cdot (-4) \cdot 0 = 0,$$

w. e. s. s.! II) hier kommt d. R. n.

$$3(2E - 147E)(2m - 3p) + 5(3E + 84E)(2m - 3p) = \cdots.$$

Nr. 7. B., S. 18 und 19, Auswahl unter 40) — 57_7)!

....44_2) Umformung:

$$3a(a-c)b - b(2b-3a)c - (3a-2c)b^2 + b^2 \cdot (5a+a)$$
$$= 3a^2b - 3abc - 2b^2c + 3abc - 3ab^2 + 2b^2c + 6ab^2$$
$$= 3a^2b + 3ab^2 = 3ab(a+b)$$

[21]). — Von welcher Art ist der vorgelegte Ausdruck, desgl. jede einzelne Umformung? Hier kam die nach dem Wortlaut von R selbstverständliche Regel zur Anwendung: Das Produkt von einem Aggregat mit einer Zahl stimmt überein mit dem Aggregat der Produkte[22]), welche man erhält, wenn man

jedes Glied jenes Aggregats mit der Zahl multipliziert[23]).

Nr. 8. B., S. 19, Auswahl aus 60) — 65) S. 20, Auswahl aus 110) — 110_2), S. 21, Auswahl aus 125) — 125_2) u. a.!

.... Dem Gang vieler Beispiele entspricht die folgende Regel: Das Produkt von zwei Aggregaten stimmt überein mit dem Aggregat von Produkten, welche man erhält, wenn man jedes Glied des einen von jenen Aggregaten mit einem jeden des andern multipliziert.

Nr. 9. Ausgezeichnete Produkte. Auswahl nach B., S. 19 und 20 aus 66) — 83) und 90) — 108) u. a.!

.... Vorstehend kann man zwei Arten von Beispielen, bei welchen die Auflösung wesentliche Abkürzungen erlaubt, unterscheiden. Bei der einen Art war stets ein Aggregat mit sich selbst zu multiplizieren, zu quadrieren, wie man sagt. Von gewissen Gliedern, welche man erhielt, stand im Voraus fest, daß sie ein zweites Mal vorkommen müssen[24]). Diesen Umstand berücksichtigt die Regel: Das Quadrat eines Aggregats stimmt überein mit demjenigen weiteren Aggregat, dessen Glieder die Quadrate aller einzelnen Glieder jenes Aggregats und die Doppelprodukte eines jeden seiner Glieder mit jedem vorhergehenden sind. Auch wenn ein Aggregat mit einem seiner Vielfachen multipliziert werden soll, leistet die Regel gute Dienste. — Im andern Fall stand sogleich fest, daß von gewissen Gliedern auch die Gegensätze erhalten werden und mit diesen entfallen. Dem entspricht die Regel: Das Produkt aus der Summe zweier Zahlen, gleichviel ob einfacher oder zusammengesetzter, mit deren Differenz stimmt überein mit der Differenz der Quadrate dieser Zahlen.

Nr. 10. Zerlegung trinomischer Stufen[25]).

$$2m^2 - 3m - 4m + 6 = m(2m - 3) - 2(2m - 3)$$
$$= (2m - 3)(m - 2); \ldots.$$
$$3 - 70x^2 - 29x = 3 + 6x - 35x - 70x^2$$
$$= 3(1 + 2x) - 35x(1 + 2x) = (1 + 2x)(3 - 5x);$$
$$3 - 70x^2 + 29x;\ 70x^2 + 3 + 29x;\ 70x^2 - 29x + 3;\ \ldots\ldots$$

$$6(a+2b)^2x^2-5(2b+a)^4x+8x^4$$
$$=8x^4-4(a+2b)^2x^3+10(a+2b)^2x^3-5(a+2b)^4x^2$$
$$=4x^3\{2x-(a+2b)^2\}+5(a+2b)^2x^2\{2x-(a+2b)^2\}$$
$$=x^2(2x-a^2-4ab-4b^2)(4x+5a^2+20ab+20b^2);$$
$$4x^4-36y^2z^6=4x^4-12x^2yz^3+12x^2yz^3-36y^3z^6=\ldots{}^{26}).$$

Bemerkungen. Dreigliederige Aggregate, von welchen die Glieder in eine Reihenfolge gebracht werden können, daß bez. einer oder mehrere Arten unbestimmter Faktoren gleichmäßige Abminderung bez. Mehrung in der Häufigkeit des Vorkommens von Glied zu Glied beobachtet wird, heißen gestufte Trinome oder trinomische Stufen. — Im ersten der obigen Beispiele könnte das Aggregat auf eine trinomische Stufe zusammengezogen werden (m bez. m^1 ist die zu beobachtende Minderung des Faktorenbestandes bez. die Abstufung des Trinoms von Glied zu Glied). Doch sähe man der neuen Form nicht unmittelbar an, daß sie reduktionsfähig ist. Jene Form dagegen besitzt die unter Nr. 3 hervorgehobenen Merkmale dafür. Man weiß jedoch unter Benützung des Umstandes, daß der Koëffizient der Zwischenstufe die Summe von einem Faktorenpaar des Produkts derbeiden andern Koëffizienten ist, die trinomische Stufe zum reduktionsfähigen viergliederigen Aggregat umzuformen und gelangt dadurch zur Reduktion der Stufe selbst. Der Vergleich des allgemeinsten Produktes von Aggregaten, welches trinomische Stufen liefert, mit der Reihe der Übergänge zu seiner kurrenten Form bestätigt die Richtigkeit der für den einzelnen Fall passenden Auflösungsweise für jeden anderen denkbaren Fall. Man hat nämlich

$$(A_1X+B_1)(A_2X+B_2)=A_1A_2X^2+A_2B_1X+A_1B_2X+B_1B_2$$
$$=A_1A_2X^2+(A_2B_1+A_1B_2)X+B_1B_2.$$

— Auf die Koëffizienten kein Gewicht gelegt, so ist die Zwischenstufe eines gestuften Trinoms die mittlere geometrische Proportionale zu den zwei andern. Ein solches Trinom ist demnach reduktionsfähig auf Grund des weiteren Umstandes, daß der Koëffizient der Zwischenstufe die Summe von zwei Faktoren ist, in welche das Produkt der andern Koëffizienten zerfällt. Die günstige Zerspaltung der Zwischenstufe wird dadurch möglich.

Nr. 11. Bestimmungen zu 0 an einzelnen unter Nr. 10 bearbeiteten trinomischen Stufen! Proben!

Nr. 12. Eine Großmutter und ihr Enkel, welcher das Gymnasium besucht, während die Großmutter ungewöhnliche mathematische Kenntnisse besitzt, reisen mit einander und werden von einem Mitreisenden lästig ausgefragt, zuletzt über ihr Alter. Da antworteten sie das Gleiche und dennoch richtig. Der Fragende hält sich für gefoppt und stellt das Fragen ein. Wie alt war jedes, indem die Antwort gleicher Weise gelautet hat: Die 85fache Menge meiner Jahre ist 1050 mehr als dieselbe mit ihr selbst multipliziert?[27]).

Das Alter der gefragten Person zu x Jahren angenommen, so ist die 85fache Menge der Jahre 85 x; sie ist aber auch die mit sich selbst multiplizierte und noch um 1050 erhöhte Menge; sie ist $x^2 + 1050$; daher muß sein

$85x = x^2 + 1050$ bez. $x^2 - 85x + 1050 = 0$ bez.
$x^2 - 15x - 70x + 1050 = 0$ bez. $x(x-15) - 70(x-15) = 0$
bez. $(x-15)(x-70) = 0$ bez. entweder $x - 15 = 0$,
also $x = 15$ oder $x - 70 = 0$, also $x = 70$.

Die Großmutter konnte nur 70, der Enkel blos 15 Jahre alt sein.

Kapitel II a.

Division. Gebrochene Zahlen.

Nr. 1. Wie erhält man $4a$; $-a^4$; $-2a^2bc$; $4a + a^4$ und $2a^2(1-a)$ aus a!

Man erhält das Gewünschte, wenn man 4; $-a^3$; $-2abc$; $4 + a^3$; $2a(1-a)$ zu a als Faktor stellt, bez. a damit multipliziert. — Das Multiplizieren ist angewiesen und (abgesehen von möglichen Vereinfachungen) vollzogen durch bloßes Nebeneinanderstellen der Faktoren[28]). Indessen muß die Verwechselung von nachfolgenden Faktoren mit nachfolgenden Zählungen (vergleiche Kapitel I, Nr. 11) vermieden werden. Darum: falls ein nachfolgender Faktor + oder − als Vorzeichen führt, wird er mit diesem in eine Umschließung gefaßt (Vergl. die durchgeführten Proben).

Nr. 2. Wie erhält man α) x, wie β) $-x$ aus x^2; $4\,bx^3$; $-2\,c^2x^4$; $-4\,x\,(m+n)$; $a\,(x+x^2)$?

Man erhält das Gewünschte, wenn man aus den gegebenen Produkten die Partialprodukte

α) x; $4\,bx^2$; $-2\,c^2x^3$; $-4\,(m+n)$; $a\,(1+x)$,

β) $-x$; $-4\,bx^2$; $2\,c^2x^3$; $4\,(m+n)$; $-a\,(1+x)$ fortläßt bez. jene Produkte durch diese Partialprodukte dividiert. Die Division liefert durch Fortlassen eines Partialproduktes aus einem Produkt das ergänzende Partialprodukt.

Bemerkungen. Angewiesen und (abgesehen von etwaigen Vereinfachungen[29]) vollzogen ist die Division, wenn man dem aus allen bereitgestellten bezw. gebotenen Faktoren geknüpften Produkt, dem Dividenden, die Anfangsstellung bei (vor bez. über) einem Divisionszeichen[30]) (: bez. —), dem Partialprodukt der fortzulassenden Faktoren, dem aus Einzeldivisoren geknüpften Divisor, die Endstellung daselbst gibt. Der so erhaltene Ausdruck, gleichviel wie weit der Divisionsanweisung im besonderen entsprochen ist, bedeutet das Produkt der verbleibenden Faktoren, das ergänzende Partialprodukt, und heißt Quotient. — Was die Multiplikation an Faktoren zusammenknüpft, knüpft die Division wieder los. Darum sind die beiden Rechnungsweisen des Faktorenknüpfens entgegengesetzter Art, ähnlich wie die zwei einander entgegengesetzten Weisen des zusammengesetzten Zählens. Auch sie machen einander wirkungslos, wenn sie im nämlichen Zusammenhang auftreten und die nämliche Zahl als Faktor da an- und losknüpfen. Aus dem Wechselverhältnis von Multiplikation und Division erklärt sich jetzt ohne weiteres, was im Musterbeispiel beobachtet wird: Dividiert man statt durch eine Zahl durch den Gegensatz, so erhält man auch den Gegensatz des Quotienten. — Zwei Hauptaufgaben der angewandten Größenlehre werden durch Division gelöst. Die eine ist die Messung, die andere die Theilung. Bei jener will man aus dem Wert und dem Was das Wie der Wiederholung, bei dieser aus dem Wert und dem Wie das Was bestimmen. Weil aber das Wie und das Was die Rollen tauschen können, ergibt sich für beide Bestimmungen nur eine einzige Durchführung. In Ansehung dessen ist der Gebrauch von zwei Divisionszeichen (: für die Messung, — für die Teilung[31]) etwas recht überflüssiges. Die im übrigen verblaßte Tradition macht sich noch bei den Verhältnisgleichungen bez. Proportionen bemerklich, wo „:" das herrschende Zeichen geblieben ist. — Man hat $12:4=3$ und auch $\frac{12}{4}=3$. Im ersten Fall konnte es sich nach früherem Gebrauch darum handeln, wie oft sind 4^h in 12^h enthalten bez. welche Zahl paßt für 12^h, wenn für 4^h als Einheit der Messung das Einheitszeichen 1 verwendet wird? Die Antwort lautet 3; denn 3 von den erwählten 1, eben 4^h, gezählt gibt 12^h. Im zweiten Fall mochte nach dem 4. Teil von 12 Tagwerk gefragt gewesen sein, welchen jeder von vier Gleichberechtigten davon erhalten darf. Man findet 3 u. z. Tagwerk.

Nr. 3. Die Divisionen unter Nr. 2 und z. d. Reihe α) mit Gebrauch des :, die Reihe β) mit — möglichst vollkommen durchzuführen!

....Die Erledigung der Frage, was würde man erhalten, wenn x bez. —x als Divisoren verwendet werden, schafft Gewißheit über die Geltung der aus dem Rechenunterricht geläufigen Regeln: 1) Dividend durch Quotient gibt den Divisor. 2) Quotient mal Divisor gibt den Dividenden. Sie treffen bei der Durchführung der Division im Sinn des —, also fortan stets, zu.

Nr. 4. B., S. 24—26, 3; 8; 13;....38!

....Gleich bei den ersten Beispielen zeigt sich: Ein Bruch hat den nämlichen Sinn wie das Produkt von anderen Brüchen, auf deren Zähler und Nenner sein Zähler bez. Nenner faktorenweise verteilt ist. Jeder Bruch darf damit gelten als ohne weiteres ablesbares Produkt von Brüchen[32]). Bei einzelnen Beispielen ergab sich die Regel: Der Quotient gleicher bez. entgegengesetzter Zahlen ist die positive bez. negative Einheit. Zuletzt erfährt man noch, daß es eine dreifache Stellung für gebotene Faktoren und auch eine dreifache für fortzulassende Faktoren bez. für Divisoren gibt. Die dreifache Faktorenstellung ist: 1) die selbständige, 2) die im Dividenden eines Bruchfaktors (eines Bruches, welcher selbst Faktor ist), 3) die im Divisor eines Bruchdivisors (eines Bruches, welcher selbst Divisor ist). Die dreifache Divisorenstellung ist: 1) die selbständige, 2) die im Divisor eines Bruchfaktors, 3) die im Dividenden eines Bruchdivisors. (Erinnerung an hieher gehörige Beispiele im Rechnen mit gemeinen Brüchen.)

Nr. 5. B., S. 26, 43; 48; 49 u. a.!

....Hier folgt als Analogie zu Regel im Kap. II, Nr. 7: Der Quotient aus einem Aggregat und einer Zahl stimmt überein mit dem Aggregat von denjenigen Quotienten, welche man erhält, wenn man jedes Glied des Aggregats durch die Zahl dividiert[33]).

Nr. 6. B., S. 26 und 27; 54; 56; 58 u. a.!

$....76_2)$

$$(0{,}06\,m^2+0{,}01\,mn-0{,}18\,mp-18{,}2\,n^2+13{,}57\,np-2{,}4\,p^2)$$
$$:(1{,}5\,p-5{,}2\,n+0{,}3\,m)$$
$$=\frac{0{,}06\,m^2+0{,}01\,mn-0{,}18\,mp-18{,}2\,n^2+13{,}57\,np-2{,}4\,p^2}{0{,}3\,m-5{,}2\,n+1{,}5\,p}$$
$$=\mathbf{0{,}2\,m+3{,}5\,n-1{,}6\,p}, \text{ w. g. i.}^{34)}$$

Nebenrechnungen:

$$+1{,}05\,mn-0{,}48\,mp \qquad\qquad +\;8{,}32\,np$$

I. $0{,}06\,m^2:0{,}3\,m=0{,}2\,m;\quad {}_{-}0{,}06\,m^2\mp1{,}04\,mn\pm0{,}3\,mp;$

II. $1{,}05\,mn:0{,}3\,m=3{,}5\,n;\quad {}_{-}1{,}05\,mn\mp18{,}2\,n^2\pm5{,}25\,np;$

III. $-0{,}48\,np:0{,}3\,m=-1{,}6\,p;\mp0{,}48\,mp\pm8{,}32\,np\mp2{,}4\,p^2.$

— Bei der Division von Aggregaten durch einander, fällt es oft schwer die zur Vereinfachung des Quotienten notwendigen Reduktionen der Aggregate zu gewinnen. Da leistet derjenige Mechanismus, dessen Einrichtung seit der Division von Dezimalzahlen bekannt ist, vorzügliche Dienste. Er leistet: 1) die zur Reduktion des Dividenden taugenden Gruppen kommen mit der Reihe der Einzeldivisionen zum Vorschein, 2) zugleich entsteht der aus den Gruppen jeweils ausscheidende Faktor als Glied des Quotienten. — Wenn es noch einen Sinn hätte, könnte man nachträglich die Division streng im Sinne des Quotientenbegriffs durchführen.

Nr. 7. B., S. 27, ~~2~~78) mit den drei Proben! Bei der Zahlenprobe ev. $x=1; y=-6; z=-2$!

Nr. 8. Welchen Wert hat der Ausdruck B., S. 27, $79_{1)}$ im Fall von $a=2; b=4; x=-5$?

Die Bestimmung am Ausdruck selbst versucht, erhält man $0:0$. Erst dividiert und dann bestimmt, so kommt $16\frac{23}{30}$ als wirklicher Wert des Ausdrucks im Spezialfall der angegebenen Werte.

Bemerkungen. $\frac{0}{0}$ erweist sich bei näherer Überlegung (vergl. die Engelsurteile in der Einleitung) als genau so unbestimmt wie a oder im allgemeinen ein Buchstabenausdruck. Was in einem Quotienten überflüssiger Weise zugleich als Faktor und Divisor steht, ist für die Wertbestimmung belanglos. Ist es unbestimmt, so kann es bei der Bestimmung alles mögliche und je nachdem auch 0 sein. Wird es nicht entfernt, so muß es nach dem einen (welchem?) Nullsatz den Dividenden und den Divisor in 0 übergehen machen; der Quotient erscheint dabei als $\frac{0}{0}$. Eine Bestimmung ist jedoch nicht erreicht. Soll dieselbe gelingen, so muß vorerst gehoben werden. Gerade das Auftreten des Quotienten in solch unbestimmter Form ist sicheres Anzeichen, daß sich heben läßt. — Man hat ein Mittel gewonnen, um Quotienten, von welchen der Dividend oder Divisor reduziert oder reduzierbar ist, möglichst zu vereinfachen. Stellt man fest, unter welchen Umständen der einzelne Faktor der Reduktion zu 0 wird, und bestimmt mit den gefundenen Werten den Quotienten, so wird derselbe zu $\frac{0}{0}$ oder wird es nicht. Im ersteren Fall läßt sich durch den zu 0 bestimmten Faktor heben.

Nr. 9. B., S. 32—35, 3; 8; 13 und sonstige!

$$3)\ \frac{3a}{m}-\frac{2a}{m}+\frac{a}{m}=\frac{a}{m}(3-2+1)=\frac{2a}{m};\ldots\ldots$$ [35]

$$73)\ \frac{2x-3}{3x-3}-\frac{3x-1}{4x+4}+\frac{2+x}{1-x^2}$$

$$=\frac{2x-3}{3(x-1)}\underset{+}{-}\frac{\underset{-}{}3x\mp1}{4(x+1)}+\frac{\underset{-}{}2\underset{-}{+}x}{(-1\mp x)(1+x)}$$

$$=\frac{1}{12(-x^2\mp1)}\{\underset{-}{}8x^2\underset{+}{-}12x\underset{-}{+}8x\underset{+}{-}12\underset{+}{-}9x^2\underset{-}{+}3x\underset{-}{+}9x$$

$$\underset{+}{-}3\underset{+}{-}24\underset{+}{-}12x\}=\frac{x^2+4x+39}{12(1-x^2)}.\ldots$$ [36]

— Wenn ein Aggregat auch nur einzelne Bruchglieder aufweist, heißt es Bruchaggregat und mit Recht. Denn schließlich steht jedes nicht ausdrücklich gebrochene Glied für einen Bruch mit Nenner 1. Ein Bruchaggregat läßt man aber grundsätzlich nie unverändert stehen, sondern ersetzt es durch einen einzigen Bruch. Dieses geschieht im folgenden Gedankengang. Was Divisor in einem Bruchglied ist, dieses ist, entweder ausdrücklich angegeben oder in einstweilen gehobener Form, Divisor bei allen anderen. Nun erlaubt der Wortlaut von R (oder vielmehr R ist gerade mit Rücksicht auf diese Anwendung so formuliert) diesen Divisor, mit dem Stammfaktor 1 zu einem Bruchfaktor vereinigt, auszuscheiden neben die Umklammerung des Aggregats, ohne den Bruchfaktor in den einzelnen Gliedern zu wiederholen. Wenn dem umklammerten Aggregat noch die Stellung im Dividenden des ausgesetzten Bruchfaktors angewiesen wird (vergl. Nr. 4), so ist der Zweck erreicht. — Die Gesamtheit der ausgeschiedenen Einzeldivisoren resp. der Divisor des zuletzt erhaltenen Bruches heißt Hauptnenner des Bruchaggregats. Derselbe ist ein Vielfaches von jedem einzelnen Divisor und auch ein Vielfaches von jedem einzelnen Nenner — wenn man achtsam verfährt, das kleinste gemeinsame Vielfache von sämtlichen Bruchsnennern. — In manchen Fällen empfiehlt es sich aber, ein größeres gemeinschaftliches Vielfaches als Hauptnenner zu wählen.

Nr. 10. Gemischte Übungen, B., S. 31 und 32, 3) 8) 13) und sonstige.

.... Der Quadraten-Differenz nächstverwandte kurrente Formen treten in den Beispielen auf. Ja, jene Form erweist sich als die einfachste in der ganzen Formengruppe. Alle sind ausgezeichnete Stufen und Auflösungen von ausgezeichneten Produkten. Ist n eine ganze positive Zahl[37]), so ist $a^n - b^n$ ausgezeichnete Stufe von $n + 1$ Gliedern; nur sind wie bei der Quadraten-Differenz alle Zwischenstufen mit dem Koëffizienten 0 versehen und kommen deshalb nicht zum Vorschein. Wie dort kann man jede Zwischenstufe zum Beispiel $0 \cdot a^{n-3} b^3$ in der Form $-a^{n-3}b^3 + a^{n-3}b^3$ hervortreten lassen. Wie dort ist die gruppenweise Reduktion an der

Reihe der Gliederpaare angängig und führt dabei zu $a^n - b^n = (a-b)(a^{n-1} + a^{n-2}b + a^{n-3}b^2 + \cdots + ab^{n-2} + b^{n-1})$. Den Befund spricht man als Hauptteilbarkeitsregel der Algebra aus wie folgt: Die Differenz von zwei Potenzen mit gleichen positiv ganzen Exponenten ist durch die Differenz von den ersten Potenzen der zwei Grundzahlen teilbar. Der ergänzende Teiler ist derjenige vollständige stufenförmige Übergang zwischen den nächst niederen Potenzen der zwei Grundzahlen, in welchem jeder Stufenkoëffizient $+1$ ist. — Zusätzliche Teilbarkeitsregeln erhält man, wenn man $-b$ an die Stelle eines jeden Faktors b setzt u. z. für den Fall, daß n eine gerade Zahl ist, eine eigene und für ungerades n eine weitere. Der Nachweis erfolgt wie oben; nur muß die Einschaltung der Nullstufen so vollzogen werden, daß immer ein paar positive und negative Glieder abwechseln. Mit Beachtung dessen erhält man für gerades n dabei $a^n - b^n = (a+b)(a^{n-1} - a^{n-2}b + \cdots + ab^{n-2} - b^{n-1})$; für ungerades n entsteht

$$a^n + b^n = (a+b)(a^{n-1} - a^{n-2}b + \cdots - ab^{n-2} + b^{n-1}).$$

Hienach ist es leicht, Zusatzregeln zu formulieren[38]. — Den Überblick über die Gesamtheit der Regeln und der nebenher gehenden Nichtteilbarkeitsregel erzielt man, wenn man die Frage, ob die Summe bezw. Differenz von zwei n^{ten} Potenzen 1. durch die Summe, 2. durch die Differenz der zwei Grundzahlen rational[39] teilbar ist, beantwortet für positives gerades n zu 1. mit „nein" bez. „ja", zu 2. mit „nein" bez. „ja", für positives ungerades n zu 1. mit „ja" bez. „nein", zu 2. mit „nein" bez. „ja".

Kapitel II.[40]

Bestimmungsaufgaben 1. Grades. Bestimmungen aus Systemen 1. Grades.

Sollen Bestimmungsaufgaben systematisch bearbeitet werden, so muß man sich klar sein, was erreicht werden soll. Man will aber an Stelle der Forderungen, welche an die unbestimmten Zahlen im Hinblick auf die mitverbundenen bestimmten geknüpft sind, einfachste bestimmte Aussagen über jede von jenen Zahlen erhalten. Vereinfachung der in Gleichungsform vorliegenden Forderungen wird sonach erstrebt. Die Vereinfachung kann jedoch nur erzielt werden durch Vereinigung von Zählungen zu einer einzigen. Das Mittel dafür ist das Zusammentransponieren der bestimmten Zählungen weg von den unbestimmten und dann nachfolgende Berechnung oder Reduktion, im wesentlichen also Gliedertransposition. Oder sie wird erreicht durch Zusammentransponieren aller bestimmten Faktoren weg von ihrer Verknüpfung mit allen unbestimmten, hier also durch eine Faktorentransposition[41]). Diese Hauptschritte zu ermöglichen sind oft vorbereitende Schritte, nämlich Klammer-, Bruch-, Wurzelreduktion fort, notwendig. Nur, wenn Reduktionen den Hauptschritten hinderlich sind, werden die geeigneten vorbereitenden Schritte unternommen. Wenn man die Aussicht hat, eine einzige Verknüpfung von Unbestimmten mit Bestimmten als Ersatz für eine Unbestimmte zu erhalten, reduziert man sogar[42]). Die Unbestimmte erhält man nachträglich leicht. Neben dem allgemeinen Lösungsweg bietet sich gelegentlich ein bequemer sonstiger Weg, welcher der speziellen Natur der Gleichungen, der Bestimmungsstücke, angepaßt ist. Auch einen solchen Weg muß man einschlagen können. Aus der Fülle von Aufgaben, welche die Sammlungen und namentlich Bardey[43]) bieten, im Folgenden nur bemerkenswertere:

B., S. 103, 116) E. s. s. $\frac{7}{3}+\frac{13}{5x}=\frac{13x-24}{3x}-\frac{37}{20}+\frac{10}{x}$ bez. $\frac{7}{3}+\frac{13}{5}\cdot\frac{1}{x}=\frac{13}{3}-8\cdot\frac{1}{x}-\frac{37}{20}+10\cdot\frac{1}{x}$ bez. $\frac{3}{5}\cdot\frac{1}{x}=\frac{3}{20}$ bez. $\frac{1}{x}=\frac{1}{4}$ bez. $x=\mathbf{4}$, w. g. i. — Die Ausführung der Division bei dem 1. Glied rechts erlaubt $\frac{1}{x}$ als Unbestimmte an Stelle von x zu verwenden und erleichtert überdies die Vereinigung der bestimmten, desgleichen der unbestimmten Zählungen je zu einer einzigen, wobei der vorbereitende Schritt „Bruchreduktion-Fort“ entbehrlich wird. Ohne dieses hätte die Gleichung mit einem Vielfachen von x erweitert werden müssen. Dabei hätte man riskiert mit einer Zahl, welche möglicher Weise 0 ist, zu multiplizieren. Während nun die nämlichen Vielfachen von Gleichen bez. Ungleichen sonst gleich bez. ungleich sind, besitzen die 0-fachen von Gleichen und Ungleichen den Wert 0. Wäre ein die Fortdauer der Gleichheit störender Schritt bereits unternommen worden, so würde sich derselbe nach der Multiplikation nicht mehr bemerklich machen[44]), die Auflösung aber für richtig gelten. — B., S. 103, 123) E. s. s. $\frac{3x-1}{2x-6}+\frac{5x-7}{3x-9}+\frac{7x+1}{4x-12}=11$ bez. $\frac{1}{12(x-3)}\left\{18x-6+20x-28+21x+3-132x+396\right\}=0$ bez. $\frac{365-73x}{12(x-3)}=0$ bez. $\frac{73}{12}(5-x)\cdot\frac{1}{x-3}=0$, also $x=5$, wobei $\frac{1}{x-3}$ zu $\frac{1}{2}$ wird, oder $\frac{1}{x-3}=0$ bez. $x=\infty$ d. i. ein aus dem endlichen Bemessungsbereich fallender, also an sich unbrauchbarer Wert, aber auch sonst ungeeignet, da es kein Unendlich gibt, welches gegenüber seinem um 2 vergrößerten Gegensatz verschwindet. Eine unzulässige Forderung ist in die Gleichung nebenher eingeflochten. — Daraufhin darf in ähnlichen Fällen die Lösung mit Erweitern der Gleichung[45]) als zweckmäßigstes gelten, nämlich: E. s. s. .... bez. $18x-6+20x-28+21x+3=132x-396$ bez. $365=73x$ bez. $x=\frac{365}{73}=5$, w. g. i. — B., S. 104, 128)

E. s. s. $\frac{\frac{2}{5}(x-4)}{\frac{3}{8}(3x+5)}=\frac{1}{6}$ bez. $\frac{x-4}{3x+5}=\frac{5}{32}$ bez. ..... Nach Beseitigen der lästigen Bruchsbruchform mittels Faktorentransposition (häufiger geschieht es durch Erweitern der Form mit dem Hauptnenner zu allen in ihr vorkommenden Nennern resp. durch Multiplizieren derselben mit demjenigen 1, dessen Zähler und Nenner Hauptnenner zu jenen ist) besitzt die Gleichung die Form einer für manche Anwendungen wichtigen Produktengleichung, nämlich diejenige einer Verhältnisgleichung bez. Proportion. Was an Regeln über Proportionen das bürgerliche Rechnen kennt, erklärt sich durch die Faktorentransposition. Das gilt z. B. von der Regel für die Verwandlung in eine Produktengleichung des engeren Sinnes. — Eine Zahl enthält a so gut wie b als Faktor. Ist der ergänzende Faktor β bez. α, so ist die Zahl $a\beta$, sie ist auch $b\alpha$; daher gilt $a\beta = b\alpha$. Nun stimmen a und b nur in einem Teil der für die Zahl ausdrücklich anzugebenden Faktoren überein. $\frac{a}{b}$ ist das Verhältnis der a und b unterscheidenden Partialprodukte. Die Faktoren von b, welche a fehlen, finden sich in β; diejenigen von a, welche b fehlen, in α; sonst stimmen α und β überein; also ist auch $\frac{\alpha}{\beta}$ das Verhältnis der a und b unterscheidenden Partialprodukte. Es gilt $\frac{a}{b} = \frac{\alpha}{\beta}$. Ferner gilt $\frac{ka}{b} + l = \frac{k\alpha}{\beta} + l$ bez. $\frac{ka + lb}{b} = \frac{k\alpha + l\beta}{\beta}$; ebenso $\frac{ma + nb}{b} = \frac{m\alpha + n\beta}{\beta}$; und komparient bez. dividiert, $\frac{ka + lb}{ma + nb} = \frac{k\alpha + l\beta}{m\alpha + n\beta}$. Es heißt aber eine im Sinn dieser Herleitung unternommene Umformung einer Proportion im allgemeinen **Proportionsreduktion**; im besonderen Fall von $k = l = m = -n = 1$ nennt man sie wohl auch **korrespondierende Addition und Subtraktion**. Das Verfahren ist für gewandte Rechner ein reizvolles Mittel zur Vereinfachung von Proportionen. Im obigen Beispiel würde $k = 5$; $l = +4$; $m = 3$; $n = -1$ am besten entsprechen und führen zu $\frac{17\,x}{17} = \frac{153}{17}$ bez. $x = 9$, w. g. i. — B., S. 109, 296)

E. s. s. $\frac{2x^2 - 3x + 5}{7x^2 - 4x - 2} = \frac{2}{7}$ bez. $\frac{3\,x - 5}{4\,x + 2} = \frac{2}{7}$ bez. $21\,x - 35 = 8\,x + 4$ bez. $13\,x = 39$ bez. $x = 3$, w. g. i! Zähler und Nenner des Bruches müssen 2- bez. 7-fache des nämlichen sein; sie sind es nur, wenn $3\,x - 5$ und $4\,x + 2$ ihrerseits 2- bez. 7-fache einer einzigen Zahl sind. — B., S. 204, 19) E. s. s. $a\,x + by = c$[46]). Drückt man x oder y aus, so erhält man y bez. x haltende, also noch immer unbestimmte Ausdrücke, welchen man nur entnehmen kann, in welcher Abhängigkeit von y bez. x das indepedente x bez. y steht. Zwei Zahlen zu ermitteln reicht eine einzige an ihr Auftreten geknüpfte Forderung, ein Bestimmungsstück, nicht aus. Ein zweites, welches aber keine Wiedergabe des ersten in abgeänderter Form und auch keinen Widerspruch gegen dasselbe vorstellen darf, ist zur ausreichenden Bestimmung notwendig. Wir entscheiden wie folgt: Entweder sind x und y gleich oder sie unterscheiden sich. Nehmen wir an $x-y=\triangle$, so drückt dieses die zweite Eventualität aus; aber auch die erste, welche im besonderen Fall von $\triangle=0$ aus jener hervorgeht. Wir haben jetzt die Möglichkeit x und y so zu bestimmen, daß sie sich um ein beliebiges $\triangle$ unterscheiden. E. s. s. 1) $ax+by=c$; 2) $x-y=\triangle$ bez. $bx-by=b\triangle$; beides addiert, so kommt

$$(a+b)x=c+b\triangle \text{ bez. } x=\frac{c+b\triangle}{a+b}=\frac{c-a\triangle}{a+b}+\triangle;$$

ferner $y=\frac{c+b\triangle}{a+b}-\triangle=\frac{c-a\triangle}{a+b}$, w. z. i. — Vorstehend wurde eine diophantische (Haupt-)Gleichung bearbeitet. Im Lehrplan sind solche Gleichungen nicht vorgeschrieben. Immerhin ist die Bearbeitung von einigen einfacheren, namentlich wenn man sich auf die gewöhnliche Nebenbedingung, daß x und y nur ganze positive Zahlen sein dürfen, einschränkt, sehr zu empfehlen. Die Einsicht in das Wesen der Bestimmungsaufgaben wird wesentlich gefördert. Der Zeitaufwand ist gering; denn rasch addiert man zu c die einfachsten Vielfachen von b, bez. subtrahiert von c die einfachsten Vielfachen von a, bis man bei einem $\triangle$-fachen anlangt, welches die Summe bez. Differenz zu einem Vielfachen von $a+b$ macht[47]) und damit x bez. y liefert; y ist um $\triangle$ kleiner bez. x um $\triangle$ größer. Den allgemeinen Auflösungen entnimmt man noch, daß eine Änderung von $\triangle$ um $k(a+b)$ von einer Änderung des x um kb, des y um $-ka$ begleitet ist. — B., S. 157, 24)

E. s. s. 1) $21x+8y+66=0$; 2) $23y-28x+13=0$. Man fühlt sich versucht, von dem eben Erkannten Gebrauch zu machen und das aus jeder Gleichung für x ev. y Erhaltene gleich zu setzen (Komparationsmethode). Man bekommt

$$x=\frac{-66+8\triangle}{29}=\frac{13-23\triangle}{5} \text{ bez. } -330+40\triangle$$

$$=377-667\triangle \text{ bez. } \triangle=1; \text{ also } x=\frac{-58}{29}=-2$$

und $y=-2-1=-3$. Bequemer ist es jedoch, die Methode des vorigen Beispiels wieder anzuwenden, die Methode des Hauptkoëffizienten[48]) resp., wie man sie noch nennt, die Additionsmethode bez. die Eliminationsmethode. Man erhält, die Gleichungen mit 4 bez. 3 erweitert und dann addiert,

d. R. u. 3) $(4 \cdot 8 + 3 \cdot 23)y = -4 \cdot 66 - 3 \cdot 13$ bez. $y = -\frac{303}{101} = -3$ und dieses in 1) gesetzt $x = \frac{-66 + 24}{21} = -2$, womit die Aufgabe gelöst ist. — Auch bei Systemen von 3; 4; 5; ... Gleichungen 1. Grades zur Bestimmung von 3; 4; 5; ... Unbekannten wendet man die Methode an, oder wendet je nach der Eigenart des Systems eine andere schon benützte Methode (Substitutionsmethode, Komparationsmethode, Methode der Verhältniseinheit E) an. In besonders ausgezeichneten Fällen[49]) (streng analoger Bau der Gleichungen) bildet man die Summengleichung, welche unter Verknüpfen mit jeder einzelnen Gleichung häufig sofort die Reihe der Unbekannten liefert, u. s. w. Was für eine Methode man aber auch anwendet, ab und zu stößt man auf ein System, für welches Lösungen nicht erhalten werden können, weil Forderungen anderen widersprechen[50]) oder auf das nämliche wie die anderen hinauslaufen. — Zu einem richtigen System 1. Grades z. B. von vier Gleichungen 1) 2) 3) 4) für vier Unbekannte $w; x; y; z$ erhält man die Lösungen, wenn man zunächst die Gleichungen 5) 6) 7) dort aussucht und, soweit dieses nicht geht, durch irgend eine Methode bildet, in welchen z nicht vorkommt [z etwa darum, weil es den Gleichungen 1)—4) öfter fehlt. Oder sein Hauptkoëffizient erlaubt die bequemste Rechnung. U. dgl.]. Aus 5) 6) 7) bildet man 8) und 9), etwa ohne w. Dann 10) auch noch ohne x bez. y, aus der man also y bez. x findet. Zurück hierauf zu 8) oder 9), bekommt man x bez. y. Zurück nach 5) oder 6) oder 7), kommt w. Endlich z. [Während man nach Abschluß des Divisionskapitels der Systematik der Gleichungen ausschließlich die Zeit widmet, wendet man sich allmählich der Potenzlehre u. z. in der Weise zu, daß die erforderlichen Grundlagen gesichert sind, wenn man vor den Gleichungen mit Wurzelreduktionen und den Exponentialgleichungen steht].

Kapitel IIIa.

ϱ. Potenz- und Wurzelrechnung.

Nr. 1. Aus dem Wortlaut von ϱ, durch welchen Formen wie

a^7; a^m; b^n und dgl. verständlich werden, und den Erklärungen in Kap. II, folgt unmittelbar die Richtigkeit von

$$a^7 a^m a^x \cdots = a^{7+m+x+\cdots}; \quad \frac{b^r}{b^s} \cdot b^8 = b^{r-s+8};$$

$(ab\cdots)^n = a^n b^n \cdots$; $(a^m)^n = a^{mn}$ u. s. w. Eine Reihe von zutreffenden Regeln ließe sich leicht aufstellen. Aber die bloße Deutung der Formen führt, ohne die richtige Auffassung zu unterbrechen, eben so sicher zum Ziel, will man eine derselben in ihrer Verknüpfung mit anderen gebührend würdigen. So mag also die Aufstellung von Regeln unterbleiben. Dagegen taucht sofort die Frage auf, ob nicht bei Beispielen nach der Art des obigen zweiten Einschränkungen vorkommen u. z. bez. des Exponenten s, nämlich ob s jede positive ganze Zahl sein kann z. B. 20, wenn $r = 7$ gilt. Aus obiger Gleichung entstünde da nämlich $\frac{b^7}{b^{20}} \cdot b^8 = b^{7-20+8} = b^{-5}$. Mit dem Ergebnis weiß man aber nach dem Wortlaut der Regel nichts anzufangen. Andererseits erhält man auf dem gewöhnlichen Weg der Vereinfachung von Faktorenknüpfungen $\frac{1}{b^5}$. Sofort bemerkt man, daß b^{-5} in überraschend einfacher Weise den richtigen Sinn wiederspiegelt, nämlich daß 5 Faktoren b aus der ganzen Verknüpfung von Faktoren, welcher die ursprüngliche Form einverleibt ist — mindestens gehört noch die Gesamtheit aller Faktoren in 1 dazu —, mit Rücksicht auf diese Form entfallen sollen. Was 5 in b^5 anweist, dessen Gegenteil weist der Gegensatz von 5, weist -5 bei b^{-5} an. b^{-5} hat den Sinn von 5 Divisoren b für die Verknüpfung von Faktoren, in welcher es steht. Wir folgern jetzt: 1) Ein Potenzexponent darf eine ganze negative Zahl sein. 2) Man kann auf die zwei Divisionszeichen verzichten. 3) Mit Gebrauch negativer Exponenten, um Divisoren zu kennzeichnen, fällt der äußere Unterschied von Multiplikation und Division fort und kommt ihr Zusammengehören zu einer Rechnungsstufe zum vollständigen Ausdruck. 4) 4^0; b^0 und dergl. sind neue Formen von 1, welche ausdrücken, daß 4 und b im besonderen Fall nicht erforderlich sind 1 zu bestimmen. 5) Erhält man eine Regel für Transposition innerhalb einer in Quotientenform vorliegenden Faktorenknüpfung: Der Exponent einer über das Divisionszeichen transponierten Potenz verwandelt sich dabei in seinen Gegensatz.

Nr. 2. Welche Bedeutung hat 2 in $64 = 2^6$?

Indem 64 von jeder Art Faktoren, welche 2 zusammensetzen, sechsmal soviel in sich birgt als 2, begreift 2 nur immer den sechsten (Teil) von jeder Art Faktoren in 64. Dieses drückt man aus mit $2 = 64^{\frac{1}{6}}$ oder mit $2 = \sqrt[6]{64}$. Letzteres ist die eingebürgerte Darstellung. Ersteres verdient aber den Vorzug, denn es bringt den Sachverhalt unmittelbar zum Ausdruck, und in Anlehnung daran gewinnt man alle Urteile, die sich auf Verknüpfung dieser Zahl mit anderen beziehen. Man sieht: Die Einschränkung des Exponenten auf Ganze ist ebenfalls hinfällig: Der Exponent einer Potenz kann jede positive oder negative ganze oder gebrochene Zahl sein. Und: Von einer besonderen Wurzel- neben Potenzrechnung kann abgesehen werden[51]).

Nr. 3. Es soll $a^{0,2}$; $b^{1\frac{2}{5}}$; $b^{-\frac{3}{4}}$ gedeutet und in die zweite Schreibweise übergeführt werden!

a ist mit 0,2 oder $\frac{1}{5}$ von jeder Art seiner Faktoren vertreten bez. jeder 5. einer Art soll gelten. Auch $\sqrt[5]{a}$ drückt diesen Gedanken aus. — b ist mit allen seinen Faktoren und überdies mit $\frac{2}{5}$ von jeder Art derselben in Geltung, drücken $b^{1\frac{2}{5}}$ bez. $b^{\frac{7}{5}}$ bez. $b\sqrt[5]{b^2}$ bez. $\sqrt[5]{b^7}$, ja schließlich $(\sqrt[5]{b})^7$ übereinstimmend aus. — c soll mit $\frac{3}{4}$ von jeder Art seiner Faktoren von dem immer vorhandenen Stamm an Faktoren entfallen, $c^{\frac{3}{4}}$ soll Divisor zu Divid. 1 sein. Das nämliche drückt $\frac{1}{\sqrt[4]{c^3}}$ bez. $\frac{1}{(\sqrt[4]{c})^3}$ bez. $\left(\frac{1}{\sqrt[4]{c}}\right)^3$ aus.

Nr. 4. Die zweite bez. Quadratwurzel aus Aggregaten, ohne dieselben erst zu reduzieren, und insbesondere aus denjenigen Stufen von Potenzen aus 10, welche als Dezimalzahlen im allgemeinen Gebrauch stehen [hier ohne sie erst in Faktoren zu zerlegen], ermittelt man durch eine Art mechanischer Division. Dieselbe stützt sich auf die Identität $(a+b+c+d+\cdots)^2 = a^2+b\,(2a+b)+c\,(2a+2b+c)+d(2a+2b+2c+d)+\cdots$ (vgl. Kap. II, Nr. 9). Durchführung an B., S. 70—72, von 6) ab, jedes 5. Beispiel.

$\ldots ; \sqrt{2a+45b+4c-6\sqrt{10ab}+4\sqrt{2ac}-12\sqrt{5bc}}$
$= \sqrt{(2a-6\sqrt{10ab}+4\sqrt{2ac}+45b-12\sqrt{5bc}+4c)}$ [52])
$= \pm(\sqrt{\mathbf{2a}}-\mathbf{3}\sqrt{\mathbf{5b}}+\mathbf{2}\sqrt{\mathbf{c}})$ [53]).

Nebenrechnungen: I) ....

II) $-6\sqrt{10ab} : 2\sqrt{2a} = -3\sqrt{5b}$;
$\_(2\sqrt{2a}-3\sqrt{5b})(-3\sqrt{5b}) = \mp 6\sqrt{10ab} \pm 45b$.

III) $+4\sqrt{2ac} : 2\sqrt{2a} = +2\sqrt{c}$;
$\_(2\sqrt{2a}-6\sqrt{5b}+2\sqrt{c})\cdot 2\sqrt{c} = \_4\sqrt{2ac} \mp 12\sqrt{5bc} \pm 4c$.

— Während der Bestimmung von Quadratwurzeln aus Dezimalzahlen (u. z. bereits aus den einfachsten) zeigt sich durchweg ein stetes Anschwellen der Rechnung und eine Veränderlichkeit der partiellen Divisoren, welche für endlichen oder periodischen Ausgang des Resultats keine Gewähr verheißt. Die Erscheinung ist neu im Zahlenrechnen. Thatsächlich steht man vor Zahlen, deren Dasein nicht vermutet wurde. Nur ganze Zahlen und Brüche (in einfachster Darstellung Quotienten von ganzen Zahlen) hat man gekannt. Daß nun aber z. B. $\sqrt{2}$ zwischen 1 und 2 liegen muß, kein gebrochener Zwischenwert sein kann und trotzdem als Zahl existiert, ergeben einfache Betrachtungen algebraisch-geometrischer Art, deren Ausführung dem Unterricht vorbehalten sein mag. Also $\sqrt{2}$ und dergl. gehören zu einer völlig neuen Art von Zahlen. Man nennt sie Irrationalzahlen. Während die Rationalzahlen, ganze und aus Ganzen gebrochene, sich in der größten Mannigfaltigkeit im Sinne der vier Spezies aus einander zusammenstellen lassen, stimmt keine derartige Zusammenstellung mit einer Irrationalzahl völlig überein. Die Irrationalzahlen besetzen dabei alle Lücken, welche eine noch so dicht folgende Auswahl von Rationalzahlen in der Zahlenreihe von der einen zur andern klaffen läßt. Weit klaffen läßt; denn bei der einzelnen Lücke besteht sogar noch unabsehbare Möglichkeit Rationalzahlen einzufüllen; immer bleibt zwischen zwei aufeinanderfolgenden eine angebbare, von Null abweichende Differenz, bestehen, während die hervorragenderen Arten von Ausdehnungen, die bemessen werden müssen, unmerklichen d. i. mit der Differenz Null verlaufenden Übergang in einander zeigen. Dergestalt verschwindet die Menge der Rationalzahlen unter derjenigen der Irrationalen. Eine jede gerade Linie, auf der ein Nullpunkt ausgewählt ist, darf für ein getreues Abbild der durch die Irrationalen vervollständigten Zahlenreihe gelten. Verwendet man irgend einen Maßstab mit einem konventionellen System seiner Unterabteilungen um die Längen, welche vom Nullpunkt aus durchlaufen werden, zu bemessen, so sind die Längen ein stetiger Übergang in einander, und die Maßzahlen derselben (verschwindend selten) die auf einander folgenden Rationalzahlen und (unvergleichlich häufig) die zwischenliegenden Irrationalen. Diese sind blos in der einzig noch verfügbaren dezimalen Form, in der eines Dezimalbruchs mit endlosem und unperiodischem Stellenverlauf denkbar.

Nr. 5. B., S. 41—47, von 4) ab jedes fünfte Beispiel!

.... Der binomische Lehrsatz zählt nicht zu dem vorgeschriebenen Lehrstoff. Soweit er hier in Betracht kommt, genügt es zu wissen, daß ein im Verhältnis von a:b abgestuftes Aggregat, mit a + b multipliziert, wieder ein solches Aggregat liefert, und die neuen Zwischenstufen aus Partialstufen zusammentreten, welche erhalten werden, wenn man von zwei auf einander folgenden Stufen des vorgelegten Aggregats die vorangehende mit b, die nachfolgende mit a multipliziert. Danach kann das bekannte Schema der Binomialkoëffizienten[54]) gebildet werden.

Nr. 6. B., S. 47—49, von 169) 1. Beispiel ab, jedes fünfte!

Nr. 7. B., S. 52—55, von 2) 1. Beispiel ab, jedes fünfte!

Nr. 8. B., S. 57—69, von 1) 4. Beispiel ab, jedes fünfte!

.... Bei der Berechnung von Ausdrücken mit Wurzeldivisor erweist sich dieser Umstand sehr lästig. Daher läßt man einen solchen Ausdruck grundsätzlich nicht unverändert stehen, sondern macht den Divisor, wie man das nennt, rational. Ein Hauptmittel dafür sind die Regeln in Kap. II a, Nr. 10.

Nr. 9. B., S. 76—78, von 1) 4. Beispiel ab, jedes fünfte!

Nr. 10. B., S. 79—82, von 1) 4. Beispiel ab, jedes fünfte!

Vorbemerkung zu dieser Nr. Die Forderung, eine negative Zahl als gerade Potenz einer andern Zahl zu bestimmen, erweist sich als unerfüllbar, weil die geraden Potenzen von allen Zahlen der vollständigen Reihe zwischen $-\infty$ und $+\infty$ positiv sind. Gleichwohl taucht sie bei den geometrischen Anwendungen auf und bezieht sich auf thatsächliche Bemessungsumstände. Darum gebührt ihr auch eine Stelle in der allgemeinen Größenlehre. Es sei hiewegen bemerkt: Die Reihe der reellen Zahlen d. i. eben die vollständige Reihe zwischen $-\infty$ und $+\infty$ zeigt die Art einer einfachen Ausdehnung. Trotzdem taugt sie zur Bemessung von zusammengesetzten bez. mehrdimensionalen Ausdehnungen, sobald die Umreihung der dabei zusammengeschlossenen Einheiten in eine Ausdehnung vom Gepräge einer einfachen möglich ist. Nicht jede Bemessung eines Mehrdimensionalen stützt sich jedoch auf solche Einheiten. Sobald nun eine Forderung der hier zu betrachtenden Art die Anzeige derartiger Bemessungsumstände ist, gestattet ihre Form ohne weiteres den genauen Einblick bez. die entsprechende Bemessung. Dieserhalb sieht man solche Formen, dgl. die Aggregate aus ihnen und Reellen als Zahlenarten, als imaginäre und komplexe Zahlen, an. Man faßt sie rechnerisch so auf, daß Imaginäre, paarweise multipliziert, negativ Reelles liefern. Die Komplexen andererseits entsprechen der Eigenart der Flächen und insbesondere der Ebene als der ausgezeichnetsten zweidimensionalen Ausdehnung in der Weise, daß ihr reeller Teil als Anweisung die vollständige Zahlenreihe der Länge nach zu durchlaufen gelten darf, während der imaginäre angibt, wie gleichzeitig innerhalb der Ebene, in welcher die Reihe als Gerade angebracht ist, von dieser weggegangen werden soll[55]). Aus angemessener algebraisch-geometrischer Betrachtung folgt endlich, daß, mit Komplexen genau so wie mit reellen Aggregaten gerechnet, die Bemessungsumstände stets erkennbar sind.

Kapitel III b.

Logarithmieren.

Nr. 1. Berechnung von möglichst viel gebrochenen Potenzen von 10 durch fortgesetztes Radizieren auf sechs Dezimalstellen! (Tafel der Resultate.)

Nr. 2. Benützung von 1) um 2 als Potenz von 10 auszudrücken, resp. den (Zehner-)Logarithmus von 2 bez. lg 2 bez. die Menge der Faktoren von 10 in 2 zu ermitteln! Wie würde lg 3; lg 19 u. s. w. erhalten werden? Wie kann man aus dem (Zehner-)Logarithmus von 2 den Zweier-Logarithmus von 10 d. i. ${}_2\lg 10$ und, wie den Zweier-Logarithmus von einer sonstigen Zahl erhalten? Gilt stets $\frac{{}^n\lg a}{{}^n\lg b} = \frac{\lg a}{\lg b}$?[56])

Nr. 3. Man fand $2 = 10^{0{,}30103}$. Suche den Exponenten in der Logarithmentafel?[57]) Wo findet man da noch die Dezimalstellen des Exponenten? Wie mag das zusammenhängen? Wo stehen sie wieder zu erwarten? Was fällt an lg 4 auf? Wie wird es bei lg 16 sein? Wie bei lg 6?[58]) ꝛc.

Nr. 4. B., S. 88—90, etwa alle zweiten Beispiele! Sonstige[59]).

Kapitel III'.

Bestimmungsaufgaben 2. Grades. Bestimmungen aus Systemen 2. Grades. Bestimmung gesetzmäßiger Folgen von Zahlen incl. Zinseszinsen- und Rentenrechnung. Reelle quadratische Formen blos reeller Zahlen (Diskriminante).

Die Grundaufgabe für Bestimmungen übererſten Grades lautet: zwei Zahlen aus ihrer Summe Σ und ihrem Produkt Π zu bestimmen. Zur gleichzeitigen Bestimmung von zwei Zahlen sind thatsächlich zwei Bestimmungsstücke erforderlich, die nicht auf das nämliche hinauslaufen und einander auch nicht widersprechen. Σ und Π bez. die ihnen entsprechenden Gleichungen sind derartige Stücke, sind in den Anwendungen weitaus am regelmäßigsten dargeboten und besitzen besondere Wichtigkeit als Haupttypen unter den Zahlformen. — Wenn die Summe von zwei Zahlen Σ ist, so sind beide entweder gleich, jede ist $\frac{1}{2}\Sigma$; oder sie sind ungleich, die eine ist um das ($\triangle$) größer, um was die andere kleiner ist als ihr Durchschnittswert, eben $\frac{1}{2}\Sigma$. Weil aber der zweite Fall für $\triangle = 0$ in den ersten übergeht, so dürfen die Zahlen stets für $\frac{1}{2}\Sigma + \triangle$ bez. $\frac{1}{2}\Sigma - \triangle$ gelten. Ihr Produkt ist dann $\frac{1}{4}\Sigma^2 - \triangle^2$. Soll es auch Π sein, so hat man $\Pi = \frac{1}{4}\Sigma^2 - \triangle^2$ bez. $\triangle^2 = \frac{1}{4}\Sigma^2 - \Pi$ bez. $\triangle = \sqrt{\frac{1}{4}\Sigma^2 - \Pi}$, und die Zahlen sind $\frac{1}{2}\Sigma \pm \sqrt{\frac{1}{4}\Sigma^2 - \triangle^2}$. Damit ist unsere Grundaufgabe gelöst. — Im früheren Fall (Kap. II, Nr. 10) galt es ebenfalls zwei Zahlen aus ihrer Summe und ihrem Produkt zu bestimmen. Selbst wenn dieselben, weil sie irrational, imaginär oder komplex sind, mittels Zerlegung nicht gefunden werden können, erhält man sie jetzt! Man kann eine trinomische Stufe also immer reduzieren. Zum Beispiel liege $7x^2 - 160x^3 + 5x$ bez. $5x + 7x^2 - 160x^3$ vor. Man muß das Produkt der Außenkoëffizienten $5(-160) = -800$ in zwei Faktoren zerlegen, welche vereinigt gezählt bez. in Summe den Koëffizienten $+7$ der Zwischenstufe geben. Die zwei Zahlen sind nach obigem $\frac{7}{2} \pm \sqrt{\frac{49}{4} + 800}$ bez. $\frac{7}{2} \pm \frac{57}{2}$; sie sind 32 und -25, wie man durch Zerlegung auch erfahren hätte. Nun kommt d. R. n. $5x + 7x^2 - 160x^3 = 5x - 25x^2 + 32x^2 - 160x^3$ $= 5x(1 - 5x) + 32x^2(1 - 5x) = (1 - 5x)(5x + 32x^2)$ $= \mathbf{x(1 - 5x)(5 + 32x)}$, w. g. i. — Wollte man jetzt fragen, bei welcher Beschaffenheit von x die Stufe Nullwert hat, so würde man mit den zwei bekannt gewordenen Nullsätzen „1) Ein Produkt ist 0, sobald ein Faktor 0 geworden ist. 2) Das Aggregat von 2 Gegensätzen ist 0" alsbald finden, daß sein muß $x = 0$ oder $x = \frac{1}{5}$ oder $x = -\frac{5}{32}$. Damit ist eine (nicht die erste) Bestimmungsaufgabe höheren (3ten) Grades im Stile einer quadratischen gelöst. Jede Gleichung, welche sich umformen läßt zu der Forderung, daß eine trinomische Stufe 0 werde, darf gelten als quadratische Gleichung für Bestimmung der Stufungsgröße, oder als hervorgegangen aus einer solchen durch Erweitern mit etwelchen sofort zu Null bestimmbaren sonstigen unbestimmten Faktoren. Dem Wesen nach stellen diese Gleichungen die Forderung dar mit Hilfe von zwei

Zahlen, deren Summe und Produkt man kennt, die Stufungsgröße[60]) der Gleichungen zu finden. — Nunmehr soll unternommen werden die allgemeinste quadratische Gleichung aufzulösen!

E. s. s. $\nu_1 x^2 + mx + \nu_2 = 0$! Die zwei Zahlen, die zur Auflösung benützt werden, sind $\frac{m}{2} \pm \sqrt{\frac{m^2}{4} - \nu_1 \nu_2}$. Sie verwendet, k. d. R. n. $\nu_1 x^2 + mx + \nu_2 = 0$

bez. $\nu_1 x^2 + \left(\frac{m}{2} + \sqrt{\frac{m^2}{4} - \nu_1 \nu_2}\right) x + \left(\frac{m}{2} - \sqrt{\frac{m^2}{4} - \nu_1 \nu_2}\right) x + \nu_2 = 0$

bez. $\nu_1 x \left\{ x + \frac{1}{\nu_1}\left(\frac{m}{2} + \sqrt{\frac{m^2}{4} - \nu_1 \nu_2}\right) \right\} + \left(\frac{m}{2} - \sqrt{\frac{m^2}{4} - \nu_1 \nu_2}\right) \left\{ x + \frac{\nu_2}{\frac{m}{2} - \sqrt{\frac{m^2}{4} - \nu_1 \nu_2}} \right\} = 0$

bez. $\left\{ x + \frac{1}{\nu_1}\left(\frac{m}{2} + \sqrt{\frac{m^2}{4} - \nu_1 \nu_2}\right) \right\} \left\{ \nu_1 x + \frac{m}{2} - \sqrt{\frac{m^2}{4} - \nu_1 \nu_2} \right\} = 0$[61])

bez. $\nu_1 \left\{ x - \frac{1}{\nu_1}\left(-\frac{m}{2} - \sqrt{\frac{m^2}{4} - \nu_1 \nu_2}\right) \right\} \left\{ x - \frac{1}{\nu_1}\left(-\frac{m}{2} + \sqrt{\frac{m^2}{4} - \nu_1 \nu_2}\right) \right\} = 0$

bez. $x = \frac{1}{\nu_1}\left(-\frac{m}{2} - \sqrt{\frac{m^2}{4} - \nu_1 \nu_2}\right)$ oder $x = \frac{1}{\nu_1}\left(-\frac{m}{2} + \sqrt{\frac{m^2}{4} - \nu_1 \nu_2}\right)$,

also $\mathbf{x} = \frac{\mathbf{1}}{\nu_1}\left(-\frac{\mathbf{m}}{\mathbf{2}} \pm \sqrt{\frac{\mathbf{m}^2}{\mathbf{4}} - \nu_1 \nu_2}\right)$; die Aufgabe ist gelöst. —

Bilden wir noch die Summe der Auflösungen, desgl. das Produkt, so sind dieselben $-\frac{m}{\nu_1}$ bez. $\frac{\nu_2}{\nu_1}$. Demnach könnte erklärt werden: bei den quadratischen Gleichungen handelt es sich um Auffinden von zwei Zahlen, deren Summe entgegengesetzt ist zum Verhältnis zwischen dem 2. und 1. Koëffizienten und deren Produkt das Verhältnis zwischen dem 3. und 1. Koëffizienten der Nullgleichung ist[62]).

Bestimmungsaufgaben 2. Grades. (B., S. 188—245, etwa jedes 5. Beispiel. — Im Schuljahr des Beginns mit diesen Aufgaben soll zunächst immer das Trinom der Nullgleichung reduziert und die weitere Auflösung mit den zwei Nullsätzen bewirkt werden! Soweit die Hilfszahlen durch Zerlegen erhalten werden können, ist die irrationale Darstellung zu vermeiden! Ab und zu müssen Proben gefertigt werden!)

.... B., S. 193, 163) E. s. s. $x + \frac{1}{x} = a + \frac{1}{a}$ bez. $x = a$ oder $x = \frac{1}{a}$. Zwei Zahlen, deren Produkt 1 ist, heißen ein paar Reziproke. Die zwei Zahlen sind entweder positiv oder negativ, wenn man nur reelle Reziproke berücksichtigt. Da gilt noch: Keine zwei positiven (negativen) Reziprokenpaare haben die nämliche Summe oder die nämliche Differenz oder den nämlichen Quotienten. — B., S. 193, 183) E. s. s. $2x - \sqrt{2x-1} = x + 2$ bez. $x = 1$ so zwar, daß gilt $\sqrt{2x-1} = -1$, oder $x = 5$ so zwar, daß gilt $\sqrt{2x-1} = 3$[63]). Es liefert $2x + \sqrt{2x-1} = x + 2$ für x die nämlichen, für $\sqrt{2x-1}$ die entgegengesetzten Werte[64]). Das Verfahren, welches das Gesagte bestätigt, benützt $\sqrt{2x-1}$ statt x als Unbekannte. — B., S. 193, 192) E. s. s. $\sqrt{4x-3} - \sqrt{x-4} = 4$. Dieselben Werte für x, z. T. dieselben, z. T. die entgegengesetzten erhält man für $\sqrt{4x-3}$ einer- und $\sqrt{x-4}$ andererseits aus den Gleichungen $\sqrt{4x-3} + \sqrt{x-4} = 4$; $-\sqrt{4x-3} + \sqrt{x-4} = 4$ und $-\sqrt{4x-3} - \sqrt{x-4} = 4$. In jeder der vier Gleichungen ist die Summe von zwei Wurzelgliedern 4. Multipliziert man durchweg mit deren Differenz, so erhält man überall als

Quadratendifferenz $3x + 1$; deshalb ist die Differenz der Wurzelglieder durchweg $\frac{3x+1}{4}$. Halbe Summe und halbe Differenz addiert ergeben das erste, subtrahiert das zweite Wurzelglied der Summe. So ist es möglich jedes Wurzelglied zu bestimmen, und danach x. Man hat den Satz: Die Ausdrücke für Summe und Differenz von zwei Quadratwurzeln bedingen einander gegenseitig[65]). — Die lösbaren reziproken Gleichungen sind es dadurch, daß man $x \pm \frac{1}{x}$ statt x als Unbekannte verwenden kann.

Bestimmungen aus Systemen 2. Grades. Ein System ist dann schon zweiten Grades oder quadratisch, wenn neben Gleichungen 1. Grades (linearen)[66]) nur einzelne quadratische vertreten sind. Soll es Auflösungen geben, so müssen soviel von einander unabhängige und einander nicht widersprechende Gleichungen vorhanden sein wie Unbestimmte (Vergl. Kap. II'). Je mehr lineare oder vollkommen reduktionsfähige sonstige Gleichungen vorhanden sind, desto leichter bekommt man Auflösungen. Treten aber nur zwei der Reduktion unfähige quadratische Gleichungen auf, so übersteigt dieses die mit den bisherigen Mitteln zu erfüllenden Anforderungen. Soweit keine Beispiele aus einem Anwendungsgebiet Lösung erheischen, kommen sie der Absicht Sicherheit in den Auflösungsverfahren und in der Reduktion von Stufen zu erzielen fördernd entgegen. Dann am besten, wenn die Beispiele in guter methodischer Folge auftreten. Eine solche ist die in Sickenberger's Übungsbuch, 2. Abteilung, 1890. Dort trifft man an: 1. Fall: Eine lineare Gleichung ist vorhanden oder kann durch Elimination der quadratischen Glieder als Ersatz für eine der quadratischen Gleichungen erhalten werden (Substitutionsmethode). 2. Fall: Das Verhältnis der zwei Unbestimmten ist bekannt oder aus einer homogenen Gleichung 1. Grades abzuleiten ev. auch durch Proportionsreduktion zu erhalten. 3. Fall: Verhältnisse der zwei Unbekannten bekommt man aus homogen quadratischen Gleichungen (der 2. und 3. Fall können vereinigt werden. Methode der Verhältniseinheit E). 4. und 5. Fall, welche sich vereinigen lassen. Die Gleichungen sind rein quadratisch, oder sie sind frei von unbestimmten Gliedern 1. Grades (Elimination einer Unbekannten bez. der bekannten Glieder). — Dann folgen die Abänderungen von quadratischen Gleichungen zu Systemen ($x + y$ und auch $x - y = \Sigma$, xy oder $- xy = \Pi$; ev. $ax \pm by = \Sigma$ und $\pm\, abxy = \Pi$)[67]). Es reihen sich die Bestimmungen aus Summe bez. Differenz bez. Produkt und den Summen bez. Differenzen solcher n. Potenzen, welche sich durch Σ und Π darstellen lassen, an. Den Schluß bilden hauptsächlich Systeme von mehr als zwei Gleichungen und Texte.

Bestimmung gesetzmäßiger Folgen von Zahlen incl. Zinseszinsen- und Rentenrechnung. a) Eine arithmetische Reihe ist eine Folge von Zahlen bez. Gliedern, bei welchen unter Erweitern eines Gliedes mit einer festbestimmten Zusatzzählung, der Reihendifferenz d, das nächstfolgende erhalten wird. b) Eine geometrische Reihe ist eine Folge von Zahlen bez. Gliedern, bei welcher unter Erweitern eines Gliedes mit einem festbestimmten Zusatzfaktor, dem Reihenquotienten q, das nächstfolgende erhalten wird. Die Wechselbeziehung zwischen dem 1. Glied a und dem n. Glied z drücken die Definitionsformeln, für die arithmetische Reihe $z = a + (n-1)d$, für die geometrische $z = aq^{n-1}$, aus. Auch Formeln für die Summe s der ersten n Glieder werden erhalten. Die Summenformeln sind, für die arithmetische Reihe $s = \frac{n}{2}(a + z)$ oder auch $s = nM$, wo $M = \frac{1}{2}(a + z)$ der Durchschnittswert eines Reihengliedes ist; für die geometrische Reihe $s = \frac{a(1 - q^n)}{1 - q}$, woraus im ausgezeichneten Falle von $n = \infty$ und $1 > q > 0$ entsteht $s^* = \frac{1 - q}{a}$. Die Summenformel für die geometrische Reihe erhält man unter Anwendung der Hauptteilbarkeitsregel auf den allgemeinen Ausdruck der Summe $a + aq + aq^2 + \cdots + aq^{n-1} = a\left(1^{n-1} + 1^{n-2} \cdot q + 1^{n-3} \cdot q^2 + \cdots + q^{n-1}\right)$. — In zahlreichen Fällen der Anwendung, z. B. in der Mechanik beim Fallgesetz, muß man Zahlen bestimmen, aus welchen eine jede von der unmittelbar vorausgehenden um das nämliche verschieden ist, oder die Summe von einer Folge solcher Zahlen. Die zwei Formeln für die arithmetische Reihe bieten ein bequemes Mittel dafür. Noch bedeutungsvoller sind die Formeln für die geometrische Reihe[68]). Wichtige Bestimmungen finanzieller Art, die Zinseszinsen= und Rentenrechnung[69]) fußen auf ihnen. Erstere stützt sich auf die Definitionsformel, letztere auf die Summenformel. (Vollständigere Darbietungen findet man in Dr. Zwerger's Leitfaden zum Unterricht in der elementaren Mathematik, I. Abt., 1894, S. 200—204. Vergl. auch Abhandlungen in den bayer. Gymnasialblättern, Jahrgänge 1898 und 1899.)

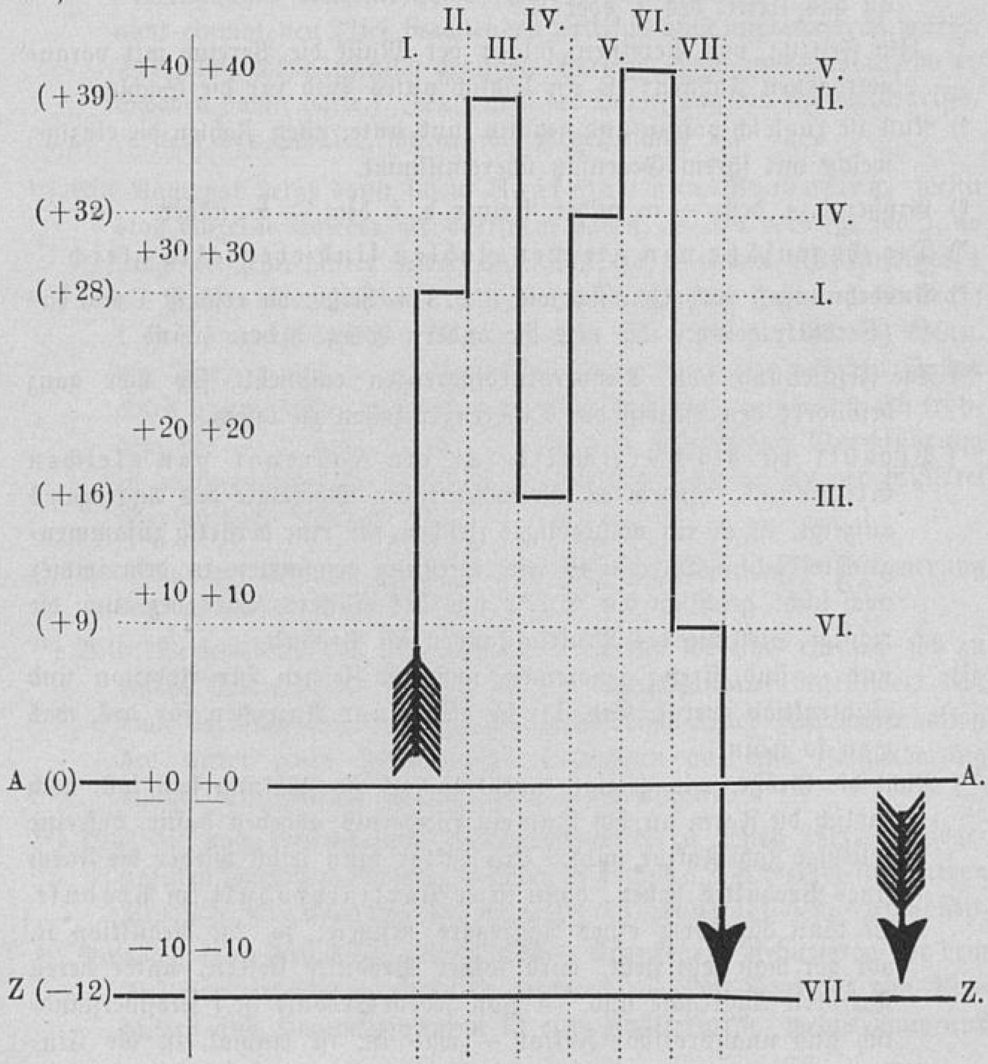
Reelle quadratische Formen blos reeller Zahlen (Diskriminante). Der Lehrplan erwähnt nichts von solchen Formen. Immerhin wird man es unternehmen dürfen dieselben zu diskutieren, wenn es gilt einem reiferen Kurs besseren Einblick in das Wesen quadratischer Bestimmungen zu verschaffen. Auch verlohnt es sich auf die Linienbilder für solche Formen einzugehen. Eine Beschränkung auf das Allernotwendigste ist aber geboten. — Dürfen in $\nu_1 x^2 + mx + \nu_2$ nur reelle Bestimmte und Unbestimmte vorkommen, so muß auch der Ausdruck selbst reell sein. Sein Linienbild erstreckt sich dabei nur in das eine Unendlich; vor dem andern macht es an endlicher Stelle Halt. Wir erfahren das Nähere, wenn wir in der Form das Partialaggregat der unbestimmten Glieder einem positiven Ausdruck, dem Quadrat einer, wenn auch unbestimmten, so doch reellen Größe einverleiben, wie folgt: M. h. $\nu_1 x^2 + mx + \nu_2 =$
$$\nu_1\left\{x^2+\frac{m}{\nu_1}x+\frac{m^2}{4\nu_1^{\,2}}-\frac{m^2}{4\nu_1^{\,2}}+\frac{\nu_2}{\nu_1}\right\}=\nu_1\left\{\left(x+\frac{m}{2\nu_1}\right)^2-\frac{m^2-4\nu_1\nu_2}{4\nu_1^{\,2}}\right\}.$$[70])
Das erste Glied der Klammer ist also positiv. Es kann durch geeignete Wahl für x zu jedem positiven Betrag und insbesondere zum kleinsten, zu 0, bestimmt werden. Das zweite Glied ist je nach der Beschaffenheit von ν_1; m und ν_2 irgend eine bestimmte reelle Zahl. Das Aggregat ist also so groß als das zweite Glied oder größer, bez. dieses Glied zeigt den Minimalwert des Aggregats an. Die quadratische Form, das $\nu_1$fache Aggregat, ist gleichzeitig mit diesem ein Minimum oder Maximum, je nachdem ν_1 positiv oder negativ ist. Nun sei $\overset{*}{x}$ der

passende ausgezeichnete Wert für x, y^* der zugehörige von y bez. $\nu_1 x^2 + mx + \nu_2$. So gilt $x^* = -\frac{m}{2\nu_1}$, sowie $y^* = -\frac{m^2 - 4\nu_1\nu_2}{4\nu_1}$. Endlich hat man, $x = x^* \pm \delta$ gesetzt, $y = y^* + \nu_1 \delta^2$. — Eben wurde untersucht, auf Grund welcher Umstände $\nu_1 x^2 + mx + \nu_2$ einen reellen Grenzwert besitzt. Früher galt es zu ermitteln, wenn die Form Nullwert hat. Man könnte noch fragen, für welche x ein anderer reeller oder sonstiger Wert w erhalten wird. Alle drei Bestimmungen sind nur Unterfälle einer einzigen; ja, die zwei ersten fallen zusammen, wenn der reelle Grenzwert 0 ist. Er ist es mit seinem Zähler $m^2 - 4\nu_1\nu_2$, und jede der zwei Auflösungen der Nullgleichung ist da $-\frac{m}{2\nu_1}$. In den übrigen Fällen sind die Auflösungen ungleich, besitzen aber $-\frac{m}{2\nu_1}$ zum Durchschnittswert. Selbst bei der Bestimmung der quadratischen Form zu einem andern Wert w ist $-\frac{m}{2\nu_1}$ d. Durchschnittswert von $x = \frac{1}{\nu_1}\left(-\frac{m}{2} \pm \sqrt{\frac{m^2}{4} - \nu_1(\nu_2 - w)}\right)$, den beiden Auflösungen. — Im Linienbild kommen die geschilderten Umstände durch dessen Symmetrie[71]) zum Ausdruck. Ja, die Umformung der Stufe mittels ξ für $x + \frac{m}{2\nu_1}$ läuft auf Parallelverlegen der Hauptlage der y-Linie[72]) bis zum Nullpunkt der ξ auf der x-Linie hinaus, und jene Linie selbst wird die Symmetrale des Linienbildes, einer Parabel. — Dem Zähler des Grenzwertes kommt nun darum höhere Bedeutung zu, weil sich alle Urteile über die Beschaffenheit des Grenzwertes, der Auflösungen der Nullgleichung und der sonstigen Bestimmungen auf ihn stützen. Er heißt die *Diskriminante der quadratischen Form*. (Unter den Anwendungen ev. mit Trigonometrie empfehlen sich Aufgaben wie die folgende: Zwei Körper bewegen sich mit Geschwindigkeiten von c_1 und c_2 m auf geraden, einander unter dem Winkel φ schneidenden Bahnen gleichförmig dem Treffpunkt S entgegen und sind in einem bestimmten Augenblick in A bez. B um a bez. b m von S entfernt. Wie weit bleiben die Massenmittelpunkte der Körper bei ungehemmter Bewegung mindestens von einander entfernt und wann sind dieselben einander am nächsten? — Hier ist auch noch Gelegenheit auf die Lösung quadratischer Gleichungen mit ungefügen Koëffizienten, unter Benützung von Logarithmen, einzugehen.)

Anmerkungen.

(Anmerkungen [1]) bis [6]) siehe nächste Seite.)

7)



[1]) Während des Bemessens von Ausdehnungen bleibt die Art der Einheit, in welcher sie vorliegen, stets außer Acht; und nur, wenn sich die Ausführung auf die Überzeugung, daß einerlei Einheiten vorhanden sind, mit Recht gründet, kann sie völlig streng verlaufen. Pari passu erfolgt die Bemessung eines Teils von der durch die Zahlenreihe vorgestellten Gesamt-Ausdehnung, welche in nirgends begrenzter Folge aus insofern idealen Einheiten verbunden ist, als man sich grundsätzlich des Gedankens an etwelche Abart dabei entschlägt.

[2]) Die Zählung 10 besteht hier blos als Einzelzählung einer zusammengesetzten.

[3]) Vergl. die Bemerkung zu dieser Nr. im Hofer Programm! Dort ist, abgesehen von untergeordneten Abweichungen, bis Nr. 16) das nämliche behandelt. Es steht: „Was zwischen zwei Spielern A und B umgesetzt wird, wenn jener 7 ℳ gewinnt, 15 ℳ verliert und wieder 11 ℳ gewinnt, wird im einzelnen und ganzen von A und B entgegengesetzt gewürdigt!“ Die Fortsetzung könnte lauten: „Jeder Dritte, welcher dem Vorgang Interesse widmet, thut es anklingend an das Urteil des A oder B.“

[4]) „Im Festzug von Vereinen folgen der Musik die Vereine mit vorangetragenen Fahnen“ ist ein leidlich gutes Bild für die Sachlage.

[5]) Null ist zugleich positiv und negativ, und unter allen Zahlen die einzige, welche mit ihrem Gegensatz übereinstimmt.

[6]) Größer d. i. dem $+\infty$ näher, kleiner d. i. dem $-\infty$ näher.

[8]) Die Gegensätze von gleichen Zahlen sind ebenfalls gleich.

[9]) Ausdehnungen verhalten sich wie 1:2:3:4, heißt: die erste ist 1 mal das (Verhältniseinheit E), was die andern 2 bez. 3 bez. 4 sind.

[10]) Die Feststellung von Temperaturdifferenzen empfiehlt sich hier ganz besonders den Begriff der Differenz erfassen zu lassen.

[11]) Produkt ist die Kurzschrift für ein Aggregat von gleichen Gliedern. Indem es alle wesentlichen Merkmale des Aggregates aufzeigt, ist es ein vollwertiges Zeichen für eine derartig zusammengesetzte Zahl. Durch r ist feste Stellung genommen in dem immer noch nicht geschlichteten Streit um des Kaisers Bart bez. um die richtige Stellung des Multiplikanden im Produkt.

[12]) $+$ und $-$ sind, streng genommen, nicht die Zeichen für Addition und Subtraktion (vergl. Kap. I); sie bieten nur Anzeichen für das, was man so nennt.

[13]) Nicht die Größe, wie gezeigt, noch wie oft sie Zählung sein soll, noch endlich die Form an sich kann ein Hindernis abgeben dafür, daß eine beliebige Zahl Faktor wird. Ein Faktor kann selbst wieder die Form eines Produktes haben; dann ist er Partialprodukt im Produkt. Er kann die Form eines Aggregats besitzen; ja, die Reduktion R, vor der man jetzt steht, wird sofort Produkte liefern, unter deren Faktoren Aggregate sind. — Von jedem Produkt ist 1 selbstverständlich und unausrottbar Faktor — was ist, ist einmal, ist die Ein-

heit (1) oder eines von ihren Vielfachen! — Darum wird 1 neben sonstigen Faktoren gar nicht mehr geschrieben; 1a und a gelten für einander. Und, jede Zahl ist, wenn man will, Produkt. Wie groß eine Zahl selbst ist, bestimmen die für sie angegebenen Faktoren. In Kap. IIa erfährt man noch, daß auch irgend ein anderer Faktor im Produkt begriffen ist, indem man ihn im zeitweilig gehobenen Zustand beliebig oft hineinlegen kann. So gilt denn: Jede Zahl ist Produkt; sie ist Faktor in jedem Produkt.

[14]) bez. daß der vom Produkt zweier Zahlen leicht nachzuweisende Satz auch von der neuen Art Produkt gilt.

[15]) Bardey ist die eingeführte Aufgabensammlung.

[16]) Bei der etwa angestellten Probe mag schon notwendig sein an die bei den Zahlenausdrücken benützte Regel zu erinnern: Die Rechnungen der zweiten Stufe gehen derjenigen der ersten Stufe vor. (Vergl. des Verfassers Regeln und Erläuterungen zum Rechenunterricht, Bamberg 1888, S. 36. — Auch dieses Büchlein steht der handwerksmäßigen Rechenweise so fremd gegenüber, daß es von einem nicht einmal den Titel beachtenden Kritikus blos angeschnarcht wurde. Der selbst fachmännnisch gebildete Verleger war zu bedauern, da er Schaden damit hatte.) Jetzt, nach der Darlegung des Produktbegriffs, versteht der Schüler, warum die Regel richtig ist.

[17]) Ein Aggregat heißt dann schon Aggregat von Produkten, wenn blos einzelne Glieder Produktform haben. — Es verbirgt sich 1, so lange es geht, hinter andere Faktoren; ja, wird ein offenkundiges 1 als Faktor ausgeschieden, stets ist hinter ihm ein Faktor 1 versteckt; 1 ist in unerschöpflicher Menge Faktor einer jeden Zahl. — Wenn, wie hier, 1 und — 1 gleich brauchbare Anwärter auf den Posten eines gemeinsamen Faktors vorstellen, und man entscheidet sich trotzdem für — 1, weil es zuerst steht (bei der zweiten Durchführung in entsprechender Weise für 1), so gemahnt dies an ein der Müllerei abgelauschtes Sprüchwort.

[18]) Ein Aggregat, welches als Faktor vorkommt, ist nur in Umklammerung denkbar (vergl. R und Kap. I, Nr. 12).

[19]) Bild: Verschiedene aus Teilvereinen bestehende Vereine einigen sich zu einem Verband! — Es liegt in der Menschennatur begründet, daß man sich angesichts verwickelter Verhältnisse unter Zusammenhalten des unter einen Gesichtspunkt Fallenden an eine Zergliederung macht. Oft gelingt nur so der richtige Einblick.

[20]) Blos die noch bestimmbaren, nicht die bereits zu festen Werten ausgeprägten Faktoren können in Betracht kommen. Andererseits bleiben Produkte mit unendlich großen Faktoren grundsätzlich ausgeschlossen.

[21]) Auflösen kann Reduktion ermöglichen! Umgekehrt: Reduzieren vor dem Auflösen erleichtert zuweilen letzteres. — Das Aggregat von Produkten aus Klammerfaktoren ist eine Zwitterform, welche man nur

ungern stehen läßt. Läßt sich das Aggregat nicht reduzieren, so löst man die einzelnen Klammerreduktionen auf.

[22]) Beachte hier und an der nächsten Regel die charakteristische Umstellung von Produkt und Aggregat. Ähnliches zeigt sich immer wieder in der Folge.

[23]) Das Produkt des Aggregats mit der Zahl ist die Kurzschrift, das weitere Aggregat die Kurrentschrift des Nämlichen.

[24]) 2tes mit 1tem gibt soviel wie 1tes mit 2tem; also 2tes mit 1tem doppelt (entspr. 4tes mit 2tem doppelt). Dagegen 1tes mit sich selbst bleibt unverbunden; u. s. w. — Die Zerlegung eines Quadrats über einer Seite $a + b + c + \cdots\cdot$ in der hergebrachten Weise erleichtert das Verständnis bedeutend.

[25]) Trinom, d. i. dreigliederiges Aggregat, und gestuftes Trinom sind zweierlei. — Die Einübung fange mit Serienaufgaben an d. i. Reihen von Beispielen, welche auf die Zerlegung einer besonders geeigneten Zahl z. B. 30; 210 und dergl. (vergl. Landshuter Programm) basiert sind. Voraufgabe ist der Entwurf des wochenweise verwendbaren Schemas der Zerlegungen der Zahl in je zwei Faktoren.

[26]) Die trinomische Stufe, bei welcher der Koëffizient des Zwischengliedes 0 ist, weicht durch nicht mehr trinomisches Aussehen von den übrigen ab. Gerade sie ist aber durch ihre reduzierte Form, Vielfaches des Produkts von Summe mit Differenz der nämlichen Zahlen, besonderer Beachtung wert.

[27]) Text einer Bestimmungsaufgabe zweiten Grades! — Das Hauptgeheimnis einer Textlösung beruht in der gründlichen (schriftlichen) Disposition. Diese beginnt mit der obigen (hergebrachten) Antwort auf die Frage. Das dabei eingeführte x benützt man um alles, was der Text an Bemeßbaren berührt, den Angaben entsprechend auszudrücken. Sobald der Text erschöpft ist, liegen für genügend viel Bemeßbare je zwei Ausdrücke und damit Gleichungen vor, deren Lösungen schließlich im Einklang mit Text und Disposition gedeutet werden müssen. — Aus einer mustergiltigen Berechnung sind Benennungen verbannt; Gleichartigkeit der Bemessenen ist eben unbedingte Voraussetzung (vergl. Anm. 1).

[28]) Auflösen von Produkten zu Aggregaten ist nicht eigentlich multiplizieren. Es verdankt die Bezeichnung einzig dem Umstand, daß die Glieder des Aggregats aus Faktoren zusammengestellt werden.

[29]) Die wesentlichste Vereinfachung ist, eine Zahl, welche unter den gebotenen Faktoren und unter den Einzeldivisoren vorkommt, — der Divisionsanweisung folgend — an beiden Stellen fortzulassen. Der Überblick über die verschiedenen Stadien der Vereinfachung läßt die schon aus dem Rechenunterricht geläufige Regel vom Heben und Erweitern der Brüche gewinnen. — Die Vereinfachung gelingt meist nur unvollkommen; häufig behält der Quotient die Form einer Divisions-

anweisung. In gewissem Sinn gilt dieses sogar noch, wenn der Quotient in Form einer Dezimalzahl vorliegt, weil die Ausführung der dezimalen Division von Haus aus nur eine stenographische Vereinbarung ist (vergl. Regeln und Erläuterungen zum Rechnen, S. 10). Durch Spezialisieren der allgemeinen Werte zu bestimmten Zahlen kann (muß nicht!) die Form der Divisionsanweisung verschwinden. Bis dahin heißt es in Gedanken zur reinen Zahlvorstellung durchzudringen. Die Endform gilt trotzdem als vollwertiger Ausdruck für solche Vorstellung. Genau so hat man früher eine aus bestimmten Ganzen gebrochene Form, einen gemeinen Bruch, als reine Zahl aufgefaßt. Der Bruchstrich ist an sich die Weisung, daß die Division um jeden Preis, auch um den, daß es Stücke gibt, durchgeführt wird (vergl. Regeln und Erläuterungen, S. 8). Auf dem Papier geht das nun allerdings nicht; es geht blos an den Ausdehnungen selbst. Unsere Vorstellung lebt und webt aber mit dem wirklichen Vorgang derart, daß wir einen Bruch wie $\frac{3}{4}$ nimmermehr als Rechnungsanweisung, sondern stets als Zahl im Wechselverhältnis mit sämtlichen Zahlen ohne ähnlich unvollkommene Form, mit allen Dezimalzahlen, in voller Schärfe bemessen.

[30]) Keine Rechenzeichen weisen Addition oder Subtraktion oder Multiplikation direkt an, — und nun zwei Divisionszeichen! (Vergl. übrigens Kap. IIIa, Nr. 1).

[31]) Eine subtile Unterscheidung geht bei den zwei Zeichen her; — ist die energische Anweisung (vergl. Anm. 29; die Ausführung in der Wirklichkeit unterbleibt blos bei Abfindung oder Verzicht); das andere Zeichen verlangt nicht so viel. Wie schlecht wäre auch den Zwecken, welchen die Messung entgegenkommen will, gedient, wollte man das zu Messende in lauter Maßeinheiten zerstücken?

[32]) Man darf lesen in der Reihenfolge: Zeichen (beim Stammfaktor); bestimmte Faktoren (und Divisoren); unbestimmte Fakoren (und Divisoren).

[33]) Nicht aber: Der Quotient aus einer Zahl und einem Aggregat u. s. w., während es heißen kann: das Produkt aus einer Zahl und einem Aggregat u. s. w.

[34]) Der Wechsel des Divisionszeichens, absichtlich vorgenommen, ist für die Durchführung belanglos. — Der Mechanismus funktioniert nur, wenn Dividend und Divisor übereinstimmend geordnet sind (alphabetisch unter Berücksichtigung der Stufenfolge). — Auch den Quotienten will man so geordnet erhalten. Daher wird man die zum Vorrang berechtigenden Faktoren blos erhalten, wenn man sie mit den im Vorrang stehenden Gliedern des Divisors in den entsprechenden des Dividenden sucht (Höchstes durch Höchstes gibt hier Höchstes). Infolge des Aufbaues der Dezimalzahlen geht deren Division ohne weiteres. — Die mechanische Divisionsweise liefert

auch bei Buchstabenausdrücken nicht selten Reste. Der Quotient aus Rest und Divisor wird Schlußglied des gesamten Quotienten.

[35]) Allen Gliedern des Aggregats gemeinsamen Faktor a nebst Divisor m, also gemeinsam Bruchfaktor $\frac{a}{m}$; ihn neben der Umklammerung ·····

[36]) Allen Gliedern gemeinsam Divisor $12(x^2-1)$ nebst dem stets vorhandenen Stammfaktor 1, also gemeinsam Bruchfaktor $\frac{1}{12(x^2-1)}$; ····

[37]) Sofort in Kap. IIIa fällt diese Einschränkung des Exponenten.

[38]) Bei den Anwendungen fasse man die gleich hohen Potenzen als solche von möglichst kleinen Exponenten auf z. B. $a^{48} - b^{48}$ als Differenz der Quadrate von a^{24} und b^{24}. So bekommt man die vollständige Reduktion am bequemsten.

[39]) Vergl. Kap. IIIa!

[40]) Mehr, als hier geschehen, konnte dieses Schaltkapitel des beschränkten Raumes halber nicht ausgeführt werden. Die eingehende Behandlung ist auch nicht so dringend.

[41]) Bei der Gleichheit von zwei Produkten darf man aus dem einen derselben irgend einen Faktor (bez. Divisor) zum andern transponieren so zwar, daß gilt: Ein Faktor (bez. Divisor) verwandelt sich beim Transponieren in einen Divisor (bez. Faktor).

[42]) Ähnlich ist es bei Textaufgaben (Kap. II, Nr. 12 Anm.). wenn man die Disposition nicht mit Aussagen über die gefragten Zahlen, sondern in einfacher Beziehung zu diesen stehenden Zahlen einleitet, um die weitere Disposition und Auflösung zu erleichtern.

[43]) Vielleicht nur jedes 10. Beispiel in B., S. 100—184 ev. S. 245—250 zu bearbeiten reicht die Zeit. Obendrein dürfen Proben, namentlich auf Buchstabengleichungen, nicht ganz vernachlässigt werden.

[44]) Wer das Risiko auf sich nimmt, muß sich für überzeugt halten können, vorher keinen Fehler gemacht zu haben.

[45]) I. Sind zwei Ausdrücke gleich, so sind auch die nämlichen Vielfachen derselben — insbesondere die Hauptnenner-Fachen — gleich. II. Ein Bruch mit einem Vielfachen seines Nenners — insbesondere dem Hauptnenner — multipliziert, wird das Vielfache seines Zählers. — Auf diesen Sätzen beruht das Verfahren des „Bruchreduktion-Fort“.

[46]) Die Gleichung ist frei von Nennern, bez. a; b und c sind als ganze Zahlen gedacht.

[47]) Die Erwägung, daß ein gemeinsamer Faktor f von c und a + b bez. b bez. a auch Faktor von $\triangle$ bez. x bez. y sein muß und dabei gelten darf $f\triangle' = \triangle$ bez. $fx' = x$ bez. $fy' = y$ vermag rasche Bestimmung wesentlich zu fördern.

[48]) Durch die Analogie mit der Gebahrung bei dem Hauptnenner empfiehlt

sich der Name. — Die bestimmten Glieder als Koëffizienten bei 1 aufgefaßt, so kann man ihren Hauptkoëffizienten und das Verhältnis von x und y erhalten. Oft ist solches Verfahren das beste (vergl. Kap. II, Nr. 5).

[49]) Gerade bei solchen Fällen ist die größte Vorsicht geboten; leicht kommt eine den übrigen widersprechende Gleichung vor.

[50]) Auch in der Mathematik kann man Gereimtes und Ungereimtes fordern.

[51]) Nur gegensätzlich sich wendende Handhabungen von ϱ liegen in den neuen Rechenspezies, der fünften und sechsten, vor.

[52]) Auch bei dieser Art mechanischer Division ist unbedingte Voraussetzung des Gelingens, daß der Radikand (Begriffserklärung) nach guten Grundsätzen geordnet ist. Bei den Dezimalzahlen entfällt dieses (vergl. Anm. 34). Das Verfahren unterscheidet sich vom gewöhnlichen Divisionsverfahren dadurch, daß der Divisor einer Partialdivision bis auf eine Zusatzzählung bekannt ist; er ist nämlich das Doppelte des jeweils ermittelten Quotienten; die Zusatzzählung stimmt mit dem Glied des Quotienten überein, welches zur Ermittelung steht und durch vorläufige Division mit dem bekannten Teil des Divisors gefunden wird. Bei dem Radizieren von Dezimalzahlen erstreckt sich eine nachfolgende Partialdivision bis zu derjenigen Stelle des Radikanden, an welcher die um 2 niedrigere Potenz von 10 wie bei der vorausgegangenen Partialdivision vertreten ist. — Oben hatte man: Von 2 a geht ab das Quadrat von $\sqrt{2\,a}$; es ab, so hebt es 2 a. Von $-6\sqrt{10\,ab}$ und weiterem geht $2\sqrt{2\,a}$ u. weiteres $-3\sqrt{5\,b}$ mal ab bez. geht $(2\sqrt{2a}-3\sqrt{5\,b})$ $(-3\sqrt{5\,b})$ ab; das Gegenteil oder $6\sqrt{10\ ab} - 45\ b$ hinzu, so hebt es $-6\sqrt{16\,ab} + 45\ b$. 2c.

[53]) Die zweiten Wurzeln aus Zahlen sind **abundante Formen**, zweifache Zahlengaben, gleichzeitige Angabe von zwei Gegensätzen.

[54])

			1.		1.			
		1.		2.		1.		
	1.		3.		3.		1.	
1.		4.		6.		4.		1.

2c.

[55]) Man unterscheidet eine Zahlenebene von der in ihr festliegenden Geraden der Reellen und der in ihr beweglichen Geraden der Imaginären. Von dieser geht die Hauptlage durch den Nullpunkt auf jener. Wegen des Zusammenhanges der beiden Teilzählungen in Komplexen muß der Nullpunkt der imaginären Linie mit der Endstelle der reellen Zählung zusammen fallen. Um das „**weg von der reellen Linie**“ unmittelbar richtig zu bemessen, müssen beide Linien zu einander senkrecht stehen. — Es geht auch die imaginäre Linie festzulegen und die reelle zu bewegen. Dabei kommt zum

Ausdruck, daß die Reihenfolge des Reellen und Imaginären ohne Einfluß ist auf die Bedeutung des Komplexen.

[56]) Besteht 10 aus n Faktoren ν, so sind die n-fachen Logarithmen für die Basis 10 diejenigen für die Basis ν.

[57]) Die fünfstellige von Schlömilch ist im Gebrauch.

[58]) Die Gesamtheit der Fragen soll mit der Einrichtung der Tafel 1) und den Gesetzen der logarithmischen Rechnung bekannt machen. Danach kann jede in den Bereich von Tafel 1) fallende logarithmische Berechnung unternommen werden. Insbesondere können es die Beispiele unter Nr. 4. Die weitere Theorie muß zurücktreten. Die Bearbeitung anderweitigen Lehrstoffs fordert eben auch ihr Recht. Bei der Repetition des gesamten Lehrstoffs in der obersten (9.) Gymnasialklasse bietet sich übrigens noch Gelegenheit zu logarithmischen bez. auf logarithmischem Weg zu lösenden Gleichungen.

[59]) Die technische Handhabung in den verschiedenen Schulen weist große Verschiedenheiten auf. Der Begriff „Logarithmus" sollte aber immer gegenwärtig sein. Daher rücke man einer Knüpfung bestimmter Faktoren frisch auf den Leib mit dem Urteil: ist die Zahl, welche an Faktoren 10 begreift, soviel stecken in ····, den Ganzen nach ····, so und so oft (die Dezimalstellen hole man erst nach, wenn man für das Beispiel mit den Ganzen fertig ist!); ferner in ····, u. s. w., weg die in ···· d. i. hinzu so und so viel, so und so oft u. s. w. — Ob man die Logarithmen hinter nlg (Sigel für „ist die Zahl, welche an Faktoren 10 begreift, was steckt in") zusammensetzt oder in Nebenrechnungen α), β) ···· ansetzt, ist nebensächlich. Aber statt negativer Logarithmen sollte man ihre Erweiterungen um die dekadische Ergänzung z. B. 0,52288 — 3 statt —2,47712 benützen (vergl. die Regeln und Erläuterungen zum Rechnen, allererste Übungen). Ein negatives Produkt ist ein mit —1 multipliziertes positives Produkt bez. — nlg (···). Durchaus geboten ist die exakte Aussprache bez. aller Wendungen des Rechenverlaufs u. z. gestimmt auf den Grundton: ist die Zahl, die an Faktoren 10 begreift, ꝛc. ꝛc.

[60]) Die Stufungsgröße ist nicht notwendig ersten Grades. Ist sie k^ten Grades und die Gleichung mit l sonstigen unbestimmten Faktoren erweitert, so ist letztere 2 k + l^ten Grades.

[61]) Im Interesse des ausgiebigsten Reduktionsverlaufes liegt es den Koëffizienten am Gruppenbeginn als Faktor auszuscheiden. Die Berechtigung folgt aus Kap. II, Anm. zu r. — Der Reduktion des Aggregats der zwei Produkte muß die Beseitigung der streng verpönten Bruchform mit Wurzel im Nenner vorausgehen.

[62]) Versetzt man in der allgemeinen Gleichung ν_1 als Faktor zu ν_2, so entsteht eine quadratische Gleichung von schlichter Form; ihre Auflösungen werden besonders leicht erhalten; und indem die Auf-

lösungen der allgemeinen Gleichung je den $\nu_1\underline{\text{ten}}$ Teil so groß sind, kennt man diese auch sofort. Die quadratische Gleichung von schlichter Form erweist sich dadurch als wertvolle Hilfe bei den andern Gleichungen.

[63]) Es ist eigentlich selbstverständlich, daß nicht blos x, sondern auch jeder x haltende Ausdruck in der Gleichung seine Bestimmung erfährt.

[64]) Vergl. Kap. IIIa, Nr. 4 Anm., das über die Quadratwurzeln Gesagte.

[65]) Ebenso $\sqrt[3]{u} \pm \sqrt[3]{v}$ bez. Σ u. $\sqrt[3]{u^2} \mp \sqrt[3]{uv} + \sqrt[3]{v^2}$ bez. $\Sigma^2 - 3\Pi$ und dergl.

[66]) Vorführung der Linienbilder (linea zunächst Gerade).

[67]) Bardey, S. 226, 6) erlaubt auch eine dem Aufbau der Gleichungen angemessene Speziallösung, welche zur Rekapitulation des über Reelle, Imaginäre, Komplexe Gesagten, ja zu Ausführungen über konjugierte Komplexe veranlassen mag. Man leitet mit der Methode des Haupt-Koëffizienten die sehr charakteristischen Bestimmungsstücke I) $xy = 3$ bez. $xyi = 3i$ und II) $x^2 - y^2 = 8$ bez. $x^2 + (yi)^2 = 8$ ab, und hat dann $\Pi = 3i$; $\Sigma^2 - 2\Pi = 8$; daher $\Sigma = \sqrt{8 + 6i}$. Nunmehr folgt $x = \frac{1}{2}\left(\sqrt{8 + 6i} \pm \sqrt{8 - 6i}\right) = \frac{1}{2}\sqrt{16 \pm 20}$ und $y = -\frac{i}{2}\sqrt{16 \mp 20}$, wie bei der gewöhnlichen Auflösung.

[68]) Aus dem geometrischen Anwendungsbereich empfehlen sich geometrisch leicht zu kontrollierende Beispiele z. B. Ist g der goldene Abschnitt von s; g_1 der von g; g_2 der von g_1; u. s. f., so sind wegen des Begriffs „goldener Abschnitt" alle diese Strecken, ihrer Größe nach, Glieder einer geometrischen Reihe. Vor s, dem goldenen Abschnitt von $s + g$, dürfen $s + g$ und beliebig viel weitere Glieder angenommen werden. Zeige, daß jedes Reihenglied Summe aller folgenden, das unmittelbar folgende ausgenommen, ist!

[69]) Bei 4% wächst ein Betrag in Jahresfrist auf sein 1,04 Faches an. Dieses, weil Zins auch vom Zins, in weiterer Jahresfrist auf sein 1,04 Faches, also auf das $1{,}04^2$ Fache des Anfangsbetrages, u. s. w., an. — Kommt ein einzelner von den Beträgen in Betracht, ist es Zinseszinsenrechnung. Handelt es sich um eine ganze Folge, so hat man eine Rentenrechnung. Das $n - 1$ der Definitionsformel ist die Zahl der Jahre (ev. Zinsfristen); denn Reihenglieder sind es um 1 mehr als Jahre (ev. Zinsfristen). Besondere Formeln für diese Rechnungsweise sind geradezu vom Übel. Besser ist unbedingt eingehende Disposition zu Anfang der Bestimmung.

[70]) Man findet das Gleiche unmittelbar, wenn man die zwei Aggregate in der Reduktion von $\nu_1 x^2 + mx + \nu_2$ (siehe Beginn des Kapitels) multipliziert.

[71]) Das Bild einer abundanten Zahlform, einer zweiten, dritten, vierten,··· Wurzel, besteht aus 2; 3; 4; ··· Punkten, welche zentrisch-symmetrisch gruppiert sind zum Nullpunkt der reellen Zahlenlinie und achsial-symmetrisch zu dieser Linie.

[72]) Während man für die x die Linie der Reellen benützt, steht für die y die Linie der Imaginären zur Verfügung (vergl. Anm. 55). Damit sind aber keineswegs die y als Imaginäre hingestellt und ihr Zusammenhang mit den x als solcher zwischen Teilzählungen einer Komplexen. Notwendig ist jedoch, und wird dabei erreicht, daß die einander entsprechenden y und x zusammen geordnet auftreten.