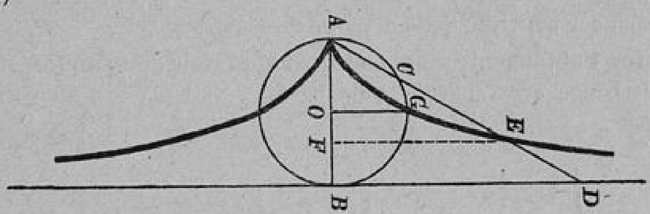
Fläche und eingeschriebene Figuren der Cissoide.

Einleitendes.

Gleichung der Cissoide. Die Cissoide (Epheulinie) des Diocles ist eine Curve dritter Ordnung, deren Gleichung ist $x^3 = (2r - x)\, y^2$ also $y^2 = \frac{x^3}{2r - x}$; in Differenzialform $2y\, \frac{dy}{dx}$ $= \frac{(2r - x)\, 3x^2 + x^3}{(2r - x)^2} = \frac{6rx^2 - 2x^3}{(2r - x)^2}$, $\frac{dy}{dx} = \frac{(3r - x)\, x^2}{(2r - x)^2\, y} = \pm \frac{(3r - x)\, x^2}{(2r - x)^2} \sqrt{\frac{2r - x}{x^3}}$ $= \pm \frac{(3r - x) \sqrt{x}}{\sqrt{(2r - x)^3}}$.



Construction einzelner Punkte der Curve. In dem Endpunkte B eines Kreisdurchmessers AB errichte man ein Loth, ziehe vom Anfangspunkte A dieses Durchmessers beliebige Grade nach dem Lothe und trage auf jeder derselben ihr innerhalb des Kreises liegendes Segment AC vom Endpunkte D aus ab, also $DE = AC$. Die so erhaltenen Punkte gehören der Cissoide an.

Nehmen wir A als Anfangspunkt des rechtwinkligen Coordinatensystems, den Durchmesser AB des sogenannten Erzeugungskreises als positive Abscissenachse, so ergiebt sich, wenn E ein auf obige Weise erhaltener Punkt, AF also die Abscisse x, EF die Ordinate y ist und r den Radius unseres Kreises bezeichnet, $BD : FE = AB : AF$, $BD = \frac{2ry}{x}$.

Aber $BD^2 = AD \cdot CD = AD \cdot AE = \sqrt{(2r)^2 + BD^2} . \sqrt{x^2+y^2}$. Eingesetzt $\frac{4r^2y^2}{x^2} = \sqrt{4r^2 + \frac{4r^2y^2}{x^2}} \sqrt{x^2+y^2} = \sqrt{\frac{4r^2}{x^2}(x^2+y^2)} \sqrt{x^2+y^2}$, $\frac{2ry^2}{x} = x^2+y^2$, $2ry^2 - xy^2 = x^3$, $y^2 = \frac{x^3}{2r-x}$.

Lauf der Curve. Jst $x = o$ so $y = o$, $x = r$ so $y = \pm r$, $x = 2r$ so $y = \pm \infty$, $y > 2r$ so $y = i$, $x = -$ so $y = i$. Wächst x, so wird x^3 immer gröszer, $2r - x$ immer kleiner, $\frac{x^3}{2r-x}$ nimmt also immer mehr zu d. h. der wachsenden Abscisse entspricht eine wachsende Ordinate. Da y zur zweiten Potenz vorkommt, so gehört zu jedem x ein positives und ein negatives y, welche beide aber absolut genommen einander gleich sind: $\pm y = \sqrt{\frac{x^3}{2r-x}}$. Demnach haben wir:

Die Cissoide beginnt im Coordinatenanfange (Spitze der Cissoide) und theilt sich dann in zwei Aeste, welche symmetrisch zu beiden Seiten der Abscissenachse liegen und sich von dieser immer mehr entfernen, je mehr die Abscisse zunimmt. Der Durchschnitt der beiden Curvenzweige mit der Peripherie des Erzeugungskreises findet statt, wenn die Abscisse die Grösze des Radius dieses Kreises erreicht hat. Die Ordinate dieses Punktes ist auch gleich dem Radius. Jst die Abscisse bis zur Grösze des Durchmessers des erzeugenden Kreises angekommen, dann verliert sich die Curve in unendlicher Entfernung und kommt auch nicht wieder zum Vorschein, da gröszere Werthe der Abscisse die Ordinate imaginär machen. Ebenso erhalten wir imaginäre Werthe, wenn die Abscisse negativ genommen wird, so dasz also die Curve sich nur nach der positiven Seite der X-Achse erstreckt.

Tangente, Subtangente, Normale, Subnormale, Asymptote. Die allgemeinen Ausdrücke für die Länge der Tangente, Subtangente, Normale und Subnormale sind $T = y . \sqrt{1 + \frac{1}{y'^2}}$, $St = \frac{y}{y'}$, $N = y\sqrt{1+y'^2}$, $Sn = yy'$, wenn $y' = \frac{dy}{dx}$. Für unsere Curve ergiebt sich hieraus $T = \sqrt{\frac{x^3}{2r-x}} \sqrt{1 + \frac{(2r-x)^3}{(3r-x)^2 x}} = \sqrt{\frac{x^3}{2r-x}} \sqrt{\frac{9r^2x + x^3 - 6rx^2 + 8r^3 - 12r^2x + 6rx^2 - x^3}{(3r-x)^2 x}}$ $= \sqrt{\frac{x^3}{2r-x}} \sqrt{\frac{8r^3 - 3r^2x}{(3r-x)^2 x}} = \sqrt{\frac{x^3}{2r-x}} . \frac{r}{3r-x} \sqrt{\frac{8r-3x}{x}} = \frac{rx}{3r-x} \sqrt{\frac{8r-3x}{2r-x}}$. $St = \sqrt{\frac{x^3}{2r-x}} . \frac{\sqrt{(2r-x)^3}}{(3r-x)\sqrt{x}} = \frac{(2r-x)x}{3r-x}$. $N = \sqrt{\frac{x^3}{2r-x}} \sqrt{1 + \frac{(3r-x)^2 . x}{(2r-x)^3}} = \sqrt{\frac{x^3}{2r-x}} \sqrt{\frac{8r^3 - 3r^2x}{(2r-x)^3}}$ s. $T = \frac{rx}{(2r-x)^2} \sqrt{x(8r-3x)}$. $Sn = \sqrt{\frac{x^3}{2r-x}} . \frac{(3r-x)\sqrt{x}}{\sqrt{(2r-x)^3}} = \frac{(3r-x)x^2}{(2r-x)^2}$.

Für $x = 2r$ wird $T = \infty$ und $St = o$. Der Berührungspunkt der durch den Endpunkt des Durchmessers des Erzeugungskreises gehenden Tangente liegt also in unendlicher Entfernung. Diese Tangente geht daher über in eine Asymptote. Dieselbe steht senkrecht auf der Abscissenachse. — Die Tangente, welche durch den Mittelpunkt unseres Kreises geht, lernen wir kennen, wenn wir die Subtangente gleich $x-r$ setzen. Also $\frac{(2r-x)x}{3r-x}=x-r$, $2rx-x^2 = 3rx-3r^2-x^2+rx$, $o=2rx-3r^2$, giebt $x={}^3/_2 r$. Setzen wir diesen Werth in T ein, so erhalten wir als Länge dieser Tangente $\frac{{}^3/_2 r^2}{{}^3/_2 r}\sqrt{\frac{{}^7/_2 r}{{}^1/_2 r}}=r\sqrt{7}$.

Fläche.

Die allgemeine Flächengleichung $F=\int y dx$ gestaltet sich bei der Cissoide $F= \int\sqrt{\frac{x^3}{2r-x}}dx$, die Wurzel oben beseitigt $=\int\frac{x^2dx}{\sqrt{2rx-x^2}}$, einem binomischen Integrale, welches bei den Pendelschwingungen vorkommt. Wir haben identisch $\int\frac{x^2dx}{\sqrt{2rx-x^2}}=\int\frac{(rx-rx+x^2)dx}{\sqrt{2rx-x^2}} = r\int\frac{xdx}{\sqrt{2rx-x^2}}-\int\frac{x(r-x)dx}{\sqrt{2rx-x^2}}$. Das letztere Jntegral sagt schon durch seine Form: oben $r-x$, unten $\sqrt{2rx-x^2}$, dasz es durch theilweise Jntegration behandelt werden kann nach der bekannten Formel $\int u\, dv=u.v-\int v\, du$. Hier ist $u=x$, $dv=\frac{(r-x)dx}{\sqrt{2rx-x^2}}=\frac{{}^1/_2 d\,(2rx-x^2)}{\sqrt{2rx-x^2}}$ also $v=\sqrt{2rx-x^2}$, $du=dx$. Demnach $\int\frac{x(r-x)dx}{\sqrt{2rx-x^2}}=x\sqrt{2rx-x^2}-\int\sqrt{2rx-x^2}\,dx$ oder wenn wir eine dem ursprünglichen Jntegrale ähnliche Form wieder herstellen $=x\sqrt{2rx-x^2} -\int\frac{(2rx-x^2)dx}{\sqrt{2rx-x^2}}=x\sqrt{2rx-x^2}-2r\int\frac{xdx}{\sqrt{2rx-x^2}}+\int\frac{x^2dx}{\sqrt{2rx-x^2}}$. Folglich $\int\frac{x^2dx}{\sqrt{2rx-x^2}} = r\int\frac{xdx}{\sqrt{2rx-x^2}}-x\sqrt{2rx-x^2}+2r\int\frac{xdx}{\sqrt{2rx-x^2}}-\int\frac{x^2dx}{\sqrt{2rx-x^2}}$ oder $\int\frac{x^2dx}{\sqrt{2rx-x^2}} =-{}^1/_2 x\sqrt{2rx-x^2}+\frac{3r}{2}\int\frac{xdx}{\sqrt{2rx-x^2}}$. Unser Jntegral ist also reducirt auf ein anderes von derselben Form, in welchem aber der Exponent von x um 1 vermindert ist. Theilweis denselben Weg schlagen wir ein, um in $\int\frac{xdx}{\sqrt{2rx-x^2}}$ den Dividenden x ganz verschwinden zu lassen. $\int\frac{xdx}{\sqrt{2rx-x^2}}=\int\frac{(r-r+x)dx}{\sqrt{2rx-x^2}}=r\int\frac{dx}{\sqrt{2rx-x^2}}-\int\frac{(r-x)dx}{\sqrt{2rx-x^2}}=r\int\frac{dx}{\sqrt{2rx-x^2}}-\sqrt{2rx-x^2}$. Mithin $\int\frac{x^2dx}{\sqrt{2rx-x^2}}=-{}^1/_2 x\sqrt{2rx-x^2}-\frac{3r}{2}\sqrt{2rx-x^2}+\frac{3r^2}{2}\int\frac{dx}{\sqrt{2rx-x^2}}=-\frac{3r+x}{2}. \sqrt{2rx-x^2}+\frac{3r^2}{2}\int\frac{dx}{\sqrt{2rx-x^2}}$. Dies letzte Jntegral erinnert an das Fundamentalintegral $\int\frac{dx}{\sqrt{1-x^2}}$. Um die Form desselben herzustellen, bemerken wir $\int\frac{dx}{\sqrt{2rx-x^2}}=\int\frac{dx}{\sqrt{r^2-(r-x)^2}}$

$= \int \frac{\frac{1}{r} dx}{\sqrt{1-(\frac{r-x}{r})^2}} = - \int \frac{d\frac{r-x}{r}}{\sqrt{1-(\frac{r-x}{r})^2}} = arc.\ cos.\ \frac{r-x}{r}$, so dasz jetzt vollständig $F = - \frac{3r+x}{2} \cdot \sqrt{2rx-x^2} + \frac{3r^2}{2}\ arc.\ cos.\ \frac{r-x}{r} + c$. Zur Bestimmung der Constante setzen wir $x = o$. Für diesen Werth wird sowohl F d. i. $\int \sqrt{\frac{x^3}{2r-x}}\, dx$ als $\frac{3r+x}{2} \sqrt{2rx-x^2}$ als auch $\frac{3r^2}{2}\ arc.\ cos.\ \frac{r-x}{r} = o$, somit $c = o$. Schlieszlich also $F = \frac{3r^2}{2}\ arc.\ cos.\ \frac{r-x}{r} - \frac{3r+x}{2} \sqrt{2rx-x^2}$.

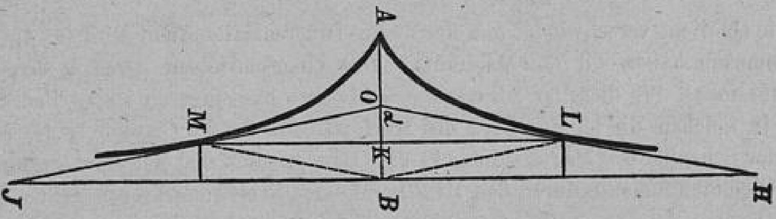
Specielle Fälle. Die von einem Cissoidenzweige, der Asymptote und der Abscissenachse eingeschlossene Fläche findet man durch Jntegration zwischen den Grenzen $x = o$ und $x = 2r$. $F_{o}^{2r} = \frac{3r^2}{2}\ arc.\ cos(-1) - \frac{3r^2}{2}\ arc.\ cos\ 1 = \frac{3r^2}{2} \pi$. Mithin die ganze Fläche zwischen Curve und Asymptote $= 3r^2\pi$ d. h. dreimal so grosz als der Jnhalt des erzeugenden Kreises. — Um die Fläche AGO zu berechnen, welche zwischen dem vom Coordinatenanfange bis zum Durchschnitt mit dem Erzeugungskreise reichenden Curvenbogen und den zugehörigen Coordinaten liegt, integrirt man zwischen den Grenzen $x = o$ und $x = r$. $F_{o}^{r} = \frac{3r^2}{2}\ arc.\ cos\, o - \frac{4r}{2} \cdot \sqrt{r^2} = \frac{3r^2}{2} \cdot \frac{\pi}{2} - 2r^2 = r^2\, (^3/_4\, \pi - 2)$. Die Fläche zwischen den beiden Cissoidenästen und dem Kreisdurchmesser demnach $= r^2\, (^3/_2\, \pi - 4)$. — Der Halbmond AGC, der nach Subtraction des eben berechneten Stückes AGO der Cissoidenfläche von dem Kreisquadranten übrig bleibt, ist $\frac{r^2\pi}{4} - \frac{3\pi-8}{4} r^2 = \frac{r^2}{4} (8 - 2\pi) = r^2\, (2 - \frac{\pi}{2})$.

Eingeschriebenes Rechteck.

Construiren wir in die Cissoide ein Rechteck so, dasz dessen Ecken in die Asymptote und die beiden Curvenäste fallen, so ist dessen Jnhalt $\square = (2r-x) . 2y = 2\, (2r-x) \sqrt{\frac{x^3}{2r-x}} = 2\sqrt{x^3(2r-x)}$. Dieser Jnhalt hat einen Maximalwerth. Differenziren wir, so $\frac{d\square}{dx} = 2\, \frac{3x^2(2r-x) - x^3}{2\sqrt{x^3(2r-x)}} = \frac{6rx^2 - 4x^3}{\sqrt{x^3(2r-x)}} = \frac{2x^2(3r-2x)}{\sqrt{x^3\,(2r-x)}} = 2(3r-2x) \sqrt{\frac{x}{2r-x}}$, ein Ausdruck, welcher zu Null wird für $\sqrt{x} = o$ und $3r - 2x = o$ also für $x = o$ und $x = {}^3/_2 r$. Da der erste Werth nicht brauchbar, so kann also für $x = {}^3/_2\, r$ ein Maximum oder ein Minimum eintreten. Untersuchen wir den zweiten Differenzialquotienten. $\frac{d^2\square}{dx^2} = 2\left[\sqrt{\frac{x}{2r-x}} \cdot \frac{d(3r-2x)}{dx} + (3r-2x)\, \frac{d\sqrt{\frac{x}{2r-x}}}{dx}\right]$. Es ist aber $\frac{d(3r-2x)}{dx} = -\ 2$ und

$\dfrac{d\sqrt{\dfrac{x}{2r-x}}}{dx} = \dfrac{1}{2r-x}\left[\dfrac{\sqrt{2r-x}}{2\sqrt{x}} + \dfrac{\sqrt{x}}{2\sqrt{2r-x}}\right] = \dfrac{2(2r-x)+2x}{4(2r-x)\sqrt{x(2r-x)}} = \dfrac{r}{\sqrt{x(2r-x)^3}}$. Eingesetzt $\dfrac{d^2\square}{dx^2} = 2\left[-2\sqrt{\dfrac{x}{2r-x}} + (3r-2x)\dfrac{r}{\sqrt{x(2r-x)^3}}\right] = \dfrac{2}{\sqrt{2r-x}}\left[\dfrac{r(3r-2x)}{(2r-x)\sqrt{x}} - 2\sqrt{x}\right]$ $= \dfrac{2}{\sqrt{2r-x}}\left[\dfrac{3r^2-2rx-4rx+2x^2}{(2r-x)\sqrt{x}}\right] = \dfrac{2}{\sqrt{2r-x}}\left[\dfrac{3r^2-6rx+2x^2}{(2r-x)\sqrt{x}}\right]$. Substituiren wir hierin $x = {}^3/_2$, so $= \dfrac{2}{\sqrt{{}^3/_2 r}}\left[\dfrac{3r^2-9r^2+3r^2}{{}^1/_2 r\sqrt{{}^3/_2 r}}\right] = -\dfrac{6r^2}{{}^3/_4 r^2} = -8$, also negativ, mithin ein Maximum. Das zwischen den Aesten und der Asymptote einer Cissoide eingeschriebene Rechteck erhält demnach seinen grösztmöglichsten Jnhalt für $x = {}^3/_2 r$. Dieser Jnhalt ist, wenn wir oben einsetzen, $= 2\sqrt{{}^{27}/_8 r^3 . {}^1/_2 r} = \dfrac{r^2}{2}\sqrt{27} = {}^3/_2 r^2\sqrt{3}$ und die beiden Seiten des Rechtecks sind $2y = 2\sqrt{\dfrac{{}^{27}/_8 r^3}{{}^1/_2 r}} = r\sqrt{27} = 3r\sqrt{3}$, $2r - x = {}^1/_2 r$.

Beschreibt man ein Rechteck so, dasz $x = r$, so ist der Jnhalt desselben $2\sqrt{r^3 . r} = 2r^2$ also gleich dem dem Erzeugungskreise eingeschriebenen Quadrat. — Ist $x = {}^1/_2 r$, so wird der Jnhalt des entstandenen Rechtecks $= 2\sqrt{{}^1/_8 r^3 . {}^3/_2 r} = 2r^2\sqrt{{}^3/_{16}} = {}^1/_2 r^2\sqrt{3}$ d. h. gleich einem Drittel des Maximalrechtecks. Die kürzere Seite dieses Rechtecks ist $= 2\sqrt{\dfrac{{}^1/_8 r^3}{{}^3/_2 r}} = 2r\sqrt{{}^1/_{12}}$ $= \dfrac{r}{\sqrt{3}}$ also ein Neuntel der gröszern Seite des gröszten Rechtecks.



Eingeschriebenes Dreieck.

Ziehen wir von einem Punkte der Abscissenachse aus zwei Tangenten an die Cissoidenzweige bis zum Durchschnitt mit der Asymptote, so erhalten wir ein eingeschriebenes Dreieck. Der Jnhalt $\triangle$ dieses Dreiecks OHI ist $= OB . BH = OB^2 . \dfrac{BH}{OB} = OB^2 tg\alpha = OB^2\dfrac{dy}{dx}$. Aber

$OB = AB - AK + OK = 2r - x + St = 2r - x + \dfrac{(2r-x)x}{3r-x} = \dfrac{6r^3 - 3rx - 2rx + x^2 + 2rx - x^2}{3r-x}$ $= \dfrac{3r(2r-x)}{3r-x}$. Mithin $\triangle = \dfrac{9r^2(2r-x)^2}{(3r-x)^2} \cdot \dfrac{(3r-x)\sqrt{x}}{\sqrt{(2r-x)^3}} = 9r^2 \dfrac{\sqrt{x(2r-x)}}{3r-x}$. Auch hier wollen wir die Frage beantworten: giebt es ein Maximum? $\dfrac{d\triangle}{dx} = 9r^2 \dfrac{(3r-x)\, d\sqrt{x(2r-x)} - \sqrt{x(2r-x)}\, d(3r-x)}{(3r-x)^2\, dx}$

$$= \frac{9r^2}{(3r-x)^2}\left[\frac{(r-x)(3r-x)}{\sqrt{x(2r-x)}} + \sqrt{x(2r-x)}\right] = \frac{9r^2\,(3r^2 - rx - 3rx + x^2 + 2rx - x^2)}{(3r-x)^2\sqrt{x(2r-x)}}$$

$= \dfrac{9r^3(3r-2x)}{(3r-x)^2\sqrt{x(2r-x)}}$. Dieser Quotient $= o$ gesetzt giebt $x = {}^3/_2 r$. Es fragt sich ob Maximum oder Minimum? $\dfrac{d^2\triangle}{dx^2} = 9r^3 \dfrac{(3r-x)^2\sqrt{x(2r-x)}.\ d(3r-2x) - (3r-2x).\ d[(3r-x)^2\sqrt{x(2r-x)}]}{(3r-x)^4.\ x(2r-x)dx}$.

Aber $\dfrac{d(3r-2x)}{dx} = -2$ und $\dfrac{d[(3r-x)^2\sqrt{x(2r-x)}]}{dx} = -2(3r-x)\sqrt{x(2r-x)} + \dfrac{(3r-x)^2(r-x)}{\sqrt{x(2r-x)}}$

$$= \frac{3r-x}{\sqrt{x(2r-x)}}\left[(3r-x)(r-x) - 2x(2r-x)\right] = \frac{3r-x}{\sqrt{x(2r-x)}}\left[3r^2 - 3rx - rx + x^2 - 4rx + 2x^2\right]$$

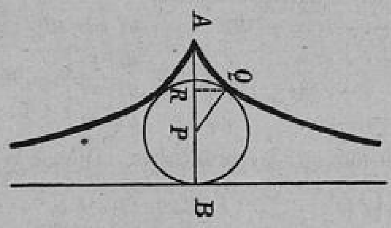
$= \dfrac{(3r-x)(3r^2 - 8rx + 3x^2)}{\sqrt{x(2r-x)}}$. Eingesetzt $\dfrac{d^2\triangle}{dx^2}$

$$= 9r^3\left[\frac{-2}{(3r-x)^2\sqrt{x(2r-x)}} - \frac{(3r-2x)(3r^2 - 8rx + 3x^2)}{(3r-x)^3\sqrt{x^3(2r-x)^3}}\right] = \frac{-9r^2}{(3r-x)^2\sqrt{x(2r-x)}}$$

$\left[2 + \dfrac{(3r-2)(3r^2 - 8rx + 3x^2)}{x(3r-x)(2r-x)}\right]$. Machen wir hierin $x = {}^3/_2 r$, so wird der Factor $3r - 2x = o$, also der letzte Quotient verschwindet und der zweite Differenzialquotient wird für diesen Werth negativ. Demnach haben wir ein Maximum. Das eingeschriebene Dreieck erreicht somit seinen Maximalinhalt für dieselbe Abscisse $x = {}^3/_2 r$ wie das eingeschriebene Rechteck. Der Punkt also, in welchem die längere Seite des Maximalrechtecks die Cissoide trifft, ist derselbe in welchem der Schenkel des Maximaldreiecks die Curve berührt und wir erinnern uns, dasz für dieses x die Cissoidentangente durch den Mittelpunkt des Erzeugungskreises geht. Setzen wir oben ein, so erhalten wir als Jnhalt unseres Dreiecks $9r^2 \dfrac{\sqrt{{}^3/_4 r^2}}{{}^3/_2 r} = 3r^2\sqrt{3}$. Das eingeschriebene Maximaldreieck ist doppelt so grosz wie das eingeschriebene Maximalrechteck. Zur Berechnung der Seiten des Dreiecks haben wir $KB = {}^1/_2 r$, $KL = {}^3/_2 r\sqrt{3}$ und $OB = r$, $OL = 3\sqrt{7}$. Demnach, da $OB : OK = BH : KL$, so $2 : 1 = BH : {}^3/_2 r\sqrt{3}$, $BH = 3r\sqrt{3}$, $HI = 6r\sqrt{3}$ also das Doppelte der gröszeren Maximalrechteckseite LM und, da $OB : OK = OH : OL$, so $2 : 1 = OH : r\sqrt{7}$, $OH = 2r\sqrt{7}$. Fernere Folgerungen: $OL = LH$ und Parallelogramm $OLBM =$ Maximalrechteck.

Eingeschriebener Kreis.

Die eingeschriebenen einfachen gradlinigen Figuren: Dreieck, Viereck regen die Frage an, ob es nicht möglich sei, auch die einfachste krummlinige Figur: den Kreis der Cissoide einzuschreiben. Der Mittelpunkt dieses Kreises müszte, da die Cissoide eine symmetrische Lage hat, ein Punkt der Abscissenachse sein. Wäre P ein solcher Mittelpunkt, dann hätten wir



$PB = PQ$. PQ ist Normale $= \frac{rx}{(2r-x)^2}\sqrt{x(8r-3x)}$, $PB = AB - AR - PR = 2r - x - Sn = 2r - x - \frac{(3r-x)x^2}{(2r-x)^2}$. Demnach müsste $\frac{rx}{(2r-x)^2}\sqrt{x(8r-3x)} = 2r - x - \frac{(3r-x)x^2}{(2r-x)^2}$, $rx\sqrt{x(8r-3x)} = (2r-x)^3 - (3r-x)x^2 = 8r^3 - 12r^2x + 6rx^2 - x^3 - 3rx^2 + x^3 = 8r^3 - 12r^2x + 3rx^2$, $x\sqrt{x(8r-3x)} = 8r^2 - 12rx + 3x^2$, $x^3(8r-3x) = (8r^2 - 12rx + 3x^2)^2$, $8rx^3 - 3x^4 = 64r^4 - 192r^3x + 178r^2x^2 - 72rx^3 + 9x^4$, $64r^4 - 192r^3x + 192r^2x^2 - 80rx^3 + 12x^4 = o$, $x^4 - {}^{20}/_3 rx^3 + 16r^2x^2 - 16r^3x + {}^{16}/_3 r^4 = o$. Um die Brüche fortzuschaffen, verwandeln wir die Gleichung in eine andere, deren Wurzeln dreimal so grosz sind

$$\begin{array}{ccccccccc}
x^4 & - & {}^{20}/_3 rx^3 & + & 16r^2x^2 & - & 16r^3x & + & {}^{16}/_3 r^4 = o \\
1 & & 3 & & 9 & & 27 & & 81 \\
\hline
y^4 & - & 20ry^3 & + & 144r^2y^2 & - & 432r^3y & + & 432r^4 = o
\end{array}$$

Das zweite Glied verschwindet, indem man $y = z + 5r$ setzt:

$$\begin{array}{rl}
y^4 = & z^4 + 20rz^3 + 150r^2z^2 + 500r^3z + 625r^4 \\
-\ 20ry^3 = & \quad\ - 20rz^3 - 300r^2z^2 - 1500r^3z - 2500r^4 \\
+\ 144r^2y^2 = & \qquad\qquad + 144r^2z^2 + 1440r^3z + 3600r^4 \\
-\ 432r^3y = & \qquad\qquad\qquad\qquad - 432r^3z - 2160r^4 \\
+\ 432r^4 = & \qquad\qquad\qquad\qquad\qquad\qquad + 432r^4 \\
\hline
o = & z^4 - 6r^2z^2 + 8r^3z - 3r^4
\end{array}$$

eine biquadratische Gleichung, deren reducirte ist

$$v^3 - 3r^2v^2 + 3r^4v - r^6 = o$$

Das zweite Glied beseitigt durch $v = u + r^2$:

$$\begin{array}{rl}
v^3 = & u^3 + 3u^2r^2 + 3ur^4 + r^6 \\
-\ 3r^2v^2 = & \quad - 3u^2r^2 - 6ur^4 - 3r^6 \\
+\ 3r^4v = & \qquad\qquad + 3ur^4 + 3r^6 \\
-\ r^6 = & \qquad\qquad\qquad\quad - r^6 \\
\hline
o = & u^3.
\end{array}$$

Folglich $u = o$, also $v_1 = r^2$.

Um die beiden andern Wurzeln v_2, v_3 unserer reducirten Gleichung zu finden, bedenken wir, dasz der Coefficient des zweiten Gliedes einer geordneten Gleichung gleich der Summe und das letzte Glied gleich dem Produkt sämmtlicher Wurzeln der Gleichung ist. Demnach haben wir $v_1 + v_2 + v_3 = 3r^2$ und $v_1 v_2 v_3 = r^6$ oder, da $v_1 = r^2$, $v_2 + v_3 = 2r^2$, $v_2 v_3 = r^4$. Durch Elimination $v_2.(2r^2 - v_2) = r^4$, $v_2^2 - 2r^2 v_2 = -r^4$, $(v_2 - r^2)^2 = o$, $v_2 = r^2$, mithin auch $v_3 = r^2$. Also $v_1 = v_2 = v_3 = r^2$ und wir erhalten demnach

$$\begin{array}{lll} z_1 = -r-r-r = -3r & y_1 = 2r & x_1 = {}^2/_3 r \\ z_2 = -r+r+r = r & & \\ z_3 = +r-r+r = r & \text{somit } \left.\begin{array}{l} y_2 = \\ y_3 = \\ y_4 = \end{array}\right\} 6r & \text{und } \left.\begin{array}{l} x_2 = \\ x_3 = \\ x_4 = \end{array}\right\} 2r. \\ z_4 = +r+r-r = r & & \end{array}$$

Für die Cissoide ist natürlich nur $x = {}^2/_3 r$ brauchbar. Diesen Werth eingesetzt giebt Normale $PQ = \frac{{}^2/_3 r^2}{{}^{16}/_9 r^2} \sqrt{{}^2/_3 r.\, 6r} = {}^3/_8 \sqrt{4r^2} = {}^3/_4 r$; Subtangente $PR = \frac{{}^7/_3 r.\ {}^4/_9 r^2}{{}^{16}/_9 r^2} = {}^7/_{12} r$ und der Abstand PB des Normalfuszpunktes von der Asymptote $= 2r - {}^2/_3 r - {}^7/_{12} r = {}^3/_4 r$ d. i. = Normale PQ. Ein mit P mit dem Radius ${}^3/_4 r$ gezogener Kreis berührt demnach beide Cissoidenäste und die Asymptote. Der Jnhalt dieses Kreises ist $= {}^9/_{16} r^2 \pi$ also $= {}^3/_{16}$ der ganzen Cissoidenfläche und ${}^9/_{16}$ der Fläche des Erzeugungskreises.

Dr. G. Hickethier.