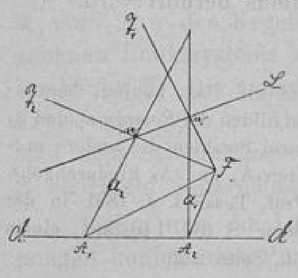
Das System konfokaler Parabeln, die eine Strecke harmonisch teilen.

Einleitung.

Das Kegelschnittbüschel besteht aus sämtlichen Kegelschnitten, die vier Punkte gemeinsam haben. Setzt man an die Stelle der vier gemeinsamen Punkte vier Paare von Punkten mit der Bestimmung, dass jedes derselben in Bezug auf jeden Kegelschnitt des Systems ein Paar konjugierter Punkte sei, und definiert man jedes Punktenpaar als die Asymptotenpunkte eines beliebigen auf einem geraden Träger liegenden Punktsystems (einer Involution von Punktenpaaren), so erhält man das einfach unendliche System von Kegelschnitten, die vier Gerade in bestimmten Punktsystemen schneiden. Dieses System kann gewissermassen als eine Erweiterung des Kegelschnittbüschels betrachtet werden; denn wenn insbesondere die auf den vier Geraden gegebenen Punktsysteme parabolisch sind, so ist das System ein Kegelschnittbüschel mit vier reellen Mittelpunkten. In derselben Weise lassen sich auch die übrigen Systeme von Kegelschnitten, deren vier gemeinsame Bestimmungsstücke Punkte oder Gerade sind, verallgemeinern, indem man an die Stelle eines einzelnen der gemeinsamen Punkte oder Geraden ein Punkten- oder Geradenpaar setzt mit der Bestimmung, dass dieses Paar in Bezug auf jeden Kegelschnitt des Systems ein Paar konjugierter Punkte beziehungsweise Strahlen sei. Das Kegelschnittbüschel, die Kegelschnittschaar, sowie die gemischten Kegelschnittschaaren sind von Jac. Steiner und Anderen eingehend untersucht worden; indessen haben die in dem angedeuteten Sinne erweiterten Systeme noch keine hinreichende Beachtung gefunden.



Es seien auf der Geraden $\mathfrak{A}$ zwei Punkte A_1 und A_2 gegeben mit der Bestimmung, dass sie in Bezug auf jeden Kegelschnitt des Systems konjugierte Punkte seien. Es sollen mit gleicher Bestimmung noch 3 fernere Paare von Punkten oder Geraden gegeben sein. Dann geht die Polare a_1 des Punktes A_1 in Bezug auf irgend einen Kegelschnitt des Systems durch den Punkt A_2, sowie die Polare a_2 des Punktes A_2 durch A_1, und die Polaren a_1 und a_2 in

Bezug auf alle Kegelschnitte des Systems bilden Strahlenbüschel mit den Mittelpunkten A_1 und A_2 in der Weise, dass jedem Strahl des einen Büschels ein und nur ein Strahl des anderen entspricht, weil durch ein Paar Pol und Polare und 3 Paar konjugierte Punkte, beziehungsweise Gerade der Kegelschnitt eindeutig bestimmt ist.*) Diese Strahlbüschel sind also projektivisch; ihr Erzeugnis, ein Kegelschnitt, ist der Ort der Pole der Geraden $\mathfrak{A}$ in Bezug auf alle Kegelschnitte des Systems. Berücksichtigt man, dass ein Kegelschnitt jede Strecke, die von zwei in Bezug auf diesen Kegelschnitt konjugierten Punkten begrenzt wird, harmonisch teilt, so lässt sich das Ergebnis unserer Betrachtung in folgendem Satze aussprechen:

> Die Pole der Geraden $\mathfrak{A}$ in Bezug auf alle Kegelschnitte, die eine auf $\mathfrak{A}$ gegebene Strecke $A_1 A_2$ harmonisch teilen, und für welche überdies noch drei Paar Punkte oder drei Paar Gerade konjugierte Punkte beziehungsweise Gerade sind, liegen auf einem Kegelschnitte, der durch die Punkte A_1 und A_2 hindurchgeht.**)

Es soll jetzt ausser der harmonisch zu teilenden Strecke noch ein Strahlsystem mit dem Mittelpunkt F und ein Paar Gerade gegeben sein mit der Bestimmung, dass das Strahlsystem in F ein allen Kegelschnitten des Systems zugehöriges sei, und dass die beiden Geraden für alle Kegelschnitte des Systems konjugierte Gerade seien. Bezeichnen wir nun den zu F A_1 konjugierten Strahl des in F gegebenen Strahlsystems mit $\mathfrak{T}_1$, und ebenso den zu F A_2 konjugierten Strahl mit $\mathfrak{T}_2$; so liegt der Pol der Geraden F A_1 in Bezug auf irgend einen Kegelschnitt des Systems auf $\mathfrak{T}_1$; nun liegt aber der Pol von F A_1 auch auf der Polaren a_1 des Punktes A_1; folglich ist der Schnittpunkt $\mathfrak{a}_1$ von $\mathfrak{T}_1$ und a_1 der Pol der Geraden F A_1; ebenso ist der Schnittpunkt $\mathfrak{a}_2$ von $\mathfrak{T}_2$ und a_2 der Pol der Geraden F A_2. Die Verbindungsgerade $\mathfrak{a}_1 \mathfrak{a}_2$ ist demnach die Polare des Punktes F. Nun sind, wie wir oben sahen, die Strahlbüschel, welche die Polaren a_1 und a_2 in A_2 und A_1 bilden, projektivisch; folglich sind es auch die mit ihnen perspektivisch liegenden Punktreihen, welche die Punkte $\mathfrak{a}_1$ und $\mathfrak{a}_2$ auf $\mathfrak{T}_1$ und $\mathfrak{T}_2$ bilden. Es gilt daher folgender Satz:

> Die Polaren des Punktes F in Bezug auf alle Kegelschnitte, die eine Strecke $A_1 A_2$ harmonisch teilen, denen ausserdem ein in F gegebenes Strahlsystem zugehört, und für welche zwei gegebene Gerade konjugierte Gerade sind, umhüllen einen Kegelschnitt, der von den zu F A_1 und F A_2 konjugierten Strahlen des in F gegebenen Strahlsystems berührt wird.***)

---

*) Schröter, Theorie der Kegelschnitte § 57.

**) Wenn ausser A_1 A_2 noch zwei Paar konjugierten Punkte und ein Paar konjug. Gerade; oder ein Paar konjug. Punkte und zwei Paar konj. Gerade gegeben sind, so bilden die Polaren a_1 und a_2 Strahlenbüschel in der Weise, dass jedem Strahl des einen zwei und nur zwei Strahlen des andern entsprechen. Ihr Erzeugnis ist daher eine Kurve vierter Ordnung, welche durch A_1 und A_2 hindurchgeht.

***) Einen besonderen Fall dieses Satzes veröffentlichte Herr Prof. Tesař i. J. 1881 in der Abhandlung: „Synthetische Untersuchung der gemischten Kegelschnittschaar S (3 l, 1 p) mit einem imaginären Tangentenpaar.“ Siehe Wiener Sitzungsberichte, 84 Bd. II. Abt., Seite 222.

V

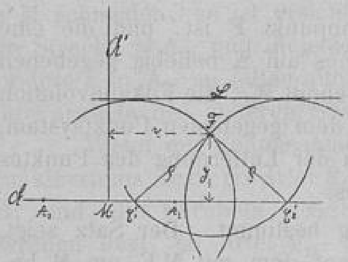
In Verfolgung des hier betretenen Weges und unter Anwendung des Dualitätsprinzips lassen sich noch andere Sätze auffinden, die sich auf die eingangs dieser Abhandlung erwähnten allgemeinen Kegelschnittsysteme beziehen; indessen soll die folgende Untersuchung sich beschränken auf das System von Kegelschnitten, die eine beliebig gegebene Strecke A_1 A_2 harmonisch teilen, denen überdies ein in F gegebenes cirkulares Strahlsystem zugehört, und für welche zwei konjugierte Gerade unendlich entfernt sind. Es ist dies das System von konfokalen Parabeln, die eine Strecke harmonisch teilen.

§ 1.

Die Einhüllende der Leitlinien.

Berücksichtigen wir, dass die Polare des Brennpunktes einer Parabel die Leitlinie derselben ist, so nimmt der im letzten Teile der Einleitung bewiesene Satz für unsern besondern Fall folgende Form an:

> Die Leitlinien derjenigen Parabeln, deren Brennpunkt F ist, und welche die Strecke A_1 A_2 harmonisch teilen, umhüllen einen Kegelschnitt, der von den in F auf F A_1 und F A_2 errichteten Senkrechten $\mathfrak{T}_1$ und $\mathfrak{T}_2$ berührt wird.



Dieser Kegelschnitt soll mit $\mathfrak{L}_{II}$ bezeichnet und näher bestimmt werden. A_1 und A_2 seien die Asymptotenpunkte eines auf dem geraden Träger $\mathfrak{A}$ beliebig gegebenen Punktsystems. Beschreibt man um irgend zwei konjugierte Punkte $\mathfrak{x}_1$ und $\mathfrak{x}_2$ dieses Punktsystems die beiden Kreise, welche durch F gehen, so sind die gemeinsamen Tangenten dieser Kreise die Leitlinien der durch $\mathfrak{x}_1$ und $\mathfrak{x}_2$ gehenden Parabeln unseres Systems. Beachten wir, dass die beiden Kreise zwei reelle und zwei imaginäre Tangenten haben, so ergibt sich zunächst der Satz:

> Von den konfokalen Parabeln, die eine Gerade $\mathfrak{A}$ in einem gegebenen Punktsystem schneiden, gehen vier durch je zwei konjugierte Punkte des Punktsystems; zwei derselben sind reell und zwei imaginär.

Da die Mittelpunkte $\mathfrak{x}_1$ und $\mathfrak{x}_2$ der durch F gehenden Kreise auf $\mathfrak{A}$ liegen, so sind die gemeinsamen Tangenten derselben paarweise symetrisch zu $\mathfrak{A}$. Folglich ist $\mathfrak{A}$ eine Axe des Kegelschnitts $\mathfrak{L}_{II}$. Zwei ausgezeichnete konjugierte Punkte des gegebenen Punktsystems sind der Mittelpunkt M desselben und der unendlich entfernte Punkt auf $\mathfrak{A}$. Die gemeinsamen Tangenten der um diese Punkte durch F beschriebenen Kreise sind die im Abstande MF von M auf $\mathfrak{A}$ errichteten Senkrechten. Letztere sind also Scheiteltangenten an $\mathfrak{L}_{II}$; M ist der Mittelpunkt von $\mathfrak{L}_{II}$, und die in M auf $\mathfrak{A}$ errichtete Senkrechte $\mathfrak{A}^1$ ist die andere Axe von $\mathfrak{L}_{II}$.

Um nun die Länge der letzteren Axe auf $\mathfrak{A}^1$ zu bestimmen, suche ich diejenigen konjugierten Punkte $\mathfrak{x}_1{}^1$ und $\mathfrak{x}_2{}^1$ des Punktsystems $\mathfrak{A}$ auf, welche von F gleichweit entfernt sind. Bezeichnet man den Abstand des Punktes F von $\mathfrak{A}^1$ und $\mathfrak{A}$ mit x und y, und setzt man $F\mathfrak{x}_1{}^1 = F\mathfrak{x}_2{}^1 = \rho$; so ist:

$$M\mathfrak{x}_1{}^1 \cdot M\mathfrak{x}_2{}^1 = \left(x - \sqrt{\rho^2 - y^2}\right)\left(x + \sqrt{\rho^2 - y^2}\right) = x^2 + y^2 - \rho^2$$

Da ferner $x^2 + y^2 = MF^2$

und $M\mathfrak{x}_1{}^1 \cdot M\mathfrak{x}_2{}^1 = \pm e^2$ ist, wenn e^2 den absoluten Wert der Potenz des gegebenen Punktsystems bedeutet; so folgt: $F\mathfrak{x}^1{}_1 = F\mathfrak{x}_2{}^1 = \sqrt{MF^2 \mp e^2}$; das heisst:

Wenn man um einen beliebigen Punkt F der Ebene mit der Strecke $\sqrt{MF^2 \mp e^2}$ den Kreis beschreibt, so schneidet dieser Kreis eine beliebige Gerade $\mathfrak{A}$ der Ebene stets in zwei konjugierten Punkten desjenigen Punktsystems auf $\mathfrak{A}$, dessen Mittelpunkt M, und dessen Potenz $\pm e^2$ ist.

Beschreibt man nun um die geometrisch jetzt leicht zu konstruierenden Punkte $\mathfrak{x}_1{}^1$ und $\mathfrak{x}_2{}^1$ die beiden durch F gehenden Kreise, so stehen die gemeinsamen Tangenten dieser Kreise senkrecht auf $\mathfrak{A}^1$; es sind diese Tangenten die zu $\mathfrak{A}$ parallelen Scheiteltangenten von $\mathfrak{L}_{II}$. Die gesuchte Länge der Halbaxe auf $\mathfrak{A}^1$ ist also gleich $\sqrt{MF^2 \mp e^2}$.

Da nun, wie wir bereits fanden, die Länge der Halbaxe auf $\mathfrak{A}$ gleich MF ist; so ist die Fokalinvolution auf $\mathfrak{A}$ gleich $MF^2 - (MF^2 \mp e^2) = \pm e^2$. Wir haben somit den Satz gefunden:

Die Leitlinien der Parabeln, deren Brennpunkt F ist, und die eine Gerade $\mathfrak{A}$ in je zwei konjugierten Punkten eines auf $\mathfrak{A}$ beliebig gegebenen Punktsystems schneiden, umhüllen einen Kegelschnitt $\mathfrak{L}_{II}$; die Fokalinvolution auf der Axe $\mathfrak{A}$ des Kegelschnitts $\mathfrak{L}_{II}$ ist gleich dem gegebenen Punktsystem, und die stets reelle Halbaxe auf $\mathfrak{A}$ ist gleich der Entfernung des Punktes F vom Mittelpunkt des gegebenen Punktsystems.

Durch diesen Satz ist $\mathfrak{L}_{II}$ für alle Fälle eindeutig bestimmt. Der Satz zeigt, dass $\mathfrak{L}_{II}$ unabhängig ist von der Lage des Punktes F auf dem mit MF um M beschriebenen Kreise.

Spezielle Fälle:

1. Das auf $\mathfrak{A}$ gegebene Punktsystem sei hyperbolisch, also die Potenz desselben positiv, endlich und von Null verschieden.

Die Länge der Halbaxe von $\mathfrak{L}_{II}$ auf $\mathfrak{A}^1$ ist $\sqrt{MF^2 - e^2}$; dieselbe ist reell, imaginär oder gleich Null, jenachdem MF grösser, kleiner oder gleich e ist. Wir können dies Ergebnis folgendermassen aussprechen:

Die Leitlinien der Parabeln, deren Brennpunkt F ist, und welche die reelle, endliche und von Null verschiedene Strecke $A_1 A_2$ harmonisch teilen, umhüllen eine Ellipse, Hyperbel oder die beiden Punkte A_1 und A_2, jenachdem F ausserhalb, innerhalb oder auf dem um A_1 und A_2 als Durchmesser beschriebenen Kreise liegt.

In dem letzteren Falle, der eine besondere Beachtung verdient, zerfällt unser System in zwei einzelne; die Parabeln des einen Systems senden ihre Leitlinien durch den Punkt A_1, diejenigen des anderen durch A_2. Jede Parabel $\mathfrak{P}$, die ihre Leitlinie durch A_1 sendet, sendet ihre Scheiteltangente durch den Mittelpunkt C_1 der Strecke $F A_1$. Errichtet man in dem Punkte C_1 der Scheiteltangente von $\mathfrak{P}$ die Senkrechte auf $C_1 F$, so berührt letztere nach einem bekannten Satze die Parabel $\mathfrak{P}$. Da nun $\mathfrak{P}$ eine beliebige Parabel des ersten Systems ist, so folgt, dass alle Parabeln dieses Systems die auf $F A_1$ errichtete Mittelsenkrechte berühren.

Alle Parabeln, deren Brennpunkt F ist, und die ihre Leitlinien durch einen festen Punkt A_1 senden, haben die auf $F A_1$ errichtete Mittelsenkrechte zur gemeinsamen Tangente; gleichzeitig teilen sie alle diejenigen Strecken harmonisch, welche man erhält, wenn man die Punkte der in F auf $F A_1$ errichteten Senkrechte mit A_1 verbindet.

Es ergibt sich ohne weiteres auch folgender Satz:

Alle Parabeln, deren Brennpunkt F ist, und die eine feste Gerade $\mathfrak{T}$ berühren, senden ihre Scheiteltangenten durch den Fusspunkt des von F auf $\mathfrak{T}$ gefällten Lotes, und ihre Leitlinien durch das Spiegelbild A_1 des Punktes F in Bezug auf $\mathfrak{T}$; gleichzeitig teilen sie alle diejenigen Strecken harmonisch, die man erhält, wenn man die Punkte der durch F zu $\mathfrak{T}$ parallel gezogenen Geraden mit A_1 verbindet.

Beachtet man, dass die auf $F A_1$ und $F A_2$ errichteten Mittelsenkrechten sich in M schneiden, so ist ersichtlich, dass alle Parabeln des ersten jener Einzelsysteme die Strecke $M A_2$, und diejenige des andern die Strecke $M A_1$ schneiden. Liegt insbesondere F in A_2, so fallen alle Parabeln des ersten Systems in die Gerade $\mathfrak{A}$, während die Parabeln des anderen Systems nicht ausarten.

Wenn der gemeinsame Brennpunkt F in dem Mittelpunkt des auf $\mathfrak{A}$ gegebenen Punktsystems liegt, so artet $\mathfrak{L}_{II}$ in die Gerade $\mathfrak{A}^1$ aus, welche als Hyperbel aufzufassen ist, und alle Parabeln des Systems fallen in $\mathfrak{A}$. Wenn F auf der ∞ entfernten Geraden liegt, so artet $\mathfrak{L}_{II}$ in diese Gerade aus, welche als Ellipse aufzufassen ist. Jede Parabel des Systems besteht aus zwei Parallelen, die durch F gehen und $\mathfrak{A}$ in einem Paar konjugierter Punkte schneiden.

Wenn endlich $M F = \frac{M A_1}{\sqrt{2}}$ ist, so ist $\mathfrak{L}_{II}$ eine gleichseitige Hyperbel.

2. Das auf $\mathfrak{A}$ gegebene Punktsystem sei gleichseitig hyperbolisch, also die harmonisch zu teilende Strecke unendlich gross. Da der Mittelpunkt M von $\mathfrak{L}_{II}$ im Unendlichen liegt, so ist $\mathfrak{L}_{II}$ eine Parabel; ihr Brennpunkt ist der im Endlichen liegende Endpunkt A_1 der harmonisch zu teilenden Strecke; ihre Scheiteltangente ist das von F auf $\mathfrak{A}$ gefällte Lot. Es gilt daher der Satz:

Die Leitlinien der Parabeln, deren Brennpunkt F ist, und welche eine feste Gerade $\mathfrak{A}$ je in zwei Punkten schneiden, die von einem auf $\mathfrak{A}$ gegebenen Punkte A_1 gleichweit entfernt sind, umhüllen diejenige Parabel, deren Brennpunkt A_1, und deren Scheiteltangente das von F auf $\mathfrak{A}$ gefällte Lot ist.

Wenn insbesondere F in der in A_1 auf $\mathfrak{A}$ errichteten Senkrechten liegt, so zerfällt unser System wieder in zwei Einzelsysteme. Die Parabeln des einen Systems senden ihre Leitlinien durch A_1 und schneiden $\mathfrak{A}$ nur in imaginären Punkten; die Parabeln des andern Systems senden ihre Leitlinien durch den ∞ entfernten Punkt auf $\mathfrak{A}$ und schneiden $\mathfrak{A}$ je in zwei reellen Punkten, welche von A_1 gleichweit entfernt sind.

3. Das auf $\mathfrak{A}$ gegebene Punktsystem sei parabolisch, also die harmonisch zu teilende Strecke gleich Null. Da $e^2 = 0$ ist, so ist die Halbaxe von $\mathfrak{L}_{II}$ auf $\mathfrak{A}^1$ gleich der Halbaxe MF auf $\mathfrak{A}$, also $\mathfrak{L}_{II}$ ein Kreis, und F liegt auf diesem Kreise. Alle Parabeln des Systems gehen durch den Mittelpunkt M dieses Kreises. Daher der Satz:

Die Leitlinien der Parabeln, deren Brennpunkt F ist, und die durch den festen Punkt M gehen, umhüllen den mit MF um M beschriebenen Kreis. Und umgekehrt: Alle Parabeln, deren Brennpunkt F ist, und deren Leitlinien einen durch F gelegten Kreis berühren, gehen durch den Mittelpunkt dieses Kreises.

4. Das auf $\mathfrak{A}$ gegebene Punktsystem sei elliptisch, also die harmonisch zu teilende Strecke imaginär.

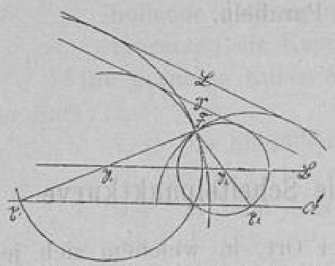
Die Länge der Halbaxe auf $\mathfrak{A}^1$ ist $\sqrt{MF^2 + e^2}$; diese Grösse ist stets reell und grösser als die Länge der Halbaxe MF auf $\mathfrak{A}$. Es ist also $\mathfrak{A}^1$ die Hauptaxe von $\mathfrak{L}_{II}$, deren Fokalinvolution $+ e^2$ ist. Da die Längen beider Halbaxen reell sind, so ist $\mathfrak{L}_{II}$ stets eine Ellipse. Daher der Satz:

Die Leitlinien der Parabeln, deren Brennpunkt F ist, und welche eine Gerade $\mathfrak{A}$ je in zwei konjugierten Punkten eines elliptischen Punktsystems schneiden, dessen Mittelpunkt M, und dessen Potenz $- e^2$ ist, umhüllen diejenige Ellipse, deren reelle Brennpunkte in der Entfernung e von M auf der in M auf $\mathfrak{A}$ errichteten Senkrechten $\mathfrak{A}^1$ liegen, und deren halbe Nebenaxe auf $\mathfrak{A}$ gleich MF ist.

Wenn insbesondere F in M liegt, so artet $\mathfrak{L}_{II}$ in ihre Brennpunkte aus, und unser System zerfällt wieder in zwei Einzelsysteme. Die Parabeln des einen Systems senden ihre Leitlinien durch einen der Brennpunkte, diejenigen des andern Systems durch den andern Brennpunkt. Die Parabeln des einen oder andern der Einzelsysteme berühren die eine oder die andere der im Abstande $\frac{e}{2}$ von $\mathfrak{A}$ zu $\mathfrak{A}$ parallel gezogenen Geraden, und das eine dieser Einzelsysteme ist das Spiegelbild des andern in Bezug auf $\mathfrak{A}$.

§ 2.

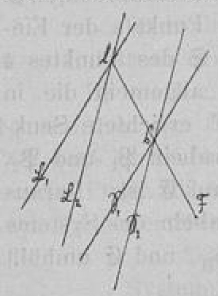
Die Einhüllende der Scheiteltangenten.



Es seien $\mathfrak{y}_1$ und $\mathfrak{y}_2$ die Mittelpunkte zweier Strecken $F\mathfrak{x}_1$ und $F\mathfrak{x}_2$; man beschreibe um $\mathfrak{x}_1$ und $\mathfrak{x}_2$ die Kreise durch F und bezeichne eine der gemeinsamen Tangenten dieser Kreise mit $\mathfrak{L}$; so ist $\mathfrak{L}$ die Leitlinie einer Parabel, deren Brennpunkt F ist, und die durch $\mathfrak{x}_1$ und $\mathfrak{x}_2$ hindurchgeht. Beschreibt man ebenso um $\mathfrak{y}_1$ und $\mathfrak{y}_2$ die Kreise durch F und bezeichnet man die zu $\mathfrak{L}$ parallele gemeinsame Tangente dieser Kreise mit $\mathfrak{S}$, so ist $\mathfrak{S}$ die Leitlinie einer Parabel, die durch $\mathfrak{y}_1$ und $\mathfrak{y}_2$ geht, und deren Brennpunkt F ist. Zugleich ist $\mathfrak{S}$ die Scheiteltangente der Parabel, deren Leitlinie $\mathfrak{L}$ ist; denn $\mathfrak{S}$ ist parallel $\mathfrak{L}$ und halbiert den Abstand des Brennpunktes F von $\mathfrak{L}$. Es ist also die Scheiteltangente der durch $\mathfrak{x}_1$ und $\mathfrak{x}_2$ gehenden Parabel identisch mit der Leitlinie der durch $\mathfrak{y}_1$ und $\mathfrak{y}_2$ gehenden Parabel, deren Brennpunkt F ist. Fassen wir jetzt $\mathfrak{x}_1$ und $\mathfrak{x}_2$ als zwei konjugierte Punkte eines auf $\mathfrak{A}$ gegebenen Punktsystems auf, so ergibt sich folgender Satz:

> Wenn man zu einer Geraden $\mathfrak{A}$ diejenige Parallele $\mathfrak{B}$ zieht, welche die Entfernung eines festen Punktes F von $\mathfrak{A}$ halbiert, und wenn man ferner ein auf $\mathfrak{A}$ gegebenes Punktsystem von F aus auf $\mathfrak{B}$ projiziert; dann ist die Einhüllende der Scheiteltangenten derjenigen Parabeln, deren Brennpunkt F ist, und die $\mathfrak{A}$ je in zwei konjugierten Punkten des auf $\mathfrak{A}$ gegebenen Punktsystems schneiden, identisch mit der Einhüllenden der Leitlinien derjenigen Parabeln, deren Brennpunkt ebenfalls F ist, und die $\mathfrak{B}$ je in zwei konjugierten Punkten des auf $\mathfrak{B}$ projizierten Punktsystems schneiden.

Dieser Satz macht eine nähere Bestimmung der Einhüllenden der Scheiteltangenten, die wir fortan mit $\mathfrak{S}_{II}$ bezeichnen wollen, entbehrlich; denn alles, was bisher über $\mathfrak{L}_{II}$ gesagt ist, gilt auch für $\mathfrak{S}_{II}$, wenn wir nur an die Stelle des auf $\mathfrak{A}$ gegebenen Punktsystems das auf $\mathfrak{B}$ projizierte setzen. Indessen ist es für die folgende Untersuchung vorteilhaft, die Beziehung zwischen $\mathfrak{L}_{II}$ und $\mathfrak{S}_{II}$ auch noch in anderer Form zum Ausdruck zu bringen.



Es seien $\mathfrak{P}_1$ und $\mathfrak{P}_2$ irgend zwei Parabeln, deren Brennpunkt F ist; die beiden Leitlinien von $\mathfrak{P}_1$ und $\mathfrak{P}_2$ mögen sich im Punkte $\mathfrak{l}$ ihre Scheiteltangenten im Punkte $\mathfrak{s}$ schneiden; dann ist $\mathfrak{s}$ der Mittelpunkt der Strecke $F\mathfrak{l}$. Jetzt sollen $\mathfrak{P}_1$ und $\mathfrak{P}_2$ zwei Nachbar-Parabeln irgend eines Systems von Parabeln sein, deren Brennpunkt F ist; dann sind $\mathfrak{l}$ und $\mathfrak{s}$ homologe Punkte der Einhüllenden der Leitlinien beziehungsweise der Scheiteltangenten der Parabeln dieses Systems. Daher gilt der Satz:

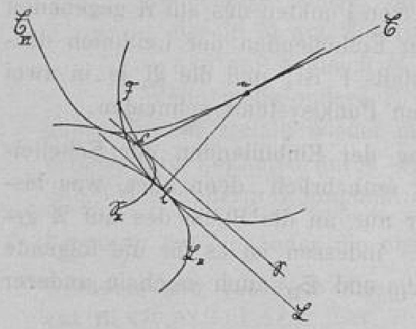
Verbindet man einen beliebigen Punkt $\mathfrak{l}$ der Einhüllenden der Leitlinien der Parabeln eines Systems von konfokalen Parabeln mit dem gemeinsamen Brennpunkt F, so ist der Ort des Mittelpunkts dieser Verbindungsstrecke die Einhüllende der Scheiteltangenten derselben Parabeln.

§ 3.

Die Einhüllende der Parabeln des Systems und die Scheitelpunktkurve.

Die Einhüllende der Kurven eines Systems ist der Ort, in welchem sich je zwei Nachbar-Kurven des Systems schneiden. Es sei P ein beliebiger Punkt der Ebene, und es sei um P durch F der Kreis beschrieben, dann sind die vier gemeinsamen Tangenten dieses Kreises und des im § 1 behandelten Kegelschnitts L_{II} die Leitlinien der vier Parabeln unseres Systems, welche durch P hindurchgehen. Zwei dieser Parabeln sind Nachbar-Parabeln, wenn zwei der gemeinsamen Tangenten unendlich nahe zusammenfallen, d. i. wenn der um P mit PF beschriebene Kreis den Kegelschnitt L_{II} berührt.

Die Einhüllende der Parabeln eines Systems von konfokalen Parabeln die eine Strecke harmonisch teilen, ist der Ort der Mittelpunkte derjenigen Kreise, welche durch F gehen und gleichzeitig die Einhüllende der Leitlinien der Parabeln desselben Systems berühren.



Eine andere Entstehungsweise unserer Kurve ergibt sich durch folgende Überlegung: Es sei l ein beliebiger Punkt auf $\mathfrak{L}_{II}$, $\mathfrak{L}$ sei die Tangente, und $\mathfrak{N}$ die Normale des Punktes l; dann schneidet die Mittelsenkrechte $\mathfrak{E}$ der Strecke Fl die Normale $\mathfrak{N}$ in einem Punkte $\mathfrak{e}$ der gesuchten Kurve; denn der um $\mathfrak{e}$ mit $\mathfrak{e}$F beschriebene Kreis geht durch F und berührt $\mathfrak{L}_{II}$ in l. In $\mathfrak{e}$ schneiden sich also zwei Nachbar-Parabeln $\mathfrak{P}_1$ und $\mathfrak{P}_2$, deren Leitlinien in $\mathfrak{L}$ zusammenfallen. Der Fusspunkt der Mittelsenkrechten $\mathfrak{E}$, d. i. der Mittelpunkt der Strecke Fl ist nach § 2 der zu l homologe Punkt s der Einhüllenden $\mathfrak{S}_{II}$ der Scheiteltangente; es fallen also in der Tangente $\mathfrak{S}$ des Punktes $\mathfrak{s}$ die beiden Scheiteltangenten von $\mathfrak{P}_1$ und $\mathfrak{P}_2$ zusammen. Nun ist allgemein die in einem beliebigen Punkte $\mathfrak{s}$ der Scheiteltangente einer Parabel auf $\mathfrak{s}$F errichtete Senkrechte eine Tangente der Parabel. Folglich berührt $\mathfrak{E}$ die beiden Parabeln $\mathfrak{P}_1$ und $\mathfrak{P}_2$, und zwar in deren Schnittpunkte $\mathfrak{e}$, weil $\mathfrak{e}$ zugleich auch ein Punkt auf $\mathfrak{E}$ ist. Daraus folgt, dass $\mathfrak{E}$ auch eine Tangente der gesuchten Einhüllenden der Parabeln des Systems ist. Bewegt sich nun der Punkt l über $\mathfrak{L}_{II}$, so bewegt sich $\mathfrak{s}$ über $\mathfrak{S}_{II}$, und $\mathfrak{E}$ umhüllt unsere Kurve.

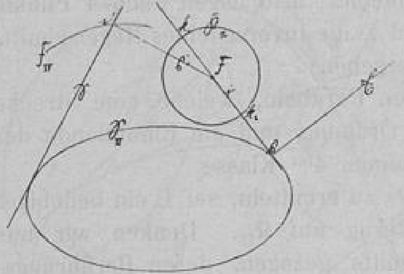
Bewegt man einen rechten Winkel so, dass einer seiner Schenkel fortwährend durch einen festen Punkt F geht, während sein Scheitel sich längs einer Kurve $\mathfrak{S}_{II}$ bewegt, so umhüllt der freie Schenkel die Einhüllende derjenigen Parabeln, deren Brennpunkt F ist, und deren Scheiteltangenten die Kurve $\mathfrak{S}_{II}$ umhüllen.

Die gesuchte Kurve ist also diejenige, deren Fusspunktkurve $\mathfrak{S}_{II}$ ist. Daher der Satz:

Die Einhüllende der Parabeln eines Systems von konfokalen Parabeln ist die negative Fusspunktkurve der Einhüllenden der Scheiteltangenten der Parabeln desselben Systems bezogen auf den gemeinsamen Brennpunkt als Pol.

Wenn man von dem Brennpunkt einer Parabel das Lot auf ihre Scheiteltangente fällt, so ist der Fusspunkt dieses Lotes der Scheitel der Parabel. Wir können daher dem vorstehenden Satze den folgenden an die Seite stellen:

Die Scheitelpunktkurve der Parabeln eines Systems von konfokalen Parabeln ist die (positive) Fusspunktkurve der Einhüllenden der Scheiteltangenten der Parabeln desselben Systems bezogen auf den gemeinsamen Brennpunkt als Pol.



Die Beziehungen, in denen die beiden hier zu behandelnden Kurven zu einander stehen, treten noch deutlicher durch folgende Erörterung hervor: Es sei $\mathfrak{s}$ ein beliebiger Punkt auf $\mathfrak{S}_{II}$, und $\mathfrak{K}_{II}$ ein beliebiger um F als Mittelpunkt beschriebener Kreis, der von der Geraden $\mathfrak{s}$ F in den Punkten k_1 und k_2 getroffen werde; ferner sei $\mathfrak{i}$ der 4te harmonische Punkt zu $\mathfrak{k}_1$, $\mathfrak{k}_2$ und $\mathfrak{s}$, dem Punkte $\mathfrak{s}$ zugeordnet; dann nennt man den geometrischen Ort des Punktes i die Inverse $\mathfrak{J}$ von $\mathfrak{S}_{II}$ bezogen auf den Kreis $\mathfrak{K}_{II}$. Die in $\mathfrak{s}$ auf $\mathfrak{s}$ F errichtete Senkrechte $\mathfrak{E}$ ist nun einerseits die Polare des Punktes i in Bezug auf $\mathfrak{K}_{II}$; anderseits ist $\mathfrak{E}$ (siehe oben) eine Tangente der Einhüllenden der Parabeln des Systems. Es gilt also der Satz:

Die Einhüllende der Parabeln irgend eines einfach unendlichen Systems von Parabeln, deren Brennpunkt F ist, ist die reziproke Polare der Inversen der Einhüllenden der Scheiteltangenten derselben Parabeln, wenn F das Centrum der Inversion ist.

Es sei ferner $\mathfrak{S}$ eine beliebige Tangente an $\mathfrak{S}_{II}$, und $\mathfrak{s}_1$ ihr Pol in Bezug auf $\mathfrak{K}_{II}$; dann ist der Ort des Punktes $\mathfrak{s}^1$ die reziproke Polare von $\mathfrak{S}_{II}$ in Bezug auf $\mathfrak{K}_{II}$; F$\mathfrak{s}^1$ steht senkrecht auf $\mathfrak{S}$, und der Fusspunkt dieser Senkrechten ist einerseits der inverse Punkt zu $\mathfrak{s}^1$ und anderseits ein Punkt der Scheitelpunktkurve. Es gilt also auch folgender Satz:

Die Scheitelpunktkurve der Parabeln irgend eines einfach unendlichen Systems von Parabeln, deren Brennpunkt F ist, ist die Inverse der reziproken Polaren der Einhüllenden der Scheiteltangenten derselben Parabeln, wenn F das Centrum der Inversion ist.

Berücksichtigen wir, dass die Ordnung und die Klasse der reziproken Polaren einer Kurve gleich der Klasse beziehungsweise gleich der Ordnung der Kurve ist, so folgt:

Die Ordnung der Scheitelpunktkurve ist gleich der Klasse der Einhüllenden der Parabeln, deren Brennpunkt F ist, und beide sind gleich der Ordnung der Inversen der Einhüllenden der Scheiteltangenten derselben Parabeln, wenn F das Centrum der Inversion ist.

Und ebenso:

Die Klasse der Scheitelpunktkurve ist gleich der Ordnung der Einhüllenden der Parabeln, deren Brennpunkt F ist, und beide sind gleich der Klasse der Inversen der Einhüllenden der Scheiteltangenten derselben Parabeln, wenn F das Centrum der Inversion ist.

Jetzt soll die Ordnung der Inversen eines Kegelschnitts $\mathfrak{S}_{II}$ ermittelt werden: Es sei $\mathfrak{G}$ eine beliebige Gerade der Ebene. Die Inverse von $\mathfrak{G}$ ist der Kreis, der durch F und die beiden Punkte geht, in denen $\mathfrak{G}$ den Kreis K_{II} schneidet; umgekehrt ist die Inverse dieses Kreises die Gerade $\mathfrak{G}$. Die Inverse von $\mathfrak{G}$ schneidet $\mathfrak{S}_{II}$ in 4 Punkten weil jeder Kreis einen Kegelschnitt in 4 Punkten schneidet; also liegen auch 4 Punkte der Inversen von $\mathfrak{S}_{II}$ auf der beliebigen Geraden $\mathfrak{G}$; d. i. die Inverse eines Kegelschnitts ist 4^{ter} Ordnung. Es hat sich somit folgender Satz ergeben:

Die Scheitelpunktkurve der konfokalen Parabeln, welche eine Strecke harmonisch teilen, ist im allgemeinen 4^{ter} Ordnung, und die Einhüllende der Parabeln desselben Systems ist im allgemeinen 4^{ter} Klasse.

Um die Klasse der Inversen eines Kegelschnitts zu ermitteln, sei P ein beliebiger Punkt der Ebene, und P^1 sein inverser Punkt in Bezug auf $\mathfrak{K}_{II}$. Denken wir uns durch P eine Tangente an die Inverse des Kegelschnitts gezogen, deren Berührungspunkt i sei; so ist die Inverse dieser Tangente derjenige Kreis, welcher durch F und P^1 geht und den Kegelschnitt in dem zu i inversen Punkt berührt. Folglich bestimmt die Zahl der Kreise, welche durch F und P^1 gehen und den Kegelschnitt berühren, die Zahl der von P aus an die Inverse zu ziehenden Tangenten, d. i. die Klasse dieser Inversen. Nun bildet die Gesamtheit der durch F und P^1 gehenden Kreise ein Kreisbüschel; und da, wie bekannt ist, sechs Kreise desselben einen beliebigen Kegelschnitt der Ebene berühren, so ergiebt sich der Satz:

Die Scheitelpunktkurve der konfokalen Parabeln, die eine Strecke harmonisch teilen, ist im allgemeinen 6^{ter} Klasse; und die Einhüllende der Parabeln desselben Systems ist im allgemeinen 6^{ter} Ordnung.

Es soll fortan die Scheitelpunktkurve mit $\mathfrak{F}_{IV}$, und die Einhüllende der Parabeln mit $\mathfrak{E}_{VI}$ bezeichnet werden. $\mathfrak{F}_{IV}$ und $\mathfrak{E}_{VI}$ sind durch eindeutige Transformation aus einem Kegelschnitt entstanden. Daraus folgt:

Das Geschlecht der Scheitelpunktkurve der konfokalen Parabeln, die eine Strecke harmonisch teilen, sowie der Einhüllenden der Parabeln desselben Systems ist gleich Null.

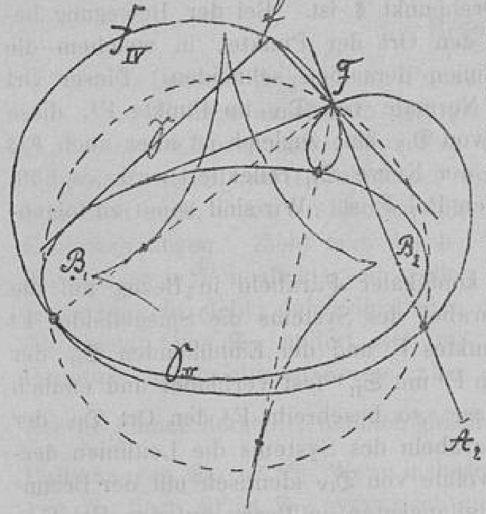
§ 4.

Nähere Bestimmung der Scheitelpunktkurve $\mathfrak{F}_{IV}$ und des Ortes, in welchem die Axen aller Parabeln des Systems deren Leitlinien schneiden.

1. Doppelpunkte, Tangenten in F und einzelne Punkte auf $\mathfrak{F}_{IV}$.

Von F aus kann man zwei Tangenten an $\mathfrak{S}_{II}$ ziehen; die Fusspunkte der von F aus auf diese Tangenten gefällten Lote liegen beide in F; folglich ist F ein Doppelpunkt von $\mathfrak{F}_{IV}$. Dasselbe gilt auch von den beiden imaginären ∞ entfernten Kreispunkten J_1 und J_2. Denn jeder von einem beliebigen Punkte der Ebene ausgehende Strahl, der durch J_1 geht, steht senkrecht auf sich selbst, weil in ihm zwei konjugierte Strahlen eines cirkularen Strahlsystems zusammenfallen. Demnach steht auch F J_1 senkrecht zu den beiden von J_1 aus an $\mathfrak{S}_{II}$ gezogenen Tangenten. Es ist also J_1 und ebenso J_2 ein Doppelpunkt von $\mathfrak{F}_{IV}$.

Der Ort der Scheitel der Parabeln, deren Brennpunkt F ist, und die eine Strecke harmonisch teilen, hat in F einen reellen und in den ∞ entfernten Kreispunkten zwei imaginäre Doppelpunkte.



Es sei $\mathfrak{S}$ eine beliebige Tangente an $\mathfrak{S}_{II}$, und $\mathfrak{f}$ der Fusspunkt des von F aus auf $\mathfrak{S}$ gefällten Lotes, dann ist $\mathfrak{f}$ ein Punkt auf $\mathfrak{F}_{IV}$. Rückt nun $\mathfrak{f}$ an F heran, so geht F$\mathfrak{f}$ in eine Tangente des Punktes F an $\mathfrak{F}_{IV}$ über; dabei steht immer F$\mathfrak{f}$ senkrecht auf $\mathfrak{S}$; demnach stehen die beiden Tangenten des Doppelpunktes F senkrecht auf den beiden von F aus an $\mathfrak{S}_{II}$ gezogenen Tangenten; wenn man nun auf letzteren Tangenten in F die Senkrechten errichtet, so gehen diese durch die Punkte A_1 und A_2. Folglich:

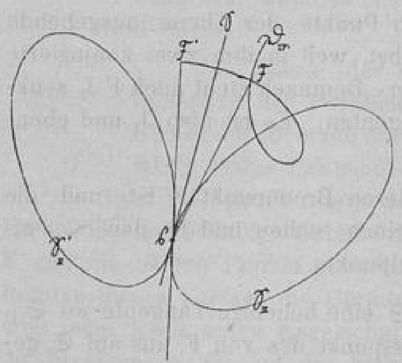
Die Tangenten des reellen Doppelpunktes F der Scheitelpunktkurve der Parabeln, deren Brennpunkt F ist, und welche die Strecke $A_1 A_2$ harmonisch teilen, sind die Geraden FA_1 und FA_2; letztere treffen die Scheitelpunktkurve ausser in F nur noch je in einem Punkte, der auf dem um den Mittelpunkt der Einhüllenden der Scheiteltangenten durch F beschriebenen Kreise liegt.

Da kein Punkt der beliebigen Tangente $\mathfrak{S}$ innerhalb $\mathfrak{S}_{II}$ liegt, so kann auch kein reeller einfacher Punkt von $\mathfrak{F}_{IV}$ innerhalb $\mathfrak{S}_{II}$ liegen. Wenn F innerhalb $\mathfrak{S}_{II}$ liegt, so ist F ein isolierter Doppelpunkt von $\mathfrak{F}_{IV}$.

Von F aus kann man bekanntlich vier Normale auf einen Kegelschnitt $\mathfrak{S}_{II}$ fällen. Die Fusspunkte dieser Normalen sind Punkte auf $\mathfrak{F}_{IV}$.

Die Scheitelpunktkurve $\mathfrak{F}_{IV}$ der Parabeln, deren Brennpunkt F ist, und die eine Strecke harmonisch teilen, liegt ausserhalb der Einhüllenden $\mathfrak{S}_{II}$ der Scheiteltangenten derselben Parabeln und berührt $\mathfrak{S}_{II}$ in zwei, drei oder vier reellen Punkten, jenachdem F ausserhalb, auf oder innerhalb der Evolute von S_{II} liegt. Wenn insbesondere F innerhalb S_{II} liegt, so ist F ein isolierter Doppelpunkt von $\mathfrak{F}_{IV}$.

2. Entstehung von $\mathfrak{F}_{IV}$ durch Übereinanderrollen von Kegelschnitten, und Entstehung des Kegelschnitts $\mathfrak{S}_{II}$ durch Übereinanderrollen von Kurven $\mathfrak{E}_{VI}$.



Es sei $\mathfrak{P}$ eine beliebige Parabel unseres Systems, $\mathfrak{S}$ ihre Scheiteltangente, und $\mathfrak{s}$ der Berührungspunkt von $\mathfrak{S}$. Die Spiegelbilder von F und $\mathfrak{S}_{II}$ in Bezug auf die Tangente $\mathfrak{S}$ seien F^1 und $\mathfrak{S}_{II}{}^1$. Wenn nun F^1 mit $\mathfrak{S}_{II}{}^1$ fest verbunden bleibt, während $\mathfrak{S}_{II}{}^1$ über $\mathfrak{S}_{II}$ ohne zu gleiten rollt; so bleiben fortwährend F^1 und $\mathfrak{S}_{II}{}^1$ die Spiegelbilder von F und $\mathfrak{S}_{II}$ in Bezug auf die gemeinsame Tangente von $\mathfrak{S}_{II}$ und $\mathfrak{S}_{II}{}^1$, deren Berührungspunkt der augenblickliche Drehpunkt $\mathfrak{s}$ ist. Bei der Bewegung beschreibt F^1 den Ort der Punkte, in welchem die Axen aller Parabeln $\mathfrak{P}$ des Systems die Leitlinien derselben schneiden. Dieser Ort soll mit $\mathfrak{D}_{IV}$ bezeichnet werden. $F^1\mathfrak{s}$ ist die Normale von $\mathfrak{D}_{IV}$ im Punkte F^1; diese Normale hüllt bei der Bewegung die Evolute von $\mathfrak{D}_{IV}$ ein; zugleich ist aber auch $F^1\mathfrak{s}$ derjenige Strahl, in welchem der Strahl $F\mathfrak{s}$ von der Kurve $\mathfrak{S}_{II}$ reflektiert wird; es hüllt also $F^1\mathfrak{s}$ auch die Brennlinie von $\mathfrak{S}_{II}$ ein, deren Pol F ist. Wir sind somit zu folgendem Satze gelangt:

Wenn man in einem System konfokaler Parabeln in Bezug auf die Scheiteltangente einer beliebigen Parabel des Systems die Spiegelbilder F^1 und $\mathfrak{S}_{II}{}^1$ des gemeinsamen Brennpunktes F und der Einhüllenden $\mathfrak{S}_{II}$ der Scheiteltangenten konstruiert, alsdann F^1 mit $\mathfrak{S}_{II}{}^1$ fest verbindet und endlich $\mathfrak{S}_{II}{}^1$ über $\mathfrak{S}_{II}$ ohne Gleiten rollen lässt; so beschreibt F^1 den Ort $\mathfrak{D}_{IV}$ der Punkte, in welchem die Axen der Parabeln des Systems die Leitlinien derselben schneiden. Überdies ist die Evolute von $\mathfrak{D}_{IV}$ identisch mit der Brennlinie der Einhüllenden $\mathfrak{S}_{II}$ der Scheiteltangenten in Bezug auf den Pol F.

Wenn wir in der Begründung des obigen Satzes an die Stelle von S_{II} denjenigen Kegelschnitt $\mathfrak{M}_{II}$ setzen, welcher gerade so aus $\mathfrak{S}_{II}$ entsteht, wie $\mathfrak{S}_{II}$ (nach § 2) aus $\mathfrak{L}_{II}$ entstanden ist, so gelangen wir zu folgendem Satze:

Wenn man einen beliebigen Punkt $\mathfrak{s}$ der Einhüllenden $\mathfrak{S}_{II}$ der Scheiteltangenten derjenigen Parabeln, deren Brennpunkt F ist, und die eine Strecke harmonisch teilen, mit F verbindet, so ist der Ort des Mittelpunkts in der Strecke $\mathfrak{F}\mathfrak{s}$ ein dem $\mathfrak{S}_{II}$ ähnlicher Kegelschnitt $\mathfrak{M}_{II}$. Sind nun F^1 und $\mathfrak{M}_{II}{}^1$

die Spiegelbilder von F und $\mathfrak{M}_{II}$ in Bezug auf eine beliebige Tangente an $\mathfrak{M}_{II}$, und rollt $\mathfrak{M}_{II}{}^1$ über $\mathfrak{M}_{II}$, so beschreibt der mit $\mathfrak{M}_{II}{}^1$ festverbundene Punkt F^1 die Scheitelpunktkurve $\mathfrak{F}_{IV}$ der Parabeln desselben Systems. Und die Brennlinie von $\mathfrak{M}_{II}$ in Bezug auf F als Pol ist die Evolute von F_{IV}.

Auch ergiebt sich ohne weiteres folgender Satz:

Ist $\mathfrak{E}$ eine beliebige Tangente der Einhüllenden $\mathfrak{E}_{VI}$ derjenigen Parabeln, deren Brennpunkt F ist, und die eine Strecke harmonisch teilen; sind ferner F^1 und $\mathfrak{E}_{VI}{}^1$ die Spiegelbilder von F und $\mathfrak{E}_{VI}$ in Bezug auf $\mathfrak{E}$, und rollt $\mathfrak{E}_{VI}{}^1$ über $\mathfrak{E}_{VI}$, so beschreibt der mit $\mathfrak{E}^1{}_{VI}$ festverbundene Punkt F^1 die Einhüllende $\mathfrak{L}_{II}$ der Leitlinien derselben Parabeln, und die Brennlinie von $\mathfrak{E}_{VI}$ in Bezug auf $\mathfrak{F}$ als Pol ist die Evolute des Kegelschnitts $\mathfrak{L}_{II}$.

Bei dem Übereinanderrollen kongruenter Kegelschnitte in symetrischer Anfangslage beschreiben die Brennpunkte des beweglichen Kegelschnitts die beiden Kreise, deren Mittelpunkte die Brennpunkte des ruhenden Kegelschnitts, und deren Halbmesser die grossen Axen der Kegelschnitte sind.*) Die Beachtung dieses Umstandes und der vorstehenden Sätze gestattet mit Hülfe des Bobillier'schen Satzes eine leichte Konstruktion beliebiger Punkte und Tangenten der Leitlinien von $\mathfrak{E}_{VI}$ und $\mathfrak{S}_{II}$, sowie der Evoluten von $\mathfrak{S}_{II}$ und $\mathfrak{F}_{IV}$.

Besondere Fälle:

1. Das auf A gegebene Punktsystem sei hyperbolisch.

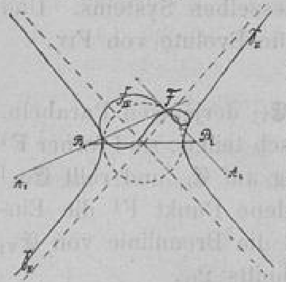
a) F liege ausserhalb des um $A_1 A_2$ als Durchmesser beschriebenen Kreises; $\mathfrak{S}_{II}$ ist eine Ellipse, deren Hauptaxe mit $\mathfrak{B}$ zusammenfällt; F liegt auf dem um die Hauptaxe von $\mathfrak{S}_{II}$ als Durchmesser beschriebenen Kreise. Die Tangenten $F A_1$ und $F A_2$ sind reell, F ist ein Knotenpunkt; $\mathfrak{F}_{IV}$ bildet in F zwei Schleifen, welche ganz im Endlichen liegen. Zieht man durch F eine beliebige Gerade $\mathfrak{G}$, so schneidet dieselbe $\mathfrak{F}_{IV}$ ausser in F noch in zwei reellen Punkten, weil $\mathfrak{G}$ zu zwei reellen Tangenten von $\mathfrak{S}_{II}$ senkrecht steht; daher liegt eine der beiden Schleifen ganz innerhalb der andern. Die Gestalt von $\mathfrak{F}_{IV}$ ändert sich mit der veränderten Lage des F auf dem über der Hauptaxe beschriebenen Kreise, aber der vom Vektor durchlaufende Flächenraum von $\mathfrak{F}_{IV}$ ist immer derselbe, nämlich gleich $a^2 \pi + \frac{b^2 \pi}{2}$, wo a die grössere und b die kleinere Halbaxe von $\mathfrak{S}_{II}$ ist.**) Wenn insbesondere F auf $\mathfrak{A}$ und daher in einem der Scheitel von $\mathfrak{S}_{II}$ liegt, so ist $\mathfrak{F}_{IV}$ symetrisch zu $\mathfrak{A}$. Die von F aus auf $\mathfrak{S}_{II}$ gezogenen Normalen fallen in $\mathfrak{A}$; daher berührt $\mathfrak{F}_{IV}$ die Ellipse in den beiden auf $\mathfrak{A}$ liegenden Scheiteln. Die Tangenten $F A_1$ und $F A_2$ fallen in $\mathfrak{A}$ zusammen; daher schrumpft eine der

---

*) Klügel's Wörterbuch, Epicycloide. Sind die Kegelschnitte kongruente Parabeln, so ist einer der Kreise die Leitlinie der ruhenden Parabel; der andere Kreis ist die unendlich entfernte Gerade.

**) Die Inhaltsangaben sind den von J. Steiner (Ges. Werke, Bd. II. S. 63 u. f.) auf geometrischem und von R. Wolff (Crelle's Journal Bd. XX. S. 88 u. f.) auf analytischem Wege gefundenen Formeln entnommen.

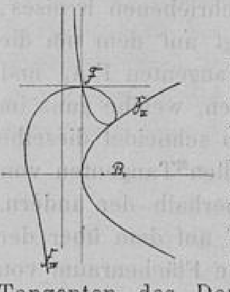
Schleifen in einen Punkt ein, F wird eine Spitze, und die Klasse von $\mathfrak{F}_{IV}$ erniedrigt sich um Eins.*)



b) F liege innerhalb des um A_1 A_2 beschriebenen Kreises. $\mathfrak{S}_{II}$ ist eine Hyperbel, und F liegt auf dem um ihre Hauptaxe beschriebenen Kreise. Eine durch F gezogene Gerade $\mathfrak{G}$ schneidet $\mathfrak{F}_{IV}$ ausser F in zwei reellen oder imaginären Punkten, je nachdem die Neigung von $\mathfrak{G}$ zu $\mathfrak{A}$ geringer oder grösser ist, als die Neigung der Asymptoten von $\mathfrak{S}_{II}$ zu $\mathfrak{A}$. Daher liegt eine der Schleifen, die $\mathfrak{F}_{IV}$ in F bildet, ganz ausserhalb der andern. Der Inhalt der vom Vektor durchlaufenen Fläche ist nicht unabhängig von der Lage des F auf dem um die Hauptaxe von $\mathfrak{S}_{II}$ beschriebenen Kreise. Im übrigen gilt auch hier das unter a) über $\mathfrak{F}_{IV}$ Gesagte.

c) F liege auf dem um A_1 A_2 beschriebenen Kreise. $\mathfrak{S}_{II}$ artet in ihre Brennpunkte B_1 und B_2 aus; F liegt auf dem um B_1 B_2 beschriebenen Kreise. $\mathfrak{F}_{IV}$ artet in die beiden um F B_1 und F B_2 beschriebenen Kreise aus, welche sich in F und in dem Fusspunkte des von F auf B_1 B_2 gefällten Lotes rechtwinklich schneiden. $\mathfrak{F}_{IV}$ hat also in diesem Falle 2 reelle und 2 imaginäre Doppelpunkte. Der Inhalt beider Kreise zusammen, die gemeinsame Fläche doppelt gerechnet, ist gleich $a^2\pi$. Wenn insbesondere F auf $\mathfrak{A}$ liegt, so ist $\mathfrak{F}_{IV}$ der um B_1 B_2 beschriebene Kreis.

2. Das auf $\mathfrak{A}$ gegebene Punktsystem sei gleichseitig hyperbolisch.



$\mathfrak{S}_{II}$ ist eine Parabel, und F liegt auf der Scheiteltangente derselben. Die ∞ entfernte Grade $\mathfrak{G}_\infty$ ist eine Tangente an $\mathfrak{S}_{II}$; der Pol von $\mathfrak{G}_\infty$ in Bezug auf einen beliebigen um F beschriebenen Kreis $\mathfrak{K}_{II}$ ist der Punkt F; daher geht die reziproke Polare von $\mathfrak{S}_{II}$ durch F, und die Inverse einer beliebigen Geraden $\mathfrak{G}$ der Ebene schneidet die reziproke Polare ausser F nur noch in 3 Punkten; folglich ist die Inverse der reziproken Polare von $\mathfrak{S}_{II}$ und somit auch $\mathfrak{F}_{IV}$ in diesem Fall dritter Ordnung. Von den Tangenten des Doppelpunktes F geht eine durch den Brennpunkt B_1 der Parabel, die andere ist parallel zu $\mathfrak{A}$. Unsere Kurve 3ter Ordnung hat demnaeh einen gewöhnlichen Doppelpunkt; sie ist daher 4ter Klasse.**) $\mathfrak{F}_{IV}$ bildet in F eine Schleife, welche $\mathfrak{S}_{II}$ in einem reellen Punkte berührt, weil man von F aus eine und nur eine reelle Normale auf die Parabel ziehen kann. Von F aus sendet $\mathfrak{F}_{IV}$ zwei Äste aus, welche die Leitlinie der Parabel im Unendlichen berühren.

Wenn F in $\mathfrak{A}$ liegt, so schrumpft die Schleife von $\mathfrak{F}_{IV}$ in einen Punkt zusammen, F wird eine Spitze, und die Klasse von $\mathfrak{F}_{IV}$ vermindert sich um Eins. Diese Kurve

*) In diesem Falle ist die reziproke Polare von $\mathfrak{S}_{II}$ in Bezug auf einen um F beschriebenen Kreis eine Parabel, daher erniedrigt sich die Klasse der Inversen um Eins.

**) Dass die Klasse der Scheitelpunktkurve sich um zwei vermindert, folgt auch unmittelbar aus dem Umstande, dass die rez. Polare von $\mathfrak{S}_{II}$ durch F geht.

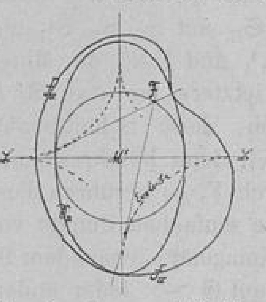
3ter Ordnung und 3ter Klasse $\mathfrak{F}_{IV}$ wird von dem Scheitel einer Parabel $\mathfrak{M}^1_{II}$ beschrieben (Seite XIV), die über eine ihr kongruente Parabel $\mathfrak{M}_{II}$ in der Weise rollt, dass fortwährend die eine das Spiegelbild der anderen in Bezug auf die gemeinsame Tangente des augenblicklichen Berührungspunktes ist. In derselben Weise entsteht bekanntlich die Cissoide; $\mathfrak{F}_{IV}$ ist demnach die Cissoide, deren Spitze der Scheitel, und deren Asymptote die Leitlinie der Parabel $\mathfrak{S}_{II}$ ist. Der zwischen $\mathfrak{F}_{IV}$ und ihrer Asymptote liegende Flächenraum ist gleich $\frac{3}{4} a^2\pi$; wo a die Strecke vom Brennpunkt bis zum Scheitel der Parabel $\mathfrak{S}_{II}$ ist.

Wenn insbesondere F in der in A_1 auf $\mathfrak{A}$ errichteten Senkrechten liegt, so artet $\mathfrak{S}_{II}$ in die Punkte B_1 und den ∞ entfernten Punkt auf $\mathfrak{A}$ aus. $\mathfrak{F}_{IV}$ artet in den um F $\mathfrak{B}$ beschriebenen Kreis und in die Gerade F B_1 aus. Auf dem Kreise liegen die Scheitelpunkte derjenigen Parabeln unseres Systems, welche die Gerade $\mathfrak{A}$ in imaginären Punkten schneiden; ausgenommen sind jedoch die Punkte zwischen F und $\mathfrak{A}$.

3. Das auf A gegebene Punktsystem sei parabolisch.

$\mathfrak{S}_{II}$ ist der um B_1 F beschriebene Kreis. Bezeichnet man den Mittelpunkt von $\mathfrak{S}_{II}$ mit N; beschreibt man um F N den Kreis $\mathfrak{M}_{II}$, und lässt man das Spiegelbild von $\mathfrak{M}_{II}$ in Bezug auf die in F auf F N errichtete Senkrechte über $\mathfrak{M}_{II}$ rollen, so beschreibt (Seite XIV) der Punkt F die Scheitelpunktkurve $\mathfrak{F}_{IV}$. Auf dieselbe Weise entsteht bekanntlich eine Kardioide. $\mathfrak{F}_{IV}$ ist demnach eine Kardioide, deren erzeugende Kreise die Durchmesser $\frac{F\,A_1}{4}$ haben.

4. Das auf $\mathfrak{A}$ gegebene Punktsystem sei elliptisch.

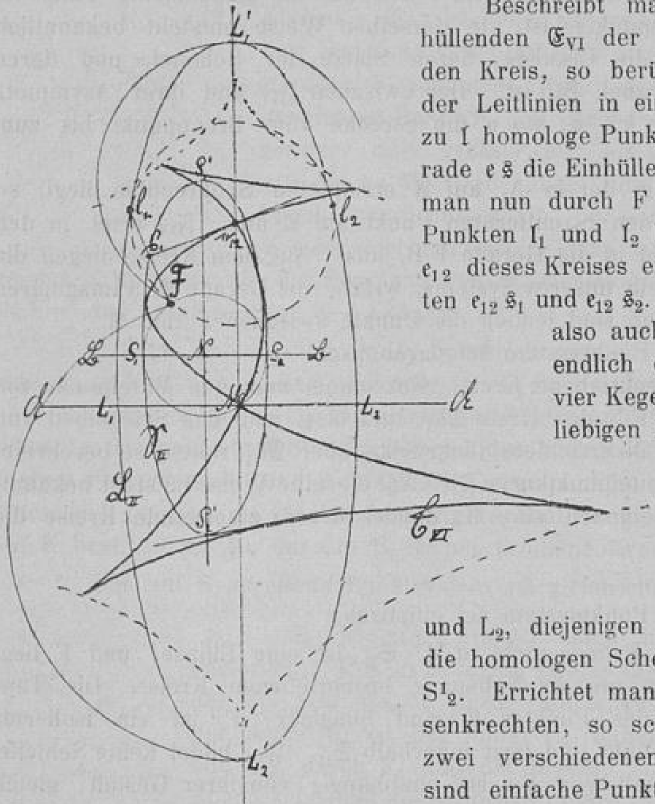


a) F liege nicht in M. $\mathfrak{S}_{II}$ ist eine Ellipse, und F liegt auf dem um die Nebenaxe beschriebenen Kreise. Die Tangenten des Punktes F sind imaginär; F ist ein isolierter Doppelpunkt und liegt innerhalb $\mathfrak{S}_{II}$. $\mathfrak{F}_{IV}$ bildet keine Schleife. Der Inhalt von F_{IV} ist unabhängig von ihrer Gestalt, gleich $\frac{a^2\pi}{2} + b^2\pi$. Liegt insbesondere F in $\mathfrak{A}$, so fallen die beiden Tangenten des Punktes F in $\mathfrak{A}$ zusammen; F ist eine Spitze, und die Klasse von $\mathfrak{F}_{IV}$ erniedrigt sich um Eins. $\mathfrak{F}_{IV}$ berührt $\mathfrak{S}_{II}$ in den auf $\mathfrak{A}$ liegenden Scheiteln von $\mathfrak{S}_{II}$.

b) F liege in M. $\mathfrak{S}_{II}$ artet in ihre reellen, im Abstande $\frac{e}{2}$ von M auf $\mathfrak{A}$ liegenden Brennpunkte aus. $\mathfrak{S}_{IV}$ artet in die beiden Kreise aus, welche $\mathfrak{A}$ in M berühren, und deren Durchmesser $\frac{e}{2}$ ist.

§ 5.

Nähere Bestimmung der Einhüllenden der Parabeln des Systems.



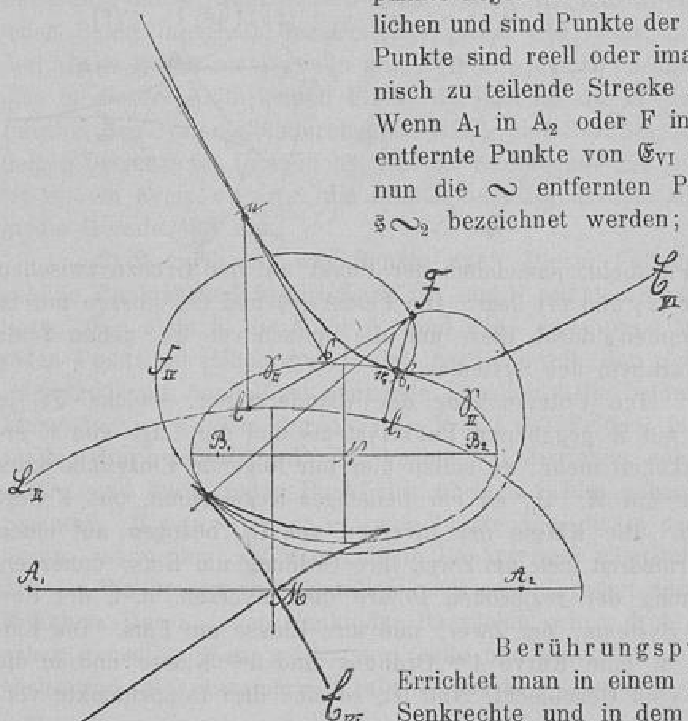
Beschreibt man um einen Punkt $\mathfrak{e}$ der Einhüllenden $\mathfrak{E}_{VI}$ der Parabeln des Systems mit $\mathfrak{e}F$ den Kreis, so berührt dieser die Einhüllende $\mathfrak{L}_{II}$ der Leitlinien in einem Punkte $\mathfrak{l}$; wenn nun $\mathfrak{s}$ der zu $\mathfrak{l}$ homologe Punkt auf $\mathfrak{S}_{II}$ ist, so berührt die Gerade $\mathfrak{e}\,\mathfrak{s}$ die Einhüllende $\mathfrak{E}_{VI}$ im Punkte $\mathfrak{e}$. Beschreibt man nun durch F einen Kreis, der $\mathfrak{L}_{II}$ in zwei Punkten $\mathfrak{l}_1$ und $\mathfrak{l}_2$ berührt, so ist der Mittelpunkt $\mathfrak{e}_{12}$ dieses Kreises ein Doppelpunkt mit den Tangenten $\mathfrak{e}_{12}\,\mathfrak{s}_1$ und $\mathfrak{e}_{12}\,\mathfrak{s}_2$. Nun kann man durch 3 Punkte, also auch durch F und die beiden unendlich entfernten Kreispunkte J_1 und J_2 vier Kegelschnitte legen, welche einen beliebigen Kegelschnitt der Ebene doppelt berühren.*) Folglich hat $\mathfrak{E}_{VI}$ 4 Knotenpunkte. Um die Lage derselben aufzusuchen, bezeichne man die Scheitel von $\mathfrak{L}_{II}$, die auf $\mathfrak{A}$ liegen, mit L_1 und L_2, diejenigen auf $\mathfrak{A}^1$ mit L^1_1 und L^1_2, sowie die homologen Scheitel auf $\mathfrak{S}_{II}$ mit S_1, S_2, S^1_1 und S^1_2. Errichtet man auf $F\,L^1_1$ und $F\,L^1_2$ die Mittelsenkrechten, so schneiden letztere die Axe $\mathfrak{A}^1$ in zwei verschiedenen Punkten; diese Schnittpunkte sind einfache Punkte auf $\mathfrak{E}_{VI}$: denn beschreibt man um dieselben die Kreise durch F, so berühren diese Kreise $\mathfrak{L}_{II}$ je in einem einzigen Punkt L^1_1 beziehlich L^1_2. Diese einfachen Punkte von $\mathfrak{E}_{VI}$, deren Tangenten durch S^1_1 und S^1_2 gehen, sind reell oder imaginär, jenachdem $\mathfrak{L}_{II}$ eine Ellipse oder Hyperbel ist; Ist $\mathfrak{L}_{II}$ eine Parabel, so liegen sie auf $\mathfrak{G}\infty$. Jeder andere Kreis, dessen Mittelpunkt auf $\mathfrak{A}^1$ tiegt, der durch F geht und $\mathfrak{L}_{II}$ in einem Punkte l_1 berührt, berührt $\mathfrak{L}_{II}$ auch in dem zu l_1 in Bezug auf $\mathfrak{A}^1$ symetrisch liegenden Punkte l_2. Da nun $\mathfrak{E}_{VI}$ von $\mathfrak{A}_1$ in 6 Punkten geschnitten wird, so folgt, dass $\mathfrak{E}_{VI}$ zwei einfache und zwei Doppelpunkte auf $\mathfrak{A}^1$ hat, und da die Tangenten jedes dieser Doppelpunkte nicht zusammen fallen, so schneidet sich $\mathfrak{E}_{VI}$ in $\mathfrak{A}^1$ zwei mal selbst, und die Doppelpunkte sind Knotenpunkte. Errichtet man nun auch auf $F\,L_1$ und $F\,L_2$ die Mittelsenkrechten, so schneiden letztere die Axe $\mathfrak{A}$ in M. Es fallen also die beiden einfachen Punkte von $\mathfrak{E}_{VI}$ auf $\mathfrak{A}$ in M zusammen, so dass also auf $\mathfrak{A}$ drei Knotenpunkte liegen, von denen im allgemeinen nur M, welcher zugleich auf $\mathfrak{A}'$ liegt, reell ist. $\mathfrak{E}_{VI}$ wird demnach im allgemeinen

*) H. Schröter, Theorie der Kegelschnitte. Leipzig, 1867, Seite 365.

ausser in M in keinem reellen Punkte mehr geschnitten. Die Tangenten des Knotenpunktes M gehen durch S_1 und S_2; und da M auf dem um $S_1 S_2$ beschriebenen Kreise liegt, so stehen die beiden Tangenten in M unter allen Umständen senkrecht aufeinander; insbesondere auch dann, wenn F auf $\mathfrak{A}$ liegt. $\mathfrak{E}_{VI}$ schneidet sich also allemal selbst rechtwinklich in M.

Spitzen: Ein beliebiger, durch F gehender Kreis, dessen Mittelpunkt E sei, schneide $\mathfrak{L}_{II}$ in den 4 Punkten l_1, l_2, l_3 und l_4; rücken drei dieser Punkte, etwa l_1, l_2 und l_3 in einen Punkt l_{123} zusammen, so wird der Kreis um E ein Oskulationskreis, dessen Mittelpunkt E auf der Evolute von $\mathfrak{L}_{II}$ liegt. Die beiden Tangenten des Punktes E, nämlich die Geraden $E\mathfrak{s}_{12}$ und $E\mathfrak{s}_{23}$ fallen in eine Gerade $E\mathfrak{s}_{123}$ zusammen; folglich ist E eine Spitze. Es hat also $\mathfrak{E}_{VI}$ so viele Spitzen als Oskulationskreise von $\mathfrak{L}_{II}$ durch F gehen; dass deren 6 vorhanden sind, ergiebt sich jetzt aus der Plücker'schen Formel $\rho = \frac{n(n-1) - \nu - 2\delta,}{3}$ worin ρ die Zahl der Spitzen, n die Ordnung, ν die Klasse und δ die Zahl der Knotenpunkte bedeutet. Es ergiebt sich $\rho = \frac{6 \cdot 5 - 4 - 2 \cdot 4}{3} = 6$. Alle 6 Spitzen von $\mathfrak{E}_{VI}$ liegen auf der Evolute von $\mathfrak{L}_{II}$.

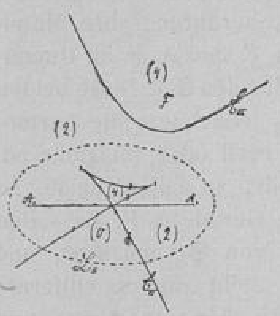
Punkte auf $\mathfrak{G}\infty$. Die beiden von F aus an $\mathfrak{L}_{II}$ gezogenen Tangenten, kann man als Kreise ansehen, welche durch F gehen und $\mathfrak{L}_{II}$ berühren; ihre Mittelpunkte liegen in der Richtung $A_1 F$ und $A_2 F$ im Unendlichen und sind Punkte der Einhüllenden $\mathfrak{E}_{VI}$. Diese beiden Punkte sind reell oder imaginär, jenachdem die harmonisch zu teilende Strecke $A_1 A_2$ reell oder imaginär ist. Wenn A_1 in A_2 oder F in $\mathfrak{A}$ fällt, so fallen beide ∞ entfernte Punkte von $\mathfrak{E}_{VI}$ in die Gerade $A_1 F$. Es sollen nun die ∞ entfernten Punkte von $\mathfrak{S}_{II}$ mit $\mathfrak{s}\infty_1$ und $\mathfrak{s}\infty_2$ bezeichnet werden; dann steht die ∞ entfernte Gerade $\mathfrak{G}\infty$ in $\mathfrak{s}\infty_1$ und $\mathfrak{s}\infty_2$ senkrecht auf den Geraden $F\mathfrak{s}\infty_1$ und $F\mathfrak{s}_2$; daraus folgt (nach Seite XI), dass $\mathfrak{E}_{VI}$ von $\mathfrak{G}\infty$ in zwei Punkten berührt wird; die beiden Berührungspunkte liegen in den zu den Asymtoten von $\mathfrak{L}_{II}$ senkrechten Richtungen und sind reell und imaginär, jenachdem $\mathfrak{S}_{II}$ eine Hyperbel oder Ellipse ist.

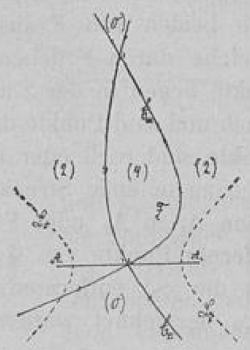


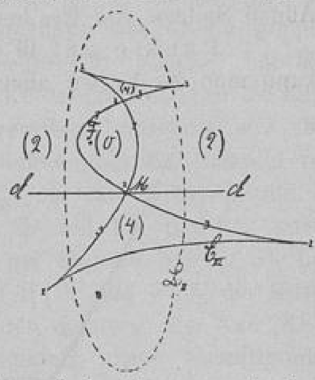
Berührungspunkte von $\mathfrak{S}_{II}$, $\mathfrak{F}_{IV}$ und $\mathfrak{E}_{VI}$. Errichtet man in einem Punkte $\mathfrak{s}$ von $\mathfrak{S}_{II}$ auf $\mathfrak{s}F$ die Senkrechte und in dem zu $\mathfrak{s}$ homologen Punkte $\mathfrak{l}$ die Normale zu $\mathfrak{L}_{II}$, so schneidet letztere die in $\mathfrak{s}$ auf $\mathfrak{s}F$ errichtete Senkrechte in einem

Punkte $\mathfrak{e}$ der Einhüllenden $\mathfrak{E}_{VI}$. Ist nun $\mathfrak{s}_1$ ein Punkt, dessen Normale auf $\mathfrak{S}_{II}$ durch F geht, so geht auch die Normale des homologen Punktes $\mathfrak{l}$ auf $\mathfrak{L}_{II}$ durch F, und $\mathfrak{s}_1$ ist ein Punkt auf $\mathfrak{E}_{VI}$. Rückt nun $\mathfrak{s}$ an $\mathfrak{s}_1$ heran, so geht $\mathfrak{e}_1\,\mathfrak{e}$ in eine Tangente an $\mathfrak{E}_{VI}$ und zugleich in die in $\mathfrak{s}_1$ auf $\mathfrak{s}_1$ F errichtete Senkrechte über; da auch $\mathfrak{F}_{IV}$ (§ 4) in demselben Punkte von $\mathfrak{S}_{II}$ berührt wird; so ergibt sich, dass die drei Kurven $\mathfrak{S}_{II}$, $\mathfrak{F}_{IV}$ und $\mathfrak{E}_{VI}$ sich in denjenigen Punkten von $\mathfrak{S}_{II}$ berühren, deren Normalen durch F gehen; es sind 2, 3 oder 4 solche Berührungspunkte reell, jenachdem F ausserhalb, auf oder innerhalb der Evolute von S_{II} liegt.

Anzahl der reellen Parabeln, welche durch einen Punkt gehen. Von den vier Parabeln, welche durch jeden Punkt der Ebene gehen, können 2 oder 4 imaginär sein, und 2, 3 oder 4 können in eine Parabel zusammenfallen. Die Einhüllende $\mathfrak{E}_{VI}$ teilt nun die Ebene in dreierlei Felder, die mit (0), (2) oder (4) bezeichnet werden sollen, jenachdem keine, 2 oder 4 reelle Parabeln des Systems durch jeden Punkt des Feldes gehen. Durch jeden Punkt, welcher auf $\mathfrak{E}_{VI}$ liegt, geht eine als doppelt zu denkende reelle und 2 imaginäre Parabeln, oder eine als doppelt



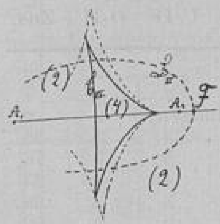




zu denkende und 2 reelle Parabeln, jenachdem der Punkt auf der Grenze zwischen den Feldern (0) und (2), oder (2) und (4) liegt. Die Felder (0) und (4) stossen nur in Knotenpunkten von $\mathfrak{E}_{VI}$ zusammen; durch diese und die Spitzen von $\mathfrak{E}_{VI}$ gehen 2 als doppelt zu denkende reelle Parabeln des Systems.

Besondere Fälle: Die Untersuchung der Abänderungen, welche $\mathfrak{E}_{VI}$ je nach der Beschaffenheit des auf $\mathfrak{A}$ gegebenen Punktsystems und der Lage von F erleidet, bietet keine Schwierigkeiten mehr; es sollen hier nur folgende Einzelfälle kurz erörtert werden: 1) F liege auf $\mathfrak{A}$. $\mathfrak{L}_{II}$ ist ein beliebiger Kegelschnitt, und F liegt auf einem Scheitel desselben. Die Klasse der Inversen von L_{II} bezogen auf einen um F beschriebenen Kreis erniedrigt sich um Zwei, ihre Ordnung um Eins; daher erniedrigt sich auch die Ordnung der reziproken Polare der Inversen, d. i. der Einhüllenden der Parabeln des Systems, um Zwei, und ihre Klasse um Eins. Die Einhüllende der Parabeln artet in eine Kurve 4^{ter} Ordnung und 3^{ter} Klasse und in die Gerade $\mathfrak{A}$ aus. Da nun $\mathfrak{E}_{IV}$ vom Geschlechte Null ist, so sind drei Doppelpunkte vorhanden, und dies können nach der oben angegebenen Formel nur Spitzen sein. Eine der Spitzen fällt mit derjenigen der Evolute von $\mathfrak{L}_{II}$ zusammen, welche auf $\mathfrak{A}$ und dem

Scheitel F am nächsten oder am entferntesten liegt, jenachdem das auf $\mathfrak{A}$ gegebene Punktsystem hyperbolisch oder elliptisch ist. Die übrigen beiden Spitzen liegen symetrisch zu $\mathfrak{A}$ auf der Evolute von $\mathfrak{L}_{II}$. Ist $\mathfrak{L}_{I}$ eine Hyperbel, so liegen sie in den zu den Asymtoten senkrechten Richtungen im Unendlichen. Ist $\mathfrak{L}_{II}$ eine Ellipse, so bildet



die ausgeartete Kurve 4ter Ordnung $\mathfrak{E}_{IV}$ ein krummliniges Dreieck, zwei der Seiten liegen symetrisch zu $\mathfrak{A}$ und stossen in der erwähnten Evolutenspitze zusammen; die dritte Seite schneidet $\mathfrak{A}$ rechtwinklich in M. Dieses krummlinige Dreieck wird von den Mittelsenkrechten derjenigen Sehnen umhüllt, die man von F aus in $\mathfrak{L}_{II}$ ziehen kann. Das Spiegelbild $\mathfrak{E}^1_{IV}$ liegt deckend auf $\mathfrak{E}_{IV}$, doch so, dass jedem Punkte auf $\mathfrak{E}_{IV}$ ein zu $\mathfrak{A}$ symetrisch liegender Punkt auf $\mathfrak{E}^1_{IV}$ entspricht. Rollt $\mathfrak{E}^1_{IV}$ über $\mathfrak{E}_{IV}$, so beschreibt F den Kegelschnitt $\mathfrak{L}_{II}$. Durch die Spitze von $\mathfrak{E}_{IV}$, welche mit einer Evolutenspitze zusammenfällt, geht nur eine einzige Parabel, da nämlich der um diese Spitze durch F beschriebene Kreis mit $\mathfrak{L}_{II}$ eine 4 punktige Berührung eingeht, so fallen alle vier durch den Punkt gehende Parabeln in eine zusammen. Durch die beiden übrigen Spitzen, sowie durch M gehen zwei reelle, aber keine imaginäre Parabeln. Durch jeden übrigen Punkt auf den Seiten des Dreiecks oder auf der Strecke von M bis zu der auf A liegenden Spitze gehen drei reelle Parabeln; durch jeden andern Punkt auf $\mathfrak{A}$ geht eine reelle und zwei imaginäre, durch jeden Punkt innerhalb des Dreiecks gehen vier reelle, und durch jeden andern Punkt der Ebene gehen zwei reelle und zwei imaginäre Parabeln unseres Systems. Es gibt also in diesem Falle keinen Punkt der Ebene, durch den nicht wenigstens eine reelle Parabel des Systems hindurchgeht. Ist $\mathfrak{L}_{II}$ eine Parabel, so rückt eine Seite des krummlinigen Dreiecks ins Unendliche, und die Einhüllende $\mathfrak{E}_{IV}$ ist 3ter Ordnung und 3ter Klasse. Ist $\mathfrak{L}_{II}$ ein Kreis, so artet die Einhüllende $\mathfrak{E}_{VI}$ in den Mittelpunkt M des Kreises und in die Gerade M F aus.

2) $\mathfrak{L}_{II}$ arte in zwei Punkte aus. Dieser Fall tritt ein, wenn das auf $\mathfrak{A}$ gegebene Punktsystem hyperbolisch ist, und F auf dem über A_1 A_2 beschriebenen Kreise liegt. $\mathfrak{E}_{VI}$ artet in die auf F A_1 und F A_2 errichteten Mittelsenkrechten aus. Durch jeden Punkt derselben gehen drei reelle, durch den Schnittpunkt M derselben gehen zwei reelle als doppelt zu denkende Parabeln; die beiden Mittelsenkrechten teilen die Ebene in vier Felder, durch jeden Punkt des Feldes, in welchem F liegt, gehen vier reelle, durch jeden Punkt der beiden Nachbarfelder gehen zwei reelle und zwei imaginäre, und durch jeden Punkt des übrigen Feldes gehen vier imaginäre Parabeln des Systems. $\mathfrak{L}_{II}$ artet ferner in zwei Punkte aus, die in der Entfernung e von M auf $\mathfrak{A}^1$ liegen, wenn das auf $\mathfrak{A}$ gegebene Punktsystem elliptisch ist, und F in M liegt. $\mathfrak{E}_{VI}$ artet in die beiden zu $\mathfrak{A}$ parallel gezogenen Geraden aus, welche den Abstand $\frac{e}{2}$ von $\mathfrak{A}$ haben. Durch jeden Punkt der Parallelen gehen drei, durch jeden Punkt, der zwischen denselben liegt, gehen vier reelle und durch jeden andern Punkt der Ebene zwei reelle und zwei imaginäre Parabeln unseres Systems.

Aachen, im März 1892. **Joseph Peveling.**