Einige planimetrische Sätze.

1. Geht durch einen Punkt innerhalb oder ausserhalb eines Kreises eine beliebige Anzahl von Secanten, und wählt man von den 2 n Durchschnittspunkten des Kreises mit denselben n solche, unter denen keine zwei derselben Secante angehören, ordnet sie durchaus beliebig und die übrigen n Durchschnittspunkte ganz in derselben Weise, zieht alsdann in der gewählten Folge die n — 1 Sehnen zwischen den n erstgedachten Durchschnittspunkten, vom letzten derselben eine Sehne nach dem ersten der zuletzt gedachten Gruppe, in dieser ebenfalls die n — 1 Sehnen zwischen ihren n Durchschnittspunkten und von dem letzten derselben wieder eine Sehne nach dem ersten jener, so erhält man eine in sich geschlossene, gebrochene Linie von 2 n Stücken, und es ist, wenn man sich diese Stücke der Reihe nach mit 1, 2, 3, ... 2 n bezeichnet denkt, der Quotient des Products der n ungeraden Stücke durch das Product der n geraden gleich der Einheit.

Ist O z. B. der Durchschnittspunkt von 5 Sehnen, welche dem Kreise in a und a', b und b', c und c', d und d', e und e' begegnen, und wählt man für die erste Gruppe die 5 Durchschnittspunkte a, b, c, d, e, also für die übrigen a', b', c', d', e', so ist, wenn die Punkte auch in dieser Folge geordnet sind, die geschlossene Linie a b c d e a' b' c' d' e' a, und es soll

$$\frac{ab \, . \, cd \, . \, ea' \, . \, b'c' \, . \, d'e'}{bc \, . \, de \, . \, a'b' \, . \, c'd' \, . \, e'a} = 1 \qquad (1)$$

sein.

Denn aus der Aehnlichkeit der Dreiecke, welche O zur Spitze und zwei entsprechende Sehnen zu Grundlinien haben, z. B.: O b a, O b' a' folgt

$$\frac{a\,b}{a'\,b'} = \frac{O\,a}{O\,b'}.$$

$$\text{Ebenso ist} \quad \frac{b'\,c'}{b\,c} = \frac{O\,b'}{O\,c},$$

$$\frac{c\,d}{c'\,d'} = \frac{O\,c}{O\,d'},$$

$$\frac{d'\,e'}{d\,e} = \frac{O\,d'}{O\,e},$$

$$\frac{e\,a'}{e'\,a} = \frac{O\,e}{O\,a}.$$

$$\text{Also} \quad \frac{a\,b}{a'\,b'} \cdot \frac{b'\,c'}{b\,c} \cdot \frac{c\,d}{c'\,d'} \cdot \frac{d'\,e'}{d\,e} \cdot \frac{e\,a'}{e'\,a} = \frac{ab \, . \, cd \, . \, e\,a' \, . \, b'c' \, . \, d'e'}{bc \, . \, de \, . \, a'b' \, . \, c'd' \, . \, e'a} = 1.$$

Zusatz 1. Der Satz gilt ebenfalls, wenn die Sehnen einander parallel sind.

Zusatz 2. Schneiden sich die Diagonalen eines 2 n-Ecks im Kreise in Einem Punkte und ist n eine ungerade Zahl, so ist, wenn man die aufeinander folgenden Seiten mit 1, 2, 3 . . . 2 n bezeichnet, das Product der geraden Seiten gleich dem der ungeraden.

Zusatz 3. Schneiden sich von den n Diagonalen der gegenüberstehenden Ecken eines 2 n Ecks im Kreise, wo n eine ungerade Zahl ist, $n-1$ in Einem Punkte, und ist das Product der geraden Seiten gleich dem der ungeraden, so geht die n^{te} Diagonale durch denselben Punkt. Beweis indirect.

Zusatz 4. Drei Ecktransversalen eines Dreiecks schneiden sich in Einem Punkte, wenn in dem Sehnensechsecke, welches die Durchschnittspunkte derselben mit dem um das Dreieck beschriebenen Kreise nebst den 3 Ecken des Dreiecks bestimmen, die beiden Producte der geraden und ungeraden Sehnen einander gleich sind. Dieser Satz stimmt mit der bekannten Relation überein, dass, wenn die Transversale aus A mit den Seiten AB, BC die Winkel α, α', die Transversale aus B mit den Seiten BA, BC die Winkel β, β' und die Transversale aus C mit CB, CA die Winkel γ, γ' bildet, diese Transversalen sich in Einem Punkte schneiden, wenn

$$\sin.\ \alpha\ .\ \sin.\ \beta\ .\ \sin.\ \gamma = \sin.\ \alpha'\ .\ \sin.\ \beta'\ .\ \sin.\ \gamma'\ .$$

ist.

Zusatz 5. Sind zwei der durch O gehenden Geraden Tangenten, fallen z. B. die Punkte a und a', e und e' zusammen, so hat man in der obigen Gleichung a statt a' und e statt e' zu setzen, wodurch e' a und a' e gleich werden, und es ergibt sich jetzt

$$\frac{ab\ .\ cd}{bc\ .\ de} = \frac{a\,b'\ .\ c'd'}{b'c'\ .\ d'e}$$

Sind also von einem Punkte O ausserhalb eines Kreises zwei Tangenten O a, O b und eine beliebige den Kreis in c, c' treffende Secante gezogen, so ist in dem Sehnenvierecke a c b c'

$$\frac{ac}{cb} = \frac{a\,c'}{c'b} \text{ oder } ac\ .\ c'b = ac'\ .\ cb.$$

„Schneiden sich also die in den Endpunkten einer Diagonale eines Kreisvierecks gelegten Tangenten auf der anderen Diagonale, so sind die beiden Producte der Gegenseiten einander gleich."

2. Geht durch einen innerhalb oder ausserhalb eines Kreises liegenden Punkt eine gerade Anzahl 2 n Secanten, wobei $n > 1$ ist, und wählt man aus den 4 n Durchschnittspunkten derselben mit dem Kreise irgend 2 n aus, doch so, dass unter ihnen keine zwei vorkommen, welche derselben Secante angehören, ordnet sie beliebig und die übrigen Durchschnittspunkte ganz in derselben Weise, zieht alsdann in der gewählten Folge die Sehnen der ersteren Gruppe von Durchschnittspunkten, indem man vom letzten derselben auch eine Sehne nach dem ersten zieht, und verfährt gerade so für die andere Gruppe, so erhält man zwei geschlossene, gebrochene Linien, jede von 2 n Stücken, und es ist der Quotient des Productes der ungeraden Stücke durch das Product der geraden in der einen geschlossenen Linie gleich dem Quotient der entsprechenden Producte der ungeraden und geraden Stücke in der andern.

Hat man z. B. 6 Secanten, welche dem Kreis in a und a', b und b', c und c', d und d', e und e', f und f' begegnen, und nimmt man zunächst die Durchschnittspunkte a, b, c, d, e, f, und ihnen entsprechend a', b', c', d', e', f', so sind die beiden geschlossenen Linien a b c d e f a, a' b' c' d' e' f' a' und es ist

$$\frac{ab\ .\ cd\ .\ ef}{bc\ .\ de\ .\ fa} = \frac{a'b'\ .\ c'd'\ .\ e'f'}{b'c'\ .\ d'e'\ .\ f'a'} \quad (2).$$

Der Beweis ergibt sich wie oben bei (1).

Auch aus diesem Satze lassen sich verschiedene Folgerungen ziehen; z. B.: Legt man von einem Punkte ausserhalb eines Kreises zwei Tangenten an denselben, O a, O d, und zieht zwei beliebige Secanten, welche dem Kreise in b und b', c und c' begegnen, so schneiden sich in dem Sechseck im Kreise a b c d c' b' a die drei Diagonalen in Einem Punkte.

Man hat nämlich nach (2)

$$\frac{ab\ .\ cd}{bc\ .\ da} = \frac{a\,b'\ .\ c'd}{b'c'\ .\ da}$$

$$\text{oder } \frac{ab}{bc}\ .\ \frac{cd}{dc'}\ .\ \frac{c'b'}{b'a} = 1,$$

folglich schneiden sich nach Zusatz 3. die Diagonalen a d, b c', c b' in Einem Punkte.

Zusatz. Der Satz gilt ebenfalls, wenn die Secanten parallel sind.

Anmerkung. Der frühere Satz (1) liesse sich auch als eine Folge von (2) darstellen. Denn dreht sich die Secante ff' um O bis sie mit der Secante ee' zusammenfällt, so tritt in der geschlossenen Linie a b c d e f' a, zuletzt e e' an die Stelle von e f', und in der entsprechenden a' b' c' d' e' f a' an die Stelle von e' f ebenfalls e' e, und die Gleichung

$$\frac{ab\,.\,cd\,.\,ef'}{bc\,.\,de\,.\,f'a} = \frac{a'b'\,.\,c'd'\,.\,e'f}{b'c'\,.\,d'e'\,.\,fa'}$$

geht über in

$$\frac{ab\,.\,cd\,.}{bc\,.\,de\,.\,e'a} = \frac{a'b'\,.\,c'd'}{b'c'\,.\,d'e'\,.\,ea'}$$

oder in

$$\frac{ab\,.\,cd\,.\,ea'\,.\,b'c'\,.\,d'e'}{bc\,.\,de\,.\,a'b'\,.\,c'd'\,.\,e'a} = 1.$$

3. Zieht man durch die Endpunkte einer Diagonale BD eines beliebigen Vierecks ABCD für eines der beiden auf dieser Diagonale ruhenden Dreiecke, z. B. BAD, zwei Ecklinien BO, DO, so dass jede derselben mit der anstossenden Seite dieses Dreiecks nach Innen denselben Winkel bildet, wie die zweite Diagonale AC mit der Gegenseite der letzteren, so gelten folgende Sätze:

1. Das Rechteck aus der zweiten Diagonale AC und der Summe der beiden bis zu ihrem Durchschnittspunkt gerechneten Ecklinien ist gleich der Summe der Rechtecke der Gegenseiten des Vierecks.

2. Die Seiten des von den beiden Ecklinien und der ersten Diagonale gebildeten Dreiecks verhalten sich wie die Rechtecke der Gegenseiten und das Rechteck der beiden Diagonalen.

3. Das Rechteck aus der zweiten Diagonale und der von ihrem Endpunkte A nach dem Durchschnitte O der beiden bezüglichen Ecklinien gezogene dritte Ecklinie AO, ist gleich dem Rechteck der beiden in diesem Endpunkte zusammenstossenden Seiten des Vierecks BA, DA.

Es sei also, Fig. 1, $\angle ABO = \angle ACD$ und $\angle ADO = \angle ACB$. Zieht man AO, verlängert BO, bis sie die Gegenseite CD in E trifft, und zieht AE, so ist der Construction gemäss ABCE ein Kreisviereck, also $\angle ADO = \angle ACB = \angle AEB$, mithin AODE ebenfalls ein Kreisviereck und $\angle BAC = \angle OAD$, also auch $\angle BAO = \angle CAD$, folglich $\triangle BAO \sim \triangle ACD$ und $\triangle DAO \sim \triangle ACB$.

Die Aehnlichkeit der beiden ersten Dreiecke gibt

$$AC\,.\,BO = AB\,.\,DC, \quad \text{(a,)}$$

die der letzteren $AC\,.\,DO = BC\,.\,AD.$ (b.)

Folglich ist $AC(BO + DO) = AB\,.\,DC + BC\,.\,AD.$ (c.)

Ferner folgt aus den Gleichungen (a) und (b)

$$\frac{BO}{DO} = \frac{AB\,.\,DC}{BC\,.\,AD},$$

und die Gleichung $BO = \dfrac{AB\,.\,DC}{AC}$

gibt $\dfrac{BO}{BD} = \dfrac{AB\,.\,DC}{AC\,.\,BD}.$

Endlich ergibt sich aus der Aehnlichkeit der Dreiecke BAO und ACD

$$AB\,.\,AD = AC\,.\,AO. \quad \text{(d.)}$$

Zusatz 1. Ist das Viereck ABCD ein Kreisviereck, so ist $\angle ABD = \angle ACD = \angle ABO$ und $\angle ADB = \angle ACB = \angle ADO$, und der Punkt O liegt auf BD und es ist $BO + OD = BD$; daher gibt die obige Gleichung (c)

$$AC\,.\,BD = AB\,.\,DC + BC\,.\,AD$$

oder den Ptolemäischen Lehrsatz.

Zusatz 2. Findet umgekehrt die vorige Gleichung in einem Vierecke statt, so ist, da für dasselbe auch die Gleichung (c) gilt, $BO + DO = BD$; mithin liegt O auf BD und das Viereck ist ein Kreisviereck.

Zusatz 3. Zieht man für dieselbe Diagonale BD auch in dem andern BCD der beiden Dreiecke, in welche sie das Viereck theilt, ganz in derselben Weise zwei Ecklinien BO', DO', so bilden diese und die dem andern Dreiecke BAD zugehörigen beiden Ecklinien ein Parallelogramm.

Denn zieht man CO', so ist aus denselben Gründen wie oben $\triangle BCO' \sim \triangle ACD$, mithin

$AC \,.\, BO' = BC \,.\, AD$. Aus der Aehnlichkeit der Dreiecke AOD und ABC aber folgt $AC \,.\, DO = AD \,.\, BC$, also $BO' = DO$. Ebenso beweist man, dass $BO = DO'$ ist.

Ist das Viereck ein Kreisviereck, (Fig. 2) so fallen die Punkte O, O' auf die Diagonale und es ist $BO = DO'$.

Zieht man also durch die Endpunkte einer Diagonale eines Kreisvierecks zwei Ecklinien, deren jede mit einer der Seiten der Ecke denselben Winkel bildet, wie die Diagonale mit der anderen der beiden Eckseiten, so schneiden diese beiden Ecklinien auf der Diagonale gleiche Stücke ab.

Zusatz 4. Die mit der Gleichung $AC \,.\, AO = AB \,.\, AD$ analoge für O' ist

$$AC \,.\, CO' = CB \,.\, CD,$$

daher $AB \,.\, AD : CB \,.\, CD = AO : CO'$;

d. h. die beiden Producte der in den Endpunkten einer Diagonale eines beliebigen Vierecks zusammenstossenden Seitenpaare verhalten sich wie die von diesen Endpunkten ausgehenden dritten Ecklinien.

Ferner ist $AC \,.\, (AO + CO') = AB \,.\, AD + CB \,.\, CD, \qquad \text{(e.)}$

und ebenso, wenn man dieselbe Construction für die beiden Dreiecke ADC und ABC machte und die AO und CO' entsprechenden, von B und D ausgehenden dritten Ecklinien mit BO'' und DO''' bezeichnete,

$$BD(BO'' + DO''') = BA \,.\, BC + DA \,.\, DC. \qquad \text{(f.)}$$

Ist das Viereck (Fig. 2) ein Kreisviereck und verlängert man AO, bis sie dem Kreise in A', CO', bis sie ihm in C' begegnet, zieht ferner DA', so ist $\triangle ODA' \sim \triangle BO'C$, mithin, da $DO = BO'$ ist, $OA' = CO'$, also $AO + CO' = AO + OA' = AA'$. Ebenso ergibt sich $AO + CO' = CC'$, $BO'' + DO''' = BB' = DD'$. Es ist aber auch $AA' = BB'$, weil Bog. BC + Bog. CB' = Bog. DA' + Bog. DA, mithin $AA' = CC' = BB' = DD'$.

Zieht man also aus jeder Ecke eines Kreisvierecks eine Sehne unter demselben Winkel gegen eine Seite der Ecke, als die Diagonale mit der anderen Seite dieser Ecke bildet, so sind diese 4 Sehnen einander gleich.

Ferner geben die Gleichungen (e.) und (f.)

$$\frac{AB \,.\, AD + CB \,.\, CD}{BA \,.\, BC + DA \,.\, DC} = \frac{AC}{BD}$$

oder den bekannten Satz über das Verhältniss der Diagonalen eines Kreisvierecks.

Anmerkung. Der wesentliche Theil des Beweises des obigen Hauptsatzes, dass nämlich die Linie OA mit der Seite AB einen gleichen Winkel wie DA mit AC bildet, lässt sich, wenn gleich nicht so einfach, auch mittelst des Satzes 1 Zus. 2 führen, indem man zeigt, dass wenn man in A an die Seite AB einen Winkel gleich CAD anlegt, der zweite Schenkel durch O geht. Beschreibt man nämlich durch die 3 Eckpunkte A, D, C (Fig. 3) einen Kreis, welcher die (verlängerten) Seiten BA in A', BD in D', BC in C' schneidet, so ist, weil in dem Sehnensechseck die Diagonalen AA', DD', CC' sich in einem Punkte B schneiden,

$$AD \,.\, CA' \,.\, D'C' = DC \,.\, A'D' \,.\, C'A.$$

Bezeichnet man nun die Winkel der Ecktransversalen aus A mit den Seiten AD, AB mit α, α', der Ecktransversalen BO mit den Seiten BA, BD mit β, β', der Ecktransversalen DO mit DB, DA mit δ, δ' und beachtet, dass $\angle ABO = \angle ACD = \angle AA'D$, also $BO \parallel A'D$ und $\angle ADO = \angle ACB$ ist, mithin DO durch C' geht, so ist

$$\begin{aligned}
AD &= 2\,\text{sin.}\,ACD = 2\,\text{sin.}\,OBA = 2\,\text{sin.}\,\beta.\\
CA' &= 2\,\text{sin.}\,BAC = 2\,\text{sin.}\,OAD = 2\,\text{sin.}\,\alpha.\\
D'C' &= 2\,\text{sin.}\,C'DD' = 2\,\text{sin.}\,ODB = 2\,\text{sin}\,\gamma.\\
DC &= 2\,\text{sin.}\,CAD = 2\,\text{sin.}\,BAO = 2\,\text{sin.}\,\alpha'.\\
A'D' &= 2\,\text{sin.}\,A'DD' = 2\,\text{sin.}\,OBD = 2\,\text{sin}\,\beta'.\\
C'A &= 2\,\text{sin.}\,ACC' = 2\,\text{sin.}\,ADC' = 2\,\text{sin.}\,\gamma',
\end{aligned}$$

daher

$$\text{sin.}\,\alpha \,.\, \text{sin.}\,\beta \,.\, \text{sin.}\,\gamma = \text{sin.}\,\alpha' \,.\, \text{sin.}\,\beta' \,.\, \text{sin.}\,\gamma',$$

mithin geht die Ecktransversale aus A durch den Punkt O.

Das Sehnendreieck $A'D'C'$ ist, wie man sich leicht überzeugt, dem Dreieck BOD ähnlich, hat also ebenfalls die merkwürdige Eigenschaft, dass seine Seiten sich wie die beiden Producte der beiden Gegenseiten und das Product der Diagonalen des Vierecks verhalten.

4. Zieht man aus dem Durchschnittspunkt O der inneren Diagonalen eines Kreisvierecks $ABCD$ zu einer Seite CD desselben eine Parallele, bis sie deren Gegenseite AB z. B. in X begegnet, so ist das Quadrat dieser Parallelen OX gleich dem Producte der durch sie auf der Gegenseite bestimmten Abschnitte AX, BX. Fig. 4.

Es ist $\angle XOB = \angle CDO = \angle OAB$, daher $\triangle XOB \sim \triangle OAX$, folglich $OX^2 = AX \,.\, BX$.

Dieser Satz leitet unmittelbar zur Construction der Aufgabe: Durch einen Punkt ausserhalb (P) oder innerhalb (P′) eines Winkels ACB eine Gerade so zu ziehen, dass das Rechteck der zwischen dem Punkte und den Schenkeln des Winkels liegenden Abschnitte auf ihr einem gegebenen Quadrate gleich ist.

Liegt P ausserhalb (Fig. 5.), so beschreibe man aus P mit der Seite des Quadrats einen Kreis; er treffe einen Schenkel des Winkels CA in D. Fällt man nun von P auf diesen Schenkel eine Senkrechte,*) bestimmt auf ihr den Mittelpunkt M eines Kreises, der durch P und D geht, und verbindet die Durchschnittspunkte E, E' desselben und des andern Schenkels mit P, so sind die Linien PE, PE' die verlangten. Denn durchschneiden sie den ersten Schenkel in F, F', und zieht man DE, DE', so ist $\triangle PDF \sim \triangle PDE$, und $\triangle PDF' \sim \triangle PDE'$.

Liegt P′ innerhalb, so beschreibe man wieder mit der Seite des Quadrats einen Kreis, der einen Schenkel des Winkels CA in D treffe; verlängere $P'D$ über P′ hinaus, bis $P'D' = PD$ ist und verfahre für $P'D'$ wie vorhin für PD.

Berührt der aus M mit MP beschriebene Kreis den Schenkel CB, so hat PD seinen kleinsten Werth und die verlangte Gerade schneidet die Schenkel des Winkels unter gleichen Winkeln.

Unter allen Geraden also, welche von einem gegebenen Punkt aus durch die Schenkel eines gegebenen Winkels gelegt sind, gibt die die letzteren unter gleichen Winkeln durchschneidende das kleinste Rechteck der Abschnitte.

5. Zieht man durch den Durchschnittspunkt P (Fig. 6) zweier Kreise A, B eine beliebige Gerade, welche den Kreisen zum zweiten Male in a, b begegnet und fällt von den Mittelpunkten A, B auf dieselbe die Senkrechten $A\alpha, B\beta$, so ist das zwischen ihren Fusspunkten auf der Geraden liegende Stück $\alpha\beta$ gleich der Hälfte des zwischen den Kreisen auf derselben liegenden Stückes ab.

Denn $ab = 2P\beta \pm 2P\alpha = 2\alpha\beta$.

Hiernach löst sich sofort die Aufgabe: Durch den gemeinschaftlichen Durchschnittspunkt P dreier Kreise A, B, C eine Gerade so zu ziehen, dass die Stücke ab, ac, welche auf ihr zwischen einem der Kreise, z. B. A, und den beiden anderen B, C liegen, in gegebenem Verhältnisse $p:q$, stehen.

Bestimme auf der Centralen zwischen A und C einen Punkt D so, dass $AD:AC = p:q$, verbinde D mit B und fälle von P auf DB eine Senkrechte $B\beta$, so ist diese die verlangte. Denn fällt man auf letztere noch die Senkrechten $A\alpha$, $C\gamma$, so ist

$$AD:AC = \alpha\beta:\alpha\gamma = ab:ac.$$

Ferner ergibt sich aus Obigem der Satz:

Schneiden sich mehrere Kreise A, B, C (Fig. 7.) in denselben beiden Punkten und zieht man durch einen derselben eine beliebige Transversale, welche den Kreisen zum zweiten Male in a, b, c begegnet, so verhalten sich die auf ihr zwischen den Kreisen liegenden Stücke ab, bc, ac wie die Centralen AB, BC, AC.

Denn fällt man von den Mittelpunkten A, B, C auf die Transversale die Senkrechten $A\alpha, B\beta, C\gamma$, so ist $ab:bc:ac = \alpha\beta:\beta\gamma:\alpha\gamma = AB:BC:AC$.

6. Der geometrische Ort für die Schwerpunkte aller Dreiecke auf derselben Basis, in denen eine der beiden anderen Seiten eine constante Länge hat, ist ein Kreis, dessen Mittelpunkt auf der festen Basis liegt und dessen Halbmesser ein Drittheil der constanten Seite beträgt.

Ist ACB (Fig. 8) eins dieser Dreiecke, S sein Schwerpunkt, AB die feste Basis, H die Mitte derselben, so ist bekanntlich CSH eine Gerade und $HS = \frac{1}{3}CH$. Ist nun CA die Seite von constanter Länge, und wird $SM \parallel CA$ gezogen, so ist $HC:HS = HA:HM = AC:MS = 3:1$, mithin $HM = \frac{1}{3}HA$ und $MS = \frac{1}{3}AC$, oder der aus M mit MS beschriebene Kreis geht durch die Schwerpunkte aller besagten Dreiecke.

---

*) Irrthümlich ist in der Fig. die Linie PM **nicht** senkrecht auf CA gezeichnet.