TT

Ueber ein mechanisches Problem Joh. Bernoulli's.

Gelegentlich wurde meine Aufmerksamkeit auf ein Problem gelenkt, das Joh. Bernoulli aufgestellt hat. Es findet sich in seinen gesammelten Werken* Tom. IV. pag. 248 und lautet: Determinare curvam, quam describit corpus inclusum in tubo, qui in plano horizontaliter uniformiter movetur circa aliquem axem in ipso tubo sumptum. Supponitur corpus moveri posse sine ulla frictione. Interessant erschien mir dieses Problem zunächst wegen der Art und Weise, auf welche B. zu seiner Lösung gelangt; dann aber auch wegen des Charakters der sich ergebenden Bahnlinie und ihrer in die Augen springenden Beziehungen zur logarithmischen Spirale. Die Lösung, welche B. mit den damaligen Hülfsmitteln der Infinitesimalrechnung und der analytischen Mechanik giebt, beruht auf einer Reihe geistreicher Combinationen und scharfsinniger Schlüsse und fusst insbesondere auf einem eigens zu diesem Zwecke aufgestellten Lemma, das indess kaum von allgemeinerem Interesse ist. Er findet die Polargleichung der Trajectorie, wie folgt:

$$x = \frac{1}{2}\left(e^{\frac{z}{a}} + e^{-\frac{z}{a}}\right)$$

Diese Gleichung ist bezogen auf den Drehpunkt der Röhre als Pol und auf die Anfangslage derselben als Fundamentallinie; x bezeichnet den Radiusvector; a ist der willkürliche Radius eines um den Pol beschriebenen Kreises, und die Variabele z giebt den auf der Peripherie dieses Kreises genommenen Bogen an, welcher dem Winkel entspricht, den die veränderliche Lage der Röhre mit der Fundamentallinie bildet; $\frac{z}{a}$ ist also das Mass dieses Winkels. Die Substitution von $z = 0$, welche dem Beginne der Bewegung entspricht, liefert für den Radiusvector den Werth 1, und in der That wird von B. vorausgesetzt, dass die anfängliche Entfernung des bewegten Körpers vom Drehpunkte gleich der Einheit sei. Für den Fall, dass diese Entfernung $= b$ genommen wird, findet sich bei B. die Gleichung:

$$x = \frac{1}{2}\left(e^{\frac{z}{a}} + b^2 e^{-\frac{z}{a}}\right),$$

welche aber für $z = 0$ den Werth $x = \frac{1}{2}(1 + b^2)$ liefert, also offenbar unrichtig ist. Der Fehler ist eine Folge der Vernachlässigung der Integrationsconstanten.

Die von B. gestellte Aufgabe erhält eine wesentliche Verallgemeinerung, wenn man annimmt, dass die Drehung der Röhre nicht in der Horizontalebene, sondern in der Weise Statt findet, dass sie um eine senkrechte Axe einen geraden Kegel beschreibt; obige Aufgabe ist dann der besondere Fall, wo der Winkel, den die Röhre mit jener senkrechten Axe bildet, einem Rechten gleich ist. Um die Aufgabe in der allgemeinsten Form hinzustellen, könnte man dann noch eine Anfangsgeschwindigkeit des bewegten Körpers voraussetzen, die z. B. durch ein vorangegangenes Herabfallen desselben in der Röhre entstanden wäre. Bei dem jetzigen Standpunkte der rationellen Mechanik, welche hinreichende Hülfsmittel zur systematischen Lösung dynamischer Aufgaben bietet, ist es leicht, B.'s Problem auch in jener allgemeinern

---

* Johannis Bernoulli Opera Omnia. Lausannae et Genevae MDCCXLII.

Form zu lösen. Der Umstand, dass die Linie doppelter Krümmung, die sich in der verallgemeinerten Aufgabe als Bahn des Beweglichen ergiebt, in nicht minder inniger Beziehung zur logarithmischen Spirale steht, sowie die Einfachheit des Gesetzes, welches für die Geschwindigkeit des bewegten Körpers in seiner Bahn aufgestellt werden kann, liessen es mir nicht unpassend erscheinen, die angestellten Berechnungen an dieser Stelle mitzutheilen.

Erweiterung des Problems und Lösung desselben.

Will man, von den oben angedeuteten Gesichtspunkten ausgehend, dem Probleme B.'s eine allgemeinere Fassung geben, so dürfte sich dasselbe zweckmässig, wie folgt, aussprechen lassen:

„Eine der Schwerkraft unterworfene Kugel von unendlich kleinem Durchmesser befindet sich in einer cylindrischen Röhre von demselben Durchmesser. Welche Bahn beschreibt die Kugel und nach welchen Gesetzen erfolgt ihre Bewegung, wenn die Axe des Cylinders einen geraden Kegel um eine lothrechte Linie beschreibt, wenn ferner für die Kugel die Anfangsgeschwindigkeit v_0 in der Richtung der Cylinderaxe und für ihren Mittelpunkt die Entfernuug R_0 von der Spitze des Kegels vorausgesetzt und endlich von der Reibung zwischen der Kugel und der Röhre abgesehn wird.“

Wenden wir uns zur Lösung dieser Aufgabe, so ist zunächst klar, dass wir die Kugel, da ihr Durchmesser unendlich klein ist, als einen materiellen Punkt betrachten können, der in seiner Bewegung in der Weise beschränkt wird, dass er gezwungen ist, auf der Axe der Röhre zu bleiben, während diese den Kegel beschreibt. Die Lage des Punktes kann also von den ihn etwa angreifenden Kräften nur insofern verändert werden, als sie ihn in der Richtung der Cylinderaxe fortzubewegen streben. Aus dieser Betrachtung folgt, dass die Bahnlinie, welche der bewegte Punkt beschreibt, eine Spirale ist, welche in dem Mantel des von der Röhrenaxe erzeugten geraden Kegels liegt. Die Bestimmung dieser räumlichen Curve erfordert 2 Gleichungen, von denen des obigen Umstandes halber die eine durch die Gleichung des Kegels repräsentirt werden kann. Als zweite Gleichung lässt sich dann am zweckmässigsten die Gleichung für die Projection der Curve doppelter Krümmung auf eine durch die Spitze des Kegels gelegte Horizontalebene bestimmen. Setzt man die Geschwindigkeit, mit der die Röhre gedreht wird, als bekannt voraus, so lässt sich die Lage der Röhrenaxe für jede beliebige Zeit t sofort finden, und zur Bestimmung der Lage des bewegten Punktes würde es also genügen, seine Eutfernung R von der Spitze des Kegels als Function der Zeit auszudrücken. Die erwähnte Projection der Trajectorie ist ihrerseits auch eine Spirale, deren Gleichung wir deshalb auf Polarcoordinaten beziehn werden; es ist dann klar, dass der Radiusvector r dieser Curve die Projection von R ist. Die Bestimmung von R als Function der Zeit wird uns also auch zur Aufstellung jener Gleichung führen können. Die Entfernung des Beweglichen von der Spitze des Kegels ist nun aber lediglich durch diejenigen Kräfte bedingt, deren Richtung in die Cylinderaxe fällt, während alle Kräfte, deren Richtung senkrecht darauf ist, durch den Widerstand der Wände der Röhre vernichtet werden. Wir werden also alle an dem materiellen Punkte wirkenden Kräfte nach den angegebenen Richtungen in Seitenkräfte zerlegen und haben dann nur diejenigen Componenten in Rechnung zu bringen, welche in die Cylinderaxe fallen. Der Aufgabe gemäss ist die bewegte Kugel der Schwerkraft unterworfen, als deren Mass $g = 9,81^{m}$ gelten soll; sei nun α der constante Winkel, welchen die Erzeugungslinie mit der Axe des geraden Kegels bildet, so ist ersichtlich, dass die in der Richtung der Cylinderaxe genommene Componente der Schwerkraft $= g . \cos \alpha$ ist. Weiter ist nun in Betracht zu ziehn, in wiefern die Circulation des Cylinders sich an der Bewegung des Punktes in der Richtung der Röhrenaxe betheiligt. In Folge jener Bewegung des Cylinders wird aber der Punkt in jeder seiner Lagen mit gleichförmiger Geschwindigkeit Kreise zu beschreiben suchen, deren Radien die auf die Kegelaxe gefällten Perpendikel, und deren Mittelpunkte die Fusspunkte der letztern sind. Allgemein werden die Radien dieser Kreise durch $R \sin \alpha$ ausgedrückt. Die gleichförmige Bewegung der Cylinderaxe können wir nun so auffassen, dass wir sagen, die durch jene und die feste senkrechte Axe gelegte Ebene drehe sich mit gleichförmiger Geschwindigkeit um die letztere. Bezeichnen wir dann den Neigungswinkel des in der Einheit der Zeit beschriebenen Raumwinkels, also die Winkelgeschwindigkeit, mit w, so ergiebt sich für die Geschwindigkeit, mit der der bewegte Punkt die betrachteten Kreise beschreibt der Ausdruck: $v =$

$w \,.\, R \,.\, \sin\alpha$; denn offenbar verhalten sich diese Geschwindigkeiten, da die ganzen Kreise in gleichen Zeiten beschrieben werden, wie die Radien, und für den Kreis, dessen Radius = 1, ist v = w. In Folge dieser Kreisbewegungen nun wird der Punkt das Bestreben haben, mit einer der Centrifugalkraft entsprechenden Geschwindigkeit sich von der Kegelaxe zu entfernen. Als Mass für diese beschleunigende Kraft gilt bekanntlich das Quadrat der Geschwindigkeit in der Bahn dividirt durch den Radius derselben, hier also $w^2 R \,.\, \sin\alpha$. Eine einfache Betrachtung zeigt, dass wir diesen Ausdruck mit $\sin\alpha$ multipliciren müssen, um die hier in Rechnung zu bringende Componente der Centrifugalkraft zu erhalten. Da nun die Schwere und die Centrifugalkraft die einzigen Kräfte sind, welche den Voraussetzungen gemäss den Körper sollicitiren können, so ergiebt sich zur Bestimmung von R sofort die folgende Gleichung:

$$\frac{d^2R}{dt^2} = g \,.\, \cos\alpha + w^2 \sin\alpha^2 \,.\, R \,.$$

Die Integration dieser Differenzialgleichung liefert:

$$\left(\frac{dR}{dt}\right)^2 = 2\, g \cos\alpha\, R + w^2 \sin^2\alpha\, R^2 + C$$

Die Constante C bestimmt sich hier durch die Erwägung, dass $\frac{dR}{dt}$ d. i. die Geschwindigkeit in der Richtung der Röhrenaxe für $R = R_0$ der Anfangsgeschwindigkeit v_0 gleich werden muss. Demnach ist

$$C = v_0^2 - 2\, g \cos\alpha \,.\, R_0 - w^2 \sin^2\alpha\, R_0^2$$

Die obige Gleichung gewinnt daher folgende Gestalt:

$$\left(\frac{dR}{dt}\right)^2 = w^2 \sin^2\alpha\, (R^2 - R_0^2) + 2\, g \cos\alpha\, (R - R_0) + v_0^2$$

woraus nach Trennung der Veränderlichen folgt:

$$dt = \frac{dR}{\sqrt{w^2 \sin^2\alpha\, (R^2 - R_0^2) + 2\, g \cos\alpha\, (R - R_0) + v_0^2}}$$

$$t = \frac{1}{w \sin\alpha} \int \frac{dR}{\sqrt{R^2 - R_0^2 + \frac{2\, g \cos\alpha}{w^2 \sin^2\alpha}(R - R_0) + \frac{v_0^2}{w^2 \sin^2\alpha}}}$$

Die Integration dieses Integrals von der Form:

$$J = \int \frac{dx}{\sqrt{x^2 + a\,x + b}}$$

liefert aber:

$$t = \frac{1}{w \sin\alpha}\, l \left\{ \sqrt{R^2 - R_0 + \frac{2\, g \cos\alpha}{w^2 \sin^2\alpha}(R - R_0) + \frac{v_0^2}{w^2 \sin^2\alpha}} + R + \frac{g \cos\alpha}{w^2 \sin^2\alpha} \right\} + C =$$

$$\frac{1}{w \sin\alpha}\, l \left\{ w \sin\alpha \sqrt{w^2 \sin^2\alpha\, (R^2 - R_0^2) + 2\, g \cos\alpha\, (R - R_0) + v_0^2} + w^2 \sin^2\alpha\, R + g \cos\alpha \right\} + C'$$

Da aber $R = R_0$ der Anfangslage entspricht, also für diesen Werth von R die Zeit t verschwinden muss, so hat man:

$$C' = -\frac{1}{w \sin\alpha}\, l \left\{ w^2 \sin^2\alpha\, R_0 + g \cos\alpha \pm w \sin\alpha\, v_0 \right\}$$

Daher:

$$t = \frac{1}{w \sin\alpha}\, l\, \frac{\pm w \sin\alpha \sqrt{w^2 \sin^2\alpha\, (R^2 - R_0^2) + 2\, g \cos\alpha\, (R - R_0) + v_0^2} + w^2 \sin^2\alpha\, R + g \cos\alpha}{w^2 \sin^2\alpha\, R_0 + g \cos\alpha \pm w \sin\alpha \,.\, v_0}$$

Gemäss der Bedeutung von log. nat. folgt hieraus die Gleichung:

$$e^{w \sin\alpha\, t}(w^2 \sin^2\alpha\, R_0 + g \,.\, \cos\alpha \pm w \sin\alpha \,.\, v_0) - (w^2 \sin^2\alpha\, R + g \,.\, \cos\alpha) =$$
$$\pm w \sin\alpha \sqrt{w^2 \sin^2\alpha\, (R^2 - R_0^2) + 2\, g \cos\alpha\, (R - R_0) + v_0^2}.$$

Qnadrirt man beide Seiten dieser Gleichung, so findet man nach gehöriger Reduction und zweckmässiger Umformung R als Function der Zeit, wie folgt:

$$\left.\begin{array}{l} R = \frac{1}{2}\Big\{ e^{w \sin \alpha\, t}\left(R_0 + \frac{g \cos \alpha}{w^2 \sin^2 \alpha} \pm \frac{v_0}{w \sin \alpha}\right) + e^{-w \sin \alpha\, t} \\ \left(R_0 + \frac{g \cdot \cos \alpha}{w^2 \sin^2 \alpha} \mp \frac{v_0}{w \sin \alpha}\right)\Big\} - \frac{g \cdot \cos \alpha}{w^2 \sin^2 \alpha} = \frac{1}{2}\Big\{\left(R_0 + \frac{g \cdot \cos \alpha}{w^2 \sin^2 \alpha}\right) \\ \left(e^{w \sin \alpha t} + e^{-w \sin \alpha t}\right) \pm \frac{v_0}{w \sin \alpha}\left(e^{w \sin \alpha t} - e^{-w \sin \alpha t}\right)\Big\} - \frac{g \cdot \cos \alpha}{w^2 \sin^2 \alpha} \end{array}\right\} \ldots (1.)$$

Es wäre nun zunächst zu untersuchen, ob in diesem Ausdruck das obere oder untere Zeichen zu nehmen ist. Da man aber α immer $< 90^0$, ferner v_0 positiv, d. h. in der Richtung der Cylinderaxe von der Spitze des Kegels aus genommen, voraussetzen darf, so ist klar, dass die Entfernung des Punktes von der Spitze des Kegels immer wachsen muss. Die rechte Seite in (1) muss also unter den angegebenen Beschränkungen für alle Werthe der Constanten R_0, v_0 und w einen Ausdruck ergeben, der $> R_0$ ist. Bestimmt man nun aber diese Constanten so, dass

$$R_0 = \frac{v_0}{w \cdot \sin \alpha} - \frac{g \cdot \cos \alpha}{w^2 \cdot \sin^2 \alpha}$$

so reducirt sich die Gleichung (1) auf die folgende:

$$R = \frac{1}{2} \cdot \frac{v_0}{w \sin \alpha}\left(e^{w \sin \alpha\, t} + e^{-w \sin \alpha\, t} \pm e^{w \sin \alpha\, t} \mp e^{-w \sin \alpha\, t}\right)$$
$$+ R_0 - \frac{v_0}{w \sin \alpha}.$$

Je nachdem die oberen oder unteren Vorzeichen genommen werden, erhält man hieraus:

$$R = R_0 + \frac{v_0}{w \sin \alpha\, t}\left(e^{w \sin \alpha\, t} - 1\right) \text{ und}$$
$$R = R_0 + \frac{v_0}{w \sin \alpha\, t}\left(e^{-w \sin \alpha\, t} - 1\right).$$

Da aber w, sin α und t immer positiv zu nehmen sind, so ist $e^{w \sin \alpha\, t} > 1$, dahingegen $e^{-w \sin \alpha\, t} < 1$. Nur das obere Vorzeichen liefert also für R einen Werth, der $> R_0$ ist, und es sind also in (1) die oberen Vorzeichen zu nehmen. Nunmehr ist es leicht, mit Hülfe von (1) die gesuchte Gleichung für die Projection der Bahnlinie auf eine durch die Spitze des Kegels gelegte Horizontalebene zu bestimmen. Die Polarcoordinaten dieser ebenen Curve seien r und ϑ; als Pol werde der Drehpunkt und als Fundamentallinie die Projection der Anfangslage der Cylinderaxe genommen. Dann ist ersichtlich, dass

$$R = \frac{r}{\sin \alpha}\,; \; R_0 = \frac{r_0}{\sin \alpha}$$

Die Substitution dieser Werthe in (1) führt sogleich zu der Gleichung (2), welche r als Function der Zeit ausdrückt:

$$\left.\begin{array}{l} r = \frac{1}{2}\Big\{e^{w \sin \alpha\, t}\left(r_0 + \frac{g \cot \alpha}{w^2} + \frac{v_0}{w}\right) + e^{-w \sin \alpha\, t} \cdot \\ \qquad \left(r_0 + \frac{g \cdot \cot \alpha}{w^2} - \frac{v_0}{w}\right)\Big\} - \frac{g \cdot \cot \alpha}{w^2} \\ = \frac{1}{2}\Big\{\left(r_0 + \frac{g \cdot \cot \alpha}{w^2}\right)\left(e^{w \sin \alpha\, t} + e^{-w \sin \alpha\, t}\right) \\ \quad + \frac{v_0}{w}\left(e^{w \sin \alpha\, t} - e^{-w \sin \alpha\, t}\right)\Big\} - \frac{g \cdot \cot \alpha}{w^2} \end{array}\right\} \ldots\ldots (2).$$

Um nun noch ϑ als Function von t zu erhalten, darf man nur noch erwägen, dass der Leitstrahl r, als Projection der Cylinderaxe, sich ebenfalls mit gleichförmiger Bewegung und mit derselben Winkelgeschwindigkeit w um den Pol dreht; dann ist einleuchtend, dass

$$\vartheta = w\,t \quad \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots (3)$$

Qnadrirt man beide Seiten dieser Gleichung, so findet man
zweckmässiger Umformung R als Function der Zeit, wie folgt:

$$R = \frac{1}{2}\Big\{ e^{w \sin \alpha\, t}\left(R_0 + \frac{g \cos \alpha}{w^2 \sin^2 \alpha} \pm \frac{v_0}{w \sin \alpha}\right) + e^{-w \sin}$$

$$\left(R_0 + \frac{g \,.\, \cos \alpha}{w^2 \sin^2 \alpha} \mp \frac{v_0}{w \sin \alpha}\right)\Big\} - \frac{g \,.\, \cos \alpha}{w^2 \sin^2 \alpha} = \frac{1}{2}\Big\{\Big(R_0 +$$

$$\left(e^{w \sin \alpha\, t} + e^{-w \sin \alpha\, t}\right) \pm \frac{v_0}{w \sin \alpha}\left(e^{w \sin \alpha\, t} - e^{-w \sin \alpha}\right.$$

Es wäre nun zunächst zu untersuchen, ob in diesem Ausdruc
zu nehmen ist. Da man aber α immer $< 90^0$, ferner v_0 positiv, d. h.
von der Spitze des Kegels aus genommen, voraussetzen darf, so ist klar,
von der Spitze des Kegels immer wachsen muss. Die rechte Seite in
benen Beschränkungen für alle Werthe der Constanten R_0, v_0 und w ein
ist. Bestimmt man nun aber diese Constanten so, dass

$$R_0 = \frac{v_0}{w \,.\, \sin \alpha} - \frac{g \,.\, \cos \alpha}{w^2 \,.\, \sin^2 \alpha}$$

so reducirt sich die Gleichung (1) auf die folgende:

$$R = \frac{1}{2} \,.\, \frac{v_0}{w \sin \alpha}\left(e^{w \sin \alpha\, t} + e^{-w \sin \alpha\, t} \pm e^{w \sin}\right.$$

$$+ R_0 - \frac{v_0}{w \sin \alpha}\,.$$

Je nachdem die oberen oder unteren Vorzeichen genommen we

$$R = R_0 + \frac{v_0}{w \sin \alpha\, t}\left(e^{w \sin \alpha\, t} - 1\right) \text{ u}$$

$$R = R_0 + \frac{v_0}{w \sin \alpha\, t}\left(e^{-w \sin \alpha\, t} - 1\right.$$

Da aber w, sin α und t immer positiv zu nehmen sind, so ist e
$e^{-w \sin \alpha\, t} < 1$. Nur das obere Vorzeichen liefert also für R einen
sind also in (1) die oberen Vorzeichen zu nehmen. Nunmehr ist es leicht,
Gleichung für die Projection der Bahnlinie auf eine durch die Spitze des
zu bestimmen. Die Polarcoordinaten dieser ebenen Curve seien r und ϑ
und als Fundamentallinie die Projection der Anfangslage der Cylinderaxe g
dass

$$R = \frac{r}{\sin \alpha}\,;\; R_0 = \frac{r_0}{\sin \alpha}$$

Die Substitution dieser Werthe in (1) führt sogleich zu der Gleichung (2), welche r als Function der Zeit ausdrückt:

$$\left.\begin{aligned} r &= \frac{1}{2}\Big\{ e^{w \sin \alpha\, t}\left(r_0 + \frac{g \cot \alpha}{w^2} + \frac{v_0}{w}\right) + e^{-w \sin \alpha\, t}\,. \\ &\qquad \left(r_0 + \frac{g \,.\, \cot \alpha}{w^2} - \frac{v_0}{w}\right)\Big\} - \frac{g \,.\, \cot \alpha}{w^2} \\ &= \frac{1}{2}\Big\{\left(r_0 + \frac{g \,.\, \cot \alpha}{w^2}\right)\left(e^{w \sin \alpha\, t} + e^{-w \sin \alpha\, t}\right) \\ &\qquad + \frac{v_0}{w}\left(e^{w \sin \alpha\, t} - e^{-w \sin \alpha\, t}\right)\Big\} - \frac{g \,.\, \cot \alpha}{w^2} \end{aligned}\right\} \quad \ldots\ldots \quad (2).$$

Um nun noch ϑ als Function von t zu erhalten, darf man nur noch erwägen, dass der Leitstrahl r, als Projection der Cylinderaxe, sich ebenfalls mit gleichförmiger Bewegung und mit derselben Winkelgeschwindigkeit w um den Pol dreht; dann ist einleuchtend, dass

$$\vartheta = w\, t \quad \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \quad (3)$$

ch jetzt t eliminiren, und so gelangt man zu der nachstehenden Gleichung, er Bahnlinie, auf Polarcoordinaten bezogen, darstellt:

$$\left.\begin{aligned} &\ldots \frac{\cot\alpha}{w^2}\Big)\left(e^{\sin\alpha\,.\,\vartheta} + e^{-\sin\alpha\,.\,\vartheta}\right) \\ &\ldots\,.\,\vartheta - e^{-\sin\alpha\,.\,\vartheta}\Big)\Big\{ -\frac{g\,.\cot\alpha}{w^2}\,. \\ &\ldots\left(r_0 + \frac{g\,.\,\cot\alpha}{w^2} + \frac{v_0}{w}\right) + e^{-\sin\alpha\,.\,\vartheta} \\ &\ldots\frac{g\,.\,\cot\alpha}{w^2} - \frac{v_0}{w}\Big)\Big\{ - \frac{g\,.\,\cot\alpha}{w^2}\,. \end{aligned}\right\}\quad \ldots\ldots (4)$$

ı einer Erörterung dieser Gleichung und der Construction der durch sie zur vollständigen Lösung der Aufgabe nur noch übrig, einen allgemeinen t zu gewinnen, mit welcher der materielle Punkt seine Bahn beschreibt. so kann man v als Funktion von R, r, ϑ oder t ausdrücken. Am einwir v als Funktion von r auffassen; derselbe ist deshalb um so eher ausn Gleichungen leicht ist, durch passende Elimination von r die Beziehungen Veränderlichen zu ermitteln. Betrachtet man den Punkt in irgend einer Geschwindigkeit: die eine $= \frac{d\,R}{dt}$ in der Richtung der Cylinderaxe, die der Tangente des durch seine Lage gehenden, zur Axe senkrechten ungen stehen mithin auf einander senkrecht und es ist daher:

$$v^2 = \left(\frac{d\,R}{d\,t}\right)^2 + w^2\,r^2\,.$$

$$\ldots w^2 \sin^2\alpha\,(R^2 - R_0^{\,2}) + 2\,g\,.\,\cos\alpha\,(R - R_0) + v_0^{\,2}$$

ıer, dass

$$r = R\,.\,\sin\alpha$$

$$\ldots - r_0^{\,2}) + 2\,g\,.\,\cot\alpha\,(r - r_0) + v_0^{\,2} + w^2\,r^2$$

$$\ldots 2\,r^2 - r_0^{\,2} + \frac{2\,g\,.\,\cot\alpha}{w^2}(r - r_0) + \frac{v^2}{w^2}\,.\;\;.\;\;.\quad (5)$$

…n und Untersuchung der Bahncurve.

Behufs Untersuchung der Bahnlinie, deren Gleichung wir im vorigen Abschnitte gefunden haben, erscheint es zweckmässig, vom Besondern zum Allgemeinen fortzuschreiten, also zunächst gewisse ausgezeichnete Fälle und dann erst die Gleichung in ihrer allgemeinsten Form zu betrachten. Am nächsten liegt der Gedanke, die Gleichung auf den Fall anzuwenden, welcher der von B. gestellten Aufgabe entsprechen würde. Man hat zu diesem Ende in (4) nur

$$\alpha = 90^0\;;\; v_0 = 0$$

zu substituiren, wodurch man erhält:

$$r = \frac{r_0}{2}\left(e^{\vartheta} + e^{-\vartheta}\right)\;\ldots\ldots\ldots\ldots (6)$$

$$\text{oder } r = \frac{1}{2}\left(e^{\vartheta} + e^{-\vartheta}\right),\ \text{wenn } r_0 = 1 \text{ genommen wird.}$$

Die letzte Gleichung entspricht genau der in der Einleitung S. 1 angeführten und von B. gefundenen Gleichung; denn es leuchtet ein, dass $\vartheta = \frac{z}{a}$ ist. Die Gleichung (6) hingegen zeigt uns, Aus (2) und (3) lässt sich jetzt t eliminiren, und so gelangt man zu der nachstehenden Gleichung, welche die Horizontalprojection der Bahnlinie, auf Polarcoordinaten bezogen, darstellt:

$$\left.\begin{aligned} r &= \frac{1}{2}\Big\{\left(r_0 + \frac{g \,.\, \cot\alpha}{w^2}\right)\left(e^{\sin\alpha \,.\, \vartheta} + e^{-\sin\alpha \,.\, \vartheta}\right) \\ &\quad + \frac{v_0}{w}\left(e^{\sin\alpha \,.\, \vartheta} - e^{-\sin\alpha \,.\, \vartheta}\right)\Big\} - \frac{g \,.\, \cot\alpha}{w^2} \,. \\ &= \frac{1}{2}\Big\{e^{\sin\alpha \,.\, \vartheta}\left(r_0 + \frac{g \,.\, \cot\alpha}{w^2} + \frac{v_0}{w}\right) + e^{-\sin\alpha \,.\, \vartheta} \\ &\qquad \left(r_0 + \frac{g \,.\, \cot\alpha}{w^2} - \frac{v_0}{w}\right)\Big\} - \frac{g \,.\, \cot\alpha}{w^2} \,. \end{aligned}\right\} \quad \ldots\ldots \quad (4)$$

Sieht man vorläufig von einer Erörterung dieser Gleichung und der Construction der durch sie dargestellten Curve ab, so bleibt zur vollständigen Lösung der Aufgabe nur noch übrig, einen allgemeinen Ausdruck für die Geschwindigkeit zu gewinnen, mit welcher der materielle Punkt seine Bahn beschreibt. Bezeichnen wir dieselbe mit v, so kann man v als Funktion von R, r, ϑ oder t ausdrücken. Am einfachsten wird der Ausdruck, wenn wir v als Funktion von r auffassen; derselbe ist deshalb um so eher ausreichend, als es mit Hülfe der obigen Gleichungen leicht ist, durch passende Elimination von r die Beziehungen zwischen v und einer der andern Veränderlichen zu ermitteln. Betrachtet man den Punkt in irgend einer Lage, so hat er eine doppelte Geschwindigkeit: die eine $= \frac{dR}{dt}$ in der Richtung der Cylinderaxe, die andere $= w\,r$ in der Richtung der Tangente des durch seine Lage gehenden, zur Axe senkrechten Durchschnittskreises; beide Richtungen stehen mithin auf einander senkrecht und es ist daher:

$$v^2 = \left(\frac{d\,R}{d\,t}\right)^2 + w^2 r^2 \,.$$

Auf S. 3 fanden wir:

$$\left(\frac{d\,R}{dt}\right)^2 = w^2 \sin^2\alpha\,(R^2 - R_0^{\,2}) + 2\,g \,.\, \cos\alpha\,(R - R_0) + v_0^{\,2}$$

Berücksichtigt man ferner, dass

$$r = R \,.\, \sin\alpha$$

so erhält man:

$$v^2 = w^2 (r^2 - r_0^{\,2}) + 2\,g \,.\, \cot\alpha\,(r - r_0) + v_0^{\,2} + w^2 r^2$$

$$v = w \sqrt{2\,r^2 - r_0^{\,2} + \frac{2\,g \,.\, \cot\alpha}{w^2}(r - r_0) + \frac{v^2}{w^2}} \quad \ldots \quad (5)$$

Construction und Untersuchung der Bahncurve.

Behufs Untersuchung der Bahnlinie, deren Gleichung wir im vorigen Abschnitte gefunden haben, erscheint es zweckmässig, vom Besondern zum Allgemeinen fortzuschreiten, also zunächst gewisse ausgezeichnete Fälle und dann erst die Gleichung in ihrer allgemeinsten Form zu betrachten. Am nächsten liegt der Gedanke, die Gleichung auf den Fall anzuwenden, welcher der von B. gestellten Aufgabe entsprechen würde. Man hat zu diesem Ende in (4) nur

$$\alpha = 90^0 \;;\; v_0 = 0$$

zu substituiren, wodurch man erhält:

$$r = \tfrac{r_0}{2}\left(e^{\vartheta} + e^{-\vartheta}\right) \quad \ldots\ldots\ldots\ldots \quad (6)$$

oder $r = \frac{1}{2}\left(e^{\vartheta} + e^{-\vartheta}\right)$, wenn $r_0 = 1$ genommen wird.

Die letzte Gleichung entspricht genau der in der Einleitung S. 1 angeführten und von B. gefundenen Gleichung; denn es leuchtet ein, dass $\vartheta = \frac{z}{a}$ ist. Die Gleichung (6) hingegen zeigt uns, dass an Stelle der von B. für den allgemeinern Fall, dass $r_0 = b$ ist, gefundenen Gleichung:

$$x = \frac{1}{2}\left(e^{\frac{z}{\lambda}} + b^2 e^{-\frac{z}{\lambda}}\right)$$

die folgende zu setzen ist:

$$x = \frac{b}{2}\left(e^{\frac{z}{\lambda}} + e^{-\frac{z}{\lambda}}\right)$$

Diese liefert in der That für $z = 0$ den Werth $x = b$, was den Voraussetzungen entspricht. Die Gleichung (6) enthält nicht die Constante der Winkelgeschwindigkeit; wie also auch diese sich ändert, die Bahn des Punktes bleibt dieselbe, so lange die Anfangslage nicht verändert wird. Dieselbe Gleichung liefert $r = 0$ für den Fall, dass $r_0 = 0$ genommen wird. Wenn daher der Punkt beim Beginne der Bewegung sich im Drehpunkte befindet, so reducirt sich die Bahn auf diesen Punkt, d. h. es findet gar keine Bewegung statt. Dieser Umstand stimmt genau damit überein, dass in diesem Falle die Centrifugalkraft verschwindet und die Wirkung der Schwerkraft durch die horizontale Lage der Röhre vernichtet wird. Aus der Gleichung

$$r = \frac{r_0}{2}\left(e^{\vartheta} + e^{-\vartheta}\right)$$

ist ersichtlich, dass r mit ϑ ins Unendliche wächst, dass ferner zu jedem reellen Werthe von ϑ ein reeller Werth von r und zwar nur ein einziger existirt; die Curve ist demnach eine Spirale. Positive und negative, wenn nur absolut gleiche Werthe von ϑ liefern denselben Werth für r, woraus folgt, dass die Curve zwei congruente Aeste hat, wovon der eine den positiven, der andere den negativen Werthen von ϑ entspricht. Der bewegte Körper beschreibt natürlich immer nur einen der beiden Aeste, je nachdem die Drehung in dem einen oder andern Sinne erfolgt.

Für die Construction der Curve ist der bequemste Weg, den auch B. vorschlägt, durch die Gleichung selbst gegeben. Construirt man nämlich die Curve, deren Gleichung

$$r = r_0\, e^{\vartheta} \quad . \; . \; . \; . \; . \; . \quad (7)$$

ist und sucht die zu demselben, einmal positiv, einmal negativ genommenen, Winkel ϑ gehörigen Radienvectoren, so findet man den Radiusvector der gesuchten Curve zu demselben positiven oder negativen Werthe von ϑ als das arithmetische Mittel jener beiden Werthe von r.

Die Curve nun, um deren Construction es sich zunächst handeln würde, ist als logarithmische Spirale hinlänglich bekannt. Aus Gleichung (6) und (7) erkennt man sofort, dass die beiden Curven den Punkt gemein haben, welcher der Anfangslage des bewegten Körpers entspricht. Aus der Gleichung (7) ist ferner ersichtlich, dass r mit positivem ϑ ins Unendliche wächst, mit negativem ϑ hingegen kleiner wird, um sich für $\vartheta = -\infty$ der Null zu nähern. Die logarithmische Spirale macht also von dem Punkt ($\vartheta = 0$; $r = r_0$) aus nach derSeite der positiven ϑ eine unendliche Anzahl von Windungen um den Pol, von dem sie sich stets weiter entfernt, während sie nach der Seite der negativen ϑ in einer ebenfalls unendlichen Zahl von Windungen dem Pole fortwährend näher kommt, ohne ihn jedoch zu erreichen. Zu den bekannten Eigenschaften dieser Curve gehört ferner, dass ihre Tangente einen constanten Winkel mit dem Radiusvector bildet. In unserm Falle ist dieser Winkel $= 45^0$; denn bezeichnet man denselben mit ω, so ist:

$$\cot \omega = \frac{1}{r}\,\frac{d\,r}{d\vartheta} = \frac{1}{r_0\, e^{\vartheta}}\,.\, r_0\, e^{\vartheta} = 1.$$

Eine weitere Eigenschaft dieser Spirale, die zugleich für die Construction derselben einen Anhaltspunkt bietet, ist nicht minder bekannt und leicht nachweisbar. Wenn nämlich ϑ in arithmetischer Progression zunimmt, so wächst der Radiusvector in geometrischer Progression und zwar so, dass e^{δ} der Quotient der letztern ist, während δ die Differenz der arithmetischen Reihe darstellt. Setzt man also ϑ der Reihe nach $= 0, \delta, 2\,\delta \ldots$ so wird $r = r_0,\ r_0\, e^{\delta},\ r_0\, e^{2\,\delta} \ldots\ldots$

In Fig. 1 stelle nun die Curve CABE die logarithmische Spirale dar, welche der Gleichung (7) entspricht. C sei der Pol und C X die Fundamentallinie, so dass $C\,A = r_0$ ist. Es ist dann leicht, beliebig viele Punkte der Bahnlinie auf dem oben bezeichneten Wege zu finden. Macht man zum Beispiel $\sphericalangle ACB = \sphericalangle ACB'$, verlängert CB um $Bm = CB'$ und halbirt endlich Cm, so ist M ein Punkt der Trajectorie; durch Wiederholung der Construction ergeben sich in gleicher Weise die Punkte N und Q. Die dem negativen Curvenaste angehörenden, entsprechenden Punkte sind M', N', Q', wenn $CM' = CM$, $CN' = CN$ und $CQ' = CQ$ gemacht wird.

Bei A gehn die Curvenäste in einander über und haben hier eine gemeinsame Tangente, welche auf dem Radiusvector senkrecht steht, so dass also $\sphericalangle T'AX$ von tt', der Tangente der logarithmischen Spirale halbirt wird. Die Richtigkeit dieser Behauptung folgt aus der Gleichung

$$\cot\omega = \frac{1}{r}\cdot\frac{dr}{d\vartheta}$$

wenn wir darin aus Gleichung (6)

$$r = \frac{r^0}{2}\left(e^{\vartheta} + e^{-\vartheta}\right) \text{ und } \frac{dr}{d\vartheta} = \frac{r_0}{2}\left(e^{\vartheta} - e^{-\vartheta}\right)$$

substituiren. Es wird dann

$$\cot\omega = \frac{e^{\vartheta} - e^{-\vartheta}}{e^{\vartheta} + e^{-\vartheta}} = \frac{e^{2\vartheta} - 1}{e^{2\vartheta} + 1}$$

Dem Werthe $\vartheta = 0$ entspricht $\cot\omega = 0$, also $\omega = 90^0$. Allgemein wächst $\cot\omega$ mit ϑ ununterbrochen und nähert sich der Grenze 1, so dass also der Neigungswinkel der Tangente innerhalb der Grenzen $\vartheta = 0$ bis $\vartheta = \infty$ von 90^0 bis 45^0 abnimmt, ohne den letztern Werth zu überschreiten. Wenn $\vartheta = \infty$ genommen wird, so läuft also die Tangente der Bahnlinie mit derjenigen der logarithmischen Spirale parallel, und aus den Gleichungen der beiden Curven ist ersichtlich, dass man dann den Radiusvector der Trajectorie als die Hälfte desjenigen der logarithmischen Spirale ansehn kann. Aus der Formel für den Krümmungshalbmesser

$$\rho = \frac{\left(r^2 + \left(\frac{dr}{d\vartheta}\right)^2\right)^{\frac{3}{2}}}{r^2 + 2\left(\frac{dr}{d\vartheta}\right)^2 - r\,\frac{d^2 r}{d\vartheta^2}}$$

gewinnt man durch Substitution der Werthe von r, $\frac{dr}{d\vartheta}$ und $\frac{d^2 r}{d\vartheta^2}$ aus (6) die Gleichung:

$$\rho = \frac{(2r^2 - r_0^2)^{\frac{3}{2}}}{2(r^2 - r_0^2)}.$$

Dem Werthe $r = r_0$ entspricht für den Krümmungshalbmesser der Werth $r = \infty$. Im Punkte A ist demnach die Krümmung der Curve unendlich klein. Der Krümmungshalbmesser ist ein Minimum, die Krümmung also am stärksten für den Werth von r, welcher sich aus der Gleichung $\frac{d\rho}{dr} = 0$ ergiebt.

Setzt man aber

$$\frac{d\rho}{dr} = \frac{12r(r^2 - r_0^2)(2r^2 - r_0^2)^{\frac{1}{2}} - (2r^2 - r_0^2)^{\frac{3}{2}}\,4r}{4(r^2 - r_0^2)^2} = 0$$

so folgt:

$$3(r^2 - r_0^2) = 2r^2 - r_0^2$$
$$r = r_0\sqrt{2}$$

Die Curvengleichung liefert hierzu:

$$\vartheta = l(1 + \sqrt{2}) = 0{,}8813736.$$

Dieser ausgezeichnete Punkt der Curve entspricht also den obigen Coordinaten; der Neigungswinkel seines Radiusvectors ist demnach wenig grösser, als $\frac{\pi}{4}$. Von diesem Punkte an, in welchem der Krümmungshalbmesser den Minimalwerth

$$\rho = \frac{3r_0\sqrt{3}}{2}$$

erreicht hat, nimmt ρ wieder zu und wird die Krümmung ununterbrochen schwächer. Diese Bemerkungen über die durch Gleichung (6) dargestellte Curve mögen genügen. Setzt man in (4) nur $\alpha = 90^0$, ohne v_0 verschwinden zu lassen, so erhält man die Gleichung:

$$r = \frac{1}{2} \left\{ r_0 \left(e^{\vartheta} + e^{-\vartheta} \right) + \frac{v_0}{w} \left(e^{\vartheta} - e^{-\vartheta} \right) \right\} \quad \ldots \ldots \quad (8)$$

Eine sehr einfache Form nimmt diese Gleichung an, wenn die Constanten derselben so bestimmt werden, dass

$$r_0 = \frac{v_0}{w} .$$

Dann erhält man nämlich

$$r = r_0 \,.\, e^{\vartheta} ,$$

und in diesem Falle ist also die oben besprochene logarithmische Spirale selbst die Bahn des bewegten Körpers.

Nimmt man endlich noch an, dass die Kugel beim Beginne der Bewegung im Drehpunkt sich befinde und die Anfangsgeschwindigkeit v_0 habe, so hat man in (8) $r_0 = 0$ zu setzen und erhält:

$$r = \frac{v_0}{2w} \left(e^{\vartheta} - e^{-\vartheta} \right) \quad \ldots \ldots \quad (9)$$

Hier findet also, wie man im Voraus erwarten durfte, im Gegensatz zu dem auf S. 6 betrachteten Falle eine Bewegung Statt. Zur Construction der Curve mit obiger Gleichung lässt sich die Spirale

$$r = \frac{v_0}{w} \,.\, e^{\vartheta}$$

in ähnlicher Weise verwenden, wie oben die Gleichung (7) zur Construction von (6) benutzt wurde. Diese Spirale geht durch den Pol und hat in diesem Punkte die Fundamentallinie zur Tangente. Denn es ist:

$$\cot \omega = \frac{1}{r} \,.\, \frac{dr}{d\vartheta} = \frac{e^{\vartheta} + e^{-\vartheta}}{e^{\vartheta} - e^{-\vartheta}}$$

woraus folgt

$$\cot \omega = \infty \text{, also } \omega = 0 \text{, wenn } \vartheta = 0$$
$$\cot \omega = 1 \text{, also } \omega = 45^0 \text{, wenn } \vartheta = \infty .$$

Nunmehr ist sofort ersichtlich, wie man die Curve der allgemeinen Gleichung (8) construiren kann, nachdem man vorher in der angegebenen Weise die Construction der Gleichungen (6) und (9) ausgeführt hat. Diese neue Spirale durchschneidet, wie die zuerst betrachtete, die Fundamentallinie in der Entfernung r_0 vom Pole, ihre Tangente ist aber in diesem Punkte nicht senkrecht zur Fundamentallinie, sondern bildet mit ihr einen Winkel, der von der Grösse der Anfangsgeschwindigkeit und von den übrigen Constanten des Problems abhängig ist. Man findet nämlich:

$$\cot \omega = \frac{1}{r} \,.\, \frac{dr}{d\vartheta} = \frac{r_0 \left(e^{\vartheta} - e^{-\vartheta} \right) + \frac{v_0}{w} \left(e^{\vartheta} + e^{-\vartheta} \right)}{r_0 \left(e^{\vartheta} + e^{-\vartheta} \right) + \frac{v_0}{w} \left(e^{\vartheta} - e^{-\vartheta} \right)} .$$

$$\cot \omega = \frac{v_0}{w\, r_0} \text{, wenn } \vartheta = 0.$$

In den bisher betrachteten Fällen war die Bahnlinie selbst eine ebene Curve; jetzt werden wir solche Fälle ins Auge zu fassen haben, in welchen die Drehung der Röhre nicht mehr in der Horizontalebene Statt findet, sondern dieselbe, wie es in der verallgemeinerten Aufgabe vorgesehn, einen geraden Kegel beschreibt. Diese Bedingung wird erfüllt, wenn man in (4) $\alpha < 90^0$ voraussetzt. Die Trajectorie ist dann eine räumliche Curve, zu deren Construction ihre Projection auf die Horizontalebene dienen kann. Was den Gang der Untersuchungen betrifft, so erscheint es zweckmässig, zunächst die Projection der Bahnlinie als ebene Curve in ähnlicher Weise, wie dies oben geschehn, zu construiren und zu betrachten, und hiernach die Neigungsverhältnisse der Tangente an die räumliche Curve selbst zu erörtern. Um auch hier wieder von besondern Fällen auszugehn, werde zunächst vorausgesetzt, dass der bewegte Körper keine Anfangsgeschwindigkeit habe. Man erhält dann durch Substitution von $v_0 = 0$ aus (4) die folgende Gleichung, welche die Projection der Bahnlinie darstellt:

$$r = \frac{1}{2}\left(r_0 + \frac{g \cdot \cot\alpha}{w^2}\right)\left(e^{\sin\alpha \cdot \vartheta} + e^{-\sin\alpha \cdot \vartheta}\right) - \frac{g \cdot \cot\alpha}{w^2} \quad . \; . \; . \; . \; . \; . \; (10)$$

Setzt man hierin noch $r_0 = 0$, so ist

$$r = \frac{g \cdot \cot\alpha}{2\, w^2}\left(e^{\sin\alpha \cdot \vartheta} + e^{-\sin\alpha \cdot \vartheta}\right) - \frac{g \cdot \cot\alpha}{w^2} \quad . \; . \; . \; . \; . \; . \; (11)$$

Also auch in dem Falle, dass der bewegte Körper beim Beginne der Bewegung sich im Drehpunkte befindet, erfolgt eine Bewegung desselben. Wenn auch in diesem Punkte die Centrifugalkraft verschwindet, so gilt dies an dieser Stelle nicht von der Schwere, welche vielmehr den Körper in der Richtung der Cylinderaxe forttreibt und so gleichsam seine Bewegung einleitet, während derselbe im weiteren Verlaufe seiner Bahn auch den Einwirkungen der Centrifugalkraft unterworfen ist. — Da $\alpha < 90^0$ gesetzt ist, so sind $\cot\alpha$ und $\sin\alpha$ immer positiv, und es lässt sich also

$$\frac{g \cdot \cot\alpha}{w^2} = \mu \; ; \; \sin\alpha = \nu$$

setzen, wo μ und ν positive Grössen sind. Dann gewinnt die Gleichung (11) die einfachere Form

$$r = \frac{\mu}{2}\left(e^{\nu\vartheta} + e^{-\nu\vartheta}\right) - \mu \quad . \; . \; . \; . \; . \; . \; (12)$$

Aus dieser Gleichung ist sofort ersichtlich, dass die durch sie dargestellte Curve durch den Pol geht und um denselben eine unendliche Anzahl von Windungen macht, indem sie sich gleichzeitig immer weiter von ihm entfernt. Die Aehnlichkeit dieser Gleichung mit der Gleichung (6) weist darauf hin, dieselbe in ähnlicher Weise zu behandeln. Demnach haben wir zu ihrer Construction eine Curve zu Hülfe zu nehmen, deren Gleichung:

$$r = \mu \cdot e^{\nu\vartheta}$$

ist. Diese Gleichung stellt aber eine logarithmische Spirale dar von allgemeinerer Form, als die früher untersuchte. Die oben charakterisirten Eigenschaften gelten auch für diese Spirale; nur ist zu bemerken, dass der constante Winkel, den ihre Tangente mit dem Radiusvector bildet, nicht $= 45^0$ ist. Denn bezeichnet man denselben mit ω, so ist

$$\cot\omega = \frac{1}{r} \cdot \frac{d\,r}{d\vartheta} = \frac{\mu\,\nu \cdot e^{\nu\vartheta}}{\mu\, e^{\nu\vartheta}} = \nu$$

und da $\nu = \sin\alpha \begin{matrix} < 1 \\ > 0 \end{matrix}$, so wird ω zwischen den Grenzen 45^0 und 90^0 liegen.

In Fig. 2 sei Q M O M′ Q′ die logarithmische Spirale, welche durch obige Gleichung dargestellt wird. Dieselbe durchschneidet die Fundamentallinie C X in der Entfernung $C\,O = \mu$ vom Pole. Trägt man nun zu beiden Seiten der C X paarweise gleiche Winkel an und wiederholt dieselbe Construction, wie oben, so erhält man die Punkte m′, n′, q′, welche einer Curve angehören, deren Gleichung

$$r = \frac{\mu}{2}\left(e^{\nu\vartheta} + e^{-\nu\vartheta}\right)$$

sein würde. Beschreibt man jetzt noch mit C O einen Kreis um C, welcher die Radienvectoren in den Punkten h, h′, h″ schneidet, und trägt endlich die Strecken m′ h, n′ h′, q′ h″ von C aus auf den entsprechenden Leitstrahlen ab, so ist ersichtlich, dass die so erhaltenen Punkte der Gleichung (12) entsprechen.

Auch diese Kurve hat zwei congruente Aeste, deren Verlauf in der Figur angedeutet ist. Ist q″ ein Punkt des positiven Curvenastes, so ist q‴ der entsprechende Punkt des negativen Astes, wenn C q″ = C q‴ gemacht wird.

Zur Ergänzung dieser Construction müsste noch gezeigt werden, dass die Punkte m′, n′, q′ ausserhalb des mit C O um C beschriebenen Kreises fallen und die zu bildenden Differenzen also positiv sind. Dies folgt aber aus der schon oben erwähnten Eigenschaft der logarithmischen Spirale, wonach die

Radienvectoren in geometrischer Proportion stehn, wenn die Winkel in arithmetischer Proportion wachsen. Aus diesem Gesetze ergeben sich nachstehende Proportionen:

$$\mathrm{CM : CO = CO : CM'}$$
$$\mathrm{CN : CO = CO : CN'}$$
$$\mathrm{CQ : CO = CO : CQ'}$$

Da nun aber in jeder stetigen Proportion die mittlere Proportionale kleiner ist, als die halbe Summe der beiden andern Glieder, so ist:

$$\mathrm{CO} < \frac{\mathrm{CM + CM'}}{2} \text{ d. i.} < \mathrm{C m'}$$
$$\mathrm{CO} < \frac{\mathrm{CN + CN'}}{2} \text{ d. i.} < \mathrm{C n'}$$
$$\mathrm{CO} < \frac{\mathrm{CQ + CQ'}}{2} \text{ d. i.} < \mathrm{C q'}.$$

Für den Neigungswinkel der Tangente an die Curve, ergiebt sich aus (12):

$$\cot \omega = \frac{1}{\mathrm{r}} \cdot \frac{d\mathrm{r}}{d\vartheta} = \frac{\left(e^{\nu\vartheta} - e^{-\nu\vartheta}\right)\nu}{e^{\nu\vartheta} + e^{-\nu\vartheta} - 2}.$$

Dieser Ausdruck nimmt zwar für $\vartheta = 0$ die unbestimmte Form $\frac{0}{0}$ an, jedoch erhält man durch Differenziation des Zählers und Nenners den Quotienten $\frac{\left(e^{\nu\vartheta} + e^{-\nu\vartheta}\right)\nu}{e^{\nu\vartheta} - e^{-\nu\vartheta}}$, welcher für $\vartheta = 0$ unendlich wird. Zu dem Werthe $\vartheta = 0$ gehört also $\cot \omega = \infty$ und $\omega = 0$ d. h. die Fundamentallinie ist Tangente an beide Curvenäste. Im Unendlichen nähert sich $\cot \omega$ der Grenze ν, und die Tangente läuft dann parallel mit derjenigen der logarithmischen Spirale. — Die oben construirte Curve ist die Projection der Trajectorie in dem Falle, dass der Körper sich beim Beginne der Bewegung in der Spitze des Kegels befindet. Diese Curve selbst führt zur Construction der allgemeineren Gleichung (10), welche durch obige Abkürzungen die nachstehende Form erhält:

$$\mathrm{r} = \frac{\mathrm{r}_0 + \mu}{2}\left(e^{\nu\vartheta} + e^{-\nu\vartheta}\right) - \mu \quad . \; . \; . \; . \; . \; . \quad (13)$$

In Fig. 2 werde wiederum $\mathrm{AC = r_0}$ genommen, und die Curve $\mathrm{EDAD'E'}$ stelle die logarithmische Spirale dar, deren Gleichung

$$\mathrm{r} = \mathrm{r}_0\, e^{\nu\vartheta}$$

ist. Macht man dann $\mathrm{Bb = CB'}$, $\mathrm{Dd = CD'}$ und $\mathrm{Ee = CE'}$ und halbirt Cb, Cd und Ce in den Punkten $\mathrm{b'}$, $\mathrm{d'}$, $\mathrm{e'}$, so ist, wenn man noch die Winkel mCX, nCX, qCX mit ϑ_1, ϑ_2, ϑ_3 bezeichnet,

$$\mathrm{Cb'} = \frac{\mathrm{r}_0}{2}\left(e^{\nu\vartheta_1} + e^{-\nu\vartheta_1}\right); \; \mathrm{Cd'} = \frac{\mathrm{r}_0}{2}\left(e^{\nu\vartheta_2} + e^{-\nu\vartheta_2}\right);$$
$$\mathrm{Ce'} = \frac{\mathrm{r}_0}{2}\left(e^{\nu\vartheta_3} + e^{-\nu\vartheta_3}\right)$$

und daher

$$\mathrm{CF} = \frac{\mathrm{r}_0 + \mu}{2}\left(e^{\nu\vartheta_1} + e^{-\nu\vartheta_1}\right) - \mu; \; \mathrm{CG} = \frac{\mathrm{r}_0 + \mu}{2}\left(e^{\nu\vartheta_2} + e^{-\nu\vartheta_2}\right) - \mu;$$
$$\mathrm{CH} = \frac{\mathrm{r}_0 + \mu}{2}\left(e^{\nu\vartheta_3} + e^{-\nu\vartheta_3}\right) - \mu$$

sobald man $\mathrm{b'F = hm'}$, $\mathrm{d'G = h'n'}$ und $\mathrm{e'H = h''q'}$ macht. So also sind F, G, H als Punkt der gesuchten Curve gefunden und ist es leicht, auch den congruenten negativen Curvenast zu construiren.

Um auch für diese Curve den Neigungswinkel der Tangente gegen den Radiusvector zu berechnen, hat man in

$$\cot \omega = \frac{1}{r} \cdot \frac{d\,r}{d\,\vartheta}$$

folgende Werthe zu substituiren:

$$r = \frac{r_0 + \mu}{2}\left(e^{\nu\vartheta} + e^{-\nu\vartheta}\right) - \mu$$

$$\frac{d\,r}{d\,\vartheta} = \frac{\nu\,(r_0 + \mu)}{2}\left(e^{\nu\vartheta} - e^{-\nu\vartheta}\right)$$

Hieraus ergiebt sich:

$$\cot \omega = \frac{\nu\left(e^{\nu\vartheta} - e^{-\nu\vartheta}\right)}{e^{\nu\vartheta} + e^{-\nu\vartheta} - \dfrac{2\,\mu}{r_0 + \mu}}$$

Setzt man hierin $\vartheta = 0$, so wird $\cot \omega = 0$ und $\omega = 90^0$.

Im Punkte A steht also die Tangente wiederum senkrecht auf der Fundamentallinie.

Die beiden zuletzt gegebenen Constructionen genügen, um sofort erkennen zu lassen, in welcher Weise die Gleichung (4) zu behandeln ist, welche die Projection der Bahnlinie im allgemeinsten Falle des Problems darstellt. Hier mögen deshalb nur wenige kurze Andeutungen Platz finden. Durch Einführung der Constanten μ und ν gewinnt die Gleichung (4) die Form:

$$r = \frac{r_0 + \mu}{2}\left(e^{\nu\vartheta} + e^{-\nu\vartheta}\right) - \mu + \frac{v_0}{2\,w}\left(e^{\nu\vartheta} - e^{-\nu\vartheta}\right) \quad . \; . \; . \; . \; . \; . \quad (14)$$

Diese Gleichung kann mit Hülfe der Curve, welche der Gleichung (12) entspricht, und der logarithmischen Spirale von der Gleichung

$$r = \frac{v_0}{w}\, e^{\nu\vartheta}$$

leicht construirt werden. Diese Spirale schneidet die Fundamentallinie in der Entfernung r_0 vom Pole und wenn ω wiederum den Neigungswinkel der Tangente bezeichnet, so ist

$$\cot \omega = \frac{\nu\,.\,v_0}{r_0\,.\,w}, \text{ wenn } \vartheta = 0;$$

$$\cot \omega = \nu\,, \quad \text{wenn } \vartheta = \infty.$$

Durch eine zweckmässige Bestimmung der Constanten, lässt sich auch der Gleichung (14) eine sehr einfache Form geben. Setzt man nämlich

$$r_0 + \mu = \frac{v_0}{w}$$

so erhält man

$$r = (r_0 + \mu)\, e^{\nu\vartheta} - \mu \text{ oder}$$

$$r = \frac{v_0}{w}\, e^{\nu\vartheta} - \left(\frac{v_0}{w} - r_0\right)$$

Hieraus folgt

$$\frac{d\,r}{d\,\vartheta} = \frac{v_0\,\nu}{w} \,.\, e^{\nu\vartheta} \text{ und daher wiederum}$$

$$\cot \omega = \frac{\nu\,.\,v_0}{r_0\,.\,w}, \text{ wenn } \vartheta = 0;$$

$$\cot \omega = \nu\,, \quad \text{wenn } \vartheta = 0.$$

Durch die in diesem Abschnitte gegebenen und angedeuteten Constructionen sind alle in der Gleichung (4) begriffenen Fälle erschöpft, und es ist damit der Weg gezeigt, wie man in jedem einzelnen Falle zur graphischen Darstellung der auf die Horizontalebene projicirten Bahnlinie gelangen kann. Zu jedem Punkte der Horizontalprojection ergiebt sich auf einfache Weise der entsprechende Punkt der räumlichen Trajectorie.

Die folgenden Untersuchungen nun sollen sich auf die Neigungsverhältnisse der Tangente an die räumliche Curve selbst beziehn und werden also über den Verlauf der letztern weitern Aufschluss geben.

Wenn man den geraden Kegel, den die Cylinderaxe erzeugt, auf ein rechtwinkliges Coordinatensystem bezieht, und zwar so, dass seine Spitze als Ursprung, seine Axe als positive Z-Axe, die Projection der Anfangslage der Röhre auf die durch die Spitze des Kegels gelegte Horizontalebene als X-Axe und die in der Horizontalebene darauf errichtete Senkrechte als Y-Axe genommen wird, so ist die Gleichung des Kegels:

$$x^2 + y^2 = a^2 z^2$$

worin $a = \operatorname{tag} \alpha$ d. i. gleich der trigonometrischen Tangente der halben Kegelöffnung zu setzen ist. Es sei nun (Fig. 3) M ein Punkt der Curve und CD und CF die Geraden, in welchen eine durch M und die Axe CZ gelegte Ebene die Kegeloberfläche schneidet. Ist dann ferner TT′ die Tangente an die Bahnlinie im Punkte M, so ist klar, dass dieselbe in der durch M an die Kegeloberfläche gelegten Tangentialebene liegen muss. Fällt man nun noch von M das Perpendikel MA auf die Axe und errichtet in der durch M gelegten Horizontalebene die Senkrechte EE′ auf MA, so geht die Berührungsebene der Kegeloberfläche durch die Gerade EE′ und die Erzeugungslinie CD; mit diesen beiden Linien liegt also TT′ in derselben Ebene.

Die Neigungswinkel der TT′ zu den drei durch C gelegten Coordinatenaxen sollen nun durch α_1, β_1, γ_1 bezeichnet werden; dann ist nach bekannten Formeln:

$$\cos \alpha_1 = \frac{1}{V}; \ \cos \beta_1 = \frac{\frac{dy}{dx}}{V}; \ \cos \gamma_1 = \frac{\frac{dz}{dx}}{V}$$

wenn wir abkürzend $V = \sqrt{1 + \left(\frac{dy}{dx}\right)^2 + \left(\frac{dz}{dx}\right)^2}$ setzen. Die hier vorkommenden Differenzialquotienten sind zu entnehmen aus den beiden Gleichungen der Bahncurve, nämlich aus:

$$x^2 + y^2 = a^2 z^2 \quad \ldots\ldots \quad (15)$$

$$r = \frac{r_0 + \mu}{2}\left(e^{\nu\vartheta} + e^{-\nu\vartheta}\right) - \mu + \frac{v_0}{2w}\left(e^{\nu\vartheta} - e^{-\nu\vartheta}\right) \quad \ldots\ldots \quad (16)$$

Die erste liefert bei der Differenziation nach x:

$$x + y \cdot \frac{dy}{dx} = a^2 z \frac{dz}{dx}, \text{ oder } \frac{dz}{dx} = \frac{x + y\frac{dy}{dx}}{a^2 z}.$$

$\frac{dy}{dx}$ muss aus der Gleichung (16) gefunden werden; diese Gleichung ist aber auf Polarcoordinaten bezogen, und es ist desshalb nöthig, mit Hülfe der Gleichungen

$$x = r \cdot \cos\vartheta; \ y = r \cdot \sin\vartheta$$

$\frac{dy}{dx}$ durch die Variabeln r, ϑ und ihre Differenzialquotienten auszudrücken. Differenziirt man zu dem Ende die letzten Gleichungen nach ϑ, so hat man:

$$\frac{dx}{d\vartheta} = \cos\vartheta \frac{dr}{d\vartheta} - r \cdot \sin.\vartheta; \ \frac{dy}{d\vartheta} = \sin\vartheta \frac{dr}{d\vartheta} + r \cdot \cos\vartheta.$$

und hieraus erhält man durch Division:

$$\frac{dy}{dx} = \frac{\sin\vartheta \cdot \frac{dr}{d\vartheta} + r \cdot \cos\vartheta}{\cos\vartheta \frac{dr}{d\vartheta} - r \cdot \sin\vartheta}.$$

In dem Dreiecke ACM ist nun $AM = AC \cdot \operatorname{tag}\alpha = AC \cdot a$. Aus der Figur ist aber klar, dass $AM = CM' = r$ und $AC = z$ ist, woraus $r = a \cdot z$ folgt. Nunmehr erhält man für $\frac{dz}{dx}$ folgenden Ausdruck:

$$\frac{dz}{dx} = \frac{r \cdot \cos\vartheta\left(\cos\vartheta \cdot \frac{dr}{d\vartheta} - r \cdot \sin\vartheta\right) + r\sin\vartheta\left(\sin\vartheta\frac{dr}{d\vartheta} + r \cdot \cos\vartheta\right)}{a\, r\left(\cos\vartheta \cdot \frac{dr}{d\vartheta} - r\sin\vartheta\right)};$$

$$\frac{dz}{dx} = \frac{\frac{dr}{d\vartheta}}{a\left(\cos\vartheta\frac{dr}{d\vartheta} - r \cdot \sin\vartheta\right)}.$$

Die so gefundenen Werthe für $\frac{d\,y}{d\,x}$ und $\frac{d\,z}{d\,x}$ substituire man nun in die obigen Formeln, so wird

$$V = \frac{\sqrt{\left(\cos\vartheta\,.\,\frac{d\,r}{d\,\vartheta} - r\,.\,\sin\vartheta\right)^2 + \left(\sin\vartheta\,.\,\frac{d\,r}{d\,\vartheta} + r\,.\,\cos\vartheta\right)^2 + \frac{1}{a^2}\left(\frac{d\,r}{d\,\vartheta}\right)^2}}{\cos\vartheta\,.\,\frac{d\,r}{d\,\vartheta} - r\,.\,\sin\vartheta} =$$

$$\frac{\sqrt{\left(\frac{d\,r}{d\,\vartheta}\right)^2\left(1 + \frac{1}{a^2}\right) + r^2}}{\cos\vartheta\,\frac{d\,r}{d\,\vartheta} - r\,.\,\sin\vartheta} = \frac{\sqrt{\left(\frac{d\,r}{d\,\vartheta}\right)^2\frac{1}{\nu^2} + r^2}}{\cos\vartheta\,.\,\frac{d\,r}{d\,\vartheta} - r\,.\,\sin\vartheta}\,.$$

Die Formeln für die Cosinus der Neigungswinkel gestalten sich demnach, wie folgt:

$$\left.\begin{aligned}
\cos\alpha_1 &= \frac{\cos\vartheta\,.\,\frac{d\,r}{d\,\vartheta} - r\,.\,\sin\vartheta}{\sqrt{\left(\frac{d\,r}{d\,\vartheta}\right)^2\frac{1}{\nu^2} + r^2}} = \frac{\cos\vartheta - \sin\vartheta\,\frac{r}{\frac{d\,r}{d\,\vartheta}}}{\sqrt{\frac{1}{\nu^2} + \left(\frac{r}{\frac{d\,r}{d\,\vartheta}}\right)^2}}\\
\cos\beta_1 &= \frac{\sin\vartheta\,.\,\frac{d\,r}{d\,\vartheta} + r\,.\,\cos\vartheta}{\sqrt{\left(\frac{d\,r}{d\,\vartheta}\right)^2\frac{1}{\nu^2} + r^2}} = \frac{\sin\vartheta + \cos\vartheta\,\frac{r}{\frac{d\,r}{d\,\vartheta}}}{\sqrt{\frac{1}{\nu^2} + \left(\frac{r}{\frac{d\,r}{d\,\vartheta}}\right)^2}}\\
\cos\gamma_1 &= \frac{\frac{1}{a}\,.\,\frac{d\,r}{d\,\vartheta}}{\sqrt{\left(\frac{d\,r}{d\,\vartheta}\right)^2\frac{1}{\nu^2} + r^2}} = \frac{\frac{1}{a}}{\sqrt{\frac{1}{\nu^2} + \left(\frac{r}{\frac{d\,r}{d\,\vartheta}}\right)^2}}
\end{aligned}\right\}\quad\ldots\ldots\quad(17)$$

Die Werthe für r und $\frac{d\,r}{d\,\vartheta}$ sind aus Gleichung (16) zu entnehmen, woraus man berechnet:

$$\frac{d\,r}{d\,\vartheta} = \frac{r_0 + \mu}{2}\,.\,\nu\left(e^{\nu\,\vartheta} - e^{-\nu\,\vartheta}\right) + \frac{v_0\,\nu}{2\,w}\left(e^{\nu\,\vartheta} + e^{-\nu\,\vartheta}\right).$$

Um nun die Winkel zu erhalten, welche die Tangente im Ausgangspunkte der Curve mit den Axen bildet, hat man nur $\vartheta = 0$, $r = r_0$ zu setzen, welchen Werthen $\frac{d\,r}{d\,\vartheta} = \frac{v_0\,.\,\nu}{w}$ entspricht. Dann ergiebt sich:

$$\left.\begin{aligned}
\cos\alpha_1 &= \frac{v_0\,.\,\nu}{\sqrt{v_0^2 + r_0^2\,w^2}} = \frac{\sin\alpha}{\sqrt{1 + \frac{r_0^2\,w^2}{v_0^2}}}\,.\\
\cos\beta_1 &= \frac{r_0\,w}{\sqrt{v_0^2 + r_0^2\,w^2}} = \frac{1}{\sqrt{1 + \frac{v_0^2}{r_0^2\,w^2}}}\,.\\
\cos\gamma_1 &= \frac{v_0\,.\,\nu}{a\sqrt{v_0^2 + r_0^2\,w^2}} = \frac{\cos\alpha}{\sqrt{1 + \frac{r_0^2\,w^2}{v_0^2}}}\,.
\end{aligned}\right\}\quad\ldots\ldots\quad(18)$$

Aus diesen Formeln ist ersichtlich, in welcher Weise die Neigung der Tangente zu den Coordinatenaxen durch die Constanten der Aufgabe bedingt ist. Vergleichen wir dieselbe mit der S. 11 gefundenen Formel: $\cot \omega = \frac{\nu \cdot v_0}{r_0 \cdot w}$, welche sich auf die Tangente der projicirten Bahnlinie bezieht, so ergiebt sich, dass in dem hier betrachteten Punkte der Curve der Verlauf derselben von dem Werthe des Bruches $\frac{r_0\ w}{v_0}$ abhängt. Je grösser dieser letztere ist, desto grösser ist der Winkel, den die Tangente der projicirten Curve mit dem Radiusvector macht, desto grösser ist ferner der Winkel, den die Tangente an die Bahnlinie selbst mit der X-Axe und mit der Z-Axe bildet, während ihre Neigung gegen die Y-Axe kleiner wird, wenn der Werth jenes Bruches zunimmt. Ausserdem ist natürlich die Neigung dieser Tangente noch abhängig von der Constanten $\nu = \sin \alpha$, also von der Grösse der Kegelöffnung. Um dieselben Betrachtungen auf die besondern Fälle anzuwenden, auf welche sich die Gleichungen (12) und (13) beziehen, hat man im letzteren Falle nur $v_0 = 0$ zu setzen. Dann ergiebt sich:

$$\cos \alpha_1 = 0;\quad \cos \beta_1 = 1;\ \cos \gamma_1 = 0 \quad \text{oder}$$
$$\alpha_1 = 90^0;\quad \beta_1 = 0;\quad \gamma_1 = 90^0.$$

Die Tangente ist also dann der XY-Ebene parallel und steht senkrecht zur X-Axe; sie fällt demnach zusammen mit der Tangente des durch den Anfangspunkt gehenden horizontalen Durchschnittskreises der Kegeloberfläche. Diese Bemerkung gilt aber nur so lange, als r_0 nicht verschwindet, da in letzterm Falle, welcher durch Gleichung (12) repräsentirt wird, sämmtliche Werthe jener Cosinus die unbestimmte Form $\frac{0}{0}$ annehmen.

Um auch hier die Neigungswinkel zu bestimmen, benutzt man am passendsten die in (17) an zweiter Stelle gegebenen Umformungen. Es handelt sich dann um die Bestimmung von

$$\frac{r}{\frac{d\,r}{d\,\vartheta}} = \frac{e^{\nu\vartheta} + e^{-\nu\vartheta} - 2}{\nu\left(e^{\nu\vartheta} - e^{-\nu\vartheta}\right)} = \frac{0}{0}\,,\ \text{wenn}\ \vartheta = 0\,.$$

Durch Differenziation des Zählers und des Nenners erhält man:

$$\frac{r}{\frac{d\,r}{d\,\vartheta}} = \frac{e^{\nu\vartheta} - e^{-\nu\vartheta}}{\nu\left(e^{\nu\vartheta} + e^{-\nu\vartheta}\right)} = 0,\ \text{wenn}\ \vartheta = 0\,.$$

Somit liefern die obigen Formeln:

$$\cos \alpha_1 = \nu = \sin \alpha;\ \cos \beta_1 = 0;\ \cos \gamma_1 = \frac{\nu}{a} = \cos \alpha\,.$$
$$\text{oder}\ \alpha_1 = 90^0 - \alpha;\quad \beta_1 = 90^0;\quad \gamma_1 = \alpha\,.$$

In dem Falle also, wo beim Beginne der Bewegung der materielle Punkt in der Spitze des von der Cylinderaxe beschriebenen Kegels liegt, wird in diesem Anfangspunkte die Erzeugungslinie Tangente der Bahncurve sein.

Die Formeln (17) sind nicht geeignet im Allgemeinen Aufschluss über die Neigungsverhältnisse der Tangente und dadurch über den Verlauf der Curve zu geben, insbesondere sind sie unbrauchbar für $\vartheta = \infty$, weil $\cos \infty$ und $\sin \infty$ unbestimmte Ausdrücke sind. Deshalb soll aus obigen Formeln eine neue entwickelt, nämlich der Winkel berechnet werden, den die Tangente mit der durch ihren Berührungspunkt gehenden Erzeugungslinie des Kegels bildet. Sind α_2, β_2, γ_2 die Neigungswinkel der Erzeugungslinie zu den Axen und versteht man unter R das Stück der erstern, welches zwischen dem betrachteten Punkte und der Kegelspitze liegt, so ist:

$$\cos \alpha_2 = \frac{x}{R}\,;\ \cos \beta_2 = \frac{y}{R}\,;\ \cos \gamma_2 = \frac{z}{R}\,.$$

Drückt man nun x, y, z durch r und ϑ aus und berücksichtigt, dass $R = \frac{r}{\sin \alpha}$, so wird:

$$\cos \alpha_2 = \sin \alpha\,.\,\cos \vartheta;\ \cos \beta_2 = \sin \alpha\,.\,\sin \vartheta;\ \cos \gamma_2 = \cos \alpha \quad \ldots\ldots \quad (19)$$

Bezeichnet man noch mit δ den Winkel, den die Tangente mit der Erzeugungslinie bildet, so ist bekanntlich:

$$\cos \delta = \cos \alpha_1 \cos \alpha_2 + \cos \beta_1 \cos \beta_2 + \cos \gamma_1 \cos \gamma_2\,.$$

Setzt man hierin die bezüglichen Werthe aus (17) und (19) ein, so findet man nach gehöriger Reduction:

$$\cos \delta = \frac{\left(\sin \alpha + \frac{\cos \alpha}{a}\right)\frac{d\,r}{d\,\vartheta}}{\sqrt{\left(\frac{d\,r}{d\,\vartheta}\right)^2 \cdot \frac{1}{\nu^2} + r^2}} = \frac{\frac{1}{\nu} \cdot \frac{d\,r}{d\,\vartheta}}{\sqrt{\left(\frac{d\,r}{d\,\vartheta}\right)^2 \cdot \frac{1}{\nu^2} + r^2}} = \frac{\frac{1}{\nu}}{\sqrt{\frac{1}{\nu^2} + \left(\frac{r}{\frac{d\,r}{d\,\vartheta}}\right)^2}}.$$

Entwickelt man hieraus den Werth von $\operatorname{tag} \delta$, so erhält man den einfachern Ausdruck:

$$\operatorname{tag} \delta = \nu \cdot \frac{r}{\frac{d\,r}{d\vartheta}}.$$

Der Neigungswinkel δ ist also abhängig von dem Werthe des Bruches $\frac{r}{\frac{d\,r}{d\vartheta}}$; dieser letztere wird aber im allgemeinen Falle des Problems $= \frac{r_0 \cdot w}{v_0\,\nu}$ und demnach $\operatorname{tag} \delta = \frac{r_0\,w}{v_0}$, wenn $\vartheta = 0$; $r = r_0$ gesetzt wird.

Aus (18) hat man $\cos \beta_1 = \frac{r_0\,w}{\sqrt{v_0^{\,2} + r_0^{\,2}\,w^2}}$, woraus man findet $\cot \beta_1 = \frac{r_0\,w}{v_0}$; demnach ergänzen sich die Winkel β_1 und δ zu 90^0, und in der That muss der Annahme gemäss die Y-Axe auf der durch den Anfangspunkt der Curve gezogenen Erzeugungslinie senkrecht stehn. Wendet man die Formel auf die beiden zuletzt betrachteten besondern Fälle an, so ergiebt sich:

1) Wenn $\vartheta = 0$; $r = r_0$; $\quad v_0 = 0$, so ist $\operatorname{tag} \delta = \infty$, $\delta = 90^0$.
2) Wenn $\vartheta = 0$; $r = r_0 = 0$; $v_0 = 0$, so ist $\operatorname{tag} \delta = 0$; $\delta = 0$.

Beide Resultate stimmen mit den obigen genau überein.

Wir haben früher gefunden, dass die Tangente an die Projection der Bahnlinie sich im Unendlichen einer Grenzlage nähert; ein Gleiches lässt sich deshalb auch für die Bahnlinie selbst vermuthen. Setzt man aber $\vartheta = \infty$, so wird, wenn man, dem allgemeinsten Falle entsprechend, die Werthe für r und $\frac{d\,r}{d\vartheta}$ aus (14) entnimmt:

$$\operatorname{tag} \delta = \nu \cdot \frac{r}{\frac{d\,r}{d\,\vartheta}} = \frac{\frac{r_0 + \mu}{2}\left(e^{\nu\vartheta} + e^{-\nu\vartheta}\right) - \mu + \frac{v_0}{2\,w}\left(e^{\nu\vartheta} - e^{-\nu\vartheta}\right)}{\frac{r_0 + \mu}{2}\left(e^{\nu\vartheta} - e^{-\nu\vartheta}\right) + \frac{v_0}{2\,w}\left(e^{\nu\vartheta} + e^{-\nu\vartheta}\right)}.$$

Durch Division mit $e^{\nu\vartheta}$ und dadurch, dass man $e^{-\nu\vartheta}$ und $e^{-2\nu\vartheta}$ als verschwindend klein betrachtet, was für $\vartheta = \infty$ gestattet ist, erhält man: $\operatorname{tag} \delta = 1$; $\delta = 45^0$.

Bevor man nun schliessen dürfte, dass, während ϑ von 0 bis ∞ zunimmt, der Winkel δ in dem einen der eben erwähnten besondern Fälle von 0 bis 45^0 wächst, in dem andern aber von 90^0 bis 45^0 abnimmt, wäre die Frage zu entscheiden, ob nicht δ innerhalb jenes Intervalles einen ausgezeichneten Maximal- oder Minimalwerth hat. Um hierüber Aufschluss zu erhalten, muss der Ausdruck für $\operatorname{tag} \delta$, nachdem man darin $v_0 = 0$ gesetzt hat, mit Rücksicht auf ein Maximum oder Minimum untersucht werden. Die erwähnte Substitution führt aber zu folgender Gleichung:

$$\operatorname{tag} \delta = \frac{e^{\nu\vartheta} + e^{-\nu\vartheta} - \frac{2\,\mu}{r_0 + \mu}}{e^{\nu\vartheta} - e^{-\nu\vartheta}}$$

woraus man durch Differenziation erhält:

$$\frac{d\,(\operatorname{tag} \delta)}{d\,\vartheta} = \frac{\nu\left(\frac{2\,\mu}{r_0 + \mu}\left(e^{\nu\vartheta} + e^{-\nu\vartheta}\right) - 4\right)}{\left(e^{\nu\vartheta} - e^{-\nu\vartheta}\right)^2} = 0.$$

Diese Gleichung wird befriedigt durch $\vartheta = \infty$, dann aber auch durch den Werth von ϑ, welcher aus der Gleichung:

$$\frac{2\,\mu}{r_0 + \mu}\left(e^{\nu\vartheta} + e^{-\nu\vartheta}\right) - 4 = 0$$

hervorgeht. Hieraus berechnet man

$$\vartheta = \frac{1}{\nu}\,.\,l\,\frac{r_0 + \mu + \sqrt{(r_0 + \mu)^2 - \mu^2}}{\mu}\,.$$

Wenn $r_0 = 0$ gesetzt wird, so reducirt sich diese Gleichnng auf $\vartheta = 0$. In dem oben bezeichneten Intervalle liegt also nur dann ein ausgezeichneter Werth für δ, wenn r_0 nicht verschwindet. Aus dem Umstande, dass $\operatorname{tag}\delta = \infty$, wenn $\vartheta = 0$, lässt sich schliessen, dass $\operatorname{tag}\delta$ für den obigen Werth von ϑ ein Minimum wird, und ist es deshalb nicht nöthig, den zweiten Differenzialquotienten zu untersuchen. Es ist nun leicht, die diesem ausgezeichneten Punkte der Curve entsprechenden Werthe von r und δ zu berechnen, und man findet:

$$r = \frac{(r_0 + \mu)^2 - \mu^2}{\mu}\,;\ \operatorname{tag}\delta = \frac{\sqrt{(r_0 + \mu)^2 - \mu^2}}{r_0 + \mu} < 1\,;\ \delta < 45^0$$

Während also ϑ von 0 bis $\frac{1}{\nu}\,l\,\frac{r_0 + \mu + \sqrt{(r_0 + \mu)^2 - \mu^2}}{\mu}$ wächst, nimmt $\operatorname{tag}\delta$ von ∞ bis zu einem Minimum ab, welches kleiner als 1 ist. Es muss also zwischen jenen Werthen von ϑ ein anderer liegen, der $\operatorname{tag}\delta = 1$ macht. Dieser Werth muss sich ergeben aus der Gleichung:

$$\operatorname{tag}\delta = \frac{e^{\nu\vartheta} + e^{-\nu\vartheta} - \frac{2\,\mu}{r_0 + \mu}}{e^{\nu\vartheta} - e^{-\nu\vartheta}} = 1\,.$$

Löst man diese Gleichung nach ϑ auf, so erhält man:

$$\vartheta = \frac{1}{\nu}\,l\,\frac{r_0 + \mu}{\mu}\,,$$

mit welchem Werthe $r = \frac{(r_0 + \mu)^2 - \mu^2}{2\,\mu}$ correspondirt. Zur bessern Uebersicht folgt hier eine Zusammenstellung der zuletzt gefundenen Resultate:

I. Fall. $(v_0 = 0;\ r_0 = 0)$

$\operatorname{tag}\delta = 0;\ \delta = 0$, wenn $\vartheta = 0$.

$\operatorname{tag}\delta = 1;\ \delta = 45^0$, wenn $\vartheta = \infty$.

II. Fall. $(v_0 = 0;\ r_0 > 0)$

$\operatorname{tag}\delta = \infty$; $\delta = 90^0$, wenn $\vartheta = 0$.

$\operatorname{tag}\delta = 1$; $\delta = 45^0$, wenn $\vartheta = \frac{1}{\nu}\,l\,\frac{r_0 + \mu}{\mu}$.

$\operatorname{tag}\delta = \frac{\sqrt{(r_0 + \mu)^2 - \mu^2}}{r_0 + \mu}$; $\delta < 45^0$, wenn $\vartheta = \frac{1}{\nu}\,l\,\frac{r_0 + \mu + \sqrt{(r_0 + \mu)^2 - \mu^2}}{\mu}$.

$\operatorname{tag}\delta = 1$; $\delta = 45^0$, wenn $\vartheta = \infty$.

In dem Falle also, wo die Kugel sich beim Beginne der Bewegung in C (Fig. 3) befindet, fällt in diesem Punkte die Tangente der Bahn mit der Erzeugungslinie des Kegels zusammen; in allen folgenden Punkten ist die Tangente gegen die Erzeugungslinie geneigt; ihr Neigungswinkel wird immer grösser und nähert sich im Unendlichen der Grenze 45^0, so dass hier die Tangente den Winkel CME halbirt und mit der Geraden MH zusammenfällt. Diese Verhältnisse ändern sich wesentlich, wenn die Anfangslage der Kugel nicht in C, sondern in einen andern Punkt der Röhrenaxe fällt. Dann läuft die Tangente im Anfangspunkte der XY-Ebene parallel und steht auf CD senkrecht, fällt also mit EE′, der Tangente des Durchschnittskreises, zusammen; mit wachsendem ϑ nimmt die Neigung der Tangente zu der EE′ zu, sie fällt schliesslich mit MH zusammen und nimmt für einen endlichen Werth von ϑ die Grenzlage MG ein; von diesem Punkte an wird die Neigung zu EE′ wieder kleiner, und im Unendlichen fällt die Tangente abermals in die Lage von MH.

Es lässt sich erwarten, dass für die Tangente an die projicirte Bahncurve ähnliche Verhältnisse Statt finden, wie bei der räumlichen Curve, und dass insbesondere den in obiger Hinsicht ausgezeichneten Punkten der letztern in gleicher Weise ausgezeichnete Punkte der erstern entsprechen. Diese Voraussetzung wird durch eine einfache Rechnung bestätigt, und es ergeben sich, wenn $r_0 > 0$, folgende zusammengehörige Werthe:

$$\vartheta = 0; \qquad \operatorname{tag} \omega = \infty .$$

$$\vartheta = \frac{1}{\nu} \; l \, \frac{r_0 + \mu}{\mu}; \qquad \operatorname{tag} \omega = \frac{1}{\nu} .$$

$$\vartheta = \frac{1}{\nu} \; l \, \frac{r_0 + \mu + \sqrt{(r_0 + \mu)^2 - \mu^2}}{\mu}; \qquad \operatorname{tag} \omega < \frac{1}{\nu} .$$

$$\vartheta = \infty; \qquad \operatorname{tag} \omega = \frac{1}{\nu} .$$

Erörterungen über die Geschwindigkeit.

Gemäss den auf S. 5 über die Bahngeschwindigkeit des Körpers gemachten Bemerkungen ist:

$$v^2 = \left(\frac{dR}{dt}\right)^2 + w^2 r^2 .$$

Da aber

$$R = \frac{r}{\nu} \text{ und } \vartheta = w\,t$$

so hat man:

$$\frac{dR}{dt} = \frac{1}{\nu} \cdot \frac{dr}{dt} = \frac{1}{\nu} \cdot \frac{dr}{d\vartheta} \cdot \frac{d\vartheta}{dt} = \frac{w}{\nu} \, \frac{dr}{d\vartheta} .$$

Durch Substitution dieses Werthes folgt:

$$v = w \sqrt{\frac{1}{\nu^2} \left(\frac{dr}{d\vartheta}\right)^2 + r^2} .$$

In Fig. 4 möge nun die Ebene der Zeichnung mit der durch den Punkt M gelegten Tangentialebene an den Kegel zusammenfallen, CD Erzeugungslinie, EE′ Tangente des Durchschnittskreises, also Perpendikel auf CD und TT′ Tangente der Bahnlinie sein. Fällt man dann von der Spitze des Kegels die Senkrechte CQ auf TT′ und verlängert dieselbe bis zum Durchschnitte mit EE′ so wird $CS = \frac{CM}{\sin CSM}$. Nun ist aber $CM = R$ und $\sin CSM = \cos SMQ = \sin \delta$, und daher

$$CS = p = \frac{R}{\sin \delta} .$$

Auf S. 15 fanden wir aber

$$\cos \delta = \frac{\frac{1}{\nu} \, \frac{dr}{d\vartheta}}{\sqrt{\frac{1}{\nu^2} \left(\frac{dr}{d\vartheta}\right)^2 + r^2}}, \text{ woraus folgt } \sin \delta = \frac{r}{\sqrt{\frac{1}{\nu^2} \left(\frac{dr}{d\vartheta}\right)^2 + r^2}} .$$

Berücksichtigt man nun, dass

$$r = \nu \,.\, R \text{ und } v = w \sqrt{\frac{1}{\nu^2} \left(\frac{dr}{d\vartheta}\right)^2 + r^2}$$

so erhält man: $\sin \delta = \frac{R \,.\, w\,\nu}{v}$. Demgemäss wird:

$$p = \frac{v}{w\,\nu} \text{ und } v = w\,\nu \,.\, p .$$

Auf Grund dieser Gleichung lässt sich für die Geschwindigkeit, mit der die Kugel die Bahn durchläuft, folgendes Gesetz aufstellen:

„Die Geschwindigkeiten der Kugel in beliebigen Punkten der Bahn verhalten sich, wie die Perpendikel, welche von der Spitze des Kegels auf die Tangenten der Bahnlinie gefällt werden, wenn man dieselben bis zum Durchschnitte mit denjenigen Geraden verlängert, welche im Berührungspunkte der Tangenten auf der Erzeugungslinie senkrecht stehn und mit letztern Linien in einer Ebene liegen.“

Dasselbe Gesetz gilt auch für die Geschwindigkeit, mit welcher die Projection des materiellen Punktes auf die XY-Ebene die in dieser Ebene liegende Projection der räumlichen Bahnlinie durchläuft; insbesondere aber findet es auch Anwendung auf den speciellen Fall, der durch B.'s Problem gegeben ist. Bezeichnet nämlich wieder ω den Winkel, den die Tangente mit dem Radiusvector macht, so findet man leicht:

$$p = \frac{r}{\sin\omega}.$$

Da aber $\cot\omega = \frac{1}{r} \cdot \frac{dr}{d\vartheta}$, woraus $\sin\omega = \frac{r}{\sqrt{\left(\frac{dr}{d\vartheta}\right)^2 + r^2}}$ folgt, so hat man:

$$p = \sqrt{\left(\frac{dr}{d\vartheta}\right)^2 + r^2}.$$

Nun ist aber:

$$v = \sqrt{\left(\frac{dr}{dt}\right)^2 + w^2 r^2} = w \sqrt{\left(\frac{dr}{d\vartheta}\right)^2 + r^2}.$$

Daher erhält man ähnlich, wie oben:

$$p = \frac{v}{w} \text{ und } v = w \cdot p.$$

Schliesslich mögen noch kurz die Beziehungen berührt werden, welche zwischen der Geschwindigkeit und der Richtung der Tangente bestehn. Es ist früher erörtert worden, dass die Geschwindigkeit v in der Richtung der Tangente MT' (Fig. 4) sich aus zwei zu einander rechtwinkligen Seitengeschwindigkeiten $\frac{dR}{dt}$ und wr zusammensetzt, deren Richtungen mit den Geraden ME' und MD zusammenfallen. Die Tangente TT' wird also mit CD den kleinern Winkel bilden, wenn $\frac{dR}{dt} > wr$, dagegen mit EE', wenn $wr > \frac{dR}{dt}$. Ueberdies ist, wenn $MA = \frac{dR}{dt}$ und $AB = wr$ angenommen wird

$$\operatorname{tag}\delta = \frac{AB}{AM} = \frac{wr}{\frac{dR}{dt}} = \nu \cdot \frac{r}{\frac{dr}{d\vartheta}}.$$

Diese Formel stimmt genau mit dem auf Seite 15 für $\operatorname{tag}\delta$ entwickelten Ausdrucke überein.