

BERICHT

über die

Königliche Ober-Realschule

und die

Technische Fachschule

zu

BRIEG ^{a/0.}

für das Schuljahr 1884/85

von

E. Noeggerath,

Oberrealschul-Direktor.



Die wissenschaftliche Abhandlung des Oberrealschullehrers Engelbrecht: »Über eine Kurbelbewegung allgemeinerer Art«,
wird besonders ausgegeben.

1885. Progr.-No. 195.

Buchdruckerei Emil Kirchner, Brieg.

96r
40

172,3^a

BERICHT

Königliche Ober-Realsschule



BRIEF №

für das Schuljahr 1884/85

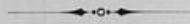


H. Noeggerath

Schulnachrichten.



I. Lehr-Verfassung.



A. Übersicht der Zeitverteilung.

Nr.	Lehrgegenstände	Wöchentliche Stundenzahl in der Ober-Realschule										Nr.	Lehrgegenstände	Wöchentliche Stundenzahl in der Fachschule			
		VI	V	IV	III ^b	III ^a	II ^b	II ^a	I ^b	I ^a	Summa			II	I	Summa	
1	Religionslehre	3	2	2	2	2	2	2	2	2	2	19	1	Mathematik	5	5	10
2	Deutsch	5	6	4	3	3	3	3	3	3	3	33	2	Beschreibende Geometrie	2	2	4
3	Französisch	8	8	8	6	6	5	5	5	5	5	56	3	Mechanik	2	4	6
4	Englisch	—	—	—	5	5	4	4	4	4	4	26	4	Physik	2	2	4
5	Geschichte	1	2	2	2	2	2	2	3	3	19	5	Chemie und chem. Technologie	3	2	5	
6	Geographie	2	1	2	2	2	1	1	—	—	11	6	Maschinenlehre	4	4	} 12	
7	Mathematik und Rechnen	4	4	6	6	6	5	5	5	5	46	7	Mechanische Technologie	2	2		
8	Naturbeschreibung	2	2	2	2	2	3	—	—	—	13	8	Baukonstruktionslehre	4	4	8	
9	Physik	—	—	—	—	—	4	4	3	3	14	9	Maschinenzeichnen	8	8	16	
10	Chemie	—	—	—	—	—	—	3	3	3	9	10	Freihandzeichnen	4	4	8	
11	Linearzeichnen und beschr. Geometrie	—	—	—	—	2	4	4	4	4	18	11	Rechnen und Buchführung	2	—	2	
12	Freihandzeichnen	2	2	2	2	2	3	3	4	4	24	12	Übungen im Laboratorium (facultativ)	(3)	(3)	(6)	
13	Schreiben	2	2	2	—	—	—	—	—	—	6	—	—	—	—	—	
14	Gesang	In drei Abteilungen.										6	—	—	—	—	
15	Turnen	In drei Abteilungen.										6	—	—	—	—	
Summa		29	29	30	30	32	36	36	36	36	36	306	Summa		38	37	75

C. Übersicht

über die während des abgelaufenen Schuljahres absolvierten Pensen.

I. Königl. Oberrealschule.

Prima. (Cursus zweijährig.)

Ordinarius: Oberlehrer Dr. Freese.

Religion. a) Evang. 2 Stunden, combinirt mit Obersecunda. Einleitung in die neutestamentlichen Schriften. Lesen und Erklären der Briefe an die Römer und Galater. Repetition der Glaubens- und Sittenlehre. Kirchengeschichte von Constantin dem Gr. bis auf die neueste Zeit. Repetition der älteren Kirchengeschichte. Pastor Mevius.

a) Kath. 2 Stunden, combinirt mit Obersecunda. Specielle Dogmatik nach dem Lehrbuch von König III. Tl. Lehre vom sittlich guten, wohlgefälligen und gottähnlichen Leben des Menschen auf Grund der von der kath. Kirche verkündeten göttl. Offenbarung nach dem Lehrbuch v. König IV. Tl. Kaplan Kwiatkowski.

Deutsch. 3 Stunden. Geschichte der neueren deutschen Litteratur bis zu Goethes Tode; davon im abgelaufenen Schuljahr: Geschichte der Litteratur von Lessing bis Goethe. Im Anschluss hieran wurden die wichtigsten Kapitel der Poetik erörtert. Dispositionsübungen. Freie Vorträge. Monatliche Aufsätze. Lektüre aus Hopf und Paulsiek (für II. und I.) namentlich zu Herder; Lessings Laokoon; aus Tacitus Historien (Übers. v. Bötticher); Ilias I bis IV. (Übers. v. Voss).

Aufsätze: 1. Welche Umstände haben besonders zum Aufschwunge von Industrie und Handel in unserem Jahrhundert beigetragen? 2. Über die Folgen der Reformation in Deutschland. 3. Was verdankt die alte Welt der neuen? 4. Inwiefern hat der Erwerbstrieb die Wissenschaft gefördert? 5. Durch welche Umstände ist die rasche Entwicklung der Vereinigten Staaten herbeigeführt worden? 6. »Wie die Tage sich ändern, die Gott vom Himmel uns sendet, ändert sich auch das Herz der erdebewohnenden Menschen.« (Homer.) 7. Welche Abweichungen von der Darstellung des Vergil bemerkt Lessing bei der Laokoongruppe, und wie begründet er dieselbe? 8. Licht- und Schattenseite der grossen Städte. 9. Auf welchen Bedingungen beruht die Entwicklung einer Grossindustrie? 10. Schilderung Strassburgs 1770/71 nach Goethes Dichtung und Wahrheit.

Abiturienten-Arbeit zu Michaelis: Worin besteht der Segen der Arbeit?

Dr. Bielschowsky.

Französisch. 5 Stunden. Grammatische Erweiterungen und Repetitionen. Mündliche Übersetzungen aus Ploetz' Übungen zur Syntax. Alle 14 Tage ein Extemporale, Exercitium oder Aufsatz.

Lektüre: Mignet, Histoire de la Révolution française. Corneille, Horace. Molière, Les Femmes savantes.

Aufsätze: 1. L'anneau de Polycrate. 2. Louis XVI. 3. L'Assemblée constituante. 4. Louis le Débonnaire. 5. Fondation de Rome. 6. Combat des Horaces et des Curiaces. 7. La deuxième croisade. 8. Jeunesse d'Alexandre le Grand. 9. Clovis, roi des Francs. Abiturienten-Aufsatz zu Michaelis: Découverte de l'Amérique et du passage aux Indes.

Dr. Wershoven.

Englisch. 4 Stunden. Grammatiche Erweiterungen und Repetitionen nach Gesenius' Grammatik. Alle 14 Tage ein Exercitium, Extemporale oder Aufsatz. Lektüre: Hume, History of Charles I. Sheridan, The School for Scandal. Shakespeare, Julius Caesar. Dr. Wershoven.

Geschichte. 3 Stunden im Winter, 2 Stunden im Sommer. Neuere deutsche und preussische Geschichte unter Berücksichtigung der gleichzeitigen wichtigsten Ereignisse des Auslandes. Repetitionen aus den übrigen Teilen der Geschichte. Davon im abgelaufenen Schuljahre: preuss.-deutsche Geschichte von 1688—1815 nach Pütz, Grundriss der Geschichte für die oberen Klassen III. Cauet, Geschichtstabellen. Dr. Bielschowsky.

Geographie. 1 Stunde im Sommer. Ergänzungen des früheren Unterrichts: teils physische Geographie, teils Amerika und Australien nach v. Seydlitz, Schulgeographie. Dr. Bielschowsky.

Mathematik. 5 Stunden. Arithmetik und Algebra: Der binomische Satz. Die Reihen für Potenzen und Logarithmen. Der Moivre'sche Satz und die complexe Zahl. Gleichungen zweiten Grades mit mehreren Unbekannten. In Ober-Prima: Kubische Gleichungen und Gleichungen höherer Grade. Geometrie: Analytische Geometrie ersten und zweiten Grades. Neuere Geometrie: Entsprechende Linien, die harmonische Proportion, Pol und Polare, Chordale, Potenzkreise, synthetische Entwicklung der Kegelschnitte. Jeden Monat zwei schriftliche Arbeiten. Abiturienten-Aufgaben zu Michaelis:

$$1. \frac{x^2}{y^2} + \frac{y^2}{x^2} + \frac{x}{y} + \frac{y}{x} = 4.$$

$$x + y = 6.$$

2. Ein Dreieck zu construieren aus einer Seite, der zu einer andern Seite gehörigen Höhe und dem Radius des eingeschriebenen Kreises.
3. Den Winkel x aus der Gleichung $\sin. 3x = 2 \sin. 2x$ zu berechnen.
4. Von der Parabel $y^2 = px$ soll durch eine Sehne von der Länge a ein Abschnitt von dem Inhalte $\frac{4}{3}p^2$ abgeschnitten werden. Es ist der Winkel φ zu bestimmen, den diese Sehne mit der Hauptachse bildet.

Noeggerath.

Physik. Unter-Prima 3 Stunden. Meteorologie, Erweiterung der Optik. Mechanik der festen, flüssigen und luftförmigen Körper.

Ober-Prima 3 Stunden. Mathematische Geographie und Anwendung ihrer Gesetze in Aufgaben. Repetitionen aus der Mechanik, Akustik und Optik mit besonderer Berücksichtigung der Wellenbewegung und theoretischen Optik. Aufgabenstunde I^a und I^b combinirt: Wiederholungen aus II^a und II^b. Aufgaben aus der Optik und Mechanik. Nach Jochmann, Experimentalphysik. 3 Extemporalien. Abiturienten-Arbeit zu Michaelis: 1. Wie weit bewegt sich ein Körper auf einer schiefen Ebene vom Neigungswinkel $\alpha = 30^\circ$ aufwärts, wenn er zu Anfang $c = 80$ m Geschwindigkeit hat? Der Reibungscoefficient ist $\rho = 0,05$. 2. Welche Dauer hat der längste Tag in Brieg? Die geographische Breite dieses Ortes ist $\beta = 50^\circ 50'$; die Schiefe der Ekliptik $\alpha = 23^\circ 27'$. Im Sommer Dr. Leffler, im Winter Müsebeck.

Chemie. 3 Stunden. Die Schwermetalle und deren Verbindungen mit Einschluss der bezüglichen Mineralien; der Verbrennungsprocess; Abriss der organischen Chemie; chemische Technologie. Rammelsbergs Chemie. In jedem Semester eine schriftliche Arbeit. Arbeiten im Laboratorium 3 Stunden (fakultativ). Abiturienten-Aufgabe: Weshalb ist die Fabrikation englischer Schwefelsäure in Verbindung mit derjenigen von Soda und von Chlorkalk vorteilhaft?

Dr. Freese.

Linearzeichnen und Projektionslehre. 4 Stunden. Linearzeichnen: Konstruktionen von Maschinen- und Bauteilen nach gegebenen Erläuterungen. Anwendungen der Projektionslehre. Projektionslehre: Parallel- und Polarperspektive. Lehre von der Beleuchtung und Schattierung. Kunz.

Freihandzeichnen. 4 Stunden. Entwerfen von Blätterfriesen und ornamentierten Füllungen und Schattieren derselben mit Bleistift, 2 Kreiden, Tusche oder diversen Farben. Laue.

Ober-Secunda.

Ordinarius: Oberlehrer Dr. Bielschowsky.

Religion. Combiniert mit Prima.

Deutsch. 3 Stunden. Abriss der hervorragendsten Dichtungen der älteren deutschen Litteratur im Anschluss an das Lesebuch von Hopf und Paulsieck (Teil für II und I). Dispositionsübungen. Freie Vorträge. Monatliche Aufsätze. Lektüre: Maria Stuart; Plato, Verteidigungsrede des Sokrates und Kriton (Übers. von Hess). Aufsätze: 1. Charakteristik des Wirts in Goethes Hermann und Dorothea. 2. Welchen Einfluss hat die Natur auf unser Gemüt? 3. Warum schätzt man jetzt den Wert der Zeit höher als früher? 4. Auf welchen natürlichen Vorzügen beruht die Grösse Englands? 5. Gedankengang in Sokrates' Verteidigungsrede. 6. Wovon hängt die geschichtliche Bedeutung eines Landes ab? 7. Die Fabel zu Lessings »Nathan der Weise« bis zum Beginn der Handlung. 8. Aus welchen (geographischen) Gründen steht Baiern hinter den übrigen süddeutschen Staaten zurück? 9. Welche Vorzüge haben die deutschen Nordseehäfen vor den Ostseehäfen voraus? 10. Welche Umstände entschuldigen Elisabeths Verhalten gegen Maria Stuart (in der gleichnamigen Dichtung Schillers)? Dr. Bielschowsky.

Französisch. 5 Stunden. Grammatik: Moduslehre, Artikel, Pronomen, Infinitiv, nach Ploetz' Schulgrammatik. Alle 14 Tage ein Exercitium oder Extemporale. Lektüre: Mignet, Vie de Franklin. Arago, Biographie de James Watt. Sandeau, Mademoiselle de la Seiglière.

Dr. Wershoven.

Englisch. 4 Stunden. Grammatik: Syntax des Verbums, Wiederholung der Syntax des Nomens, nach Gesenius' Grammatik. Alle 14 Tage ein Exercitium oder Extemporale. Lektüre: Hume, The Reign of Queen Elizabeth. Hume, History of William the Conqueror. Dickens, A Christmas Carol. Dr. Wershoven.

Geschichte. 2 Stunden. Römische Kaisergeschichte. Deutsche Geschichte von den ältesten Zeiten bis zur Reformation, nach Pütz, Grundriss II. und Cauer, Geschichtstabellen.

Dr. Bielschowsky.

Geographie. 1 Stunde. Repetition der Geographie Central-Europas, Asiens, Afrikas, unter besonderer Berücksichtigung des Kongogebietes und der neuen deutschen Erwerbungen; von Seydlitz, Schulgeographie. Dr. Bielschowsky.

Mathematik. 5 Stunden. 1. Arithmetik, 2 Stunden. Gleichungen zweiten Grades mit mehreren Unbekannten. Kettenbrüche. Binomialkoeffizienten. Arithmetische und geometrische Reihen. Lieber und Lühmann, Arithmetik; Heis, Sammlung von Aufgaben. 2. Geometrie, 3 Stunden. Ebene Trigonometrie bis zum Schluss. Stereometrie bis zur Kugel. Sphärische Trigonometrie. Geometrische Aufgaben. Lieber und Lühmann, Teil II und III. Jeden Monat zwei schriftliche Arbeiten. Noeggerath.

Physik. 4 Stunden. Elektrodynamik, Akustik, niedere Optik, Spiegelung, Brechung und Dispersion des Lichts, das Auge und die optischen Instrumente; neuere Wärmelehre und Anwendung auf die Dampfmaschine; Mechanik des materiellen Punktes. Aufgaben über Elektrizität, Optik, Wärmelehre, Probleme aus der Statik. Jochmann, Experimentalphysik. 3 Extemporalien.

Im Sommer Dr. Leffler, im Winter Müsebeck.

Chemie. 3 Stunden. Die chemischen Grundgesetze, die Metalloide und Leichtmetalle, sowie deren Verbindungen mit Einschluss der bezüglichen Mineralien, nach Rammelsbergs Chemie. In jedem Semester eine schriftliche Arbeit. Arbeiten im Laboratorium 3 Stunden, fakultativ.

Dr. Freese.

- Linearzeichnen und Projektionslehre.** 4 Stunden. Konstruktionen von Maschinen- und Bauteilen nach erläuternden Vorträgen. Weitere Ausführung der rechtwinkligen Projektionsart, die dreiseitige Ecke; das Prisma, die Pyramide, der Kegel, der Cylinder; verschiedene Schnitte dieser Körper mit Ebenen; Abwicklungen und Durchdringungen dieser Körper. Kunz.
- Freihandzeichnen.** 3 Stunden. Zeichnen nach grösseren Gypsmodellen mit Tusche oder diversen Farben. Laue.

Unter-Secunda.

Ordinarius: Dr. Wershoven.

- Religion.** a) Evang. Combiniert mit III^a 2 Stunden. Einleitung in die Schriften des alten Testaments. Messianische Weissagungen. Lesen und Erklären des Evangeliums Johannis. Kirchengeschichte von der Ausgiessung des heiligen Geistes bis zur Ausbreitung des Christentums im römischen Reich. Pastor Mevius.
- b) Kath. Combiniert mit III^a 2 Stunden. Schluss der Lehre von den heiligen Sakramenten; Eschatologie. Geschichte der christlichen Kirche, Ausbreitung derselben; Entwicklung der kirchlichen Wissenschaft, des Kultus, der kirchlichen Verfassung. Lehrbuch von König II. Teil. Kaplan Kwiatkowski.
- Deutsch.** 3 Stunden. Metrik. Dispositionsübungen. Freie Vorträge, Memorieren Schillerscher Gedichte. Monatliche Aufsätze. Lektüre: Abschnitte aus Gudrun, Egmont, Tell, Odyssee (Übersetzung von Voss). Aufsätze: 1. Die nützlichen und schädlichen Wirkungen des Windes. 2. Warum preist man den Ackerbau als den Anfang aller Kultur? 3. Vergleich Italiens mit seinen Nachbarinseln. 4. Inwiefern ist die Wichtigkeit des Eisens im Laufe der Zeit immer grösser geworden? 5. Über die Folgen der Erfindung des Schiesspulvers. 6. In welcher Weise wird das Wasser in unserer Industrie angewendet? 7. Die Vorzüge des Landlebens. 8. Inhalt des 3. Aktes von Schillers »Wilhelm Tell«. 9. Untreue schlägt ihren eigenen Herrn. 10. Was verdanken wir der Photographie? Dr. Bielschowsky.
- Französisch.** a) Grammatik 3 Stunden. Repetition der Formenlehre. Tempuslehre, Moduslehre, Artikel, nach Ploetz' Schulgrammatik. Alle 14 Tage ein Exercitium oder Extemporale. Dr. Wershoven.
- b) Lektüre, 2 Stunden. Michaud, Histoire de la première croisade. Barante, Henri V, roi d'Angleterre en France. Im Sommer Schöpke, im Winter Stache.
- Englisch.** 4 Stunden. Grammatik: Syntax des Artikels, des Substantivs, des Adjektivs und Zahlworts und des Pronomens, nach Gesenius' Grammatik. Lektüre im Sommersemester: ausgewählte Stücke aus Wershoven, Englisches Lesebuch; im Wintersemester: Hume, Reign of Queen Elizabeth. Alle 14 Tage ein Exercitium oder Extemporale. Sprechübungen. Mentzen.
- Geschichte.** 2 Stunden. Griechische und römische Geschichte (letztere bis zum Ende der Republik). Pütz, Grundriss der Geschichte für die oberen Klassen I. Cauer, Geschichtstabellen. Dr. Bielschowsky.
- Geographie.** 1 Stunde. Repetition der Geographie Europas mit Ausnahme Central-Europas; von Seydlitz, Schulgeographie. Dr. Bielschowsky.
- Mathematik und Rechnen.** 5 Stunden. 1. Arithmetik. 3 Stunden. Erweiterung der Lehre von den Potenzen und Wurzeln. Gleichungen ersten Grades mit mehreren Unbekannten. Gleichungen zweiten Grades mit einer Unbekannten. Die Logarithmen. Zahlreiche algebraische Übungen. Nach Lieber und Lühmann und Heis, Sammlung von Beispielen. Jeden Monat eine schriftliche Arbeit. Noeggerath.
2. Geometrie. 2 Stunden. Transversalen. Geometrische Berechnungen. Repetitionen über das Gesamtgebiet der Planimetrie. Konstruktionsaufgaben. Konstruktion algebraischer Ausdrücke. Lieber und Lühmann, I. Teil. Goniometrie, Lieber und Lühmann, III. Teil. Jeden Monat eine schriftliche Arbeit. Engelbrecht.

- Physik.** 4 Stunden. Allgemeine Eigenschaften der Körper, Aggregatzustände. Thermometrie. Ausdehnung, Änderung des Aggregatzustandes und die Dampfmaschine, Wärmequellen. Magnetismus, Elektrizität und Galvanismus. Aufgaben über Elasticität, spezifisches Gewicht, Ausdehnung, Schmelzungs- und Verdampfungswärme. Vier schriftliche Arbeiten. Jo chmann, Experimentalphysik. Im Sommer Dr. Leffler, im Winter Müsebeck.
- Naturbeschreibung.** 3 Stunden. Krystallographie und physikalische Eigenschaften der Mineralien; der innere Bau und die wichtigsten Lebenserscheinungen der Pflanzen; Bau des Körpers des Menschen und der höheren Tiere; Pflanzen- und Tiergeographie; Repetition der gesamten Naturbeschreibung nach Schillings Naturgeschichte. Dr. Freese.
- Linearzeichnen und Projektionslehre.** 4 Stunden. Aufnahme und Zeichnen von Modellen. Tuschübungen. Der Punkt, die Gerade, die Ebene in rechtwinkliger Projektionsart. Darstellung einfacher Körper. Kunz.
- Freihandzeichnen.** 3 Stunden. Zeichnen nach Gypsmodellen in zwei Kreiden. Laue.

Ober-Tertia.

Ordinarius: Oberrealschullehrer Engelbrecht.

- Religion.** a) Evang. 2 Stunden comb. mit II^b.
b) Kath. 2 Stunden comb. mit II^b.
- Deutsch.** 3 Stunden. Wilmanns, Deutsche Grammatik § 145—174. Deklamations- und Dispositionsübungen. Elf Gedichte memoriert. Lektüre von Balladen aus Hopf und Paulsiek für III. Alle 3 Wochen ein Aufsatz. Schaefer.
- Französisch.** 6 Stunden. Ploetz, Schulgrammatik, Lektionen 36—58: Die Präpositionen, Wortstellung und Gebrauch der Zeiten und Modi. Lektüre nach Herrigs Premières Lectures Françaises. Memorieren einiger Gedichte. Alle 8 Tage ein Exercitium oder Extemporale. Sprechübungen. Mentzen.
- Englisch.** 5 Stunden. Grammatik nach Gesenius, Elementarbuch der englischen Sprache. Repetition des Pensums der Untertertia, Fortsetzung und Abschluss der Formenlehre; die Übungsstücke wurden alle teils schriftlich teils mündlich ins Englische übertragen. Lektüre nach Wershoven, Englischs Lesebuch, und anschliessend häufigere Sprechübungen. Memorieren einiger Gedichte. Alle 8 Tage ein Exercitium oder Extemporale. Mentzen.
- Geschichte.** 2 Stunden. Neuere deutsche und preussische Geschichte bis 1789, nach Pütz, Grundriss. Schaefer.
- Geographie.** 2 Stunden. Geographie Europas. Seydlitz, Schulgeographie. Dr. Bielschowsky.
- Mathematik und Rechnen.** 6 Stunden. 1) Arithmetik: Die Lehre von den Proportionen. Potenzen und Wurzeln. Gleichungen ersten Grades mit einer Unbekannten. Lieber und Lühmann, Teil II und Heis, Sammlung von Aufgaben. 2) Geometrie: Die Lehre von der Gleichheit, Verwandlung und Teilung der Figuren. Proportionalität und Ähnlichkeit. Zweiter Teil der Kreislehre. Lieber und Lühmann, Teil I. Alle 14 Tage eine häusliche oder eine Klassenarbeit. Engelbrecht.
- Naturbeschreibung.** 2 Stunden. Das natürliche Pflanzensystem, einschliesslich Kryptogamen. Die Insekten mit unvollkommener Verwandlung und einzelne Vertreter der niederen Tiere, nach Schilling, Naturgeschichte. Im Sommer Dr. Freese, im Winter Dr. Bartsch.
- Linearzeichnen.** 2 Stunden. Geometrische Konstruktionen; Grundelemente; Kreis- und Tangentenkonstruktionen; Polygone; Kegelschnittlinien, Cykloiden. Kunz.
- Freihandzeichnen.** 2 Stunden. Schattierübungen mit 2 Kreiden nach Skizzen an der Tafel und Vortrag; Schattieraufgaben. Laue.

Unter-Tertia.

Ordinarius: Oberrealschullehrer Schaefer.

- Religion.** a) Evang. 2 Stunden comb. mit IV. Das Kirchenjahr. 7 Gleichnisse. Erklärung des dritten Artikels und des 3. Hauptstückes. Das Kirchengebet. 5 Kirchenlieder. Wendel, Biblische Geschichte. Rutsch.
- b) Kath. 2 Stunden comb. mit IV. Die göttliche Offenbarung; ihre Quellen und Geschichte. Geographie des heiligen Landes. Offenbarungsurkunden. Stiftung, Aufgabe und Ämter der Kirche. Primat Petri. Die katholische Glaubenslehre. Wiederholung der biblischen Geschichten des Neuen Testaments. Erklären und Memorieren der Sonn- und Festtags-Evangelien. Handbuch von König. Kaplan Kwiatkowski.
- Deutsch.** 3 Stunden. Wilmanns, Deutsche Grammatik §§ 76—87, 145—146, 151—157, 201. Lektüre aus Hopf und Paulsiek. Elf Gedichte memoriert. Anleitungen zum Disponieren. Alle 14 Tage abwechselnd ein Aufsatz und eine grammatische Übung. Schaefer.
- Französisch.** 6 Stunden. Repetition der unregelmässigen Verben. Gebrauch der Hilfsverben. Die reflexiven und unpersönlichen Verben. Substantiv. Adjektiv. Adverb. Zahlwort. Präposition. Ploetz, Schulgrammatik, Lektion 1—23, 24—38. Vokabellernen. Lektüre (2 Stunden) aus Wershoven, Französisches Lesebuch. Memorieren von Gedichten. Wöchentlich ein Exercitium oder Extemporale. Im Sommer Schoepke, im Winter Stache.
- Englisch.** 5 Stunden. Aussprache. Das Substantiv; die Hilfsverben; das regelmässige Verb. Die umschreibende Konjugation. Pronomina. Adjektiv. Adverb. Unregelmässige Verben. Gesenius, Lehrbuch der englischen Sprache, Kap. 1—16. Memorieren von Gedichten. Sprechübungen. Wöchentlich ein Exercitium oder Extemporale. Im Sommer Schoepke, im Winter Stache.
- Geschichte.** 2 Stunden. Deutsche Geschichte von der ältesten Zeit bis 1438, nach Pütz, Grundriss. Schaefer.
- Geographie.** 2 Stunden. Asien, Amerika, Afrika, Australien, nach Seydlitz. Schaefer.
- Mathematik und Rechnen.** 6 Stunden. 1) Rechnen: 2 Stunden. Die bürgerlichen Rechnungsarten; Quadrat- und Kubikwurzel-Ausziehungen. Flächen-, Körper- und Gewichtsberechnungen. Laue.
- 2) Arithmetik. 2 Stunden. Die Grundoperationen mit allgemeinen Zahlen. Einfache Sätze von den Potenzen. Lüber und Lühmann, Teil II und Heis, Aufgaben.
- 3) Geometrie. 2 Stunden. Erster Teil der Kreislehre. Gleichheit der Figuren. Planimetrische Aufgaben. Lieber und Lühmann, Teil I. Alle 14 Tage eine häusliche oder eine Klassenarbeit. Engelbrecht.
- Naturbeschreibung.** 2 Stunden. Die Phanerogamen nach Linnés System, besonders Kulturpflanzen; im Wintersemester Reptilien, Fische und die Insekten mit vollkommener Verwandlung. Schillings Naturgeschichte. Im Sommer Dr. Bartsch, im Winter Dr. Freese.
- Freihandzeichnen.** 2 Stunden. Zeichnen nach Gypsmodellen. Flachornament. Rundschrift nach Soennecken. Laue.

Quarta.

Ordinarius: Oberrealschullehrer Mentzen.

- Religion.** a. Evang. 2 Stunden comb. mit III^b.
- b. Kath. 2 Stunden comb. mit III^b.
- Deutsch.** 4 Stunden. Wilmanns, Deutsche Grammatik §§ 37, 38—73, 125—142, 145—147. Lektüre aus Hopf und Paulsiek. Elf Gedichte memoriert. Anleitungen zum Disponieren. Alle 14 Tage abwechselnd ein Aufsatz und eine grammatische Übung. Schaefer.

- Französisch.** 8 Stunden. Ploetz, Schulgrammatik. Lektion 1—29: die regelmässige Konjugation; die unregelmässigen Verben; Anwendung von avoir und être, reflexive und unpersönliche Verben. Lektüre aus Wershoven, Französisches Lesebuch. Memorieren mehrerer Fabeln Lafontaines und Florians. Sprechübungen. Alle 8 Tage ein Exercitium oder Extemporale.
Mentzen.
- Geschichte.** 2 Stunden. Geschichte der Griechen; Geschichte der Römer bis zum 1. Triumvirat, nach Pütz Grundriss. Schaefer.
- Geographie.** 2 Stunden. Geographie von Europa, mit Ausnahme von Deutschland und Österreich, nach Seydlitz. Schaefer.
- Rechnen und Geometrie.** 6 Stunden. 1) Rechnen: 2 Stunden. Gemeines und Decimalbruchrechnen mit benannten Zahlen; einfache und zusammengesetzte Schlussrechnung. Flächenberechnungen. Laue.
- 2) Geometrie. 4 Stunden. Einleitung. Lehre von der Kongruenz der Dreiecke. Das Parallelogramm. Einleitung in die Kreislehre. Einfache Aufgaben. Lieber und Lühmann, Teil I. Engelbrecht.
- Naturbeschreibung.** 2 Stunden. Systematische botanische Formenlehre und Terminologie unter Vorführung von Beispielen aus dem Gesamtgebiete der Botanik. Einführung in die Pflanzensysteme. Huf- und Flossensäugetierte. Die Vögel. Schillings Naturgeschichte.
Im Sommer Dr. Leffler, im Winter Dr. Bartsch.
- Freihandzeichnen.** 2 Stunden. Zeichnen von komplizierteren Linien, Figuren, Blattformen auf Grundlage geometrischer Grundformen. Rundschrift nach Soennecken. Laue.
- Schreiben.** 2 Stunden. Das kleine griechische Alphabet. Deutsche Kurrent- und lateinische Kursiv-Schrift nach Vorlagen der Erfurter orthographischen Schreibschule. Rutsch.

Quinta.

Ordinarius: Oberrealschullehrer Müsebeck.

- Religion.** a) Evang. 2 Stunden comb. mit Sexta. 30 ausgewählte Geschichten des Alten und Neuen Testaments. Einprägung und kurze Erläuterung der ersten 3 Hauptstücke. 6 Kirchenlieder. Wendels Biblische Geschichte. Rutsch.
- b) Kath. 2 Stunden comb. mit Sexta. Mit Auswahl die Lehre vom Glauben, von der Liebe und den Geboten, von der Gnade, den heiligen Sakramenten, vom Ablass, nach dem grösseren Diöcesankatechismus. Ausgewählte biblische Geschichten des Alten und Neuen Testaments. Festgeschichten. Kirchliche Ceremonien. Die notwendigen Gebete. Ausserdem wurden nach besonderer Vorbereitung durch den Religionslehrer die resp. Schüler der VI und V das erste Mal zur heiligen Beichte und Kommunion zugelassen. Kaplan Kwiatkowski.
- Deutsch.** 6 Stunden. Die Elemente der deutschen Grammatik, Orthographie und Interpunktionslehre. Schriftliche grammatische Übungen. 25 Aufsätze. 6 Gedichte memoriert. Lektüre aus Hopf und Paulsieck. Rutsch.
- Französisch.** 8 Stunden. Ploetz, Elementargrammatik, Lektion 60 bis Schluss. Formenlehre; regelmässige Konjugation. Lektion des Anhangs. Memorieren einiger Stücke. Vokabellernen. Wöchentlich ein Exercitium oder ein Extemporale.
Im Sommer Dr. Leffler, im Winter Müsebeck.
- Geschichte.** 2 Stunden. Erzählungen aus der Sage und Geschichte der Griechen, Römer und Deutschen. Im Sommer Schoepke, im Winter Stache.
- Geographie.** 1 Stunde. Geographie von Deutschland und Österreich, nach Seydlitz. Schaefer.
- Rechnen.** 4 Stunden. Rechnen mit gemeinen und Decimalbrüchen, schriftlich und im Kopfe. Laue.

- Naturbeschreibung.** 2 Stunden. Anleitung zur Beobachtung und Beschreibung einzelner Pflanzen mit einfacherem und complicierterem Blütenbau. Der menschliche Körper. Die Zehensäugetiere. Schillings Naturgeschichte. Im Sommer Dr. Bartsch, im Winter Müsebeck.
- Freihandzeichnen.** 2 Stunden. Zeichnen von Linien, Figuren, Blattformen auf Grundlage geometrischer Grundformen. Laue.
- Schreiben.** 2 Stunden comb. mit Sexta. Buchstaben-Elemente der deutschen und lateinischen Schrift. Vorlagen der Erfurter orthographischen Schreibschule. Rutsch.

Sexta.

Ordinarius: Oberrealschullehrer Rutsch.

- Religion.** a) Evang. 2 Stunden comb. mit Quinta.
b) Kath. 2 Stunden comb. mit Quinta.
- Deutsch.** 5 Stunden. Die Elemente der deutschen Grammatik, Orthographie und Interpunktionslehre. Schriftliche grammatische Übungen. 24 Aufsätze. 7 Gedichte memoriert. Lektüre aus Hopf und Paulsieck. Rutsch.
- Französisch.** 8 Stunden. Aussprache. Formenlehre des Artikels, Substantivs, Adjektivs, einiger Pronomina. Die Grund- und Ordnungszahlen, die Hilfsverben und die erste regelmässige Konjugation. Ploetz, Elementargrammatik Lektion 1—60. Wöchentlich ein Exeritium oder ein Extemporale. Im Sommer Schöepke, im Winter Stache.
- Geschichte.** 1 Stunde. Die wichtigsten Sagen der Griechen. Schaefer.
- Geographie.** 2 Stunden. Die geographischen Grundbegriffe. Geographie von Schlesien, nach Adamy. Preussen. Im Sommer Schaefer, im Winter Dr. Bartsch.
- Rechnen.** 4 Stunden. Rechnen mit ganzen Zahlen und Decimalbrüchen unter Berücksichtigung des deutschen Münz-, Mass- und Gewichtssystems. Kopfrechnen und häusliche Übungen. Rutsch.
- Naturbeschreibung.** 2 Stunden. Die äusseren Bestandteile der Pflanzen. Zehn Pflanzenbeschreibungen. Allgemeiner Überblick über das Tierreich. 15 Tierbeschreibungen. Rutsch.
- Freihandzeichnen.** 2 Stunden. Zeichnen von Linien, Figuren, Blattformen auf Grundlage geometrischer Grundformen. Laue.
- Schreiben.** 2 Stunden comb. mit V.

Dispensationen vom christlichen Religionsunterricht haben nicht stattgefunden.

Mitteilungen über den technischen Unterricht.

- a) **Turnen:** 3 Abteilungen in je 2 Stunden (I, II und III^a; III^b und IV; V und VI). Es wurde nur im Sommerhalbjahr geturnt; im Winterhalbjahr musste dieser Unterricht wegen Mangels einer Turnhalle ausfallen. Die Übungen waren teils Freiübungen und Turnspiele, teils Gerätübungen. Dispensiert waren in I^b 1, in II^b 2, und in VI 1 Schüler, im Ganzen 4. Lehrer Reiche.
- b) **Gesang.** 2 Abteilungen: I—II^b 1 Stunde Einzel- und 1 Stunde Chorgesang; III^a—VI eine Stunde Einzel- und 1 Stunde Chorgesang, im ganzen 4 Stunden. Heim: Sammlung von Volksgesängen für gemischten Chor. Lehrer Schwab.

II. Technische Fachschule.

I. Fachklasse.

Ordinarius: Ingenieur Adomeit.

- 1) **Mathematik.** 5 Stunden. a) Arithmetik. Arithmetische und geometrische Reihen. Rentenrechnung. Der binomische Satz für ganze positive Exponenten. Die Reihen für Potenzen. Zahlreiche Übungen. b) Geometrie. Erweiterung der Planimetrie und Stereometrie. Die Kegelschnitte in analytischer und elementar-synthetischer Begründung. Zahlreiche Übungen. Repetition des Gesamtgebiets. Monatlich eine schriftliche Arbeit. Lieber und Lühmann, Teil I—III. Heis, Sammlung von Aufgaben. Bremiker, Logarithmentafel (6-stellig). Abiturienten-Aufgaben zu Ostern:
 - 1) Man soll bei Benutzung der Scheitelgleichung für den Kreis vom Radius r die Gleichung der Tangente im Punkte x, y aufstellen.
 - 2) Einen Kreis zu konstruieren, welcher durch einen gegebenen Punkt geht, eine gegebene Gerade berührt und dessen Mittelpunkt auf einer zweiten gegebenen Geraden liegt.
 - 3) In einem regelmässigen Achteck von der Seite s ist eine Diagonale gezogen, welche ein Sechseck abschneidet; die Figur rotiert um die Diagonale. Wie gross ist der Inhalt des von dem Sechseck beschriebenen Körpers?
 - 4) Von einem Dreieck kennt man zwei Winkel und die Differenz der zugehörigen Höhen; es sollen diese und die zugehörigen Seiten berechnet werden. (Zahlenbeispiel: $\alpha = 67^{\circ} 18' 29''$; $\beta = 41^{\circ} 52' 36''$; $h_a - h_b = d = -37,2985$.) Engelbrecht.
- 2) **Darstellende Geometrie.** 2 Stunden. Polar- und Parallelperspektive. Lehre von der Beleuchtung und Schattierung. Übungen und Repetitionen. Abiturienten-Aufgabe zu Ostern: Es ist ein durch seinen Grundriss und Aufriss gegebenes Monument in Polarperspektive zu setzen und sein Schatten auf die Horizontalebene gleichfalls polar-perspektivisch darzustellen. Bildebene, Distanz, Horizont und Richtung der Lichtstrahlen können beliebig gewählt werden. Kunz.
- 3) **Mechanik.** 4 Stunden. Die Festigkeitslehre. Drehende Bewegung der Körper. Der Stoss. Die wichtigsten Gesetze des Gleichgewichts und der Bewegung flüssiger und gasförmiger Körper. Die Graphostatik und zahlreiche Anwendungen derselben. In jedem Semester 4 schriftliche Arbeiten. Abiturienten-Aufgabe zu Ostern: Bestimmung der Bewegungshindernisse und des Nutzeffektes an den Elementarmaschinen. Im Sommer Henneberg, im Winter Adomeit.
- 4) **Physik.** 2 Stunden. Die Wellenlehre, der Schall, die Optik, die neuere Wärmelehre, die elektrische Beleuchtung und Repetitionen über das ganze Gebiet der Physik nach Jochmann, Physik. In jedem Semester 2 schriftliche Arbeiten. Dr. Freese.
- 5) **Chemie und chemische Technologie.** 2 Stunden. Die Schwermetalle und wichtige Verbindungen derselben; Einleitung in die organische Chemie, nach Rammelsbergs Chemie. Die Heizung und die Gasbeleuchtung, die Zuckerfabrikation, Bierbrauerei, Gerberei und die Principien der Färberei, nach Wagners Grundriss der chemischen Technologie. In jedem Semester eine schriftliche Arbeit. Fakultativ: 3 Stunden Arbeiten im Laboratorium. Dr. Freese.
- 6) **Maschinenlehre.** 4 Stunden. 1. Effekte: Effektberechnungen und Messungen. Regulierungs- und Bremsvorrichtungen. 2. Die Dampfmaschine: Geschichte. Gesetze der Gase und Dämpfe. Dampfkessel und deren Feuerungen. Einrichtung der verschiedenen Dampfmaschinen. Berechnung. Steuerungen. Schieberdiagramme. Dampfmaschinen - Details. 3. Wasserräder und Turbinen. 4. Windräder. 5. Göpel. 6. Kleinmotoren. 7. Transportmaschinen: Winden und Krane. Kolben- und Kreiselpumpen. Ventilatoren. In jedem Semester 2 schriftliche Arbeiten. Abiturienten-Aufgabe zu Ostern: Beschreibung, Theorie und Berechnung der hydraulischen Presse. Im Sommer Henneberg, im Winter Adomeit.

- 7) **Mechanische Technologie.** 2 Stunden. Die Eisengiesserei: Herstellung der Gussformen. Schmelzöfen. Hilfsmaschinen und Einrichtungen. Giessereianlagen. — Bronze giesserei. Das Walzen, Pressen und Ziehen. Werkzeugmaschinen für Metall- und Holzbearbeitung: Drehbänke, Bohrmaschinen, Scheren, Lochmaschinen etc. In jedem Semester eine schriftliche Arbeit. Abiturienten-Aufgabe zu Ostern: Ausführliche Beschreibung der Einrichtung und Benutzung von Langdrehbänken.
Im Sommer Henneberg, im Winter Adomeit.
- 8) **Baukonstruktionslehre.** 4 Stunden. a) Baukunde. Die hauptsächlichsten Eisenkonstruktionen des Bauwesens. Grundprinzipien der Anordnung und Einrichtung von Wohn- und Fabrikgebäuden. Feuerungen der Wohnhäuser. b) Bauzeichnen. Konstruktionen von Bauteilen und Entwürfe von Grundrissen. Anwendungen der darstellenden Geometrie und Graphostatik. Kunz.
- 9) **Maschinenzeichnen.** 8 Stunden. Konstruieren von Maschinen nach gegebener Skizze. Entwerfen von einfachen Maschinen- und Fabrikanlagen nach gegebener Aufgabe. Einübung verschiedener Zeichnungsmanieren.
Im Sommer Henneberg, im Winter Adomeit.
- 10) **Freihandzeichnen.** 4 Stunden. Anfertigungen von Zeichnungen nach Gypsmodellen, mit Bleistift oder 2 Kreiden oder Tusche oder diversen Farben. Entwerfen von Blattfriesen und ornamentierten Füllungen. Laue.

II. Fachklasse.

Ordinarius: Oberlehrer Kunz.

- 1) **Mathematik.** 5 Stunden. a) Arithmetik 2 Stunden, kombiniert mit II^a der Oberrealschule. Repetition der Lehre von den Potenzen und Wurzeln. Die Logarithmen. Gleichungen 2. Grades mit einer und mehreren Unbekannten. Kettenbrüche. Binomialcoefficienten. Lieber und Lü hmann, Arithmetik. Heis, Sammlung von Aufgaben. Monatlich eine schriftliche Arbeit.
Noeggerath.
- b) Geometrie 3 Stunden. Trigonometrie der Ebene mit zahlreichen Übungen. Stereometrie mit vielfachen Flächen- und Inhaltsbestimmungen, besonders der in der Technik vorkommenden Körperformen. Planimetrische Aufgaben. Lieber und Lü hmann, Teil III. Monatlich eine schriftliche Arbeit.
Engelbrecht.
- 2) **Darstellende Geometrie.** 2 Stunden. Die rechtwinklige Projektionsart. Darstellung und Schnitte einfacher Körper. Abwickelungen und Durchdringungen. Kunz.
- 3) **Mechanik.** 2 Stunden. Die Bewegung des materiellen Punktes; Zusammensetzung und Zerlegung der Kräfte. Polygon der Kräfte. Lebendige Kraft. Mechanische Arbeit. Das statische Moment einer Kraft. Der Schwerpunkt. Die Stabilität. Einleitung in die Graphostatik. In jedem Semester 3 schriftliche Arbeiten. Kunz.
- 4) **Physik.** 2 Stunden. Repetition der allgemeinen Eigenschaften der Körper, der Lehre vom Luftdruck und der Wärmelehre. Elektrizität und Galvanismus, nach Jochmanns Physik. In jedem Semester 2 schriftliche Arbeiten. Dr. Freese.
- 5) **Chemie und chemische Technologie.** 3 Stunden, kombiniert mit II^a der Oberrealschule. Die chemischen Grundgesetze, die Metalloide und Leichtmetalle, sowie deren Verbindungen mit Einschluss der bezüglichen Mineralien, nach Rammelsbergs Chemie. In jedem Semester eine schriftliche Arbeit. Fakultativ: 3 Stunden wöchentlich Arbeiten im Laboratorium.
Dr. Freese.
- 6) **Maschinenlehre.** 4 Stunden. 1) Einleitung: Abriss der Festigkeitslehre. 2) die Maschinenelemente: Schrauben, Niete, Keile, Zapfen, Achsen, Wellen, Kuppelungen, Lager, Lagerstühle, Friktionsräder, Riementriebe, Ketten und Kettenräder, Kurbeln, Pleuelstangen, Kreuzköpfe und Führungsgleise, Kolben, Stopfbüchsen, Ventile, Hähne, Schieber, Röhren. Skizzieren der Maschinenteile. 3) Einfache Bewegungsmechanismen: Hebedaumen, Geradfürungen. In jedem Semester zwei schriftliche Arbeiten.
Im Sommer Henneberg, im Winter Adomeit.

- 7) **Mechanische Technologie.** 2 Stunden. Materialienkunde. Die Operationen zur Trennung der Körper und Flächenbearbeitung: Sägen, Schneiden, Feilen, Hobeln, Drehen, Bohren etc. Die Operationen und Hilfsmittel zur Vereinigung von Körperteilen: Nageln, Nieten, Leimen, Löten, Schweißen etc. Die Geräte zum Messen und Einteilen: Zirkel, Fühlhebel, Setzwage, Winkelmesser etc. In jedem Semester eine schriftliche Arbeit.
Im Sommer Henneberg, im Winter Adomeit.
- 8) **Baukonstruktionslehre.** 4 Stunden. a) Baukunde. Die Baumaterialien; Mauerverbände, Zimmerverbände. Hänge- und Sprengwerke. Balkenlagen, Dächer und Treppen. b) Bauzeichnen: Aufnahme und Zeichnen von Grundrissen. Zeichnen der wichtigsten Mauer- und Zimmerverbände. Gewölbe- und Dachkonstruktionen. Kunz.
- 9) **Maschinenzeichnen.** 8 Stunden. Zeichnen von Maschinenteilen und einfachen Maschinen nach Skizzen. Aufnahmen von Modellen. Übungen im Skizzieren. Einübung verschiedener Zeichnungsmanieren.
Im Sommer Henneberg, im Winter Adomeit.
- 10) **Freihandzeichnen.** 4 Stunden. Anfertigen von Zeichnungen nach Gypsmodellen mit Bleistift oder 2 Kreiden oder Tusche oder diversen Farben. Laue.
- 11) **Buchführung.** 2 Stunden. Einfache und doppelte kaufmännische Buchführung, angewandt auf einen einmonatlichen Geschäftsgang. Abriss der Wechselkunde. Laue.

II. Verordnungen der Behörden.

1884. 1. Königliches Provinzial-Schul-Kollegium. — 3. April. Die Schrift: Dr. Esmarch, »Zur Belehrung über das Sitzen der Kinder«, wird zur Beachtung empfohlen.
2. K. P.-Sch.-K. — 10. April. Der Unterrichtsplan wird genehmigt.
3. K. P.-Sch.-K. — 17. April. Es wird Bericht über die Beschaffenheit des Trinkwassers eingefordert.
4. K. P.-Sch.-K. — 18. April. Die Direktoren werden verpflichtet, die Schüler ihrer Anstalten auf die rechtzeitige Meldung zum einjährig freiwilligen Militärdienst aufmerksam zu machen.
5. K. P.-Sch.-K. — 20. April. Es wird auf die Bestimmungen über die körperliche Züchtigung von Schülern aufmerksam gemacht.
6. K. P.-Sch.-K. — 30. April. Die katholischen Schüler sind am Aschermittwoch und Allerseeleentage in der ersten Morgenstunde vom Unterricht zu dispensieren.
7. K. P.-Sch.-K. — 10. Mai. Es wird Bericht über die Erholungspausen zwischen den Unterrichtsstunden gefordert.
8. K. P.-Sch.-K. — 10. Mai. Der Schulamts-Kandidat Dr. Eugen Bartsch wird der Anstalt zur Ableistung seines Probejahrs überwiesen.
9. K. P.-Sch.-K. — 15. Mai. Bestimmungen über die Fahrpreismässigkeiten für Schüler und Lehrer bei Schulfahrten auf Eisenbahnen werden mitgeteilt.
10. K. P.-Sch.-K. — 6. Juni. Es wird zur Teilnahme der Lehrer an dem nächsten Unterrichts-Kursus der Zentral-Turnanstalt in Berlin aufgefordert.
11. K. P.-Sch.-K. — 7. Juli. Der Studierende W. Paetz wird der Anstalt zur Ableistung seiner Maturitätsprüfung überwiesen.
12. K. P.-Sch.-K. — 31. Juli. Mitteilung, dass Professor Dr. Euler den Turnunterricht der Anstalten der Provinz revidieren werde.
13. K. P.-Sch.-K. — 30. August. Die Urteile der Wissenschaftlichen Prüfungs-Kommission über die letzten Abiturientenarbeiten werden unter Rücksendung dieser mitgeteilt.
14. K. P.-Sch.-K. — 18. August. Die Bestimmungen über das Verhalten bei ansteckenden Krankheiten werden zur Beachtung mitgeteilt.
15. K. P.-Sch.-K. — 10. September. Der Schulamts-Kandidat Stache wird der Anstalt als Lehrer überwiesen.

16. K. P.-Sch.-K. — 3. Oktober. Der Schulamts-Kandidat Müsebeck wird der Anstalt als Lehrer überwiesen.
17. K. P.-Sch.-K. — 3. November. Es wird auf die Beschlüsse der 4. Direktoren-Konferenz über die Schulstrafen aufmerksam gemacht.
18. K. P.-Sch.-K. — 18. Dezember. Die Ferienordnung für das Schuljahr 1885/86 wird mitgeteilt.
19. K. P.-Sch.-K. — 19. Dezember. Das Buch: Dr. Euler: »Verordnungen und amtliche Bekanntmachungen über das Turnwesen«, wird zur Anschaffung empfohlen.
20. K. P.-Sch.-K. — 22. Dezember. Es wird aufgefordert, bei der 100. Wiederkehr des Geburtstages von Jakob Grimm die Verdienste der Brüder Grimm in den obersten Klassen in Erinnerung zu bringen.
- 1885.** 21. K. P.-Sch.-K. — 12. Januar. Mitteilung von Abänderung der Bestimmungen über die Prüfungen an höheren Unterrichtsanstalten.
22. K. P.-Sch.-K. — 30. Januar. Die Urteile der Wissenschaftlichen Prüfungs-Kommission über die Michaelis stattgehabte Abiturienten-Prüfung werden mitgeteilt.
23. K. P.-Sch.-K. — 31. Januar. Die Abiturienten der Technischen Fachschule werden zur Prüfung zugelassen und der Prüfungstermin wird auf den 17. März anberaumt.
24. K. P.-Sch.-K. — 10. Februar. Die Bestimmungen des Herrn Unterrichtsministers über die Normen für die Verwaltung der Schüler- und Lehrerbibliotheken werden mitgeteilt.
25. K. P.-Sch.-K. — 2. März. Es wird Bericht über die schwerhörigen Schüler der Anstalt eingefordert.
26. K. P.-Sch.-K. — 9. März. Die Feier des Geburtstages Sr. Majestät des Kaisers in den Unterrichtsanstalten wird auf Sonnabend, den 21. März, anberaumt.
27. K. P.-Sch.-K. — 30. März. Die Schliessung der unteren Klassen der Anstalt und der Austritt der Lehrer Stache und Müsebeck wird angeordnet.

III. Chronik der Anstalt.

Das neue Schuljahr wurde am 21. April begonnen. Die Aufnahme neuer Schüler fand am 19. April statt. Die Zahl der eintretenden Schüler war in Folge des von den hiesigen Städtischen Behörden am 6. Februar 1884 in öffentlicher Sitzung gefassten Beschlusses, die Auflösung der Anstalt zu beantragen, nur eine geringe. Die unterste Klasse konnte nur mit 7 Schülern, welche neu eintraten, eröffnet werden.

Die Pfingstferien dauerten vom 30. Mai bis 5. Juni, die Sommerferien vom 4. Juli bis 6. August, die Herbstferien vom 1. bis 13. Oktober und die Weihnachtsferien vom 20. Dezember 1884 bis 5. Januar 1885.

Die unteren und mittleren Klassen machten am 27. Mai einen Ausflug nach dem Oderwalde, am 19. Juni einen grösseren Spaziergang über Grottkau nach Koppitz. Die oberen Klassen und Fachklassen gingen am 19. Juni über Grottkau nach den Rummelsbergen und machten am 2. September einen grösseren Ausflug über Wölfelsgrund nach dem Schneeberge.

Zur Feier des Sedantages fand am 2. September ein Akt in der Aula statt, bei dem der Direktor »Die Schlacht bei Weissenburg« als Gegenstand einer Festrede gewählt hatte.

Der Geburtstag Sr. Majestät des Kaisers wurde durch einen feierlichen Akt am 21. März begangen, bei dem Schüler-Deklamationen stattfanden und Oberrealschullehrer Stache eine Festrede »Die Colonisation der Hohenzollern, mit besonderer Berücksichtigung Schlesiens« hielt. Die Feier wurde mit Festgesang eingeleitet und abgeschlossen.

Die unsichere Zukunft der Anstalt veranlasste die noch nicht definitiv angestellten Lehrer, Ingenieur Henneberg, welcher an die Baugewerkschule in Carlsruhe, Oberrealschullehrer Dr. Leffler, welcher zur Technik, und Oberrealschullehrer Schoepke, welcher an die Realschule in Leipzig übergang, am 1. Oktober aus ihren hiesigen Stellungen auszutreten. An Stelle derselben traten die Lehrer Ingenieur Robert Adomeit, Lehramts-Kandidat Karl Müsebeck und Lehramts-Kandidat Emil Stache

ein. — Der Schulamts-Kandidat Dr. Eugen Bartsch wurde am 10. Mai der Anstalt zur Ableistung seines Probejahres überwiesen. Am 23. Dezember wurde Oberlehrer Dr. Wershoven zum Mitgliede der Prüfungs-Kommission für Lehrerinnen und Schulvorsteherinnen für den Regierungsbezirk Breslau ernannt. Den Oberrealschullehrern Laue und Kunz wurde durch Verfügung vom 31. Dezember mitgeteilt, dass ihnen in Anerkennung ihrer Thätigkeit an der Anstalt der Titel »Oberlehrer« verliehen worden sei.

Der Gesundheitszustand im Lehrer-Kollegium war ein befriedigender, so dass längere Beurteilungen und Vertretungen nicht erforderlich waren.

Dagegen hatte die Anstalt am 19. Juni den Verlust eines hoffnungsvollen Schülers, des Unter-Tertianers Max Schubert aus Brieg, zu beklagen, der im Alter von 14 Jahren an Gelenkrheumatismus starb.

Der diesjährige Humboldt-Preis wurde am 14. September dem Primaner Carl Hopp, der diesjährige Werner-Preis demselben Schüler und dem Fachschüler Alphons Bartsch am 15. Januar zuerkannt. Die Bewerbungsschrift um den ersteren Preis behandelte »Die Bedeutung des Suezkanals und der Pacificbahn«, die Bewerbungsschriften um den anderen Preis hatten die »Barometer, Luftpumpen und andere wichtigere Apparate, bei denen der Luftdruck zur Anwendung gelangt« als Thema zu Grunde gelegt. Die Preise bestanden in den Büchern: Supan, Grundzüge der physischen Erdkunde; Schwartz, Kraft und Stoff; Graetz, die Elektrizität und ihre Anwendungen.

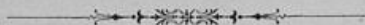
Am Schlusse des Unterrichtskursus erhielten Prämien aus der Robert Schaerff'schen Stiftung des Gewerbehauses, bestehend in wertvollen Büchern:

der Primaner Hopp, der Ober-Sekundaner Ulfers, die Unter-Tertianer Scheffler, Schnake und Seiffert, die Quartaner Bartsch, Strauss und Reichert, der Quintaner Monser, der Sextaner Willimski und die Fachschüler Kellner und Paul Reimann.

Der am 6. Februar 1884 von den Städtischen Behörden gefasste Beschluss, die Aufhebung der Anstalt zu beantragen, hat, nachdem in Folge desselben die Frequenz der Schule um 30⁰/₁₀ gesunken, erst am 28. April 1884 die Einreichung eines diesem Beschlusse entsprechenden Antrages bei dem Unterrichts-Ministerium herbeigeführt. Die Bedeutung dieses Schrittes fand in der Presse lauten Widerhall und erschütterte das Vertrauen auf den Bestand der Schule in hohem Masse. Zu weiteren Verhandlungen war am 16. Dezember im Auftrage des Provinzial-Schul-Kollegiums Herr Regierungs- und Schulrat Sander hier anwesend. Die Städtischen Behörden gelangten am 14. Januar cr. zu dem Beschlusse, eine Deputation nach Berlin zu Verhandlungen mit dem Unterrichtsministerium alsbald abzuordnen. Dieselbe kam diesem Auftrage aber erst am 27. Februar nach und erwirkte die Anwesenheit des Herrn Geheimen Ober-Regierungsrat Dr. Wehrenpfennig und des Herrn Regierungs- und Schulrat Sander am 10. und 11. März am Orte zum Zwecke des definitiven Abschlusses der Verhandlungen. Dieselben schlugen die Umwandlung der Ober-Realschule in eine Realschule mit siebenjährigem und eine technische Fachschule mit zweijährigem Unterrichtskursus vor. Der Magistrat beschloss aber nach der Abreise der Herren Kommissarien am 13. März, lediglich an der Aufhebung der Ober-Realschule festzuhalten. Diesem Beschlusse stimmte die Stadtverordneten-Versammlung am 16. März bei. Der Herr Unterrichtsminister genehmigte denselben am 26. März.

Mit dem Beginn des neuen Unterrichts-Kursus wird die Auflösung in Angriff genommen, indem die Klassen Sexta, Quinta, Ober-Sekunda und die untere Fachklasse wegfallen.

Die durch weise und wohlwogene Initiative der hiesigen Städtischen Behörden im Jahre 1863 gegründete Provinzial-Gewerbeschule, welche lange Zeit als eine der besuchtesten Anstalten dieser Art bezeichnet werden konnte und zahlreiche Techniker vorbildete, die sich der grössten Erfolge erfreuten, hat alle Phasen der Entwicklung des preussischen technischen Unterrichtswesens zu erleben gehabt; die letzte als Ober-Realschule, in der sie die Unterstützung und Wertschätzung der communalen Verwaltung, in der andere Principien massgebend geworden, entbehren musste, vermochte sie nicht zu überdauern. Ihre Spuren und Anregungen werden aber noch lange in dem engeren Heimatsbezirk erhalten bleiben und hoffentlich zum Ruhme ihrer Gönner reichen, deren sie sich bis zuletzt erfreute.



IV. Statistische Mitteilungen.

1. Frequenztafel für das Schuljahr 1884/85.

	A. Ober-Realschule										B. Maschinen- technische Fachschule.		
	OI	UI	OII	UII	OIII	UIII	IV	V	VI	Summa	I	II	Summa
1. Bestand am 1. Februar 1884	2	2	9	19	18	24	11	18	19	122	3	7	10
2. Abgang bis zum Schluss d. Schulj. 1883/84	2	—	3	8	3	6	3	5	1	31	3	3	6
3 ^a . Zugang durch Versetzung zu Ostern . .	1	6	5	15	11	8	12	17	—	75	2	—	2
3 ^b . „ „ Aufnahme „ „	—	—	—	—	2	2	1	2	6	13	—	5	5
4. Frequenz am Anfange des Schulj. 1884/85	1	7	5	21	13	17	13	20	7	104	2	7	9
5. Zugang im Sommersemester	—	—	—	—	1	—	—	1	—	2	—	4	4
6. Abgang im Sommersemester	1	1	—	4	2	3	1	4	1	17	—	3	3
7 ^a . Zugang durch Versetzung zu Michaelis .	1	—	—	—	—	—	—	—	—	1	—	—	—
7 ^b . „ „ Aufnahme „ „	—	—	—	2	—	2	—	—	—	4	—	—	—
8. Frequenz am Anfang des Wintersemesters	1	5	5	19	12	16	12	17	6	93	2	8	10
9. Zugang im Wintersemester	—	—	—	—	—	—	—	—	—	—	—	—	—
10. Abgang „ „	—	—	—	1	—	2	—	—	—	3	—	1	1
11. Frequenz am 1. Februar 1885	1	5	5	18	12	14	12	17	6	90	2	7	9
12. Durchschnittsalter am 1. Februar 1885 .	21,4	19,8	18,7	17,9	16,8	14,3	15,1	13,1	12,7	—	19,4	19,9	—

2. Religions- und Heimatsverhältnisse der Schüler.

	A. Ober-Realschule							B. Maschinentechnische Fachschule						
	Evang.	Kath.	Diss.	Juden	Einh.	Ausw.	Ausl.	Evang.	Kath.	Diss.	Juden	Einh.	Ausw.	Ausl.
1. Am Anfang des Sommersemesters	66	27	—	11	58	45	1	6	3	—	—	5	2	2
2. Am Anfang des Wintersemesters	63	18	—	12	53	40	—	8	2	—	—	6	3	1
3. Am 1. Februar 1885	61	18	—	11	50	40	—	8	1	—	—	6	3	—

Das Zeugnis für den einjährigen Militärdienst haben erhalten Ostern 1884 11, Michaelis 3, Weihnachten 1 Schüler; davon sind zu einem praktischen Beruf abgegangen Ostern 6, Michaelis 3, Weihnachten 1 Schüler.

3. Abiturienten-Prüfungen.

a) Ober-Realschule.

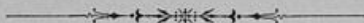
Dem am 16. September 1884 unter Vorsitz des Herrn Regierungs- und Schulrats Sander geprüften Extraneus konnte das Zeugnis der Reife nicht zuerkannt werden.

b) Technische Fachschule.

Am 17. März 1885 wurde unter Vorsitz des Herrn Regierungs- und Schulrats Sander, dem Herr Gewerberat Frief als technischer Kommissarius zur Seite stand, die Prüfung abgehalten und das Zeugnis der Reife erteilt:

1) Herrmann Augenreich, geboren den 22. Januar 1866 zu Brieg, evangelischer Konfession, Sohn des Korbmachermeisters Augenreich. Derselbe war 4 Jahre auf der Ober-Realschule, welche er bis Ober-Secunda besuchte, und 2 Jahre auf der Fachschule. Will Maschinentechniker werden.

2) Max Kellner, geboren den 26. April 1865 zu Trembatschau, Kreis Wartenberg, evangelischer Konfession, Sohn des verstorbenen Gutsbesizers Kellner. Derselbe war 4 Jahre auf der Ober-Realschule, welche er bis Ober-Secunda besuchte, und 2 Jahre auf der Fachschule. Will Gas-techniker werden.



V. Sammlungen von Lehrmitteln.

a) Zugang durch Geschenke.

Von dem Königlichen Unterrichtsministerium: Nowak, Skizzenbuch für den Ingenieur und Maschinenbauer, Jahrgang 1884. Crelle, Journal für reine und angewandte Mathematik, Band 97. Mitteilungen aus den Königlich Technischen Versuchsanstalten, Jahrgang 1884. Vom Herrn Grafen Pfeil: Mathematische Entdeckungen und Kometische Störungen. Von den Verlegern: Arendts, Naturhistorischer Atlas. Koppe, Anfangsgründe der Physik. Spiess, Übungsbuch zum Übersetzen. Günther, Rechenbuch für höhere Schulen.

b) Zugang durch Ankauf.

Wagner, Jahresbericht der chemischen Technologie, 1883. — Rosenberger, Geschichte der Physik, 2. Teil. — Guthe, Lehrbuch der Geographie. — Du Bois-Reymond, drei Reden. — Christaller, Über das Gymnasialwesen. — Grunert's Archiv für Mathematik und Physik, zweite Reihe 1. Band. — Herrig, Archiv für das Studium der neueren Sprachen, Band 71 und 72. — von Carolsfeld, Archiv für Litteraturgeschichte, Band 13. — Böttger, Polytechnisches Notizblatt, 1884. — Centralblatt für die öffentliche Unterrichtsverwaltung in Preussen, 1884. — Annalen der Hydrographie und Meteorologie, 1884. — Schlömilch, Zeitschrift für Mathematik etc., Band 29. — Deutsche Bauzeitung, 1884. — Der Naturforscher, 1884. — Erler, deutsche Geschichte, Band 3. — Heller, Geschichte der Physik, 2. Band. — Jahrbuch der Erfindungen, 20. Band. — Zeitschrift des Vereins deutscher Ingenieure, 1884. — Zeitschrift des Königl. Preussischen statistischen Bureaus. — Ranke, Weltgeschichte, 5. Teil. — Milinowski, Synthetische Geometrie der Kegelschnitte. — Tumlirz, das Potential. — Becker, die Gymnasialbildung. — Euler, Verordnungen über das Turnwesen.

Die Sammlungen an Apparaten, Modellen und Instrumenten wurden mit Rücksicht auf den zweifelhaften Bestand der Schule nicht vermehrt. Eine grössere Summe wurde verausgabt, um die physikalischen Instrumente einer gründlichen Reparatur und Ergänzung zu unterwerfen. Namentlich wurden die von den aufgelösten Gewerbeschulen in Schweidnitz und Liegnitz hierher gelangten Stücke in gebrauchsfähigen Zustand versetzt.

c) Die Schülerbibliothek,

welche jetzt 600 Bände zählt, wurde um nahezu 100 Bände vermehrt. Den Beständen gehören gegen 200 Bände an, welche aus der Bibliothek der Gewerbeschule in Liegnitz übernommen wurden.



VI. Stiftungen und Unterstützungen an Schüler.

Die Anstalt besitzt 3 Stiftungen, welche von dem Gewerbehau-Vorstande verwaltet werden.

1. Die Robert Schärff'sche Stiftung mit 8400 Mark Kapital, welche für würdige Schüler der Ober-Realschule und der Handwerker-Fortbildungsschule 200 Mark zu Prämierungen gewährt.
2. Die Humboldt-Stiftung mit 545 Mark Kapital, welche eine Prämie für eine jährlich auszuschreibende Bewerbungsschrift über ein Thema aus der Geographie oder Mathematik gewährt.
3. Die Werner-Stiftung mit 470 Mark Kapital, welche eine Prämie für eine jährlich auszuschreibende Bewerbungsschrift über ein Thema aus der Physik oder Chemie gewährt.

Ausserdem wurden Stipendien aus der Prinz-Friedrich-Wilhelm-Stiftung und von dem Schlesi-schen Central-Gewerbe-Verein an verschiedene Schüler überwiesen.



VII. Mitteilungen.

Nachdem die Aufhebung der Anstalt genehmigt ist, werden Schüler nicht mehr aufgenommen. Der Schluss der Schule erfolgt voraussichtlich Ostern 1886.



Über eine Kurbelbewegung allgemeinerer Art.

Von

F. E. Engelbrecht.

Das Problem der einfachen Kurbelbewegung setzt ein unveränderliches ebenes System voraus, welches sich in einer Ebene so bewegt, dass ein Punkt P desselben auf einem Kreise \mathfrak{K} , ein anderer Punkt Q auf einem Durchmesser \mathfrak{D} dieses Kreises fortrückt.*) In dieser Fassung entspricht die Aufgabe dem Mechanismus, welcher als Schubkurbel bezeichnet wird. Wendet man auf denselben das Princip der Umkehrung der Bewegung an**), so bleiben die Punkte P und Q fest, der Mittelpunkt M von \mathfrak{K} beschreibt einen Kreis \mathfrak{K}_1 um P und \mathfrak{D} geht fortwährend durch Q; es bewegt sich demnach alsdann ein unveränderliches ebenes System in einer Ebene so, dass ein Punkt M einer Geraden \mathfrak{D} auf einem Kreise \mathfrak{K}_1 gleitet, während sie selbst stets durch einen festen Punkt Q geht — und dieses Problem würde der Rotationskurbel entsprechen. Beide Aufgaben sind also in kinematischer Beziehung nicht von einander verschieden.

In dem Falle der Rotationskurbel ergibt sich nun leicht, dass eine mit \mathfrak{D} fest verbundene, zu ihr in M senkrechte Gerade einen mit \mathfrak{K}_1 concentrischen Kegelschnitt umhüllt, für welchen Q ein Brennpunkt und dessen erste Hauptaxe gleich dem Durchmesser des Kurbelkreises ist. Es liegt dann nahe, das Problem zu erweitern zu der

Aufgabe: *Untersuchung des kinematischen Systems, bei welchem ein Punkt einer unbegrenzten Geraden beständig auf einem festen Kreise gleitet, während sie selbst fortwährend einen mit diesem Kreise in derselben Ebene liegenden concentrischen, sonst beliebigen Kegelschnitt umhüllt.*

Die Behandlung dieser Aufgabe bildet den Gegenstand der vorliegenden Arbeit, welche in ihrem kinematischen Teile den Principien folgt, wie sie von meinem hochverehrten, leider bereits verstorbenen Lehrer, Herrn Professor Dr. Aronhold in seinen bezüglichlichen Vorlesungen systematisch entwickelt und von ihm zum teil in der Abhandlung „Grundzüge der kinematischen Geometrie“ (***) veröffentlicht wurden; wegen dieser Principien selbst und ihrer Begründung, sowie auch wegen der Terminologie möge auf jene Grundzüge verwiesen werden.

§ 1.

Ein Kegelschnitt \mathfrak{K}_1 habe die Excentricität c_1 , die Hauptaxen a_1 und b_1 ; mit den Richtungen derselben fallen die Axen der x und y eines rechtwinkligen Koordinatensystems zusammen. Wird

*) Schell, Theorie der Bewegung und der Kräfte. 2. Aufl. I. Band, pag. 231.

**) Schell, pag. 224.

***) Verhandlungen des Vereins zur Beförderung des Gewerbeleißes. Jahrg. 1872.



alsdann an \mathfrak{H}_1 eine Tangente unter dem Winkel α gegen die $+x$ -Axe gelegt, so hat man für die Länge l_1 der vom Koordinatenanfangspunkt auf die Tangente gefällten Senkrechten

$$l_1^2 = a_1^2 \sin^2 \alpha + b_1^2 \cos^2 \alpha.$$

An einen zweiten Kegelschnitt \mathfrak{H}_2 (c_2 ; a_2 , b_2) mit derselben Hauptaxenlage werde eine zur ersten senkrechte Tangente gelegt, dann ist entsprechend

$$l_2^2 = a_2^2 \cos^2 \alpha + b_2^2 \sin^2 \alpha.$$

Für die Länge R der Verbindungslinie des Koordinatenanfangspunktes mit dem Schnittpunkt beider Tangenten hat man alsdann

$$R^2 = l_1^2 + l_2^2 = (a_1^2 + b_2^2) \sin^2 \alpha + (a_2^2 + b_1^2) \cos^2 \alpha = a_1^2 + b_2^2 + (c_2^2 - c_1^2) \cos^2 \alpha.$$

Hieraus ergibt sich, dass R von α unabhängig und

$$R^2 = a_1^2 + b_2^2$$

wird, wenn $c_1 = c_2 = c$ ist, alsdann folgt

$$R^2 = a_1^2 + a_2^2 - c^2, \quad b_2^2 = R^2 - a_1^2, \quad a_2^2 = R^2 - b_1^2,$$

und man hat das Resultat:

Bewegt sich ein rechter Winkel so, dass je ein Schenkel auf einem von zwei konfokalen, centrischen Kegelschnitten mit der Excentricität c und den ersten Hauptaxen a_1 , a_2 gleitet, so beschreibt der Scheitel des Winkels einen mit den Kegelschnitten concentrischen Kreis, für dessen Radius $R^2 = a_1^2 + a_2^2 - c^2$ ist,

oder mit geänderter, leicht verständlicher Bezeichnung:

Bewegt sich ein rechter Winkel so, dass sein Scheitel P auf einem Kreise \mathfrak{K} vom Radius R gleitet, während der eine Schenkel \mathfrak{G}_1 einen concentrischen Kegelschnitt \mathfrak{H}_1 (a , b) umhüllt, so umhüllt der zweite Schenkel \mathfrak{G}_2 einen konfokalen Kegelschnitt \mathfrak{H}_2 ($\sqrt{R^2 - b^2}$, $\sqrt{R^2 - a^2}$).

Für das kinematische System unserer Aufgabe ist also ausser der gegebenen Roulette des Punktes P und der gegebenen Hüllbahn der Geraden noch eine zweite einfache Hüllbahn bekannt.

Unterscheidung der Hauptfälle. Die vorstehende Entwicklung setzt voraus, dass der Mittelpunkt der Kegelschnitte im Endlichen liegt, dieselben also eigentliche Centralkegelschnitte sind; bei der Degeneration derselben in konfokale Parabeln geht der Kurbelkreis in eine zur Axe senkrechte Gerade über und die obigen Sätze modificieren sich entsprechend. Jene Voraussetzung soll auch in der Folge festgehalten werden; dann sind 3 Hauptfälle zu unterscheiden, je nachdem das System der beiden Hüllbahnen aus zwei Ellipsen, aus einer Ellipse und einer Hyperbel oder aus zwei Hyperbeln besteht. Setzen wir \mathfrak{K} und \mathfrak{H}_1 als gegeben voraus, so gestaltet sich die Unterscheidung wie folgt:

I) \mathfrak{H}_1 eine Ellipse, $b^2 > 0$, $a > b$;

1) $R > a$, \mathfrak{H}_1 liegt innerhalb \mathfrak{K} , es ist $\left. \begin{array}{l} R^2 - b^2 > 0 \\ R^2 - a^2 > 0 \end{array} \right\} \mathfrak{H}_2$ eine Ellipse innerhalb \mathfrak{K} .

2) $R < a$, aber $R > b$, weil sonst \mathfrak{K} innerhalb \mathfrak{H}_1 liegt, also eine Kurbelbewegung der verlangten Art nicht möglich ist; \mathfrak{H}_1 schneidet also \mathfrak{K} ,

es ist $\left. \begin{array}{l} R^2 - b^2 > 0 \\ R^2 - a^2 < 0 \end{array} \right\} \mathfrak{H}_2$ eine Hyperbel, welche \mathfrak{K} schneidet.

II) \mathfrak{H}_1 eine Hyperbel, $b^2 < 0$;

1) $R > a$, \mathfrak{K} schneidet \mathfrak{H}_1 , es ist $\left. \begin{array}{l} R^2 - b^2 > 0 \\ R^2 - a^2 < 0 \end{array} \right\} \mathfrak{H}_2$ eine Ellipse, welche \mathfrak{K} schneidet;

dieser Fall ist offenbar von I. 2 nicht verschieden.

2) $R < a$, \mathfrak{R} schneidet \mathfrak{G}_1 nicht, es ist $\left. \begin{array}{l} R^2 - b^2 > 0 \\ R^2 - a^2 < 0 \end{array} \right\} \mathfrak{G}_2$ eine Hyperbel, welche \mathfrak{R} nicht schneidet.

In den Grenzfällen $\left. \begin{array}{l} b^2 > 0 \text{ und } R = b \\ b^2 < 0 \text{ und } R = 0 \end{array} \right\}$ sind nur zwei reelle Stellungen der Kurbel möglich, nämlich in der Richtung der zweiten Axe resp. in den Richtungen der Asymptoten.

In den Übergangsfällen $\left. \begin{array}{l} R = a \text{ und } b^2 \geq 0 \\ b = 0 \text{ und } R \geq b \end{array} \right\}$ reduciert sich \mathfrak{G}_1 resp. \mathfrak{G}_2 auf die Brennpunkte, das System auf dasjenige der gewöhnlichen Kurbelbewegung, welche in dem Fall $R = a$ und $b = 0$ besonders einfacher Art wird.

Geht \mathfrak{G}_1 in einen Kreis über, so findet dies auch mit \mathfrak{G}_2 statt.

Endlich verdient der Specialfall $R^2 = a^2 + b^2$ hervorgehoben zu werden, für ihn fällt \mathfrak{G}_2 mit \mathfrak{G}_1 zusammen, entsprechend dem bekannten Satz:

Bewegt sich ein rechter Winkel so, dass beide Schenkel denselben centrischen Kegelschnitt umhüllen, so beschreibt der Scheitel einen concentrischen Kreis.

§ 2.

Die Gleichung der Polbahn. Für das festgesetzte Koordinatensystem ist die Gleichung von

$$\mathfrak{G}_1) \frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1.$$

Unter positivem werde derjenige Drehungssinn verstanden, in welchem die $+x$ -Axe um 90° gedreht in die $+y$ -Axe gelangt, bedeutet dann φ den Drehungswinkel der Kurbel von der $+x$ -Axe aus im positiven Sinne gezählt, so ist für den betreffenden Punkt P des Kurbelkreises

$$\xi = R \cos \varphi, \quad \eta = R \sin \varphi.$$

Die Gleichung der Tangente von einem Punkt (ξ, η) an \mathfrak{G}_1 ist

$$\frac{\xi x}{a^2} + \frac{\eta y}{b^2} = 1.$$

und man erhält für die Koordinaten des Berührungspunktes

$$\left. \begin{array}{l} \frac{x}{a} = \frac{1}{\frac{\xi^2}{a^2} + \frac{\eta^2}{b^2}} \left(\frac{\xi}{a} \pm \frac{\eta}{b} \sqrt{\frac{\xi^2}{a^2} + \frac{\eta^2}{b^2} - 1} \right) \\ \frac{y}{b} = \frac{1}{\frac{\xi^2}{a^2} + \frac{\eta^2}{b^2}} \left(\frac{\eta}{b} \mp \frac{\xi}{a} \sqrt{\frac{\xi^2}{a^2} + \frac{\eta^2}{b^2} - 1} \right) \end{array} \right\}$$

Die von P an \mathfrak{G}_1 gelegten Tangenten berühren somit in den Punkten

$$\left. \begin{array}{l} x_1 = \frac{\cos \varphi}{R \left(\frac{\cos^2 \varphi}{a^2} + \frac{\sin^2 \varphi}{b^2} \right)} \left[1 \pm \frac{a}{b} \operatorname{tang} \varphi \sqrt{R^2 \left(\frac{\cos^2 \varphi}{a^2} + \frac{\sin^2 \varphi}{b^2} \right) - 1} \right] \\ y_1 = \frac{\sin \varphi}{R \left(\frac{\cos^2 \varphi}{a^2} + \frac{\sin^2 \varphi}{b^2} \right)} \left[1 \mp \frac{b}{a} \operatorname{cot} \varphi \sqrt{R^2 \left(\frac{\cos^2 \varphi}{a^2} + \frac{\sin^2 \varphi}{b^2} \right) - 1} \right] \end{array} \right\}$$

Den beiden durch die Vorzeichen der Wurzel bedingten Tangentenlagen entsprechen zwei verschiedene kinematische Systeme; wird ein Paar zusammengehöriger Vorzeichen, etwa die unteren festgehalten, so ist das System eindeutig bestimmt. Setzen wir dann noch zur Abkürzung

$$1) \quad b^2 \cos^2 \varphi + a^2 \sin^2 \varphi = p^2$$

$$2) \quad + \sqrt{R^2 p^2 - a^2 b^2} = q^2 = + \sqrt{(R^2 - a^2) b^2 \cos^2 \varphi + (R^2 - b^2) a^2 \sin^2 \varphi},$$

so erhalten wir für die Koordinaten des Berührungspunktes H'_1 von \mathfrak{G}_1 mit \mathfrak{G}_1

$$3) H_1) \quad \begin{aligned} x_1 &= \frac{a^2}{R^2 p^2} \cos \varphi (b^2 - q^2 \tan \varphi) \\ y_1 &= \frac{b^2}{R^2 p^2} \sin \varphi (a^2 + q^2 \cot \varphi). \end{aligned}$$

Für die Gleichung der Normale von \mathfrak{H}_1 in H_1 ergibt sich aus

$$\frac{a^2 x}{x_1} - \frac{b^2 y}{y_1} = c^2$$

im vorliegenden Falle

$$\frac{x}{\cos \varphi} \frac{1}{b^2 - q^2 \tan \varphi} - \frac{y}{\sin \varphi} \frac{1}{a^2 + q^2 \cot \varphi} = \frac{c^2}{R p^2};$$

der Pol \mathcal{P}' unsers Systems für den bestimmten Drehungswinkel φ des Kurbelradius liegt im Schnittpunkt des letzteren, als Normale der Roulette \mathfrak{R} , mit der Normale im zugehörigen Hüllbahnpunkt H_1 , und da die Gleichung des Kurbelradius $\frac{y}{x} = \tan \varphi$ ist, so folgt für die Koordinaten des Poles

$$\begin{aligned} \frac{x}{\cos \varphi} \left[\frac{1}{b^2 - q^2 \tan \varphi} - \frac{1}{a^2 + q^2 \cot \varphi} \right] &= \frac{c^2}{R p^2} \\ \frac{y}{\sin \varphi} \left[\frac{1}{b^2 - q^2 \tan \varphi} - \frac{1}{a^2 + q^2 \cot \varphi} \right] &= \frac{c^2}{R p^2} \end{aligned}$$

und hieraus für den Leitstrahl r des Poles

$$r = \frac{c^2}{R p^2} \frac{1}{\frac{1}{b^2 - q^2 \tan \varphi} - \frac{1}{a^2 + q^2 \cot \varphi}}.$$

Wir entfernen im Nenner die Brüche und reducieren auf sin und cos, dann folgt

$$r = \frac{c^2}{R p^2} \frac{(b^2 \cos \varphi^2 - a^2 \sin \varphi^2) q^2 - (q^4 - a^2 b^2) \sin \varphi \cos \varphi}{q^2 + c^2 \sin \varphi \cos^2 \varphi},$$

alsdann addieren und subtrahieren wir im Zähler $c^2 \sin \varphi \cos \varphi (b^2 \cos \varphi^2 - a^2 \sin \varphi^2)$, zerlegen den Zähler passend und setzen für p^2 und q^4 die betreffenden Werte, dies ergibt

$$4a) r = \frac{c^2}{R} \left[\frac{b^2 \cos \varphi^2 - a^2 \sin \varphi^2}{b^2 \cos \varphi^2 + a^2 \sin \varphi^2} - \frac{(R^2 - a^2 - b^2) \sin \varphi \cos \varphi}{q^2 + c^2 \sin \varphi \cos \varphi} \right].$$

Den zweiten Bruch erweitern wir mit $q^2 - c^2 \sin \varphi \cos \varphi$ und beachten, dass

$$\begin{aligned} & [b^2 \cos \varphi^2 + a^2 \sin \varphi^2] [(R^2 - a^2) \cos \varphi^2 + (R^2 - b^2) \sin \varphi^2] \\ &= (R^2 - a) b^2 \cos \varphi^2 (1 - \sin \varphi^2) + (R^2 - b^2) a^2 \sin \varphi^2 (1 - \cos \varphi^2) + (R^2 - b) b^2 \sin \varphi^2 \cos \varphi^2 \\ & \quad + (R^2 - a^2) a^2 \sin \varphi^2 \cos \varphi^2 \\ &= q^4 - c^4 \sin \varphi^2 \cos \varphi^2 \end{aligned}$$

ist, dann folgt

$$r = \frac{c^2}{R} \left[\frac{b^2 \cos \varphi^2 - a^2 \sin \varphi^2}{b^2 \cos \varphi^2 + a^2 \sin \varphi^2} - \frac{(R^4 - a^2 - b^2) (q^2 - c^2 \sin \varphi \cos \varphi) \sin \varphi \cos \varphi}{[b^2 \cos \varphi^2 + a^2 \sin \varphi^2] [(R^2 - a^2) \cos \varphi^2 + (R^2 - b^2) \sin \varphi^2]} \right]$$

wird endlich gleichnamig gemacht und entsprechend vereinigt, so ergibt sich

$$4) r = \frac{c^2}{R} \frac{(R^2 - a^2) b^2 \cos \varphi^4 - (R^2 - b^2) a^2 \sin \varphi^4 - (R^2 - a^2 - b^2) \sin \varphi \cos \varphi \sqrt{(R^2 - a^2) b^2 \cos \varphi^2 + (R^2 - b^2) a^2 \sin \varphi^2}}{[b^2 \cos \varphi^2 + a^2 \sin \varphi^2] [(R^2 - a^2) \cos \varphi^2 + (R^2 - b^2) \sin \varphi^2]}$$

als Polargleichung der Polbahn \mathfrak{P}' in der symmetrischsten Form.

Der Ausdruck für r ist die eine Wurzel einer quadratischen Gleichung, deren zweite Wurzel der Gleichung der Polbahn desjenigen Systems entspricht, in welchem \mathfrak{G}_1 die zweite, durch das andere Vorzeichen bei q^2 bestimmte Tangentenlage an \mathfrak{H}_1 einnimmt. Beide Polbahnen bilden geometrisch genommen eine Kurve, welche wir die vollständige Kurve \mathfrak{P}' nennen wollen; ihre Polargleichung ergibt sich nach den Sätzen über die Zusammensetzung der Koeffizienten einer quadratischen Gleichung aus deren Wurzeln; das von r freie Glied hat, abgesehen vom Faktor $\frac{c^4}{R^2}$,

den Nenner $[b^2 \cos \varphi^2 + a^2 \sin \varphi^2]^2$. $[(R^2 - a^2) \cos \varphi^2 + (R^2 - b^2) \sin \varphi^2]^2$ und den Zähler $[(R^2 - a^2) b^2 \cos \varphi^4 - (R^2 - b^2) a^2 \sin \varphi^4]^2 - (R^2 - a^2 - b^2)^2 \sin \varphi^2 \cos \varphi^2 [(R^2 - a^2) b^2 \cos \varphi^2 + (R^2 - b^2) a^2 \sin \varphi^2]$; ersetzt man das erste Glied im Zähler durch $[(R^2 - a^2) b^2 \cos \varphi^4 + (R^2 - b^2) a^2 \sin \varphi^4]^2 - 4 (R^2 - a^2) (R^2 - b^2) a^2 b^2 \sin \varphi^4 \cos \varphi^4$, den Faktor $(R^2 - a^2 - b^2)^2$ durch das Produkt von $(R^2 - a^2) - b^2$ mit $(R^2 - b^2) - a^2$ und multipliziert man endlich das zweite Glied mit $\sin \varphi^2 + \cos \varphi^2$, so ergibt sich nach Ausführung der Multiplikationen und anderweitiger passender Vereinigung der Glieder des Zählers, dass derselbe durch das Produkt

$$[b^2 \cos \varphi^2 + a^2 \sin \varphi^2] [(R^2 - a^2) \cos \varphi^2 + (R^2 - b^2) \sin \varphi^2] [(R^2 - a^2) b^2 \cos \varphi^4 - ((R^2 - a^2) (R^2 - b^2) + a^2 b^2) \cos \varphi^2 \sin \varphi^2 + (R^2 - b^2) a^2 \sin \varphi^4]$$

dargestellt werden kann. Somit wird nach Entfernung des Nenners

$$\begin{aligned} 5) \quad r^2 [b^2 \cos \varphi^2 + a^2 \sin \varphi^2] [(R^2 - a^2) \cos \varphi^2 + (R^2 - b^2) \sin \varphi^2] - 2 r \frac{c^2}{R} [(R^2 - a^2) b^2 \cos \varphi^4 - \\ - (R^2 - b^2) a^2 \sin \varphi^4] \\ + \frac{c^4}{R^2} [(R^2 - a^2) b^2 \cos \varphi^4 - ((R^2 - a^2) (R^2 - b^2) + a^2 b^2) \sin \varphi^2 \cos \varphi^2 + (R^2 - b^2) a^2 \sin \varphi^4] = 0 \end{aligned}$$

die Polargleichung der vollständigen Kurve \mathfrak{P} .

Setzen wir $\cos \varphi = \frac{x}{r}$, $\sin \varphi = \frac{y}{r}$ und entfernen die Nenner, so erhalten wir nach einmaligem Quadrieren von (5), wenn wir uns zur Abkürzung der Bezeichnungen $[b^2 x^2 + a^2 y^2] [(R^2 - a^2) x^2 + (R^2 - b^2) y^2] = M$, $(R^2 - a^2) b^2 x^4 - (R^2 - b^2) a^2 y^4 = N$, $(R^2 - a^2) b^2 x^4 - [(R^2 - a^2) (R^2 - b^2) + a^2 b^2] x^2 y^2 + (R^2 - b^2) a^2 y^4 = L$ bedienen, die Gleichung der Kurve \mathfrak{P} in rechtwinkligen Koordinaten in der Form

$$6) \quad R^4 (x^2 + y^2)^2 M^2 - 2 R^2 c^4 (x^2 + y^2) (2 N^2 - ML) + c^8 L^2 = 0.$$

§ 3.

Allgemeine Eigenschaften der Polbahngleichungen. Die Gleichung 6) ist in den Variablen vom 12. Grade; sie ist, wie gezeigt, der analytische Ausdruck nicht nur für die Polbahn des von uns vorausgesetzten Systems, sondern auch für die Polbahn desjenigen Systems, in welchem \mathfrak{G}_1 und \mathfrak{G}_2 die zweiten, durch das andere Vorzeichen bei q^2 bestimmten Tangentenlagen der Hüllbahnen \mathfrak{H}_1 und \mathfrak{H}_2 einnehmen. Diese beiden Polbahnen sind unter sich kongruent und Spiegelbilder von einander bezüglich der Koordinatenachsen, wie aus der Entstehung, als auch aus ihren Polargleichungen ersichtlich, indem diese in einander übergehen, wenn φ durch $-\varphi$ oder durch $180^\circ - \varphi$ ersetzt wird.

Jede der beiden Polbahnen ist eine Mittelpunktskurve, denn für φ und $180^\circ + \varphi$ ergeben sich dieselben Werte von r (Gl. 4); die vollständige Kurve \mathfrak{P}^1 wird also durch die Koordinatenachsen in vier kongruente Teile zerlegt, wie auch aus (6) folgt, in welcher Gl. nur gerade Potenzen der Koordinaten vorkommen.

Der Koordinatenanfang, also der Mittelpunkt von \mathfrak{P} , ist ein 8-facher Punkt der Kurve, denn in (6) fehlen alle Glieder niederer bis zu denen der 8. Ordnung; die Tangenten der Kurvenzweige in diesem Punkte ergeben sich aus dem Polynom der Glieder niedrigster Ordnung, m. a. W. wenn wir in (5) $r=0$ setzen, aus der Gleichung $(R^2 - a^2) b^2 \cos \varphi^4 - [(R^2 - a^2) (R^2 - b^2) + a^2 b^2] \sin \varphi^2 \cos \varphi^2 + (R^2 - b^2) a^2 \sin \varphi^4 = 0$, welche ergibt

$$\begin{aligned} 7) \quad \tan \varphi_1^2 &= \frac{b^2}{R^2 - b^2}, \quad \tan \varphi_2^2 = \frac{R^2 - a^2}{a^2}, \\ \sin \varphi_1^2 &= \frac{b^2}{R^2}, \quad \cos \varphi_2^2 = \frac{R^2}{a^2}. \end{aligned}$$

Für die Richtungskonstanten jener Tangenten ergeben sich nur vier verschiedene Werte, da je zwei um 180° gegen einander verdrehte Zweige eine gemeinsame Tangente besitzen, sich also in diesem Punkt berühren.

Für r erhalten wir aus (5) nur so lange einen reellen Wert, als nach 5)

$$\sqrt{(R^2 - a^2) b^2 \cos^2 \varphi + (R^2 - b^2) a^2 \sin^2 \varphi}$$

reell ausfällt. Hierdurch ist ein positiver und ein absolut genommen gleicher negativer (reeller oder imaginärer) Grenzwinkel φ_0 bestimmt, für welchen

$$8) \tan \varphi_0^2 = -\frac{b^2}{a^2} \frac{R^2 - a^2}{R^2 - b^2}$$

ist. Für diese Winkel wird, wie man durch Substitution in (4) leicht verificiert $r = R$, während jeder andere Wert $\varphi > \varphi_0$ zwei, den beiden Vorzeichen der Wurzel entsprechende Werte r liefert, d. h. die Grenzlagen des Kurbelradius sind Tangenten der Kurve \mathfrak{B}' , und zwar schneidet dieselbe den Kreis \mathfrak{K} in den betreffenden Punkten rechtwinklig.

Für die auf den Koordinatenachsen gelegenen Kurvenpunkte, also für $\varphi = 0^\circ, 90^\circ, 180^\circ, 270^\circ$ ist

$$9) r_0 = \pm \frac{c^2}{R},$$

dieselben sind also vom Koordinatenanfangspunkt gleichweit entfernt.

Um die Richtungen der unendlich-fernen Punkte von \mathfrak{B}' zu ermitteln, ist zu bestimmen, für welche Werte φ $r = \infty$ wird; da kein Glied des Zählers in (4) unendlich werden kann, so wird jener Fall nur eintreten, wenn die Faktoren des Nenners gleich Null, also

$$b^2 \cos^2 \varphi + a^2 \sin^2 \varphi = 0 \text{ oder } (R^2 - a^2) \cos^2 \varphi + (R^2 - b^2) \sin^2 \varphi = 0$$

ist. Für die Asymptotenrichtungen folgt also

$$10) \tan \varphi_3^2 = -\frac{b^2}{a^2}, \quad \tan \varphi_4^2 = -\frac{R^2 - a^2}{R^2 - b^2}.$$

Die Diskussion dieser allgemeinen Resultate für die Hauptfälle soll im Zusammenhange mit den für die Polkurve zu erlangenden stattfinden.

§ 4.

Die Gleichung der Polkurve. Mit der beweglichen Ebene sei ein Koordinatensystem (X, Y) verbunden, dessen Axen mit \mathfrak{G}_1 bezw. \mathfrak{G}_2 zusammenfallen, dessen Anfangspunkt also in P liegt; die positiven Richtungen der Axen werden in der Lage $\varphi = 0$ von P nach den betreffenden Hüllbahnpunkten H'_1 und H'_2 hin gerechnet. Der Winkel des Leitstrahles r der Polkurve mit der $+X$ -Axe sei ϕ , gezählt in dem Sinne, in welchem die $+X$ -Axe durch eine Drehung von 90° in die $+Y$ -Axe gelangt.

Die Polargleichung der Polkurve erhalten wir am einfachsten und in bester Form, wenn wir alle drei Bahnen \mathfrak{K} , \mathfrak{G}_1 , \mathfrak{G}_2 benutzen wie folgt. Sei s der zum Punkt H'_1 führende Leitstrahl von \mathfrak{G}_1 im festen Koordinatensystem, σ sein Winkel mit \mathfrak{G}_1 , s_1 die Länge des konjugierten Leitstrahles und haben t , τ , t_1 die analoge Bedeutung für H'_2 , dann ist

$$\begin{aligned} \text{im } \Delta PH'_1O \quad s \sin \sigma &= R \sin \phi, \text{ im } \Delta PH'_1O \quad s \cos \sigma = r \cos \phi, \text{ somit 1) } s^2 = R^2 \sin^2 \phi + r^2 \cos^2 \phi, \\ \text{im } \Delta PH'_2O \quad t \sin \tau &= R \cos \phi, \text{ im } \Delta PH'_2O \quad t \cos \tau = r \sin \phi, \text{ somit 2) } t^2 = R^2 \cos^2 \phi + r^2 \sin^2 \phi. \end{aligned}$$

Hieraus folgt 3) $s^2 + t^2 = R^2 + r^2$ und damit der Satz:

Die Summe der Quadrate der Leitstrahlen entsprechender Punkte der Hüllbahnen \mathfrak{G}_1 , \mathfrak{G}_2 , vermindert um das Quadrat des Leitstrahles des zugehörigen Punktes der Polbahn ist konstant und gleich dem Quadrat des Kurbelradius.

Mit Rücksicht darauf, dass nach bekannten Sätzen

$$s^2 + s_1^2 = a^2 + b^2, \quad t^2 + t_1^2 = 2R^2 - a^2 - b^2 \quad \text{ist, geht 3) über in}$$

$$4) r^2 = R^2 - s_1^2 - t_1^2; \text{ es ist weiter bekanntlich}$$

$ss_1 \sin \sigma = ab, \quad tt_1 \sin \tau = \sqrt{R^2 - a^2} \sqrt{R^2 - b^2}$, aber $s \sin \sigma = R \sin \phi, \quad t \sin \tau = R \cos \phi$, demnach

$$11) s_1 = \frac{ab}{R \sin \varphi}, \quad t_1 = \frac{\sqrt{R^2 - a^2} \sqrt{R^2 - b^2}}{R \cos \varphi} \text{ und aus 4) wird}$$

$$12) r^2 = R^2 - \frac{a^2 b^2}{R^2 \sin^2 \phi^2} - \frac{(R^2 - a^2)(R^2 - b^2)}{R^2 \cos^2 \phi^2}.$$

Zwischen r und dem zugehörigen Leitstrahl \mathbf{r} der Polkurve besteht die Beziehung

$$13) \mathbf{r} = R - r, \text{ somit erhalten wir}$$

$$14) \mathbf{r} (2R - \mathbf{r}) = \frac{a^2 b^2}{R^2 \sin^2 \phi^2} + \frac{(R^2 - a^2)(R^2 - b^2)}{R^2 \cos^2 \phi^2}$$

als Polargleichung der Polkurve \mathfrak{P} .

In den rechtwinkligen Koordinaten X, Y erhält man hieraus unter Hinweglassung des gemeinschaftlichen Faktors $\sqrt{X^2 + Y^2}$, welcher den Koordinatenanfang als Punkt der Kurve charakterisiert, nach einmaligem Quadrieren

$$15) (X^2 + Y^2) [a^2 b^2 X^2 + R^2 X^2 Y^2 + (R^2 - a^2)(R^2 - b^2) Y^2]^2 = 4 R^6 X^4 Y^4$$

als Gleichung der Polkurve \mathfrak{P} .

§ 5.

Allgemeine Eigenschaften der Polkurvengleichungen. Die Gleichung (15) der Polkurve ist vom 10. Grad und enthält nur gerade Potenzen von X, Y ; die Kurve wird somit durch die Koordinatenachsen in vier kongruente Teile zerlegt, von denen jedoch nur gewisse, in den einzelnen Hauptfällen unten näher zu bestimmende Zweige bei der Bewegung zur Verwendung kommen, also die Polkurve im eigentlichen Sinne bilden.

Der Koordinatenanfang, der Mittelpunkt der Kurve, ist ein 6-facher Punkt derselben, denn in (15) fehlen alle Glieder niederer bis zu denen der 6. Ordnung; das Polynom der letzteren $(X^2 + Y^2) [a^2 b^2 X^2 + (R^2 - a^2)(R^2 - b^2) Y^2]^2 = 0$ gesetzt bestimmt die Tangenten der durch diesen Punkt gehenden Zweige, die Richtungswinkel dieser Tangenten ergeben sich auch aus der Polargleichung (14) für $\mathbf{r} = 0$, also aus $a^2 b^2 \cos^2 \phi^2 + (R^2 - a^2)(R^2 - b^2) \sin^2 \phi^2 = 0$, so dass für dieselben

$$16) \tan \phi_1^2 = - \frac{a^2 b^2}{(R^2 - a^2)(R^2 - b^2)}$$

ist. Durch den 6-fachen Punkt gehen somit höchstens vier reelle Kurvenzweige und je zwei derselben, kongruent und um 180° gegen einander verdreht, berühren sich in diesem Punkt.

Damit \mathbf{r} reell ausfalle, muss (12)

$R^2 - \frac{a^2 b^2}{R^2 \sin^2 \phi^2} - \frac{(R^2 - a^2)(R^2 - b^2)}{R^2 \cos^2 \phi^2} > 0$ sein, für die Grenzlagen reeller Werte ergibt sich also nach Wegschaffung der Nenner und Ersetzung von $\cos^2 \phi^2$ durch $1 - \sin^2 \phi^2$ die Gleichung

$$R^4 \sin^4 \phi^2 - R^2 (a^2 + b^2) \sin^2 \phi^2 = - a^2 b^2, \text{ hiersaus } (R^2 \sin^2 \phi^2 - \frac{a^2 + b^2}{2}) = \frac{c^4}{4} \text{ und endlich}$$

$$17) \sin \phi_2^2 = \frac{a^2}{R^2}, \quad \sin \phi_3^2 = \frac{b^2}{R^2}.$$

Für jeden Wert ϕ innerhalb der hierdurch bestimmten Grenzen erhält man zwei Werte \mathbf{r} , deren algebraische Summe konstant und gleich dem Durchmesser des Kurbelkreises

ist (Gl. 14); für die Grenzwinkel selbst ergibt sich nur je ein Wert $r = R$ (13), die durch sie bestimmten Leitstrahlen sind also Tangenten der Kurve.

Der Ausdruck für r kann unendlich werden sowohl für
18) $\sin \phi^2 = 0$, also auch für $\cos \phi^2 = 0$, falls also Asymptoten vorhanden sind, laufen dieselben den Koordinatenachsen parallel.

§ 6.

I. Diskussion des ersten Hauptfalles $a > c$, $R > a$. \mathfrak{H}_1 und \mathfrak{H}_2 sind Ellipsen und beide werden bei einer ganzen Umdrehung der Kurbel vollständig umhüllt, jedem Punkt P entsprechen reelle Punkte H'_2, H''_2 . Die Normalen in diesen Punkten schneiden sich immer in demselben von $\mathfrak{G}_1, \mathfrak{G}_2$ begrenzten Quadranten und zwar stets im Endlichen, wie auch das Imaginärwerden der Asymptotenrichtungen (Gleichung 10) ergibt. Hieraus und weil jedem Werte φ reelle Werte r entsprechen (φ_0 in (8) imaginär) folgt, dass die Polbahn \mathfrak{P}' eine geschlossene Mittelpunktskurve mit folgendem Verlauf ist.

Für $\varphi = 0$ ist $r = +\frac{c^2}{R}$ (9); bei wachsendem φ bleibt r pos., bis \mathfrak{H}_1 im Scheitel seiner zweiten pos., \mathfrak{H}_2 im Scheitel seiner ersten pos. Halbaxe umhüllt wird, die Polbahn also durch den Mittelpunkt geht; für diese Kurbelstellung ist somit $\tan \varphi_1 = \frac{b}{+ \sqrt{R^2 - b^2}}$ und der Kurbelradius zugleich Tangente der Polbahn im Mittelpunkt (7). Von hier aus nimmt r negative Werte an, der Pol liegt auf der Rückverlängerung des Kurbelradius und für $\varphi = 90^\circ$ ist $r = -\frac{c^2}{R}$ (9); wenn \mathfrak{H}_1 im Scheitel der ersten negativen, \mathfrak{H}_2 im Scheitel der zweiten positiven Halbaxe berührt wird, also in der Kurbelstellung $\tan \varphi_2 = \frac{-\sqrt{R^2 - a^2}}{a}$ geht die Polbahn abermals durch den Mittelpunkt und zwar in der Richtung φ_2 (7). Dann wird r wieder positiv, für $\varphi = 180^\circ$ zu $+\frac{c^2}{R}$, und von hieraus wiederholt sich der Verlauf wie von $\varphi = 0$ an.

Die so erzeugte Polbahn und ihr Spiegelbild bezüglich der x-Axe bilden die vollständige Kurve \mathfrak{P}' ; Figur 1 zeigt ein System dieser Art, die eigentliche Polbahn ist stärker ausgezogen.

Aus der im Eingange festgestellten Lage des Poles gegen die umhüllenden Geraden folgt, dass die Polkurve ein geschlossenes, ganz im 1. Quadranten der X, Y liegendes Blatt bildet. Dies ist auch leicht aus der Gleichung (14) der Polkurve zu verifizieren, indem die subtraktiven Glieder unter dem Wurzelzeichen in

$$r = R \pm \sqrt{R^2 - \frac{a^2 b^2}{R^2 \sin^2 \phi^2} - \frac{(R^2 - a^2)(R^2 - b^2)}{R^2 \cos^2 \phi^2}}$$

stets positiv sind, für jeden Wert ϕ innerhalb der durch $\sin \phi_2^2 = \frac{a^2}{R^2}$, $\sin \phi_3^2 = \frac{b^2}{R^2}$ (17) bestimmten Grenzen also zwei reelle positive Werte r erhalten werden; die Grenzlagen der Leitstrahlen selbst sind Tangenten der Kurve. Diese besteht aus je einem derartigen Blatte in jedem Quadranten und dem Koordinatenanfang, ihrem Mittelpunkt, als mehrfach-konjugierten Punkt (in (16) ϕ_1 imaginär) derselben; unendlich-ferne Punkte sind nicht vorhanden, denn die Richtungen (18) liegen ausserhalb der Grenzen (17) von ϕ , welchen reelle Werte r entsprechen.

Figur 2 zeigt die eigentliche Polkurve des in Figur 1 dargestellten Systems.

II. Diskussion des zweiten Hauptfalles $a > c$, $R < a$. \mathfrak{H}_1 ist eine Ellipse, \mathfrak{H}_2 eine Hyperbel. Es befinde sich die Kurbel zuerst in der durch den Schnittpunkt S_1 von \mathfrak{K} und \mathfrak{H}_1 bestimmten Stellung, durch welchen auch \mathfrak{H}_2 geht, wie aus der Entstehung dieser Hüllbahn und der

Orthogonalität der konfokalen Kegelschnitte \mathfrak{H}_1 , \mathfrak{H}_2 folgt, so dass dieser gemeinsame auch entsprechender Punkt der Hüllbahnen wird. Dann ist S_1 zugleich der zugehörige Punkt der Polbahn, in ihm schneidet diese den Kurbelkreis rechtwinkelig und der tangierende Radius bestimmt den Grenzwinkel für reelle Werte des Leitstrahles r (8). Bei der Weiterbewegung der Kurbel im Sinne des Pfeiles kommt dieselbe in eine Lage, in welcher \mathfrak{H}_1 im Scheitel der positiven zweiten, also \mathfrak{H}_2 im Scheitel der positiven ersten Halbaxe umhüllt wird; der Pol liegt dann im Mittelpunkt und diese Kurbelstellung, für welche $\tan \varphi_1 = \frac{b}{+ \sqrt{R^2 - b^2}}$ ist, bestimmt die Tangente der Polbahn in diesem Punkt (7). In der Kurbelstellung, für welche \mathfrak{G}_1 Tangente an \mathfrak{H}_1 im Schnittpunkt S_2 von \mathfrak{K} und \mathfrak{H}_1 ist, liegt der Pol, wie leicht ersichtlich, auf \mathfrak{K} ; die Polbahn schneidet also den Kurbelkreis nochmals, nämlich im Schnittpunkt der Normale für \mathfrak{H}_2 in S_2 mit \mathfrak{K} .

Für die folgenden Stellungen der Kurbel rückt der Berührungspunkt von \mathfrak{G}_2 auf \mathfrak{H}_2 immer weiter fort, der Pol entfernt sich also auf der zugehörigen Normale für \mathfrak{H}_1 immer mehr, bis die Kurbel in den Schnittpunkt K der Asymptote von \mathfrak{H}_2 mit \mathfrak{K} gelangt, dann ist \mathfrak{G}_1 gemeinsame Tangente für \mathfrak{K} und \mathfrak{H}_1 in K und H und der Pol ist auf der Normale für \mathfrak{H}_1 in H ins Unendliche gerückt; diese Normale ist also Asymptote der Polbahn, ihre Richtung parallel derjenigen der Asymptote für \mathfrak{H}_2 durch K (10). Bei der Weiterbewegung gelangt \mathfrak{G}_1 in frühere Lagen, der Berührungspunkt von \mathfrak{G}_2 mit \mathfrak{H}_2 kehrt längs des anderen Halbstrahles der Asymptote aus dem Unendlichen zurück, bis die Kurbel in den Schnittpunkt S_2 von \mathfrak{H}_1 und \mathfrak{K} kommt, in welchem auch der eben erzeugte Teil des zweiten Zweiges von \mathfrak{H}_2 endigt. Der Pol beschreibt bei dieser Bewegung, aus dem Unendlichen zurückkehrend, einen weiteren Zweig der Polbahn, der ebenfalls in S_2 endigt, \mathfrak{K} rechtwinklig schneidend.

Bei der Bewegung der Kurbel durch den Bogen $S_2 S_3$ sind \mathfrak{G}_1 und \mathfrak{G}_2 ohne Führung, es tritt also eine Diskontinuität der Bewegung ein, bis die Kurbel nach S_3 gelangt, von wo aus der Verlauf analog dem eben beschriebenen von S_1 aus ist; auf dem Bogen $S_4 S_1$ tritt wieder Diskontinuität der Bewegung ein; diesen Diskontinuitäten entsprechen Unterbrechungen der Stetigkeit im Verlauf der Polbahn. — In Figur 3 sind die durch die stetige Bewegung der Kurbel durch den Bogen $S_1 S_2$ erzeugten Teile von \mathfrak{K} , \mathfrak{H}_1 , \mathfrak{H}_2 und \mathfrak{P} stärker ausgezogen, jedoch auch die übrigen Teile derselben, insbesondere die vollständige Kurve \mathfrak{P}' gezeichnet; es treten die in den Entfernungen $\pm \frac{c_2}{R}$ von O auf der Abscissenaxe gelegenen Punkte C_1 , C_2 als konjugierte Punkte der Kurve hinzu (9).

Die Polkurve geht vom Koordinatenanfang P , ihrem Mittelpunkt, in der Richtung $\tan \varphi_1 = \frac{ab}{+ \sqrt{(a^2 - R^2)(R^2 - b^2)}}$ (16) aus, berührt den Leitstrahl von der Richtung $\sin \varphi_3 = \frac{b}{R}$, welcher die Grenzlage für reelle r angiebt, in der Entfernung R (17) und nähert sich allmählich einer Asymptote, welche parallel der Y -Axe verläuft (18), von dieser um den Abstand der Berührungspunkte K , H der gemeinsamen Tangente für \mathfrak{K} und \mathfrak{H}_1 entfernt. Dieser Zweig entspricht dem von S_1 ausgehenden der Polbahn; zu ihm tritt ein zweiter, entsprechend dem von S_2 ausgehenden der Polbahn, welcher vom Unendlichen längs derselben Asymptote in entgegengesetzter Richtung herkommt und im Koordinatenanfang in der Richtung

$$\tan \varphi_1 = \frac{ab}{- \sqrt{(a^2 - R^2)(R^2 - b^2)}}$$

endigt. — Die so aus zwei, bezw. dem 1. und 2. Quadranten angehörigen Zweigen bestehende Polkurve bildet den vierten Teil der in Fig. 4 gezeichneten vollständigen Kurve \mathfrak{P} und ist stark ausgezogen.

Die Gleichungen der Asymptoten von \mathfrak{P} und \mathfrak{P}' sollen im folgenden Paragraphen abgeleitet werden.

Aus (12) und (13) folgt, dass jedem Werte ϕ von ϕ_3 an zwei positive Werte r entsprechen, welche demselben Kurvenzweige angehören, bis für $\phi = \phi_1$ $r = \left\{ \begin{smallmatrix} 0 \\ 2R \end{smallmatrix} \right.$ wird, von hier aus wird der eine Wert r negativ und beginnt einen zweiten Zweig, der andere positive Wert setzt den ersten Zweig fort. — Aus der Entstehung des Bogens S_1O der Polbahn und damit aus seiner Lage gegen die Tangenten in S_1 und O ist leicht ersichtlich, dass die Krümmung in S_1 konvex, in O konkav gegen die $+y$ -Achse sein muss, was nur möglich, wenn zwischen beiden Punkten eine ungerade Anzahl und mindestens ein Wendepunkt gelegen ist. Der nämliche Schluss gilt für den entsprechenden, zwischen P und der Grenztangente (ϕ_3) gelegenen Bogen der Polkurve.

III. Diskussion des dritten Hauptfalles $a < c$, $R < a$. \mathfrak{H}_1 und \mathfrak{H}_2 sind Hyperbeln. Befindet sich die Kurbel im Anfange auf der $+x$ -Achse in der Stellung α , so entsprechen dieser reelle, im Endlichen liegende Punkte a_1, a_2 auf $\mathfrak{H}_1, \mathfrak{H}_2$ und der Punkt a in der Entfernung $\frac{c^2}{R}$ von O auf der $+x$ -Achse als Pol.

Fig. 5 u. 6.

Bei der Drehung im Sinne des Pfeiles bewegt sich H_2' nach dem Scheitel von \mathfrak{H}_2 hin, während H_1' , und damit auch der Pol \mathfrak{P}' auf der Normale des betreffenden Punktes H_2' , immer mehr vorrückt. Gelangt die Kurbel in die Stellung β , nämlich in den Schnittpunkt der Asymptote von \mathfrak{H}_1 mit \mathfrak{K} , so fällt \mathfrak{G}_1 mit dem Kurbelradius in diese Asymptotenrichtung und \mathfrak{G}_2 wird gemeinsame Tangente von \mathfrak{K} und \mathfrak{H}_2 , letztere Kurve in b_2 berührend; H_1' ist in den unendlich-fernen Punkt $b_{1\infty}$ gerückt und der Pol liegt im Unendlichen auf der Normale für \mathfrak{H}_2 in b_2 , welche somit Asymptote der Polbahn und mit der betreffenden Asymptote von \mathfrak{H}_1 parallel ist (10).

Bei der Weiterbewegung kommt \mathfrak{G}_2 und damit H_2' in frühere Lagen, H_1' und \mathfrak{P}' kehren längs ihrer betr. Asymptoten auf der entgegengesetzten Seite aus dem Unendlichen zurück. Nachdem die Kurbel die Stellung γ in der Verlängerung von $a_2 a$ passiert hat, in welcher der Berührungspunkt c_2 auf \mathfrak{H}_2 mit a_2 zusammenfällt, rückt H_2' , und damit auch der Pol auf der betr. Normale von \mathfrak{H}_1 , immer weiter. Kommt dann die Kurbel nach δ , in den Schnittpunkt der Asymptote für \mathfrak{H}_2 mit \mathfrak{K} , so fällt \mathfrak{G}_2 mit dem Kurbelradius in diese Asymptote, \mathfrak{G}_1 ist gemeinsam Tangente für \mathfrak{H}_1 und \mathfrak{K} in d_1 und δ , und \mathfrak{H}_2 wird in ihrem unendlich-fernen Punkte $d_{2\infty}$ berührt; der Pol liegt dann im unendlich-fernen Punkt d_{∞} der Normale in d_1 , welche somit eine Asymptote von \mathfrak{P}' ist, parallel derjenigen von \mathfrak{H}_2 (10).

Die Weiterbewegung der Kurbel lässt \mathfrak{G}_1 frühere Lagen annehmen, H_1' also den Bogen $d_1 e_1$ nochmals durchlaufen, während H_2' und \mathfrak{P}' längs ihrer Asymptoten auf der entgegengesetzten Seite aus dem Unendlichen zurückkehren.

Vom Punkte ϵ aus ist der weitere Verlauf der Bewegung und damit die Erzeugung von Hüllbahn und Polbahn genau wie von a aus. Die Bewegung bei einer vollen Umdrehung, während welcher die in Figur 5 stark gezeichneten Zweige erzeugt werden, ist vermittelt der unendlich-fernen Punkte eine kontinuierliche; wie auch aus den früheren Formeln folgt, indem jedem Winkel φ ein reeller Wert r entspricht (8). Der Mittelpunkt ist ein konjugierter Punkt der Kurve (7). Wir übersehen ferner, dass es dem oben verfolgten Verlaufe der Bewegung völlig äquivalent, also z. B. bei der Ausführung eines diese Bewegung darstellenden Mechanismus ausreichend ist, von \mathfrak{H}_1 die endlichen Bogen $\binom{a_1}{m_1} n_1, \binom{c_1}{e_1} d_1$, von \mathfrak{H}_2 jene $\binom{a_2}{c_2} b_2, \binom{e_2}{m_2} l_2$ herzustellen und auf ihnen in leicht ersichtlicher Weise ein mit der Kurbel verbundenes Kreuz zu führen, dessen Arme \mathfrak{G}_1 bzw. \mathfrak{G}_2 ersetzen und die Längen $c_{1\gamma}$ bzw. $c_{2\gamma}$ haben.

In Figur 6 sind die im ersten Quadranten der X, Y liegenden beiden Zweige der Kurve \mathfrak{P} gezeichnet; die eigentliche Polkurve besteht, wie aus der Erzeugung ersichtlich, aus den Zweigen

$\mathfrak{P}_{11}, \mathfrak{P}_{22}, \mathfrak{P}_{13}, \mathfrak{P}_{24}$, welche in dieser Reihenfolge zur Verwendung kommen, wobei die zweite Ziffer den Quadranten bedeutet, in welchen der betreffende Zweig liegt. Jeder der beiden Axen X, Y parallel läuft ein Asymptotenpaar (18), und zwar in Abständen, welche gleich den Strecken $\beta b_2, \nu n_1$ zwischen den Berührungspunkten der gemeinsamen Tangenten für $\mathfrak{K}, \mathfrak{S}_2$ bzw. $\mathfrak{K}, \mathfrak{S}_1$ sind, wie aus dem über den Verlauf der Asymptoten der Polbahn Gesagten folgt.

Für jeden Winkel ϕ ergeben sich zwei reelle Werte r (14, 17) und es gehören analytisch genommen den einzelnen Intervallen die folgenden Zweige an:

$\phi = 0$ bis 90° $\mathfrak{P}_{12}, \mathfrak{P}_{13}$; $\phi = 90^\circ$ bis 180° $\mathfrak{P}_{22}, \mathfrak{P}_{14}$; $\phi = 180^\circ$ bis 270° $\mathfrak{P}_{23}, \mathfrak{P}_{11}$; $\phi = 270^\circ$ bis 360° $\mathfrak{P}_{24}, \mathfrak{P}_{12}$. Der Koordinatenanfang ist ein mehrfach-konjugierter Punkt der Kurve (16).

§ 7.

I. Die Gleichungen der Asymptoten der Polbahnen. Die Asymptoten von \mathfrak{P} sind parallel den Axen X, Y; die durch sie bestimmten Abschnitte Y_0, X_0 auf diesen Axen sind somit die Ordinate resp. die Abscisse des auf der betreffenden Asymptote liegenden unendlich-fernen Punktes der Kurve, also

$$X_0 = \lim_{\phi=90^\circ} (r \cos \phi), \quad Y_0 = \lim_{\phi=0} (r \sin \phi), \quad \text{und weil}$$

$$r \cos \phi = R \cos \phi \pm \sqrt{R^2 \cos^2 \phi - \frac{a^2 b^2}{R^2} \cot^2 \phi - \frac{(R^2 - a^2)(R^2 - b^2)}{R^2}},$$

$$r \sin \phi = R \sin \phi \pm \sqrt{R^2 \sin^2 \phi - \frac{a^2 b^2}{R^2} - \frac{(R^2 - a^2)(R^2 - b^2)}{R^2} \tan^2 \phi}$$

ist, so werden

$$19) X_0 = \pm \sqrt{-\frac{(R^2 - a^2)(R^2 - b^2)}{R^2}}, \quad Y_0 = \pm \sqrt{-\frac{a^2 b^2}{R^2}}$$

die Gleichungen der vier Asymptoten von \mathfrak{P} .

Die Asymptoten von \mathfrak{P}' sind Parallelen zu den Asymptoten von $\mathfrak{S}_1, \mathfrak{S}_2$ in den Abständen Y_0, X_0 ; nun hat die Gleichung einer Geraden, welche unter dem Winkel α gegen die Abscissenaxe geneigt und deren Entfernung vom Koordinatenanfang d ist, die Form $x \sin \alpha - y \cos \alpha + d = 0$, ferner haben wir für die Parallelen zu den Asymptoten von \mathfrak{S}_1

$$\sin \alpha = \sqrt{-\frac{b^2}{c^2}}, \quad \cos \alpha = \frac{a}{c}, \quad d = \sqrt{-\frac{a^2 b^2}{R^2}},$$

für die Parallelen zu den Asymptoten von \mathfrak{S}_2

$$\sin \alpha = \sqrt{-\frac{R^2 - a^2}{c^2}}, \quad \cos \alpha = \sqrt{-\frac{R^2 - b^2}{c^2}}, \quad d = \sqrt{-\frac{(R^2 - b^2)(R^2 - a^2)}{R^2}},$$

und wenn wir beachten, dass es ausreichend ist, bei \sin und \cos alle Vorzeichenkombinationen zuzulassen, d aber positiv zu nehmen, so sind folglich

20) $\pm x \sqrt{-b^2} \pm y a + \frac{c a}{R} \sqrt{-b^2} = 0, \quad \pm x \sqrt{-(R^2 - a^2)} \pm y \sqrt{R^2 - b^2} + \frac{c}{R} \sqrt{-(R^2 - a^2)(R^2 - b^2)} = 0$
die Gleichungen der Asymptoten von \mathfrak{P}' .

II. Wir definieren den Drehungswinkel ϑ der beweglichen Ebene als den Winkel, welchen die Gerade \mathfrak{G}_1 mit der $+x$ -Axe bildet, gezählt im Sinne der früher festgesetzten positiven Drehung, dann ergeben sich Relationen zwischen ϑ und ϕ in folgender Weise. Die aus den Brennpunkten F_1, F_2 auf \mathfrak{G}_1 gefällten Senkrechten haben die Längen

$$F_1 L_1 = R \sin \phi + c \sin \vartheta, \quad F_2 L_2 = R \sin \phi - c \sin \vartheta,$$

das Produkt beider ist konstant gleich b^2 , also 1) $R^2 \sin^2 \phi - c^2 \sin^2 \vartheta = b^2$; analog ergibt sich, wenn man \mathfrak{G}_2 berücksichtigt, 2) $R^2 \cos^2 \phi - c^2 \cos^2 \vartheta = R^2 - a^2$ und aus beiden Gleichungen durch Subtraktion

$$21) R^2 \cos 2\phi - c^2 \cos 2\vartheta = R^2 - a^2 - b^2.$$

Fig. 9.

Die Gerade \mathcal{G}_1 ist Tangente an \mathcal{H}_1 im Punkt $H'_1(x_1, y_1)$, folglich $\tan \vartheta = -\frac{b^2}{a^2} \frac{x_1}{y_1}$ und mit Berücksichtigung der Werte (3) der Koordinaten

$$22) \tan \vartheta = -\cot \varphi \frac{b^2 - q^2 \tan \varphi}{a^2 + q^2 \tan \varphi}, \quad q^2 = \pm \sqrt{(R^2 - a^2) b^2 \cos^2 \varphi + (R^2 - b^2) a^2 \sin^2 \varphi}.$$

Hieraus ergibt sich weiter, indem $\phi = \varphi + \vartheta$, $\tan \phi = \frac{\tan \varphi - \tan \vartheta}{1 + \tan \varphi \tan \vartheta}$ ist,

$$23) \tan \varphi = \frac{b^2 \cos^2 \varphi + a^2 \sin^2 \varphi}{q^2 + c^2 \sin \varphi \cos \varphi}.$$

Durch die vorstehenden Relationen zwischen ϑ , φ , ϕ sind die Beziehungen zwischen den Geschwindigkeiten im System bestimmt.

§ 8.

Kinematische Bestimmung der Krümmungsradien der Polbahnen. Die Normalen der Hüllbahnen $\mathcal{H}_1, \mathcal{H}_2$ in den entsprechenden Punkten H'_1, H'_2 bestimmen in ihrem Durchschnitt den momentanen Pol \mathcal{S}' des Systems, welcher zugleich auf dem durch P gehenden Radius von \mathcal{K} als Normale dieser Roulette liegt. Auf jenen Normalen seien für die betreffenden Stellen der Hüllbahnen E_1, E_2 die Krümmungsmittelpunkte; dieselben sind in der Figur unter Benutzung der Brennpunkte F_1, F_2 mittelst der bekannten Zickzackkonstruktion ermittelt. Alsdann geht nach einem Satze der kinematischen Geometrie durch \mathcal{S}', E_1, E_2 der momentane Wendekreis der umgekehrten Bewegung für dieses System, welcher somit vollständig bestimmt ist. Der durch \mathcal{S}' gehende Durchmesser dieses Kreises ist Normale der Polbahn in \mathcal{S}' , die in diesem Punkte zum Durchmesser senkrechte Gerade \mathcal{T} also Tangente von \mathcal{P}' . Zwischen den Krümmungsradien P', P von Polbahn und Polkurve an der betreffenden Stelle und dem Durchmesser H des Wendekreises besteht alsdann die Beziehung

$$1) \frac{1}{P'} - \frac{1}{P} = \frac{1}{H},$$

mit Rücksicht darauf, dass im Falle der Figur beide Krümmungsmittelpunkte von \mathcal{S}' aus auf derselben Seite der Normale liegen.

Zu einer Konstruktion des Krümmungsmittelpunktes M' der Polbahn und damit zu einem Ausdruck für P' gelangen wir nach Herrn Aronhold, indem wir die Kurve \mathcal{P}' als Roulette eines zweiten kinematischen Systems herstellen, für welches die Evoluten von Hüllbahnen des ersten Systems die Hüllbahnen abgeben. In der That, es bewege sich die gerade Linie $\mathcal{S}'H'_1$ so, dass der Punkt \mathcal{S}' auf \mathcal{P}' geleitet, während die Linie selbst immer Normale von \mathcal{H}_1 bleibt, dann ist auch eine mit dieser Geraden fest verbundene, zu ihr in \mathcal{S}' senkrechte Gerade $\mathcal{S}'H'_2$ stets Normale von \mathcal{H}_2 , wie aus dem Zusammenhange entsprechender Punkte von $\mathcal{P}', \mathcal{H}_1, \mathcal{H}_2$ ersichtlich ist. Wir erhalten mit anderen Worten ein System, in welchem die Evoluten $\mathcal{C}_1, \mathcal{C}_2$ von $\mathcal{H}_1, \mathcal{H}_2$ Hüllbahnen von zwei zu einander senkrechten fest verbundenen Geraden sind, deren Schnittpunkt \mathcal{S}' die Kurve \mathcal{P}' beschreibt, dergestalt, dass diesem Punkte \mathcal{S}' die oben benutzten Krümmungsmittelpunkte E_1, E_2 als entsprechende Punkte der Hüllbahnen $\mathcal{C}_1, \mathcal{C}_2$ zugehören. Die Normalen dieser Kurven in jenen Punkten, d. h. also Senkrechte zu den Geraden H'_1E_1, H'_2E_2 in den Punkten E_1, E_2 schneiden einander im Pol p des zweiten Systems. Auf diesen Normalen liegen die Krümmungsmittelpunkte M_1, M_2 der Evoluten; sie werden bekanntlich konstruiert, indem wir $E_1M_1 = 3A_1E_1, E_2M_2 = 3A_2E_2$ machen, wenn A_1, A_2 die Punkte sind, in denen die betreffenden Normalen die Leitstrahlen H'_1O, H'_2O schneiden.

Die so erhaltenen Punkte p , M_1 , M_2 bestimmen den momentanen Wendekreis der umgekehrten Bewegung für das zweite System. Der Normalstrahl $p\mathfrak{S}'$ der Roulette \mathfrak{R}' desselben schneide jenen Kreis in V' , machen wir dann $pW = pV'$, so ist W der entsprechende Punkt des Wendekreises der direkten Bewegung; wird ferner $\mathfrak{S}'q = \mathfrak{S}'p$ gemacht, so sind W , p , \mathfrak{M}' , q vier harmonische Punkte und zwar W , \mathfrak{M}' , ein zusammengehöriges Paar, folglich haben wir $p\mathfrak{S}'^2 = p\mathfrak{M}'$. $\mathfrak{S}'W$ oder

$$\text{II) } P' = \frac{H^2}{\mathfrak{S}'W};$$

wird also über $\mathfrak{S}'W$ als Durchmesser ein Halbkreis beschrieben und von \mathfrak{S}' aus $\mathfrak{S}'p$ als Sehne eingetragen, so ist der Fusspunkt des aus dem anderen Endpunkt S dieser Sehne auf $\mathfrak{S}'W$ gefällten Lotes der Krümmungsmittelpunkt \mathfrak{M}' der Polbahn \mathfrak{R}' .

Aus den Grundgleichungen I, II folgt da nach Konstruktion

$$\mathfrak{S}'W = p\mathfrak{S}' + pV' = 2p\mathfrak{S}' + \mathfrak{S}'V' \text{ ist,}$$

$$\text{Ia) } P' = \frac{H^2}{2H + \mathfrak{S}'V'}, \text{ IIa) } P = \frac{H^2}{H + \mathfrak{S}'V'}.$$

Der Winkel zwischen der Tangente der Polbahn \mathfrak{R}' in \mathfrak{S}' und dem Leitstrahl $O\mathfrak{S}'$ werde mit α bezeichnet und eindeutig definiert als der Winkel des Leitstrahles mit derjenigen Richtung der Tangente, in welcher der Pol sich weiter bewegt, von dieser aus im Sinne der stattfindenden Drehung gezählt; dann gilt für die Roulette \mathfrak{R} des ersten Systems, mit Rücksicht, darauf dass $\alpha < 180^\circ$, die Entfernung vom Pol zum Krümmungsmittelpunkt der Roulette also positiv zu nehmen ist und weil der Roulettenpunkt P und der zugehörige Krümmungsmittelpunkt O auf derselben Seite des Normalstrahles von \mathfrak{S}' aus liegen:

$$\left(\frac{1}{O\mathfrak{S}'} - \frac{1}{P\mathfrak{S}'}\right) \sin \alpha = \left(\frac{1}{-r} - \frac{1}{R-r}\right) \sin \alpha = \frac{1}{H}, \text{ somit}$$

$$\text{III) } H = \frac{r(r-R)}{R \sin \alpha}.$$

Ist v' der Durchschnittspunkt von OP mit dem Wendekreis der umgekehrten Bewegung für das erste System, so haben wir auch, mit III) identisch,

$$\text{IIIa) } Ov' = \frac{O\mathfrak{S}'^2}{OP} = \frac{r^2}{R}.$$

Ziehen wir den Durchmesser pD des Wendekreises des zweiten Systems, verbinden D mit V' und M_2 , legen durch \mathfrak{S}' eine Parallele $\mathfrak{S}'C$ zu E_2M_2 , durch C eine Parallele CG zu DV' , so ist $\mathfrak{S}'V' = \mathfrak{S}'G + GV' = C\mathfrak{S}' \cos C\mathfrak{S}'G + CD \sin C\mathfrak{S}'G$; es ist aber Winkel $C\mathfrak{S}'G =$ Winkel $(\mathfrak{R}, \mathfrak{S}'E_2) = \alpha - \phi$, denn die Schenkel dieser Winkel stehen senkrecht aufeinander, folglich

$$\text{IV) } \mathfrak{S}'V' = E_2M_2 \cos(\alpha - \phi) + E_1M_1 \sin(\alpha - \phi).$$

Ferner haben wir
$$\left. \begin{aligned} E_1M_1 &= 3A_1E_1 = 3E_1H_1 \text{ tang } OH_1E_1 \\ E_2M_2 &= 3A_2E_2 = 3E_2H_2 \text{ tang } OH_2E_2 \end{aligned} \right\} \text{ und ziehen wir durch } O \text{ Parallelen}$$
 mit PH_1 , PH_2 , so ist in entstehenden rechtwinkligen Dreiecken

$$\frac{\text{tang } OH_1E_1}{\cot \phi} = \frac{-r}{R}, \quad \frac{\text{tang } OH_2E_2}{\text{tang } \phi} = \frac{-r}{R};$$

setzen wir die Krümmungsradien der Hüllbahnen \mathfrak{S}_1 , \mathfrak{S}_2 , nämlich $H_1E_1 = \rho_1$, $H_2E_2 = \rho_2$, so folgt

$$\text{V) } E_1M_1 = -3\rho_1 \frac{r}{R} \cot \phi, \quad E_2M_2 = -3\rho_2 \frac{r}{R} \text{ tang } \phi.$$

Wir verbinden den Pol p des zweiten Systems mit P und setzen Winkel $pP\mathfrak{S}' = \lambda$, dann ist im $\Delta pP\mathfrak{S}'$

$$pP = p\mathfrak{S}' \cdot \frac{\sin(\alpha - 90^\circ)}{\sin \lambda} = -H \frac{\cos \alpha}{\sin \lambda},$$

ferner VI) $\rho_1 = pP \sin(\lambda + \phi)$, $\rho_2 = pP \cos(\lambda + \phi)$; somit folgt aus V)

Va) $E_1 M_1 = 3 H \frac{r \cos \alpha}{R \sin \lambda} \cot \phi \sin (\lambda + \phi)$, $E_2 M_2 = 3 H \frac{r \cos \alpha}{R \sin \lambda} \tan \phi \cos (\lambda + \phi)$,
und damit aus IV)

$$\mathcal{S}'V' = 3 H \frac{r \cos \alpha}{R \sin \lambda} [\cot \phi \sin (\lambda + \phi) \sin (\alpha - \phi) + \tan \phi \cos (\lambda + \phi) \cos (\alpha - \phi)].$$

Weiter lösen wir die runden Klammern auf und ziehen aus der grossen Parenthese $\sin \lambda \cos \alpha$ heraus, dann erhalten wir nach einigen Reduktionen

$$\text{IVa) } \mathcal{S}'V' = 3 H \frac{r}{R} \cos \alpha^2 [\tan \alpha (\cot \lambda + 2 \cot 2 \phi) - 1].$$

Mit Rücksicht auf III) und IVa) folgt alsdann aus Ia) und IIa)

$$24) \begin{cases} P' = \frac{r(r-R)}{\sin \alpha [2R + 3r \cos \alpha^2 (\tan \alpha (\cot \lambda + 2 \cot 2 \phi) - 1)]} \\ P = \frac{r(r-R)}{\sin \alpha [R + 3r \cos \alpha^2 (\tan \alpha (\cot \lambda + 2 \cot 2 \phi) - 1)]} \end{cases}$$

Eine Beziehung zwischen λ und ϕ ergibt sich wie folgt. Es ist nach VI) $\frac{\rho_1}{\rho_2} = \tan (\lambda + \phi)$; werden (wie in § 4) die Längen der zu $O H_1$ bzw. $O H_2$ konjugierten Leitstrahlen von \mathcal{S}_1 bzw. \mathcal{S}_2 mit s_1 und t_1 bezeichnet und setzen wir zur Abkürzung $R^2 - a^2 = b_1^2$, $R^2 - b^2 = a_1^2$, so ist bekanntlich $\rho_1 = \frac{s_1^3}{a b}$, $\rho_2 = \frac{t_1^3}{a_1 b_1}$ und nach Gl. (11) $s_1 = \frac{a b}{R \sin \phi}$, $t_1 = \frac{a_1 b_1}{R \cos \phi}$, folglich $\tan (\lambda + \phi) = \frac{a^2 b^2}{a_1^2 b_1^2} \cdot \frac{1}{\tan \phi^3}$. Wir entwickeln links und lösen noch $\tan \lambda$ auf, dann ergibt sich

$$25) \tan \lambda = \frac{1}{\sin \phi \cos \phi} \frac{a^2 b^2 \cos \phi^4 - a_1^2 b_1^2 \sin \phi^4}{a^2 b^2 \cos \phi^2 + a_1^2 b_1^2 \sin \phi^2}$$

Zu einer Relation zwischen α und λ gelangen wir durch das $\Delta p \mathcal{S}'$, in diesem ist

$$\frac{\cot \lambda}{\cot (\alpha - 90^\circ)} = \frac{Pv'}{\mathcal{S}'v'}, \text{ folglich mit Rücksicht auf IIIa) } \frac{\cot \lambda}{-\tan \alpha} = \frac{R - \frac{r^2}{R}}{R - r}, \text{ so dass wir erhalten}$$

$$26) \tan \alpha = \frac{r}{R+r} \cot \lambda.$$

Durch die Gl. (25) und (26) ist es ermöglicht, aus Gl. (24) α und λ zu eliminieren. Wir finden zunächst

$$\begin{aligned} \tan \alpha &= \frac{r}{R+r} \sin \phi \cos \phi \frac{a^2 b^2 \cos \phi^2 + a_1^2 b_1^2 \sin \phi^2}{a^2 b^2 \cos \phi^4 - a_1^2 b_1^2 \sin \phi^4}, \text{ hieraus} \\ \left. \begin{aligned} \sin \alpha^2 &= \frac{r^2 \sin \phi^2 \cos \phi^2 (a^2 b^2 \cos \phi^2 + a_1^2 b_1^2 \sin \phi^2)^2}{N} \\ \cos \alpha^2 &= \frac{(R+r)^2 (a^2 b^2 \cos \phi^4 - a_1^2 b_1^2 \sin \phi^4)^2}{N} \end{aligned} \right\} N = \begin{aligned} &r^2 \sin \phi^2 \cos \phi^2 (a^2 b^2 \cos \phi^2 + a_1^2 b_1^2 \sin \phi^2)^2 \\ &+ (R+r)^2 (a^2 b^2 \cos \phi^4 - a_1^2 b_1^2 \sin \phi^4)^2 \end{aligned} \end{aligned}$$

und weiter nach einigen Reduktionen

$$\cos \alpha^2 [-1 + \tan \alpha (\cot \lambda + 2 \cot 2 \phi)] = (R+r) \frac{r a^2 b^2 a_1^2 b_1^2 \sin \phi^2 \cos \phi^2 - R (a^2 b^2 \cos \phi^4 - a_1^2 b_1^2 \sin \phi^4)^2}{r^2 \sin \phi^2 \cos \phi^2 (a^2 b^2 \cos \phi^2 + a_1^2 b_1^2 \sin \phi^2)^2 + (R+r)^2 (a^2 b^2 \cos \phi^4 - a_1^2 b_1^2 \sin \phi^4)^2}$$

Die Substitution der betreffenden Ausdrücke in Gl. (24) liefert dann

$$24a) P' = \frac{Z}{N_1}, P = \frac{Z}{N_2}, \text{ wenn wir setzen}$$

$$\left\{ \begin{aligned} &\frac{r-R}{\sin \phi \cos \phi (a^2 b^2 \cos \phi^2 + a_1^2 b_1^2 \sin \phi^2)} [(R+r)^2 (a^2 b^2 \cos \phi^4 - a_1^2 b_1^2 \sin \phi^4)^2 + r^2 \sin \phi^2 \cos \phi^2 (a^2 b^2 \cos \phi^2 + a_1^2 b_1^2 \sin \phi^2)^2]^{3/2} = Z, \\ &R(R+r)(2R-r)(a^2 b^2 \cos \phi^4 - a_1^2 b_1^2 \sin \phi^4)^2 + r^2 \sin \phi^2 \cos \phi^2 [2R(a^2 b^2 \cos \phi^2 + a_1^2 b_1^2 \sin \phi^2)^2 + 3(R+r)a^2 b^2 a_1^2 b_1^2] = N_1, \\ &R(R+r)(R-2r)(a^2 b^2 \cos \phi^4 - a_1^2 b_1^2 \sin \phi^4)^2 + r^2 \sin \phi^2 \cos \phi^2 [R(a^2 b^2 \cos \phi^2 + a_1^2 b_1^2 \sin \phi^2)^2 + 3(R+r)a^2 b^2 a_1^2 b_1^2] = N_2. \end{aligned} \right.$$

Diese Ausdrücke enthalten noch die beiden Variablen r und ψ , welche durch die Gl. (12) verbunden sind; es würde am geeignetsten sein, ψ zu eliminieren; auf die Ausführung möge hier um so mehr verzichtet werden, als eine Diskussion der in komplizierter Form erscheinenden Resultate, insbesondere die Erledigung der für den Verlauf der Bewegung so wichtigen Frage nach Zahl und Lage der Wendepunkte der Polbahnen, im allgemeinen nicht durchführbar erscheint. Diese Frage erfordert, wenn wir von den unendlich-fernen Punkten absehen, zu untersuchen, wie oft und wann N_1 und N_2 zu Null werden. In dem Falle $a > c$, $R > a$ ist r stets kleiner als R , die Bestandteile des Ausdruckes N_1 sind stets positiv, N_1 kann für keinen reellen Wert r verschwinden — die Polbahn besitzt keine Wendepunkte.

Für die Herleitung der Resultate in Specialfällen, sowie für eine numerische Berechnung von Krümmungsradien in einem System der behandelten Art wird es sich empfehlen, an die Formeln (24, 25, 26) anzuknüpfen, da die Komplikation in dem Ausdrucke für $\tan \lambda$ begründet ist; es ist dem Verfasser nicht gelungen, abgesehen vom gewöhnlichen Kurbelgetriebe ($\tan \lambda = \cot \psi$, bzw. $\tan \lambda = -\tan \psi$) und dem Specialfall $R^2 = a^2 + b^2$ ($\tan \alpha = 2 \cot 2\psi$) einen weiteren zu finden, welcher eine wesentliche Vereinfachung der Resultate des allgemeinen Problems gezeigt hätte. Für diesen Specialfall sollen noch kurz die hauptsächlichsten Resultate, so weit es der verfügbare Raum gestattet, angegeben werden.

§ 9.

Der Specialfall $R^2 = a^2 + b^2$. Für denselben fallen die beiden Hüllbahnen \mathfrak{H}_1 und \mathfrak{H}_2 in eine Kurve \mathfrak{H} zusammen (§ 1); je nachdem dieselbe eine Ellipse oder eine Hyperbel ist, soll das System kurz als elliptisches bzw. hyperbolisches bezeichnet werden. Dann folgt aus dem Werte für R , dass zu jeder Ellipse ein reeller Kreis gehört, welche zusammen ein elliptisches System der angegebenen Art bilden; zu einer Hyperbel gehört nur so lange ein reeller Kreis, als der Asymptotenwinkel kleiner als 90° ist, so dass im Grenzfall der gleichseitigen Hyperbel der Kurbelkreis sich auf den Mittelpunkt reduciert.

1. Wir haben zunächst

$$r = \frac{c^2 b^2 \cos \varphi^2 - a^2 \sin \varphi^2}{R b^2 \cos \varphi^2 + a^2 \sin \varphi^2} \text{ als Polargleichung,}$$

$c^4(b^2 x^2 - a^2 y^2)^2 = R^2(x^2 + y^2)(b^2 x^2 + a^2 y^2)^2$ als Gl. der Polbahn in rechtwinkligen Koordinaten.

Die letztere Gleichung ist vom 6. Grade, enthält nur gerade Potenzen von x , y und nur Glieder von der 4. Ordnung in den Variablen an; die Kurve wird durch die Koordinatenachsen in vier kongruente Teile zerlegt, der Mittelpunkt ist ein vierfacher Punkt, die Tangenten der durch ihn gehenden Zweige sind durch $\tan \varphi_1^2 = \frac{b^2}{a^2}$ bestimmt. Für jeden Wert φ ergibt die Polargleichung einen reellen Wert r , welcher für $\tan \varphi_2^2 = -\frac{b^2}{a^2}$ unendlich-gross wird, wodurch die Asymptotenrichtungen bestimmt sind.

a) Im elliptischen System ist die Polbahn eine ganz im Endlichen (φ_2 imaginär) liegende, geschlossene Kurve; der Faktor bei $\frac{c^2}{R}$ ist stets als echter Bruch und $= 1$ für $\varphi = 0$, hierfür erlangt r einen grössten pos. Wert $+\frac{c^2}{R}$, dann nimmt r mit wachsendem φ ab, bis für $\varphi = \varphi_1$ die Kurve in der durch die betreffende Kurbelstellung bestimmten Richtung durch den Mittelpunkt geht; alsdann wird r neg. und erreicht für $\varphi = 90^\circ$ einen grössten neg. Wert $-\frac{c^2}{R}$. Der weitere Verlauf ergibt sich aus der symmetrischen Lage der Kurve gegen die Koordinatenachsen. Je nachdem $\frac{c^2}{R} \begin{matrix} < \\ > \end{matrix} b$ d. h. $a^2 \begin{matrix} < \\ > \end{matrix} 3b^2$ oder $R \begin{matrix} < \\ > \end{matrix} 2b$ ist, liegt die Polbahn ganz innerhalb der Ellipse, berührt diese in den Scheiteln der zweiten Hauptaxe oder schneidet \mathfrak{H} in je einem Punkt in jedem Quadranten in symmetrischer Lage gegen die Axen.

b) Für das hyperbolische System ist $\frac{b^2 \cos \varphi^2 - a^2 \sin \varphi^2}{b^2 \cos \varphi^2 + a^2 \sin \varphi^2}$ ein unechter Bruch, für $\varphi = 0$ hat also r einen kleinsten pos. Wert $+\frac{c^2}{R}$, dann wächst r mit wachsendem φ und wird für φ_2 unendlich-gross, kehrt im neg. Sinne aus dem Unendlichen zurück und erreicht für $\varphi = 90^\circ$ einen kleinsten neg. Wert $-\frac{c^2}{R}$ u. s. f. Der Mittelpunkt ist ein konjugierter Punkt (φ_2 imaginär), die vier Asymptoten haben (20) die Gl.

$$\pm x \sqrt{-b^2} \pm y a + \frac{ca}{R} \sqrt{-b^2} = 0.$$

Wegen der Entstehung der Polbahn bei der Bewegung vergleiche man § III und die zugehörige Fig. 5.

2. Die Polkurve hat, da nach (11) $r^2 = R^2 - \frac{a^2 b^2}{R^2 \sin^2 \psi \cos^2 \psi}$ ist,

$$r(2R - r) = \frac{4 a^2 b^2}{R^2 \sin^2 \psi} \text{ als Polargleichung,}$$

$(X^2 + Y^2)[a^2 b^2 (X^2 + Y^2) + R^2 X^2 Y^2] = 4 R^6 X^4 Y^4$ als Gl. in rechtwinkligen Koordinaten.

Die letzte Gl. ist vom 10. Grade und enthält nur Glieder von der 6. Ordnung in den Variablen an, der Koordinatenanfang ist also ein 6-facher und zwar, da für die Tangentenrichtungen $(X^2 + Y^2)^3 = 0$ sein muss, ein konjugierter Punkt. Da X, Y nur in geraden Potenzen und mit einander vertauschbar vorkommen, so wird die Kurve nicht nur von den Koordinatenachsen, sondern auch von den Halbierungslinien der Koordinatenfelder in kongruente Teile zerlegt; dies folgt auch aus der Polargl., welche für $+\psi, -\psi, 90^\circ + \psi, 90^\circ - \psi$ dieselben Werte r liefert, und ebenfalls für $45^\circ + \psi$ und $45^\circ - \psi$. — Die Summe der beiden demselben Winkel ψ entsprechenden Werte r ist konstant und $= 2R$; die auf jenen Halbierungslinien gelegenen Scheitel der Kurve haben die Leitstrahlen $\frac{2b^2}{R}$ bzw. $\frac{2a^2}{R}$. Ferner folgt aus (17), dass reelle Werte r nur innerhalb der durch $\tan \psi_1^2 = \frac{b^2}{a^2}, \tan \psi_2^2 = \frac{a^2}{b^2}$ angegebenen Grenzen vorhanden und dass die hierdurch bestimmten Grenzlagen des Leitstrahles Tangenten der Kurve für $r = R$ sind.

a) Die Polkurve des elliptischen Systems ist ein ganz im ersten Quadranten des X, Y liegendes, geschlossenes Blatt zwischen den durch $\tan \psi_1 = +\frac{b}{a}, \tan \psi_2 = +\frac{a}{b}$ bestimmten Grenzwinkeln, während r den kleinsten bzw. grössten Wert $\frac{2b^2}{R}, \frac{2a^2}{R}$ annimmt.

b) Im hyperbolischen System wird die Polkurve von den Zweigen $\mathfrak{P}_{11}, \mathfrak{P}_{22}, \mathfrak{P}_{13}, \mathfrak{P}_{24}$ in dieser Reihenfolge gebildet, wenn die zweite Ziffer den Quadranten angibt, in welchem der betreffende Zweig liegt. Jedem Winkel ψ entsprechen reelle Werte r , derart, dass für $\psi = 0$ bis 90° \mathfrak{P}_{21} und \mathfrak{P}_{13} , 90° bis 180° \mathfrak{P}_{22} und \mathfrak{P}_{14} , 180° bis 270° \mathfrak{P}_{23} und \mathfrak{P}_{11} , 270° bis 360° \mathfrak{P}_{24} und \mathfrak{P}_{12} entstehen. — Die vier Asymptoten haben (20) die Gl. $X_0 =$ bzw. $Y_0 = \pm \sqrt{\frac{-a^2 b^2}{R^2}}$.

3. Zwischen den Drehungswinkeln ergeben sich aus den allgemeinen Gl. (21, 22, 23) die Relationen

$$1) \frac{\cos 2\psi}{\cos 2\phi} = \frac{R^2}{c^2}, \text{ also konst. } 2) \cos 2\psi = \frac{R^2 \sin \varphi \cos \varphi}{+ \sqrt{b^4 \cos^2 \varphi + a^4 \sin^2 \varphi}}, 3) \cos 2\phi = \frac{c^2 \sin \varphi \cos \varphi}{+ \sqrt{b^4 \cos^2 \varphi + a^4 \sin^2 \varphi}}.$$

4. Formeln für die Krümmungsradien. Zwischen r und ϕ besteht (11) die Beziehung

$$r^2 = R^2 - \frac{a^2 b^2}{R^2 \sin^2 \psi \cos^2 \psi}, \text{ hieraus folgt } \sin \psi \cos \psi = \frac{a b}{R \sqrt{R^2 - r^2}} \text{ und damit } \cos 2\psi = \frac{\sqrt{c^4 - R^2 r^2}}{R \sqrt{R^2 - r^2}}. \text{ Dann ist nach (25) } \tan \lambda = \frac{\cos 2\psi}{\sin \psi \cos \psi} (= 2 \cot 2\psi) = \frac{\sqrt{c^4 - R^2 r^2}}{a b}, \text{ also nach}$$

$$(26) \tan \alpha = \frac{r}{R+r} \cot \lambda = \frac{a b r}{(R+r) \sqrt{c^4 - R^2 r^2}}, \text{ folglich } \sin \alpha = \frac{a b r}{\sqrt{(R+r)^2 (c^4 - R^2 r^2) + a^2 b^2 r^2}}$$

$$\cos \alpha^2 = \frac{(R+r)^2 (c^4 - R^2 r^2)}{(R+r)^2 (c^4 - R^2 r^2) + a^2 b^2 r^2}, \text{ es wird mithin } \cos \alpha^2 [-1 + \tan \alpha (\cot \lambda + 2 \cot 2\psi)]$$

$$= (R+r) \frac{a^2 b^2 r - R (c^4 - R^2 r^2)}{(R+r)^2 (c^4 - R^2 r^2) + a^2 b^2 r^2} \text{ und mit Rücksicht auf die Formeln (24)}$$

$$P' = \frac{r-R}{a b} \frac{[(R+r)^2 (c^4 - R^2 r^2) + a^2 b^2 r^2]^{3/2}}{R(R+r)(2R-r)(c^4 - R^2 r^2) + a^2 b^2 r^2 (5R+3r)}, P = \frac{r-R}{a b} \frac{[(R+r)^2 (c^4 - R^2 r^2) + a^2 b^2 r^2]^{3/2}}{R(R+r)(R-2r)(c^4 - R^2 r^2) + a^2 b^2 r^2 (4R+3r)}.$$

(Die Mitteilung weiterer Resultate muss wegen Mangels an Raum hier unterbleiben.)



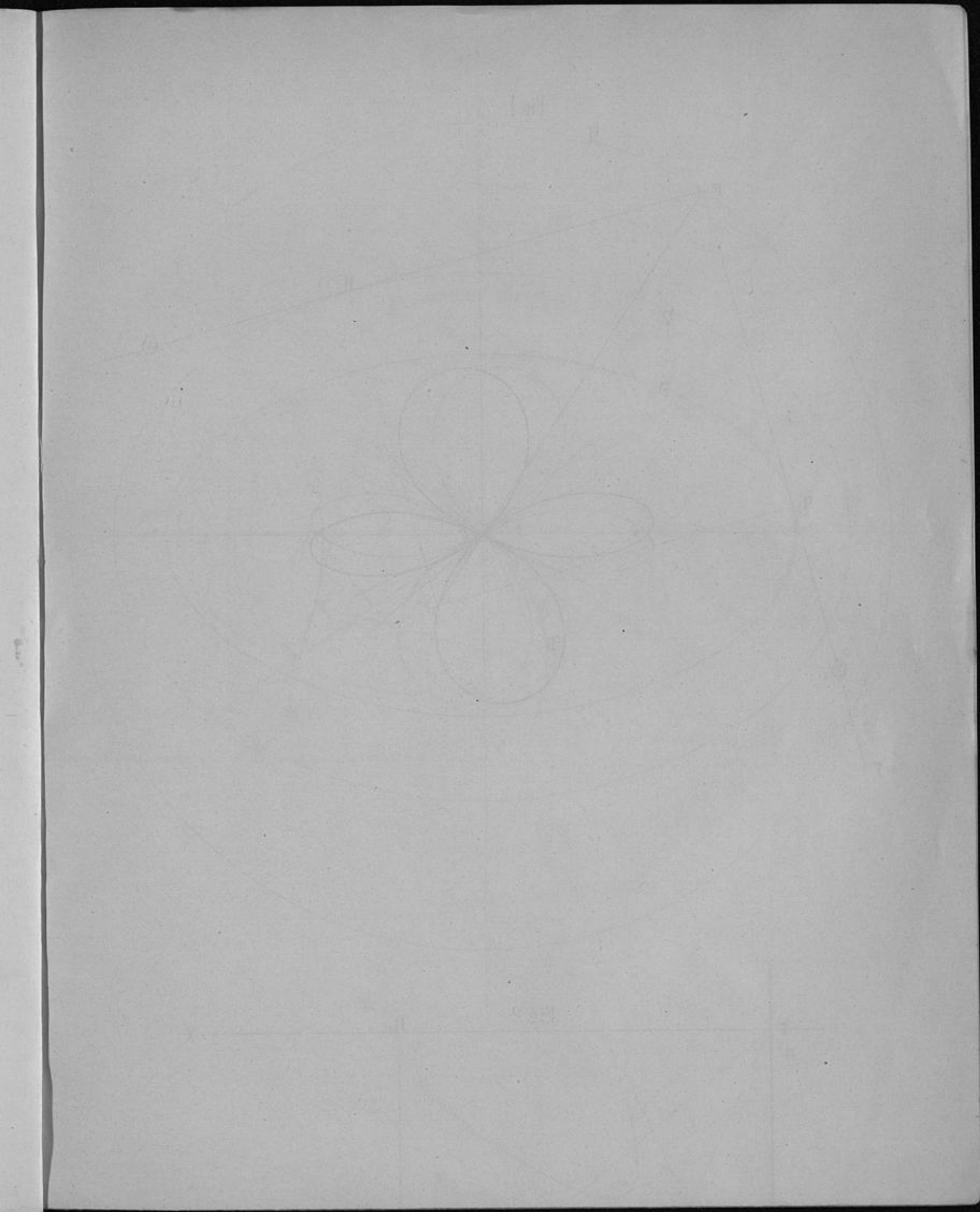
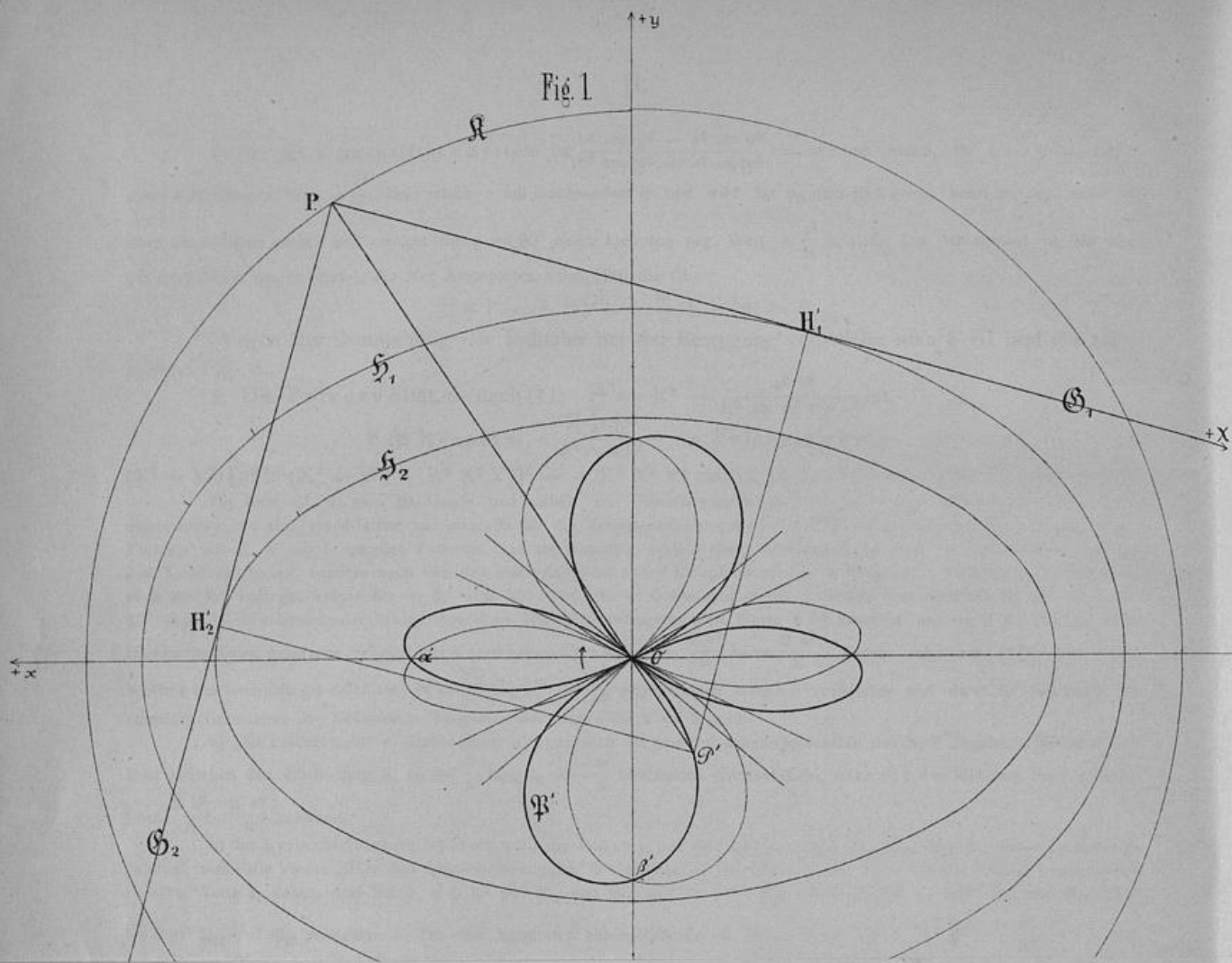
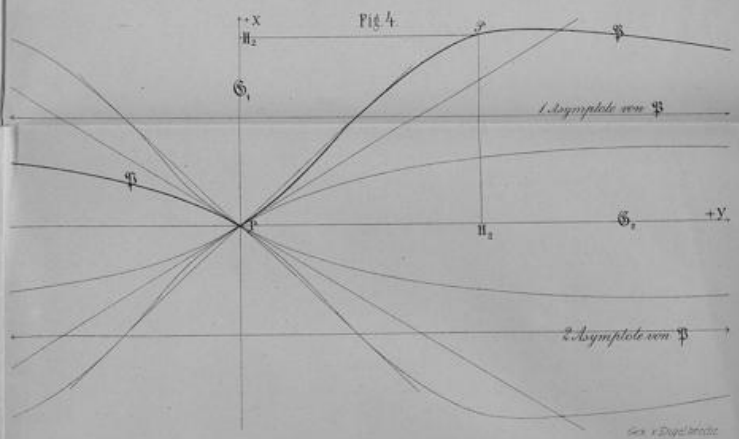
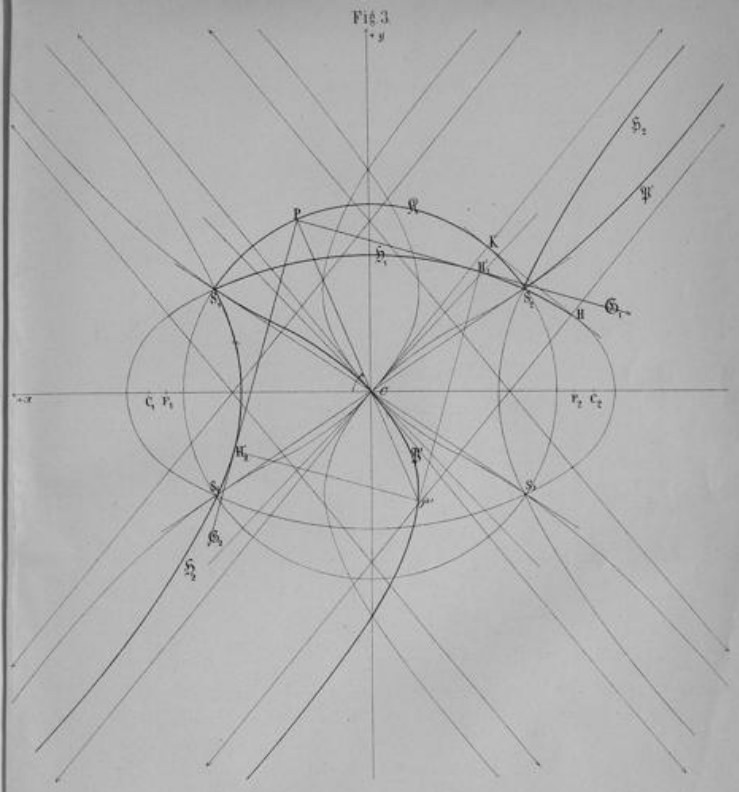
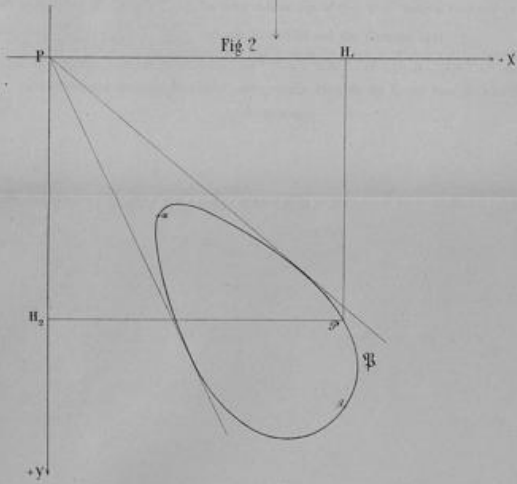
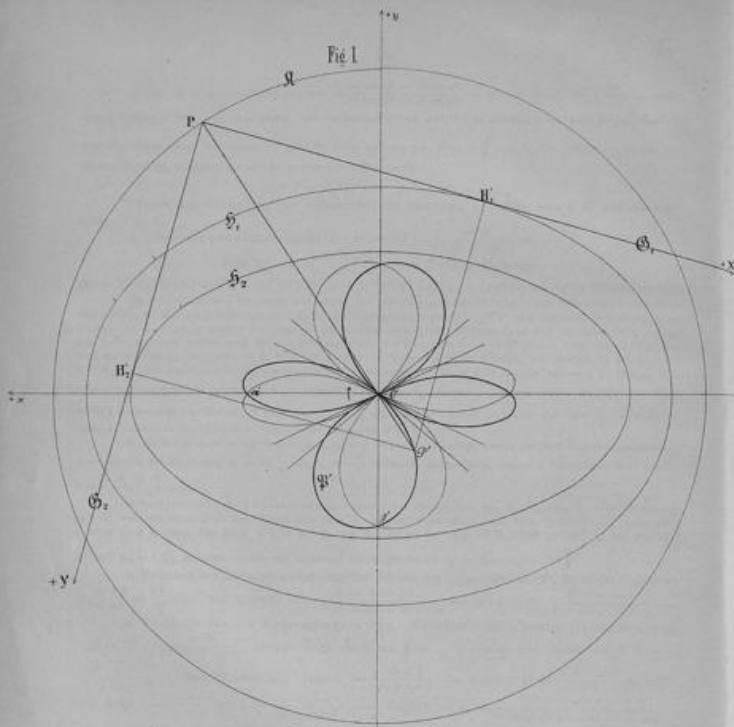
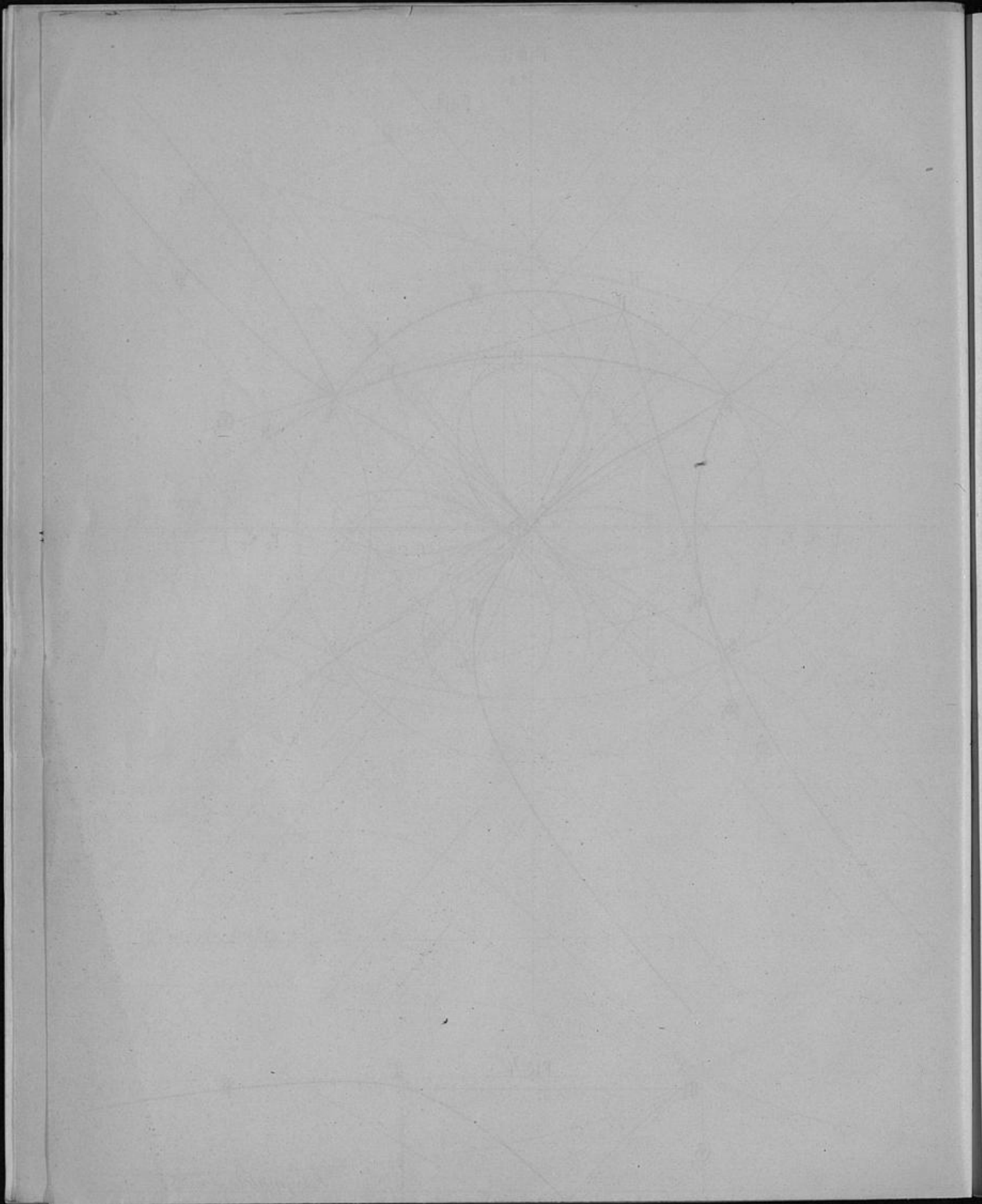


Fig. 1







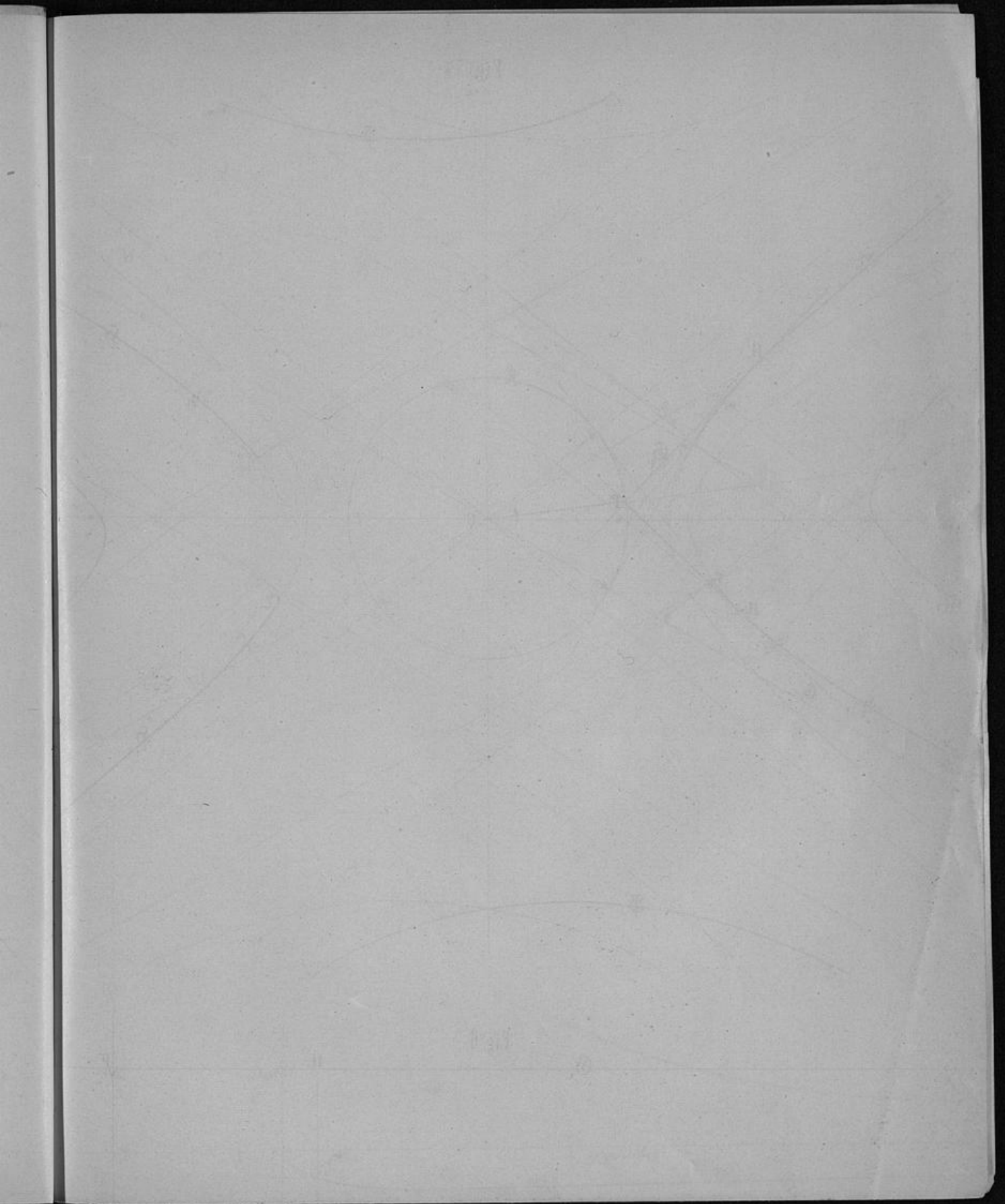


Fig 5

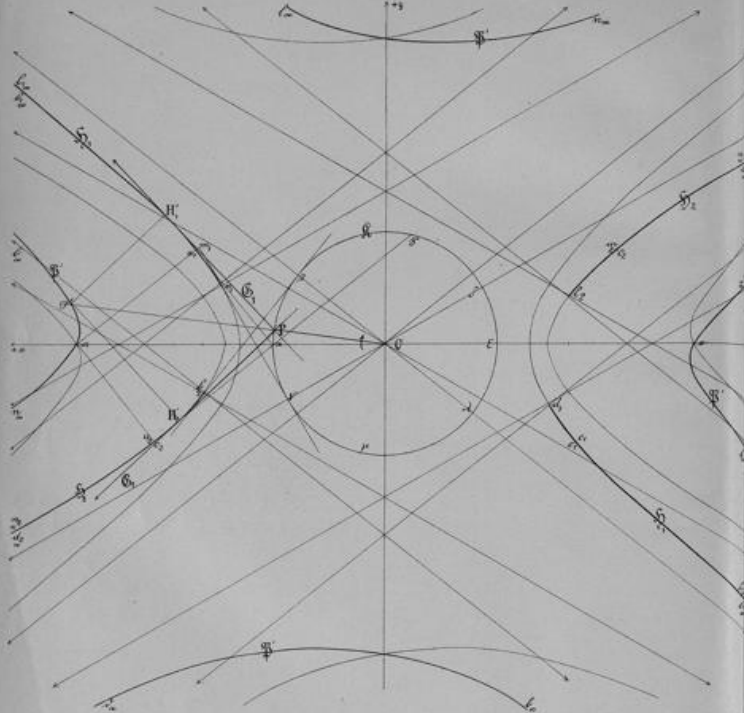


Fig 6

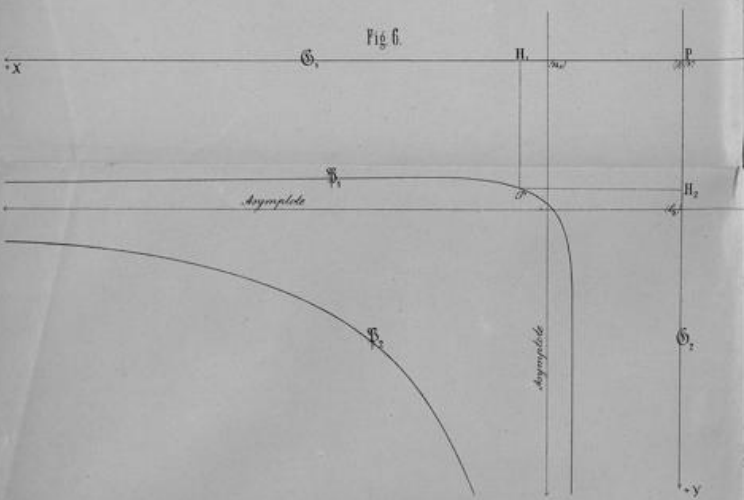


Fig 7

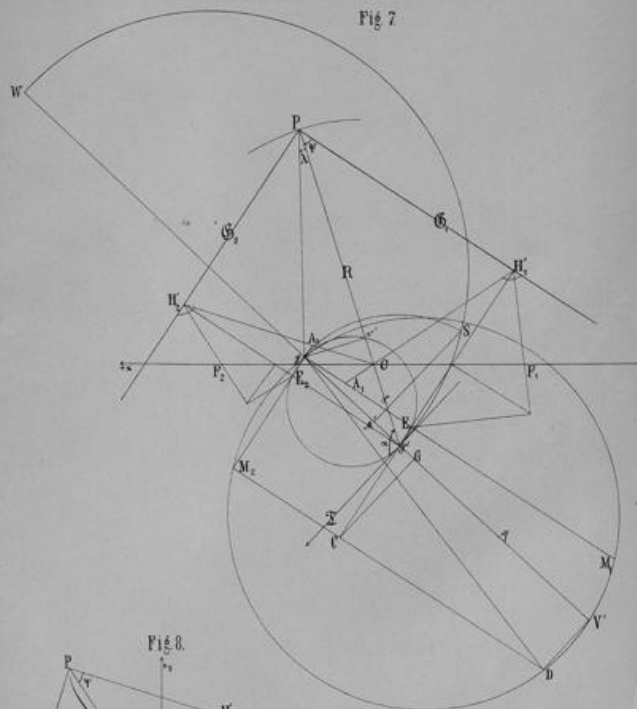


Fig 8

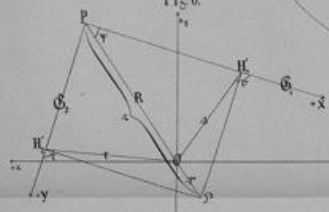
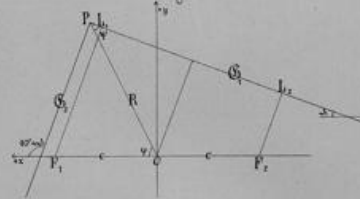
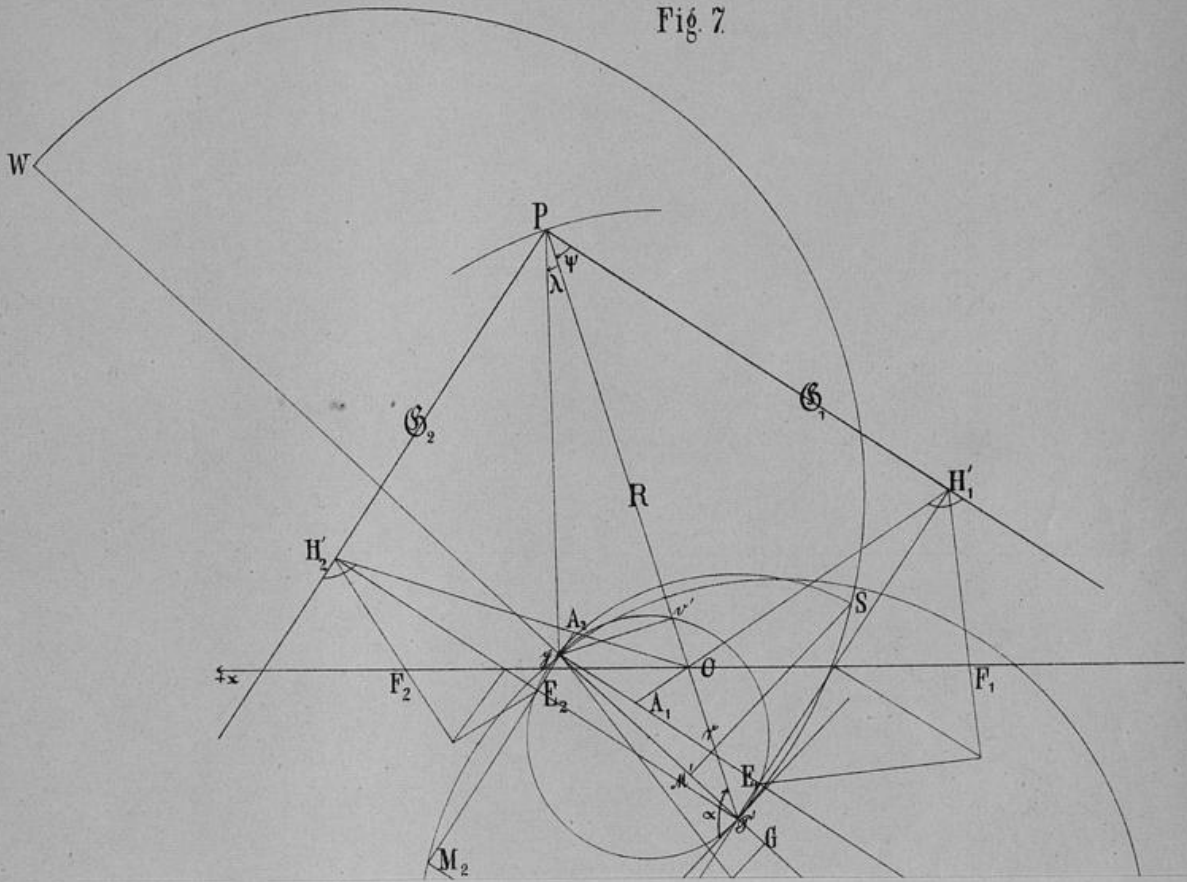


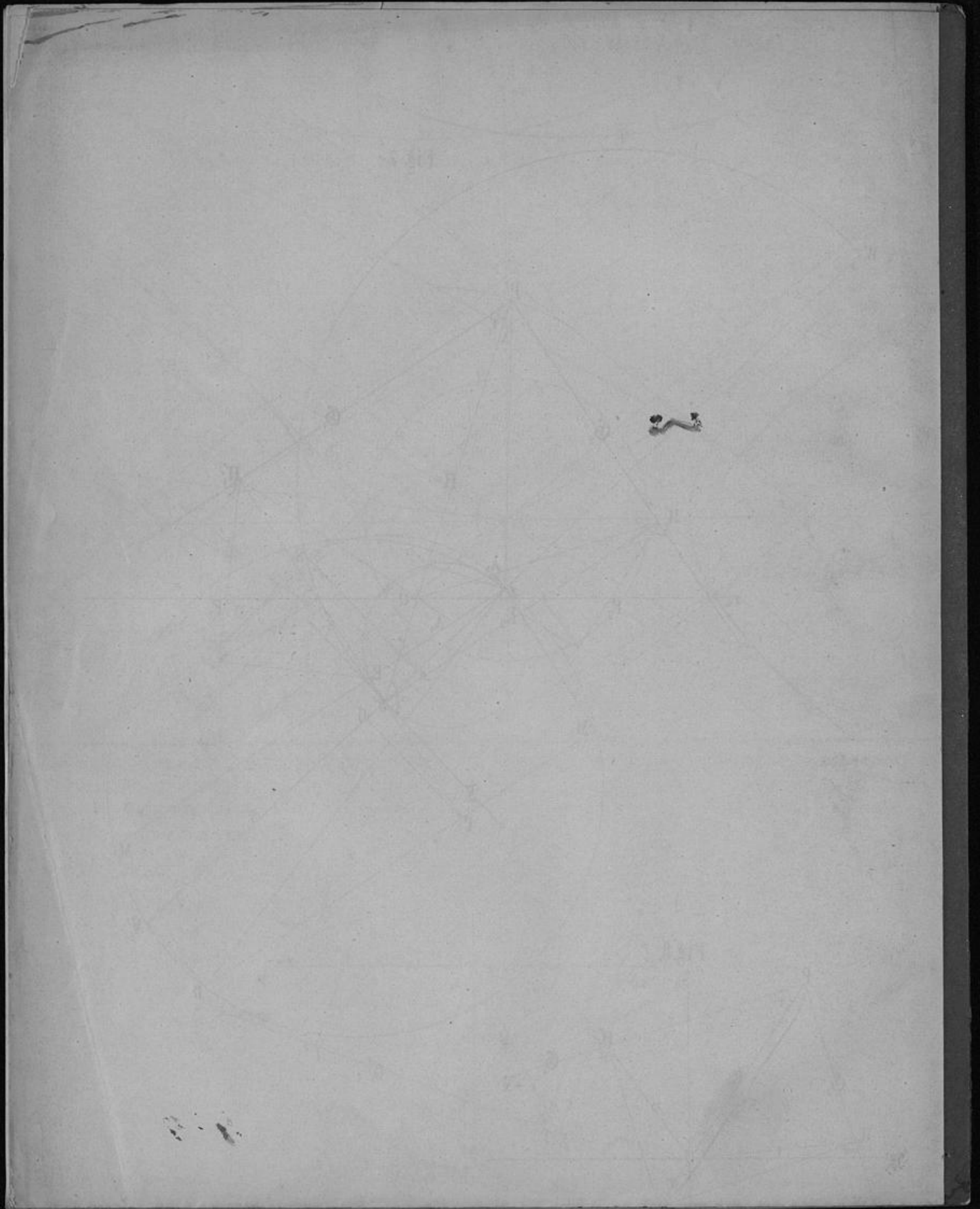
Fig 9



Gen. v. Engelbrecht
Lith. v. v. Späcker, Brno

Fig. 7





© The Tiffen Company, 2007

TIFFEN® Gray Scale

R	G	B	W	G	K	C	Y	M

A 1 2 3 4 5 6 M 8 9 10 11 12 13 14 15 B 17 18 19

