Anhang.

Ich benütze die sich mir bietende Gelegenheit, einige Entwicklungen zu veröffentlichen, deren eigentümliche Behandlung sie vielleicht zur teilweisen Aufnahme in die Elemente befähigt.

I. Ausdruck der Dreiecksfläche durch die Seiten.

a. **Synthetische Behandlung:** Wenn die Seiten zum Ausdruck der Dreiecksfläche dienen sollen, so liegt es nahe, die Radien der Berührungskreise als Hilfslinien zu verwenden und dieselben später durch passende Betrachtungen zu eliminiren. Denn seit r der Radius des innern Berührungskreises, r_α der Radius desjenigen äußeren Kreises, welcher im Winkelraum A liegt, r_β, r_γ die beiden andern Radien, entsprechend den Winkeln B und C, und werden die Maßzahlen der Seiten des Dreiecks nach den ihnen gegenüberliegenden Winkeln mit a, b, c bezeichnet, so finden sich für die Fläche F des Dreiecks ABC die bekannten Ausdrücke

$$F = r\,\frac{a+b+c}{2}$$

$$F = r_\alpha\,\frac{b+c-a}{2}$$

$$F = r_\beta\,\frac{c+a-b}{2}$$

$$F = r_\gamma\,\frac{a+b-c}{2}.$$

Die beiden Dreiecke MOC und LCQ der nebenstehenden Figur sind ähnlich, weil $\angle M = \angle L$ als Rechte, und $\angle MOC = \angle LCQ$, da OCQ ein rechter Winkel ist; mithin verhält sich

$$\overline{MO} : \overline{LC} = \overline{CM} : \overline{QL}.$$

Mit Anwendung des Satzes, daß die beiden von einem Punkte an einen Kreis gezogenen Tangenten gleich lang sind, findet man aber leicht

$$\overline{CM} = \frac{a+b-c}{2},$$

$$\overline{LC} = \frac{c+a-b}{2},$$

also kann die oben stehende Proportion auch geschrieben werden

$$r : \frac{c + a - b}{2} = \frac{a + b - c}{2} : r_\alpha,$$

woraus $rr_\alpha = \frac{a + b - c}{2} \cdot \frac{c + a - b}{2}$.

Multiplicirt man aber die beiden ersten oben für F aufgestellten Ausdrücke mit einander und substituirt den für rr_α gefundenen Wert, so kommt

$$F = \sqrt{\left(\frac{a + b + c}{2} \cdot \frac{a + b - c}{2} \cdot \frac{c + a - b}{2} \cdot \frac{b + c - a}{2}\right)}.$$

Hätte man die beiden andern für F aufgestellten Formeln mit einander multiplicirt und für $\frac{c + a - b}{2} \cdot \frac{a + b - c}{2}$ den Wert rr_α eingesetzt, so würde man beiläufig gefunden haben

$$F = \sqrt{(r \cdot r_\alpha \cdot r_\beta \cdot r_\gamma)}.$$

b. Analytischer Beweis der für F gefundenen Formel.

Sei c die größte Seite des Dreiecks ABC, und verlängert, resp. verkürzt man dieselbe an beiden Enden um $\overline{AE} = \overline{AE'} = b$ und $\overline{BD} = \overline{BD'} = a$, so ist $\overline{DE} = a + b + c$, $\overline{D'E} = b + c - a$, $\overline{DE'} = c + a - b$, $\overline{D'E'} = a + b - c$, und es handelt sich darum, die Bedeutung von $\frac{1}{4}\sqrt{(\overline{DE} \cdot \overline{D'E} \cdot \overline{DE'} \cdot \overline{D'E'})}$ zu erkennen.

Beschreibt man um B den durch D', C, D gehenden Kreis und zieht durch E die Sehne CG und durch E' die Sehne CG', so ist

$$\overline{DE} \cdot \overline{D'E} = \overline{CE} \cdot \overline{GE}, \text{ und } \overline{DE'} \cdot \overline{D'E'} = \overline{CE'} \cdot \overline{G'E'},$$

also ist $\frac{1}{4}\sqrt{(\overline{DE} \cdot \overline{D'E} \cdot \overline{DE'} \cdot \overline{D'E'})} = \frac{1}{4}\sqrt{(\overline{CE} \cdot \overline{GE} \cdot \overline{CE'} \cdot \overline{G'E'})}$.

Da aber $\angle ECE = \Re$. ist, weil $\overline{AE} = \overline{AC} = \overline{AE'}$, so ist

$$\overline{CE} \cdot \overline{G'E'} = 2 \triangle EE'G', \text{ und } \overline{CE'} \cdot \overline{GE} = 2 \triangle EE'G.$$

Es ist aber $\triangle EE'G' = \triangle EE'G$ wegen gleicher Grundlinie und Höhe, also

$$\frac{1}{4}\sqrt{(\overline{CE} \cdot \overline{GE} \cdot \overline{CE'} \cdot \overline{G'E'})} = \frac{1}{2} \triangle EE'G.$$

Endlich ist noch $\triangle EE'G = \triangle EE'C + \triangle GE'C$

$$= 2 \triangle ACE' + 2 \triangle BCE'$$

$$= 2 \triangle ABC,$$

folglich $\frac{1}{2} \triangle EE'G = \triangle ABC$,

mithin $\frac{1}{4}\sqrt{(\overline{DE} \cdot \overline{D'E} \cdot \overline{DE'} \cdot \overline{D'E'})} = \triangle ABC$, w. z. b. w.

II. Anwendung auf das Sehnenviereck.

Das im Vorhergehenden beobachtete Verfahren gestattet auch eine ungezwungene Anwendung auf die Entwicklung der Fläche des Sehnenvierecks aus den Seiten, und man gelangt dabei außer einigen schon anderweitig bekannten Beziehungen auch zu mehreren, so viel mir bekannt, bisher nicht veröffentlichten Formeln, welche den Zusammenhang zwischen der Fläche und den Radien der äußern und innern Berührungskreise betreffen.

Seien a, b, c, d die Seiten eines Sehnenvierecks, r_a, r_b, r_c, r_d die Radien der vier äußeren Berührungskreise, wobei die Indices von den unmittelbar (nicht in einem Punkte der Verlängerung) berührten Seiten hergenommen sind, ebenso ϱ_a, ϱ_b, ϱ_c, ϱ_d die Radien der vier innern Berührungskreise.

Convergiren b und d über c hinaus, und sei x die Verlängerung von d, y die Verlängerung von b bis zu ihrem Schnittpunkt, so hat man zur Bestimmung von x und y die Proportionen

$$x : c = (y + b) : a \quad \text{und} \quad y : c = (x + d) : a,$$

aus denen sich ergibt

$$x = \frac{c\,(ab + cd)}{a^2 - c^2}, \qquad y = \frac{c\,(ad + bc)}{a^2 - c^2}.$$

Man kann nun leicht zu einem Ausdruck für die Fläche F des Sehnenvierecks gelangen, indem man in die Formeln

$$c + x + y, \quad c + x - y, \quad c - x + y, \quad -c + x + y$$

die Werte von x und y substituirt. Man findet für dieselben der Reihe nach

$$\frac{c\,(a + b - c + d)}{a - c}, \quad \frac{c\,(a - b + c + d)}{a + c}, \quad \frac{c\,(a + b + c - d)}{a + c}, \quad \frac{c\,(-a + b + c + d)}{a - c},$$

also für die Fläche des Dreiecks (c, x, y) den Wert

$$\frac{c^2}{4\,(a^2 - c^2)} \sqrt{(a+b+c-d)\,(a+b-c+d)\,(a-b+c+d)\,(-a+b+c+d)}.$$

Dagegen folgt aus einer einfachen Proportion wegen Aehnlichkeit von Dreiecken für die Fläche des um jenes Dreieck vermehrten Vierecks der Ausdruck

$$\frac{a^2}{4(a^2 - c^2)} \sqrt{(a+b+c-d)\,(a+b-c+d)\,(a-b+c+d)\,(-a+b+c+d)},$$

folglich ist als Differenz beider Flächen

$$F = \tfrac{1}{4}\sqrt{(a+b+c-d)\,(a+b-c+d)\,(a-b+c+d)\,(-a+b+c+d)}.$$

Da es uns jedoch darauf ankommt, die Radien der Berührungskreise in die Betrachtung zu ziehen, so benützen wir, indem wir der Kürze halber d+x mit ξ, b+y mit η bezeichnen, für die Fläche des Dreiecks (c, x, y) die Gleichung

$$F\,(c, x, y) = r_c \cdot \frac{c+x+y}{2}$$

dagegen für die Fläche des Dreiecks (a, ξ, η) die Formel

$$F\,(a, \xi, \eta) = \varrho_a \frac{a+\xi+\eta}{2},$$

und indem wir aus der Beziehung

$$r_c : \varrho_a = c : a$$

r_c durch ϱ_a ersetzen, oder umgekehrt, finden wir nach einigen leicht auszuführenden Substitutionen

$$F = r_c \frac{a + c}{2\,c}(a+b-c+d), \text{ desgl. } F = \varrho_a \frac{a + c}{2\,a}(a+b-c+d).$$

Durch Wiederholung eines ähnlichen Verfahrens für ϱ_a und r_a u. s. w., oder auch kurz durch cyclische Vertauschung der Buchstaben ergeben sich die entsprechenden Formeln für die übrigen Berührungsradien, nämlich folgende Gruppen von Gleichungen:

$$\left.\begin{aligned} F &= r_a \frac{a+c}{2a}(-a+b+c+d) \\ F &= r_b \frac{b+d}{2b}(a-b+c+d) \\ F &= r_c \frac{a+c}{2c}(a+b-c+d) \\ F &= r_d \frac{b+d}{2d}(a+b+c-d) \end{aligned}\right\} \quad (1)$$

$$\left.\begin{aligned} F &= \varrho_a \frac{a+c}{2a}(a+b-c+d) \\ F &= \varrho_b \frac{b+d}{2b}(a+b+c-d) \\ F &= \varrho_c \frac{a+c}{2c}(-a+b+c+d) \\ F &= \varrho_d \frac{b+d}{2d}(a-b+c+d) \end{aligned}\right\} \quad (2)$$

Zufolge von Aehnlichkeitsbeziehungen aber, die genau denen des vorigen Abschnitts (Ia.) entsprechen, hat man

$$r_c : \frac{c+x-y}{2} = \frac{a+\xi-\eta}{2} : r_a,$$

woraus

$$r_a\, r_c = \frac{ac}{4(a+c)^2}(a-b+c+d)(a+b+c-d),$$

folglich ergibt sich, indem man die erste und dritte der Gleichungen (1) mit einander multiplicirt und $r_a\, r_c$ durch den gefundenen Wert ersetzt,

$$F = \tfrac{1}{4}\sqrt{(a+b+c-d)(a+b-c+d)(a-b+c+d)(-a+b+c+d)} \qquad (3)$$

Multiplicirt man dagegen die zweite und vierte der Gleichungen (1) mit einander und führt die umgekehrte Substitution aus, so hat man

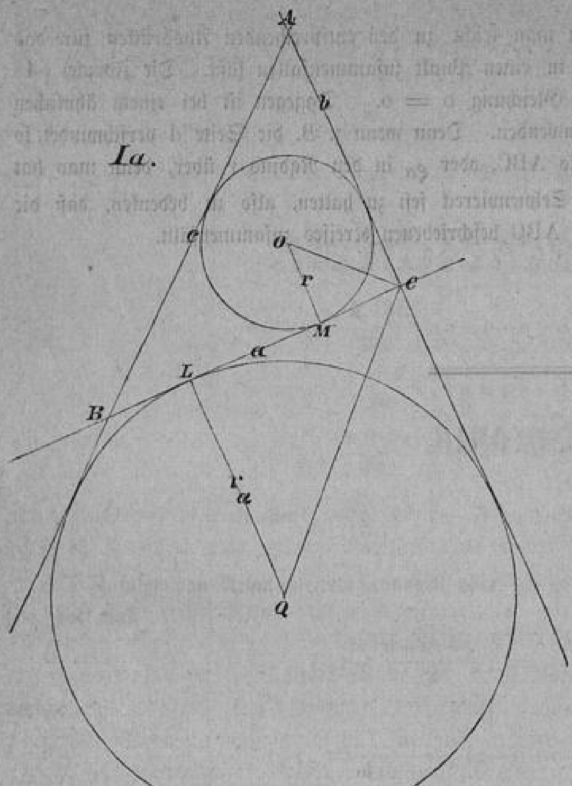
$$r_a\, r_b\, r_c\, r_d = \frac{abcd}{(a+c)^2\,(b+d)^2} F^2. \qquad (4)$$

Durch Combination der Formeln (1) und (2) erhält man ferner

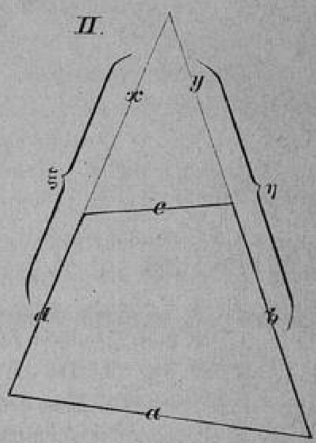
$$\left.\begin{aligned} r_a + \varrho_c &= \frac{2F}{-a+b+c+d}, \\ r_b + \varrho_d &= \frac{2F}{a-b+c+d}, \\ r_c + \varrho_a &= \frac{2F}{a+b-c+d}, \\ r_d + \varrho_b &= \frac{a+b+c-d}{2F}, \end{aligned}\right\} \quad (5)$$

folglich $$F = \sqrt{(r_a+\varrho_c)(r_b+\varrho_d)(r_c+\varrho_a)(r_d+\varrho_b)}. \qquad (6)$$

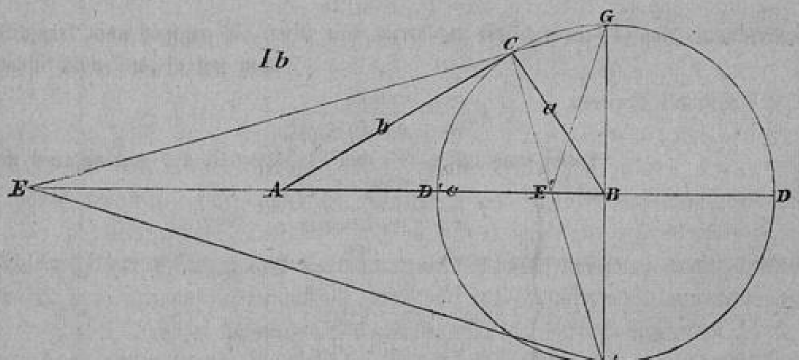
Von den Formeln (3) und (5) gelangt man leicht zu den entsprechenden Ausdrücken für das Dreieck, indem man zwei Eckpunkte des Vierecks in einen Punkt zusammenfallen läßt. Die Formel (4) führt in diesem speciellen Fall auf die identische Gleichung $o = o$. Dagegen ist bei einem ähnlichen Schluß aus der Formel (6) einige Vorsicht anzuwenden. Denn wenn z. B. die Seite d verschwindet, so geht nicht etwa r_a in den Radius r_α des Dreiecks ABC, oder ϱ_α in den Radius r über, denn man hat auch jetzt noch die Bedeutung des Vierecks als Sehnenviereck fest zu halten, also zu bedenken, daß die Richtung der d mit der Tangente in B des um ABC beschriebenen Kreises zusammenfällt.



Ia.



II.



Ib