Versuch
einer
naturgemäßen Begründung der Aehnlichkeitslehre,
nebst einem
einige Betrachtungen über das Sehnenviereck
enthaltenden Anhange.

Einleitung.

Der hergebrachte Vortrag der Aehnlichkeitslehre leidet an mehreren zum Theil auch schon von andern Schriftstellern gerügten Mängeln. Geht man von Euklids Erklärung aus, die Aehnlichkeit zweier geradlinigen ebenen Figuren bestehe in der Uebereinstimmung ihrer Winkel und der Proportionalität ihrer homologen Seiten, so wird zunächst der logische Fehler begangen, daß das Zusammenbestehen von Eigenschaften als zugestanden betrachtet wird, deren Vereinbarkeit erst nachzuweisen ist; denn wenn man nach dieser Erklärung ein einem gegebenen Vieleck ähnliches Vieleck zu zeichnen unternimmt, so bleibt es, wenn man den einfachsten Weg der Construction einschlägt, von der letzten Seite und den beiden an ihr liegenden Winkeln fraglich, ob sie der Bedingung der Aehnlichkeit genügen. Man kann nun freilich, obgleich dies z. B. in Kamblys Leitfaden nicht geschieht, die Möglichkeit des Aehnlichkeitsbegriffs durch einen vorausgeschickten Lehrsatz leicht nachweisen, aber auch nach dieser Correctur muß jener Erklärung der für den Pädagogen viel schwerer wiegende Vorwurf der Künstlichkeit gemacht werden.

An derselben Künstlichkeit leidet auch z. B. Baltzers Lehrgang, welcher mit Vermeidung des logischen Fehlers im Anfange nur die Aehnlichkeit der Dreiecke betrachtet und der zunächst auf sie allein beschränkten Euklidischen Definition den Lehrsatz vorausschickt, daß auf Dreiecke, welche in den Winkeln übereinstimmen, jene Erklärung der Aehnlichkeit passe, von den Dreiecken aber auf einem durchaus strengen Wege den Uebergang zur Aehnlichkeit der Vielecke findet. Denn der Begriff der Aehnlichkeit ist, wie ja auch der Gebrauch des Wortes z. B. bei der Beurteilung der Leistung eines Portraitmalers beweist, jedem Menschen auch ohne mathematische Schulung hinreichend geläufig, und es ist nicht Sache der geometrischen Methode, denselben erst künstlich zu construiren, sondern vielmehr nur, dem Schüler zum deutlichen Ausdruck der seiner Sprache bisher unzugänglichen Anschauung zu verhelfen. Nun wird zwar wol kein Lehrer der Geometrie es unterlassen, die Schüler auf die Identität des auch dem gemeinen Manne geläufigen Wortes Aehnlichkeit und der Aehnlichkeit der mathematischen Wissenschaft hinzuweisen, und der befähigte Schüler wird durch unmittelbare Intuition die Wahrheit derselben und ihre Tragweite sofort einsehen; aber es paßt doch wenig zu der gerühmten Strenge unserer Wissenschaft, daß die Vermittlung des Uebergangs zwischen beiden Gebieten dem Zufall überlassen bleiben soll, und daher mag es wol kommen, daß die weniger befähigten Schüler durchschnittlich mit der Aehnlichkeit wenig anzufangen wissen, bei den ihnen vorgeführten Entwicklungen sie nur als mechanische Formel benützen und niemals zu ihrer sichern Handhabung bei der selbständigen Lösung von Aufgaben gelangen, während ihnen die Congruenz bei einigem Fleiße ein ziemlich geläufiges Instrument wird.

Ein andrer Vorwurf gegen die Euklidische Definition wird von Tellkampf erhoben. Dieselbe ermangele der Allgemeinheit und passe nur auf geradlinige Figuren in einer Ebene. Wennschon es im Interesse der Eleganz wünschenswert sein mag, von vornherein die allgemeinste Erklärung zu Grunde zu legen, so kann doch die Rücksicht auf die Fassungskraft der Schüler eine stufenweise Erweiterung ihres wissenschaftlichen Horizonts vorteilhaft erscheinen lassen; dies mag wol der Grund sein, weshalb sein übrigens allgemein rühmend anerkannter Lehrgang nicht überall die Euklidische Methode verdrängt hat. Tellkampf erklärt zwei Figuren als ähnlich, wenn sie sich in eine solche gegenseitige Lage bringen lassen, daß die von einem gewissen Punkte O ausgehenden Strahlen durch ihren Umfang verhältnisgleich geschnitten werden. Diese Erklärung hat, wie gesagt, den unleugbaren Vorzug, auf beliebige Gestalten des Raumes, nicht blos auf geradlinige Figuren einer Ebene anwendbar zu sein, aber ich behaupte, daß auch sie den Vorwurf der Künstlichkeit durchaus verdient, denn die Proportionalität muß bei einer naturgemäßen Entwicklung vielmehr aus einer noch weiter zurückgreifenden Grundanschauung erst in Form eines Lehrsatzes abgeleitet werden, und ich will deshalb zu zeigen versuchen, daß alle hier erwähnten Methoden endlich noch der logische Vorwurf trifft, daß in ihnen als Erklärung vorangeschickt wird, was vielmehr als Lehrsatz zu beweisen war. Dagegen wird die im Folgenden aufgestellte Definition der Aehnlichkeit hoffentlich dem Verlangen sowol nach naturgemäßer Begründung als auch nach größter Allgemeinheit genügen.

I.

Die Vorbegriffe, welche der Geometrie als Einleitung vorausgeschickt zu werden pflegen, enthalten in allgemeinen Ausdrücken die Erklärung, Aehnlichkeit sei Uebereinstimmung der Gestalt, Gleichheit Uebereinstimmung der Größe, Congruenz Uebereinstimmung der Gestalt und Größe, und es knüpft damit die Wissenschaft an die aus der täglichen Erfahrung mitgebrachten Kategorien an.

Die Uebereinstimmung in der Gestalt aber, ein so schlüpfriger und unklarer Begriff sie zu sein scheint, ist gleichwol für das beurteilende Auge äußerst leicht controlirbar, und die Sicherheit der Entscheidung nimmt mit der Ausbildung des Vitalsinns auf diesem Gebiet zu. Denn gleichwie als Töne von gleicher Höhe diejenigen erkannt werden, welche identische Stellen des Gehörnerven in Schwingungen versetzen, so erscheinen als Figuren von gleicher Gestalt diejenigen, welche identische Stellen der Netzhaut afficiren. Der Schüler, welcher eine an die Tafel gezeichnete Kreidefigur auf seinem Papier nachzeichnet, läßt sich offenbar nur durch dieses Kriterium in seiner Nachahmung leiten. Man wende nicht ein, daß dieselbe Figur in großem und kleinem Maßstabe nachgezeichnet werden kann, denn er wird den Maßstab instinctmäßig der Entfernung des Auges vom Papier anpassen, oder umgekehrt. Aus dieser Ueberlegung entspringt aber sofort die jedem Schüler unmittelbar einleuchtende, weil mit seinem eigenen Bewußtsein übereinstimmende Erklärung, daß solche Figuren ähnlich genannt werden, welche von einem gewissen Punkte aus gesehen einander decken. Das einzige fremde Element, welches hierbei stillschweigend in die Geometrie hineingetragen wird, ist die optische Erfahrung, daß die Lichtstrahlen in einem homogenen Mittel sich geradlinig fortpflanzen; denn die Erwähnung der physiologischen Vorgänge auf der Netzhaut, die ich nur behufs der genetischen Entwicklung bedurfte, ist selbstverständlich in einem Lehrgange der Geometrie durchaus überflüssig.

Doch fehlt in dem so gewonnenen Resultate noch ein wichtiges Moment. Wir zeichnen wol die Umrisse eines fernen Berges auf der Fensterscheibe nach und nennen beide Figuren einander ähnlich, aber wir betrachten dabei, auch ohne uns dessen bewußt zu sein, den Berg als Planfigur, und was die Hauptsache ist, alle Punkte derselben gelten uns als von der Ebene der Scheibe gleich weit entfernt. Ein Porträt, welches nur schief vor das Auge gehalten der Gestalt der dargestellten Person gleicht, wird Niemand für wohl getroffen erklären. Die vorhin aufgestellte Definition ist also dahin zu vervollständigen, daß ähnliche Figuren solche sind, welche sich in parallelen Ebenen in eine solche Lage gegen einander bringen lassen, daß sie von einem gewissen Punkte aus gesehen einander decken.

Der Vorteil dieser Erklärung ist einleuchtend, denn sie gestattet sofort die Anwendung auf alle möglichen gerad- oder krummlinigen, zusammenhängenden oder aus gesonderten Theilen bestehenden ebenen Figuren, noch aber fehlt ihr die vollständige Allgemeinheit, um für alle möglichen Raumgebilde Giltigkeit zu haben. Zu diesem Zweck ist sie aber blos, wie folgt, umzuändern:

Aehnliche Figuren heißen diejenigen, welche sich in eine solche Lage gegen einander bringen lassen, daß sie von einem gewissen Punkte aus gesehen einander decken, und daß die bezüglichen Verbindungsstrecken beliebiger sich deckenden Punktpaare einander parallel sind.

Der sonst ziemlich vage und nur umständlich definirbare Begriff einander entsprechender Punkte ähnlicher Figuren ist jetzt von vornherein vollständig klar; es fallen unter die gegebene Erklärung sämtliche Körperräume, Flächen, Linien, Punktsysteme, und es erübrigt nur noch, dem bisher gebräuchlichen Vortrag der Aehnlichkeitslehre die geringe Abänderung zu geben, um die hier aufgestellte Definition mit aller Strenge in dasselbe einzupassen.

II.

1. **Lehrsatz:** Wenn in einem Dreieck zu einer Seite eine Parallele gezogen wird, so sind die Seiten des abgeschnittenen Dreiecks den homologen (bezüglich gleichen Winkeln gegenüber liegenden) Seiten des ursprünglichen Dreiecks proportional.
   Beweis bekannt.
2. **Umkehrung des 1. Lehrsatzes:** Wenn zwei Seiten eines Dreiecks entweder beide innerhalb, oder beide außerhalb nach demselben Verhältnis so geteilt sind, daß von dem ihnen gemeinsamen Eckpunkte entsprechende Stücke ausgehen, so ist die Verbindungslinie der Teilpunkte der dritten Seite parallel.
   Beweis bekannt.
3. **Folgerung:** Beliebige von einem Punkte O ausgehende Strahlen einer Ebene schneiden aus zwei parallelen Transversalen bezüglich proportionale Stücke aus.
   Beweis bekannt.
4. **Zusätze.** a) Der vorige Satz besteht auch noch, wenn die Parallelen von einem Strahl zum andern in ihrer Richtung beliebig gebrochen werden.
   b) Derselbe Satz gilt auch für ein beliebiges System von Strahlen, die nicht in einer Ebene liegen.
5. **Lehrsatz:** Die aus bezüglich parallelen Stücken bestehenden gebrochenen Linien des Zusatz 4 b) teilen auch die von O ausgehenden Strahlen nach demselben Verhältnis.
6. **Folgerung:** Wenn eine der beiden gebrochenen Linien ein geschlossenes Polygon bildet, so gilt dasselbe von der andern gebrochenen Linie.
   Beweis mit Hilfe von 1 oder 2.
7. **Hilfssätze:** a) Die Lage einer Ebene ist durch drei nicht in gerader Linie liegende Punkte bestimmt. (Schon aus der Einleitung zu den Elementen bekannt.)
   b) Zwei sich schneidende Ebenen haben als Durchschnitt eine Gerade. (Beweis bekannt.)
   c) Parallele Ebenen werden von einer sie schneidenden Ebene in parallelen Geraden durchschnitten. Beweis bekannt.
   d) Zwei Winkel mit bezüglich parallelen und gleich gerichteten Schenkeln sind einander gleich.

   Beweis: Zieht man durch die Scheitel der beiden Winkel eine Gerade, so werden durch die beiden Paare von Parallelen zwei Ebenen bestimmt, welche zwischen sich einen in sich selbst längs seiner Kante verschiebbaren Keil einschließen. Außerdem bilden die Parallelen mit der Kante je ein Paar gleiche correspondirende Winkel, mithin kann man den Keil so verschieben, daß die Schenkel des einen Winkels mit denen des andern zusammenfallen.

   Anmerkung: Für einen der beiden Winkel kann man auch seinen Scheitelwinkel nehmen.

8. **Erklärung:** Zwei Figuren (beliebige Raumgebilde) heißen ähnlich, wenn sie sich in eine solche Lage gegen einander bringen lassen, daß sie von einem gewissen Punkte O aus gesehen einander decken, und daß die Verbindungsstrecken irgend zweier Punkte der einen Figur den Verbindungsstrecken der entsprechenden Punkte der andern Figur bezüglich parallel sind.

Beispiele ähnlicher Figuren sind die gebrochenen Linien des 4. Satzes.

Die hier erwähnte gegenseitige Lage möge perspectivisch heißen, der P. O der Augenpunkt, die bei perspectivischer Lage ähnlicher Figuren einander deckenden Punkte, Linien, Flächenstücke, Winkel heißen homolog (entsprechend).

9. **Lehrsatz:** Wenn zwei Figuren in perspectivische Lage gebracht werden können und die bezüglichen Verbindungslinien der sich deckenden Punktepaare bei Bildung irgend zweier gebrochenen Linien parallel sind, so sind auch alle übrigen möglichen Verbindungslinien einander parallel.

Beweis mit Hilfe von Satz 6.

10. **Folgerung:** Aehnliche Polygone (in der Ebene oder im Raume) werden durch homologe Diagonalen in ähnliche Dreiecke zerschnitten.

11. **Lehrsatz:** In ähnlichen Polygonen (der Ebene oder des Raumes) sind homologe Winkel einander gleich und homologe Seiten einander proportional.

Beweis mit Hilfe von 7 d und 4 b.

12. **Umkehrung des 11. Lehrsatzes:** Wenn in zwei ebenen Polygonen die Winkel der Reihe nach bezüglich gleich und die homologen Seiten (welche die Scheitel bezüglich gleicher Winkel verbinden) einander proportional sind, so sind sie ähnlich.

Beweis: Man hat zu zeigen, daß sich dieselben so in perspectivische Lage bringen lassen, daß die homologen Seiten einander parallel sind. Zu diesem Zwecke genügt es, die Polygone in zwei beliebige parallele Ebenen so zu verlegen, daß die beiden ein Paar homologe Winkel einschließenden Seitenpaare einander bezüglich parallel sind, und durch ein indirectes Verfahren mit Hilfe des Lehrsatzes 1. zu zeigen, daß die Verbindungslinien der drei durch diese Seiten bestimmten Paare homologer Eckpunkte durch einen Punkt gehen. Der Augenpunkt liegt entweder zwischen beiden Polygonen, oder außerhalb derselben über das kleinere Polygon hinaus.

13. **Zusatz:** Soll die Umkehrung auf Raumpolygone ausgedehnt werden, so denke man sich dieselben durch Diagonalen von zwei homologen Eckpunkten aus in Dreiecke zerschnitten. Man sieht jetzt leicht ein, daß zu der Voraussetzung von § 12 noch die Bedingung hinzukommen muß, daß die beiden gebrochenen Flächen der Polygone in demselben Sinne gefaltet sind.

14. **Lehrsatz:** Aehnliche Figuren in perspectivische Lage gebracht teilen die vom Augenpunkt ausgezogenen Strahlen nach demselben Verhältnis.

Beweis mit Hilfe von 5.

15. **Umkehrung des 14. Lehrsatzes:** Wenn zwei Figuren sich so in perspectivische Lage bringen lassen, daß die von dem Augenpunkt aus gezogenen Strahlen durch den Umfang verhältnisgleich geteilt werden, so sind sie ähnlich.

Beweis mit Hilfe von 2.

Anmerkung: Die Sätze 12 oder 15 als Erklärungen der Aehnlichkeit aufzustellen ist ein logischer Fehler.

16. **Lehrsatz:** In ähnlichen Dreiecken verhalten sich die zu homologen Grundlinien gehörenden Höhen wie homologe Seiten.

Denn denkt man sich die Dreiecke in perspectivischer Lage, so decken sich die Höhen, und die Behauptung ergibt sich mit Hilfe von § 11.

17. **Lehrsatz:** Die Flächen ähnlicher Dreiecke verhalten sich wie die Quadrate homologer Seiten.

Beweis bekannt.

18. **Folgerungen:** a) Die Flächen ähnlicher Polygone verhalten sich wie die Quadrate homologer Seiten.
b) Indem man beliebige Flächen als Grenzen von Polyedern mit unendlich vielen unendlich kleinen Facen ansieht, gelangt man zu dem allgemeinsten Satze:

Die Flächenräume ähnlicher Flächengebilde verhalten sich wie die Quadrate homologer Strecken.

19. **Lehrsatz:** Die Längen ähnlicher Liniengebilde verhalten sich wie homologe Strecken.

Beweis folgt aus § 11. Krumme Linien betrachtet man dabei als Grenzen von gebrochenen Linien, welche aus unendlich vielen unendlich kleinen Stücken bestehen.

Beziehungen zwischen der Aehnlichkeit und der Congruenz.

Beiden Arten der Betrachtung räumlicher Größen ist der Begriff der Deckung gemeinsam. Die Aehnlichkeit enthält in sich als besonderen Fall die Congruenz, wenn die perspectivisch sich deckenden Figuren einander so nahe rücken, daß sie vollständig mit einander zusammenfallen. Die Proportionalität der homologen Strecken geht alsdann in deren Gleichheit über.

20. **Allgemeiner Lehrsatz:** Jedesmal, wo aus der Uebereinstimmung zweier Figuren in gewissen Seiten und Winkeln deren Congruenz gefolgert wird, ergiebt sich aus der Proportionalität derselben Seiten, während die bezügliche Gleichheit der Winkel bestehen bleibt, die Aehnlichkeit der Figuren.

Beweis: Seien A und B die beiden Figuren, zwischen welchen die Proportionalität der betreffenden Seiten und die Gleichheit der betreffenden Winkel besteht, und construirt man für einen beliebigen Augenpunkt zu A eine ähnliche Figur C so, daß eine Seite derselben mit der entsprechenden Seite von B übereinstimmt (und zwar einer solchen Seite, die bei der Congruenz in Frage kommt), so wird, wegen der Proportionalität beliebiger homologen Strecken und der Gleichheit beliebiger homologen Winkel der beiden ähnlichen Figuren A und C, die construirte Figur C der Voraussetzung gemäß mit B congruent sein, und da C und A nach Construction ähnlich sind, so müssen auch A und B ähnlich sein.

21. **Folgerungen:** Dreiecke sind ähnlich,
a) wenn sie in den Winkeln übereinstimmen (entsprechend der Congruenz wegen Uebereinstimmung in einer Seite und zwei gleich liegenden Winkeln),
b) wenn sie in einem Winkel übereinstimmen und die denselben einschließenden Seiten bezüglich proportional sind,
c) wenn ihre Seiten bezüglich proportional sind,
d) wenn zwei Seiten des einen Dreiecks zweien des andern proportional und die den bezüglich größeren Seiten gegenüber liegenden Winkel einander gleich sind,

e) wenn zwei Seiten des einen Dreiecks zweien des andern proportional und die den bezüglich kleineren Seiten gegenüber liegenden Winkel einander gleich, die den bezüglich größeren Seiten gegenüber liegenden Winkel aber beide spitz oder beide stumpf sind.

22. **Bemerkung über die Lösung gewisser Constructionsaufgaben.** Jedesmal, wo aus der Natur einer Aufgabe von vorn herein sich erkennen läßt, daß dieselbe nur eine endliche Anzahl von Lösungen gestattet (in der Mehrzahl der Fälle nur eine oder zwei mögliche Formen der zu construirenden Figur), kann man nach § 20 auf die Aehnlichkeit der verlangten und einer in kleinerem oder größerem Maßstabe ausgeführten Figur schließen. Ist nun die umgekehrte Aufgabe schon gelöst oder voraussichtlich leichter ausführbar, als die gegebene Aufgabe selbst, so wird man immer mit Vorteil von Aehnlichkeitsbeziehungen Gebrauch machen. (Beispiel die Einzeichnung eines Quadrats in ein Dreieck.)

Anhang.

Ich benütze die sich mir bietende Gelegenheit, einige Entwicklungen zu veröffentlichen, deren eigentümliche Behandlung sie vielleicht zur teilweisen Aufnahme in die Elemente befähigt.

I. Ausdruck der Dreiecksfläche durch die Seiten.

a. **Synthetische Behandlung:** Wenn die Seiten zum Ausdruck der Dreiecksfläche dienen sollen, so liegt es nahe, die Radien der Berührungskreise als Hilfslinien zu verwenden und dieselben später durch passende Betrachtungen zu eliminiren. Denn seit r der Radius des innern Berührungskreises, r_α der Radius desjenigen äußeren Kreises, welcher im Winkelraum A liegt, r_β, r_γ die beiden andern Radien, entsprechend den Winkeln B und C, und werden die Maßzahlen der Seiten des Dreiecks nach den ihnen gegenüberliegenden Winkeln mit a, b, c bezeichnet, so finden sich für die Fläche F des Dreiecks ABC die bekannten Ausdrücke

$$F = r\,\frac{a+b+c}{2}$$

$$F = r_\alpha\,\frac{b+c-a}{2}$$

$$F = r_\beta\,\frac{c+a-b}{2}$$

$$F = r_\gamma\,\frac{a+b-c}{2}.$$

Die beiden Dreiecke MOC und LCQ der nebenstehenden Figur sind ähnlich, weil $\angle M = \angle L$ als Rechte, und $\angle MOC = \angle LCQ$, da OCQ ein rechter Winkel ist; mithin verhält sich

$$\overline{MO} : \overline{LC} = \overline{CM} : \overline{QL}.$$

Mit Anwendung des Satzes, daß die beiden von einem Punkte an einen Kreis gezogenen Tangenten gleich lang sind, findet man aber leicht

$$\overline{CM} = \frac{a+b-c}{2},$$

$$\overline{LC} = \frac{c+a-b}{2},$$

also kann die oben stehende Proportion auch geschrieben werden

$$r : \frac{c+a-b}{2} = \frac{a+b-c}{2} : r_\alpha,$$

woraus $rr_\alpha = \frac{a+b-c}{2} \cdot \frac{c+a-b}{2}$.

Multiplicirt man aber die beiden ersten oben für F aufgestellten Ausdrücke mit einander und substituirt den für rr_α gefundenen Wert, so kommt

$$F = \sqrt{\left(\frac{a+b+c}{2} \cdot \frac{a+b-c}{2} \cdot \frac{c+a-b}{2} \cdot \frac{b+c-a}{2}\right)}.$$

Hätte man die beiden andern für F aufgestellten Formeln mit einander multiplicirt und für $\frac{c+a-b}{2} \cdot \frac{a+b-c}{2}$ den Wert rr_α eingesetzt, so würde man beiläufig gefunden haben

$$F = \sqrt{(r \cdot r_\alpha \cdot r_\beta \cdot r_\gamma)}.$$

b. Analytischer Beweis der für F gefundenen Formel.

Sei c die größte Seite des Dreiecks ABC, und verlängert, resp. verkürzt man dieselbe an beiden Enden um $\overline{AE} = \overline{AE'} = b$ und $\overline{BD} = \overline{BD'} = a$, so ist $\overline{DE} = a + b + c$, $\overline{D'E} = b + c - a$, $\overline{DE'} = c + a - b$, $\overline{D'E'} = a + b - c$, und es handelt sich darum, die Bedeutung von $\frac{1}{4}\sqrt{(\overline{DE} \cdot \overline{D'E} \cdot \overline{DE'} \cdot \overline{D'E'})}$ zu erkennen.

Beschreibt man um B den durch D', C, D gehenden Kreis und zieht durch E die Sehne CG und durch E' die Sehne CG', so ist

$$\overline{DE} \cdot \overline{D'E} = \overline{CE} \cdot \overline{GE}, \quad \text{und} \quad \overline{DE'} \cdot \overline{D'E'} = \overline{CE'} \cdot \overline{G'E'},$$

also ist $\frac{1}{4}\sqrt{(\overline{DE} \cdot \overline{D'E} \cdot \overline{DE'} \cdot \overline{D'E'})} = \frac{1}{4}\sqrt{(\overline{CE} \cdot \overline{GE} \cdot \overline{CE'} \cdot \overline{G'E'})}$.

Da aber $\angle ECE = \mathfrak{R}$. ist, weil $\overline{AE} = \overline{AC} = \overline{AE'}$, so ist

$$\overline{CE} \cdot \overline{G'E'} = 2 \triangle EE'G', \quad \text{und} \quad \overline{CE'} \cdot \overline{GE} = 2 \triangle EE'G.$$

Es ist aber $\triangle EE'G' = \triangle EE'G$ wegen gleicher Grundlinie und Höhe, also

$$\tfrac{1}{4}\sqrt{(\overline{CE} \cdot \overline{GE} \cdot \overline{CE'} \cdot \overline{G'E'})} = \tfrac{1}{2} \triangle EE'G.$$

Endlich ist noch $\triangle EE'G = \triangle EE'C + \triangle GE'C$

$$= 2 \triangle ACE' + 2 \triangle BCE'$$
$$= 2 \triangle ABC,$$

folglich $\frac{1}{2} \triangle EE'G = \triangle ABC$,

mithin $\frac{1}{4}\sqrt{(\overline{DE} \cdot \overline{D'E} \cdot \overline{DE'} \cdot \overline{D'E'})} = \triangle ABC$, w. z. b. w.

II. Anwendung auf das Sehnenviereck.

Das im Vorhergehenden beobachtete Verfahren gestattet auch eine ungezwungene Anwendung auf die Entwicklung der Fläche des Sehnenvierecks aus den Seiten, und man gelangt dabei außer einigen schon anderweitig bekannten Beziehungen auch zu mehreren, so viel mir bekannt, bisher nicht veröffentlichten Formeln, welche den Zusammenhang zwischen der Fläche und den Radien der äußern und innern Berührungskreise betreffen.

Seien a, b, c, d die Seiten eines Sehnenvierecks, r_a, r_b, r_c, r_d die Radien der vier äußeren Berührungskreise, wobei die Indices von den unmittelbar (nicht in einem Punkte der Verlängerung) berührten Seiten hergenommen sind, ebenso ϱ_a, ϱ_b, ϱ_c, ϱ_d die Radien der vier innern Berührungskreise.

Convergiren b und d über c hinaus, und sei x die Verlängerung von d, y die Verlängerung von b bis zu ihrem Schnittpunkt, so hat man zur Bestimmung von x und y die Proportionen

$$x : c = (y + b) : a \quad \text{und} \quad y : c = (x + d) : a,$$

aus denen sich ergibt

$$x = \frac{c\,(ab + cd)}{a^2 - c^2}, \qquad y = \frac{c\,(ad + bc)}{a^2 - c^2}.$$

Man kann nun leicht zu einem Ausdruck für die Fläche F des Sehnenvierecks gelangen, indem man in die Formeln

$$c + x + y, \quad c + x - y, \quad c - x + y, \quad -c + x + y$$

die Werte von x und y substituirt. Man findet für dieselben der Reihe nach

$$\frac{c\,(a + b - c + d)}{a - c}, \quad \frac{c\,(a - b + c + d)}{a + c}, \quad \frac{c\,(a + b + c - d)}{a + c}, \quad \frac{c\,(-a + b + c + d)}{a - c},$$

also für die Fläche des Dreiecks (c, x, y) den Wert

$$\frac{c^2}{4\,(a^2 - c^2)} \sqrt{(a+b+c-d)\,(a+b-c+d)\,(a-b+c+d)\,(-a+b+c+d)}.$$

Dagegen folgt aus einer einfachen Proportion wegen Aehnlichkeit von Dreiecken für die Fläche des um jenes Dreieck vermehrten Vierecks der Ausdruck

$$\frac{a^2}{4(a^2 - c^2)} \sqrt{(a+b+c-d)\,(a+b-c+d)\,(a-b+c+d)\,(-a+b+c+d)},$$

folglich ist als Differenz beider Flächen

$$F = \tfrac{1}{4}\sqrt{(a+b+c-d)\,(a+b-c+d)\,(a-b+c+d)\,(-a+b+c+d)}.$$

Da es uns jedoch darauf ankommt, die Radien der Berührungskreise in die Betrachtung zu ziehen, so benützen wir, indem wir der Kürze halber $d + x$ mit ξ, $b + y$ mit η bezeichnen, für die Fläche des Dreiecks (c, x, y) die Gleichung

$$F\,(c, x, y) = r_c \cdot \frac{c + x + y}{2}$$

dagegen für die Fläche des Dreiecks (a, ξ, η) die Formel

$$F\,(a, \xi, \eta) = \varrho_a \frac{a + \xi + \eta}{2},$$

und indem wir aus der Beziehung

$$r_c : \varrho_a = c : a$$

r_c durch ϱ_a ersetzen, oder umgekehrt, finden wir nach einigen leicht auszuführenden Substitutionen

$$F = r_c \frac{a + c}{2\,c}(a + b - c + d), \quad \text{desgl.} \quad F = \varrho_a \frac{a + c}{2\,a}(a + b - c + d).$$

Durch Wiederholung eines ähnlichen Verfahrens für ϱ_a und r_a u. s. w., oder auch kurz durch cyclische Vertauschung der Buchstaben ergeben sich die entsprechenden Formeln für die übrigen Berührungsradien, nämlich folgende Gruppen von Gleichungen:

$$\left.\begin{aligned} F &= r_a \frac{a+c}{2a}(-a+b+c+d) \\ F &= r_b \frac{b+d}{2b}(a-b+c+d) \\ F &= r_c \frac{a+c}{2c}(a+b-c+d) \\ F &= r_d \frac{b+d}{2d}(a+b+c-d) \end{aligned}\right\} \quad (1)$$

$$\left.\begin{aligned} F &= \varrho_a \frac{a+c}{2a}(a+b-c+d) \\ F &= \varrho_b \frac{b+d}{2b}(a+b+c-d) \\ F &= \varrho_c \frac{a+c}{2c}(-a+b+c+d) \\ F &= \varrho_d \frac{b+d}{2d}(a-b+c+d) \end{aligned}\right\} \quad (2)$$

Zufolge von Aehnlichkeitsbeziehungen aber, die genau denen des vorigen Abschnitts (Ia.) entsprechen, hat man

$$r_c : \frac{c+x-y}{2} = \frac{a+\xi-\eta}{2} : r_a,$$

woraus

$$r_a\, r_c = \frac{ac}{4(a+c)^2}(a-b+c+d)(a+b+c-d),$$

folglich ergibt sich, indem man die erste und dritte der Gleichungen (1) mit einander multiplicirt und $r_a\, r_c$ durch den gefundenen Wert ersetzt,

$$F = \tfrac{1}{4}\sqrt{(a+b+c-d)(a+b-c+d)(a-b+c+d)(-a+b+c+d)} \quad (3)$$

Multiplicirt man dagegen die zweite und vierte der Gleichungen (1) mit einander und führt die umgekehrte Substitution aus, so hat man

$$r_a\, r_b\, r_c\, r_d = \frac{a\,b\,c\,d}{(a+c)^2\,(b+d)^2}F^2. \quad (4)$$

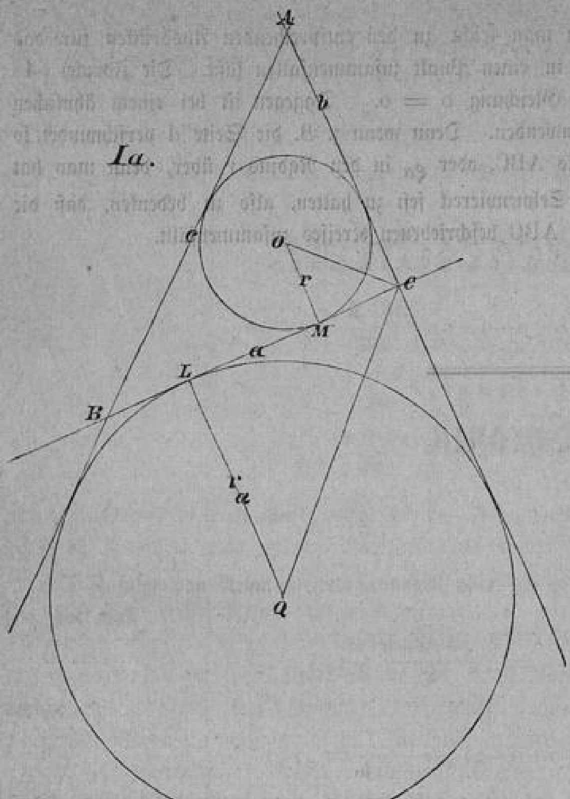
Durch Combination der Formeln (1) und (2) erhält man ferner

$$\left.\begin{aligned} r_a + \varrho_c &= \frac{2F}{-a+b+c+d}, \\ r_b + \varrho_d &= \frac{2F}{a-b+c+d}, \\ r_c + \varrho_a &= \frac{2F}{a+b-c+d}, \\ r_d + \varrho_b &= \frac{a+b+c-d}{2F}, \end{aligned}\right\} \quad (5)$$

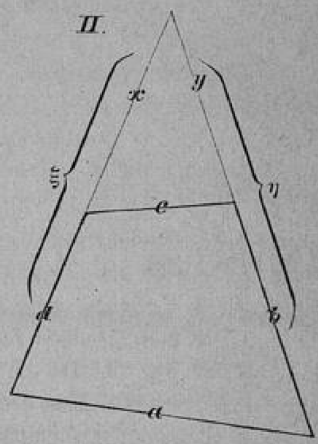
folglich $$F = \sqrt{(r_a+\varrho_c)(r_b+\varrho_d)(r_c+\varrho_a)(r_d+\varrho_b)}. \quad (6)$$

Von den Formeln (3) und (5) gelangt man leicht zu den entsprechenden Ausdrücken für das Dreieck, indem man zwei Eckpunkte des Vierecks in einen Punkt zusammenfallen läßt. Die Formel (4) führt in diesem speciellen Fall auf die identische Gleichung $o = o$. Dagegen ist bei einem ähnlichen Schluß aus der Formel (6) einige Vorsicht anzuwenden. Denn wenn z. B. die Seite d verschwindet, so geht nicht etwa r_a in den Radius r_α des Dreiecks ABC, oder ϱ_α in den Radius r über, denn man hat auch jetzt noch die Bedeutung des Vierecks als Sehnenviereck fest zu halten, also zu bedenken, daß die Richtung der d mit der Tangente in B des um ABC beschriebenen Kreises zusammenfällt.

Ia.



II.



Ib