Die Berechnung der Logarithmen

nach einem einfachen elementaren Verfahren. Vom Professor J. Falke.

§ 1. Einleitung.

Die hohe Bedeutung des logarithmischen Rechnens an und für sich, nicht minder aber auch die großen Vorteile, welche dasselbe dem höheren gewerblichen Leben gewährt, sind jedem bekannt, der sich nur einigermaßen mit dem Wesen und der Anwendungsfähigkeit der mathematischen Wissenschaften vertraut gemacht hat, und es wird von allen Seiten unbedingt anerkannt, daß dieser Zweig der Zahlenlehre in allen unsern höheren Unterrichtsanstalten, sowohl Gymnasien, als auch Realschulen, gepflegt werden muß. Auf den ersten Blick möchte es scheinen, als ob die letzteren besondere Veranlassung dazu hätten; aber auch für den Gymnasiasten ist die Beschäftigung mit Logarithmen nicht nur wichtig, sondern sogar in hohem Grade notwendig.

Wichtig ist sie, weil sie eine sehr gute Gelegenheit darbietet, beim Schüler die Lernfreudigkeit und die Liebe zur Mathematik anzuregen. Sobald derselbe erkannt hat, daß vermittelst der Logarithmen weitläufige Berechnungen mit wenigen Zeilen erledigt werden können, wird seine Aufmerksamkeit mächtig angefacht; er sieht ein, daß sich durch strenges mathematisches Denken kurze Wege finden lassen; er lernt infolge dessen die mathematische Wissenschaft achten, und wenn er nicht zu den zerfahrenen Geistern gehört, wird sich diese Wertschätzung in Liebe zum Fache verwandeln, deren Erweckung eigentlich das Hauptziel alles Unterrichtes sein soll.

Notwendig ist aber die Übung im logarithmischen Rechnen, weil sie allein imstande ist, einem dringenden Bedürfnisse des Gymnasiums abzuhelfen. Bei den Einrichtungen, welche dasselbe hat treffen müssen, um das vorgesteckte Hauptziel zu erreichen, muß das bürgerliche Rechnen, wenigstens was Stundenzahl anbelangt, mehr zurücktreten; es muß sogar schon in den mittleren Klassen aufhören. Werden nun die Schüler von hier an nur mit geometrischen Beweisen und arithmetischen Untersuchungen beschäftigt, bei denen es sich nur um ein Arbeiten mit allgemeinen Buchstabengrößen handelt, so verlieren sie sehr bald die frühere Schlagfertigkeit, unter Umständen sogar die Sicherheit im „Einmaleins" und „Einsineins"; dann sind aber für sie auch alle die Zahlenkunststücke des Kaufmanns fast nutzlos geworden, die sie vielleicht früher ganz gut erlernt hatten. Gegen diese Gefahr bietet der fortgesetzte Gebrauch der Logarithmentafeln den besten Schutz, weil hierbei jene ersten Anfänge immer wieder von neuem angefrischt werden.

Eintreten müssen demnach diese Übungen möglichst kurz nach der Zeit, wo die Unterrichtsstunden für das bürgerliche Rechnen aufgehört haben und vor der Zeit, ehe der Unterricht in Trigonometrie und Stereometrie beginnt; denn diese beiden Fächer bieten genug Gelegenheit zur Anwendung der Logarithmen und zwar ganz ungesucht, so daß beim Schüler der Gedanke gar nicht aufkommen kann, es handle sich nur um eine zeit- und kraftraubende Übung.

Ernste Bedenken möchte aber dieser frühzeitige Anfang des logarithmischen Rechnens bei dem Mathematiker erwecken, der es mit dem Hauptgrundsatze seiner Wissenschaft ernst nimmt. In der Mathematik soll der Schüler niemals einen Satz benutzen, den er noch nicht vollständig verstanden, dessen Beweis er noch nicht vollkommen begriffen hat. Er sollte also von rechtswegen auch die Logarithmentafeln noch nicht gebrauchen, bevor er weiß, wie die Berechnung derselben ermöglicht worden ist. Dieselbe wird bekanntlich vermittelst der logarithmischen Reihen ausgeführt, welche in der Differentialrechnung entwickelt werden; bis zu dieser kann aber der Gymnasialunterricht niemals vordringen. Die logarithmischen Reihen können aber auch schon in der Analysis des Endlichen aufgestellt werden, und dieser Weg läßt sich allerdings von dem Schüler des Gymnasiums betreten, jedoch erst in der Prima ist er dazu befähigt. Leider wäre aber hier die Sache verspätet, und die Zeit für ausgiebige Uebungen so gut wie gar nicht mehr vorhanden.

Ein ganz elementares Verfahren für Berechnen der Logarithmen ist also gewiß für die höhere Schule durchaus wünschenswert. Kambly giebt auf Seite 66 seiner Arithmetik (22te Aufl.) einen Weg an, die Logarithmen mit Hilfe von Kettenbrüchen zu finden; dieser Weg der Berechnung ist aber außerordentlich schwerfällig und kann die Schüler nur abschrecken. Nicht nur elementar muß das Verfahren sein, sondern auch möglichst einfach. — Verfasser will in der nachfolgenden Abhandlung einen, wie er denkt, neuen Weg zeigen, der, wie er hofft, beiden Forderungen entspricht. Besondere Vorkenntnisse sind für denselben durchaus nicht notwendig. Dieselben bestehen vielmehr nur aus Sätzen der Zahlenlehre, welche auf diesem Standpunkte schon bekannt und geläufig sein müssen, und wie gering die Menge derselben ist, wird der folgende § zeigen.

Auch der Inhalt des notwendigen Lernstoffes ist nicht übermäßig ausgedehnt. Um diese Thatsache augenfällig zu machen, ist derselbe in vorliegender Abhandlung durch größeren Druck hervorgehoben.

§ 2. Die Vorkenntnisse für elementare Berechnung der Logarithmen.

I. Aus der Lehre von den Ungleichungen muß bekannt sein:

Das Zeichen $>$ bedeutet „größer als“,
„ „ $<$ „ „kleiner als“.

Ferner müssen aus diesem Gebiete der Zahlenlehre die folgenden Hilfssätze geläufig sein:

Hilfssatz 1. Wenn $a > p$ oder wenn $a < q$
so ist auch $a^n > p^n$ so ist auch $a^n < q^n$

d. h. wenn man eine Ungleichung potenziert, so bleibt die Seite der Ungleichung größer, welche vorher größer war.*

* Anmerkung. Es ist $3 < 4$
also auch $3^2 < 4^2$

d. h. 9 ist kleiner als 16, was vollkommen klar ist.

Durch ähnliche Zahlenbeispiele kann man auch die folgenden Hilfssätze leicht zum Verständnis bringen.

Hilfssatz 2. Wenn erstens $a > m$ oder wenn $a < p$
und zweitens $b > n$ und $b < q$
so ist auch $ab > mn$ so ist auch $ab < pq$

d. h. wenn man das Größere mit dem Größeren und das Kleinere mit dem Kleineren multipliziert, so erhält man auf der Seite der Ungleichung das Größere, wo vorher das Größere stand.

Hilfssatz 3. Wenn $a > m$ oder wenn $a < p$
und $b = n$ und $b = q$
so ist $ab > mn$ so ist $ab < pq$

d. h. wenn man Ungleiches mit Gleichem multipliziert, so erhält man auf der Seite der Ungleichung das Größere, wo vorher das Größere gestanden hat.

Hilfssatz 4. Wenn $a = m$ oder wenn $a = p$
und $b < n$ und $b > q$
so ist $\frac{a}{b} > \frac{m}{n}$ so ist $\frac{a}{b} < \frac{p}{q}$

d. h. wenn man Gleiches mit Ungleichem dividiert, so erhält man auf der Seite der Ungleichung das Größere, wo mit dem Kleineren dividiert worden ist.

Hilfssatz 5. Wenn beispielsweise $x = 7{,}635\,498$
so ist $x > 7{,}635\,4$
aber $x < 7{,}635\,5$

d. h. a) wenn man am Ende einer Dezimalzahl beliebig viele Dezimalstellen wegläßt, ohne die letzte stehen gebliebene Stelle zu erhöhen, so wird der Dezimalbruch kleiner, als der wirkliche Wert; — b) wenn man aber die letzte Stelle, welche stehen bleibt, erhöht, so wird der Dezimalbruch größer, als der wirkliche Wert.

Hilfssatz 6. Wenn beispielsweise $x > 3{,}167\,325$
und $x < 3{,}167\,347$
so ist $x = 3{,}167\,3\ldots$

d. h. verallgemeinert: Wenn die „obere Grenze" einer Zahl und ihre „untere Grenze" in den ersten
3, 4, 5, 6 . . . . Dezimalen
übereinstimmen, so bilden diese übereinstimmenden Stellen den „Näherungswert", und derselbe ist bezw. bis auf
3, 4, 5, 6 . . . . Dezimalen genau.

II. Aus der Potenzlehre müssen noch die folgenden Sätze geläufig sein:

Hilfssatz 7. $(a^m)^2 = a^{2m}$ z. B. $(a^2)^2 = a^4$

oder allgemein $(a^m)^n = a^{mn}$

d. h. eine Potenz darf potenziert werden, indem man nur ihren Exponenten multipliziert.

Hilfssatz 8. $a^m\, a^n = a^{m+n}$

d. h. zwei Potenzen von gleicher Grundzahl dürfen mit einander multipliziert werden, indem man nur ihre Exponenten addiert.

Die Umkehrung des letzten Satzes wird im Nachfolgenden auch angewendet; sie ergiebt den folgenden Satz:

Hilfssatz 9. $a^{m+n} = a^m . a^n$

d. h. wenn man mit einer Summe potenzieren soll, so darf man auch **mit jedem ihrer Teile potenzieren**; die beiden erhaltenen Potenzen muß man zuletzt noch mit **einander multiplizieren.**

Hilfssatz 10. Wenn $a^{\frac{m}{n}} = p$ | oder wenn $a^{\frac{m}{n}} > p$
so ist auch $a^m = p^n$ | so ist auch $a^m > p^n$

d. h. wenn auf der einen Seite einer Gleichung oder Ungleichung mit einem Bruche potenziert werden soll, so darf man auf der anderen Seite mit dem Nenner potenzieren.

III Aus der Lehre von den Logarithmen selbst werden noch die folgenden Sätze gebraucht:

Hilfssatz 11. Wenn $10^n = p$
so ist $n = \text{Log. } p$

d. h. gemeiner Logarithmus irgend einer Zahl p bedeutet die dritte Zahl, mit welcher 10 potenziert werden muß, um die Zahl p zu erhalten.

z. B. $10^2 = 100$, daher ist 2 der gemeine Logarithmus von 100.

Hilfssatz 12. $\text{Log. } (a.b) = \text{Log. } a + \text{Log. } b$

d. h. ein Produkt darf logarithmiert werden, indem man jeden Faktor logarithmiert; die erhaltenen Logarithmen muß man alsdann noch addieren.

Hilfssatz 13. $\text{Log.} \frac{a}{b} = \text{Log. } a - \text{Log. } b$

d. h. ein Bruch darf logarithmiert werden, indem man sowohl den Zähler als auch den Nenner für sich allein logarithmiert; vom Logarithmus des Zählers muß dann noch der Logarithmus des Nenners subtrahiert werden.

Hilfssatz 14. $\text{Log. } (a^n) = n . \text{Log. } a$

d. h. eine Potenz darf logarithmiert werden, indem man zunächst nur ihre Grundzahl logarithmiert; den erhaltenen Logarithmus muß man dann noch mit dem Exponenten multiplizieren.

Hilfssatz 15. $\text{Log. } 10 = 1$

d. h. der gemeine Logarithmus von 10 ist 1.

§ 3. Der Weg der einfachen Logarithmenberechnung im allgemeinen.

Schwierige Rechnungen mit bestimmten Zahlen kann man bekanntlich in rascher und bequemer Weise mit Hilfe der Logarithmentafeln ausführen. Die Logarithmentafel ist aber weiter nichts als eine Potenztabelle, denn es bedeutet beispielsweise

$$\text{Log. } 2 = 0{,}301\,03\,00$$

nichts anderes als $10^{0{,}301\,03\,00} = 2$

Eine Potenztabelle kann man sich aber selber ohne große Vorkenntnisse anfertigen; multipliziert man z. B. die Zahl 2 fortgesetzt mit sich selbst, so erhält man die folgenden Zahlen:

$2^1 = 2$	$2^7 = 128$	$2^{13} = 8\,192$	$2^{19} = 524\,288$
$2^2 = 4$	$2^8 = 256$	$2^{14} = 16\,384$	$2^{20} = 1\,048\,576$
$2^3 = 8$	$2^9 = 512$	$2^{15} = 32\,768$	$2^{21} = 2\,097\,152$
$2^4 = 16$	$2^{10} = 1\,024$	$2^{16} = 65\,536$	$2^{22} = 4\,194\,304$
$2^5 = 32$	$2^{11} = 2\,048$	$2^{17} = 131\,072$	$2^{23} = 8\,388\,608$
$2^6 = 64$	$2^{12} = 4\,096$	$2^{18} = 262\,144$	$2^{24} = 16\,777\,216$

Die vorstehende kleine Potenzreihe läßt sich auf mancherlei Weise vorteilhaft anwenden. Man kann z. B. an derselben das Wesen der vier logarithmischen Rechnungsarten sehr bequem deutlich machen, wie sich aus dem folgenden kleinen Beispiele ergeben wird.

Beispiel. Es soll die Zahl 2 048 mit der Zahl 4 096 multipliziert werden.

Lösung. Nach der vorausgehenden Potenztabelle darf man setzen:

$$2\,048 \,.\, 4\,096 = 2^{11} \,.\, 2^{12}$$

daher

$$2\,048 \,.\, 4\,096 = 2^{23} \qquad \text{n. Hilfssatz 8}$$

sucht man nun diese 23te Potenz wieder in der Potenztabelle auf, so ergiebt sich:

$$2\,048 \,.\, 4\,096 = 8\,388\,608$$

Die ganze Arbeit besteht also nur in dreimaligem Aufsuchen der Zahlen in der Potenztabelle, zu berechnen war nur 11 + 12 = 23. Jene Tabelle bildet also ein sehr bequemes Mittel, um zwei Zahlen mit einander zu multiplizieren. Ersetzt man die gebräuchlichen Namen „Potenz“ und „Potentiator“ durch die gleichbedeutenden Worte „Numerus“ und „Logarithmus“, so finden die Schüler nach Lösung von einigen wenigen anderen Aufgaben selbständig die bekannte logarithmische Regel: Zwei Zahlen werden logarithmisch mit einander multipliziert, indem man ihre Logarithmen addiert und den Numerus aufschlägt.

Durch andere sachgemäße Beispiele lassen sich auch die drei übrigen Regeln über logarithmisches Dividieren, Potenzieren und Wurzelziehen ebenso leicht auffinden. Ebenso gut, wie man mit Hilfe einer Potenztabelle eine Wurzel berechnen kann, **wird man auch mit Hilfe einer Potenztabelle einen Logarithmus berechnen können.**

Die obige Potenztabelle würde aber dazu noch wenig geeignet sein, denn sie bewegt sich durch die Zahlen 2, 4, 8, 16, 32, 64 ...... Es fallen also viele Zahlen aus, und die Lücken werden von Schritt zu Schritt immer größer. Weit weniger lückenhaft wurde die Potenzreihe der Zahl 1,1 sein, welche der 1 schon ziemlich nahe kommt; denn

$1{,}1^1 = 1$	$1{,}1^5 = 1{,}610\,51$
$1{,}1^2 = 1{,}21$	$1{,}1^6 = 1{,}771\,561$
$1{,}1^3 = 1{,}331$	$1{,}1^7 = 1{,}948\,717\,1$
$1{,}1^4 = 1{,}464\,1$	$1{,}1^8 = 2{,}143\,588\,81$

Die Zahl 1,01 kömmt der 1 noch näher, und die Lücken in der Potenzreihe von 1,01 würden noch geringer sein. Noch vorteilhafter wäre als Grundzahl 1,001 u. s. w. Für die hier vorliegende Untersuchung ist die der Eins sehr nahe kommende Zahl

$$1{,}00\,001$$

gewählt. — Der Weg unserer Logarithmenberechnung läßt sich nun mit kurzen Worten folgendermaßen beschreiben: **Man könnte selber und zwar nur durch fortgesetztes Multiplizieren eine Logarithmentafel für die Grundzahl 1,00 001 herstellen; vermittelst derselben berechnet man die Logarithmen für die gebräuchliche Grundzahl 10.**

Die für unsere Zwecke notwendigen Bruchstücke dieser künstlichen Logarithmentafel sind in den §§ 5, 6, 7 und 10 verteilt, und es waren nicht weniger als einhundert und achtzig Multiplikationen erforderlich. Daß die Ausführung derselben von den Schülern nicht verlangt werden darf, ist unzweifelhaft klar. **Ebensowenig wie die Schüler selbst die ganze Logarithmentafel berechnen sollen, ebensowenig sollen sie die vielen Zahlen in den §§ 5, 6, 7 und 10 selber berechnen; aber die Einsicht müssen sie wenigstens erlangen, wie dieselben gefunden worden sind.** Dazu sollen die Vorübungen im nächsten § dienen, die sich an eine aus dem Leben gegriffene Aufgabe anschließen, welche deshalb auch dem Interessenkreise der Schüler nahe liegt.

§ 4. Vorübungen.

I. Die „Hauptpotenzen“ von 1,03.

Aufgabe 1. Es zahlt jemand 10 000 Mark in eine Bank und bestimmt, daß nach 64 Jahren sein ältester Nachkomme diesen Geldbetrag nebst Zinseszinsen zurückerhalte. Wie viel wird ausgezahlt werden, wenn die Bank 3 Prozent Zinsen gewährt?

Lösung. Nach der bekannten Formel der Zinseszinsrechnung, welche sich auf diesem Standpunkte schon sehr leicht zum Verständnis bringen läßt, ist

$$\text{Endkapital} = 10\,000 \,.\, 1{,}03^{64} \quad \text{Mark.}$$

Jetzt hat man die Potenz $1{,}03^{64}$ zu berechnen. 1,03 müßte also 64 mal mit sich selbst multipliziert werden. Diese Rechnung, auf gewöhnlichem Wege durchgeführt, würde so weitläufig und zeitraubend werden, daß sie kaum zu Ende geführt werden könnte. — Multipliziert man aber zunächst 1,03 einmal mit sich selbst, so erhält man:

$$1{,}03^2 = 1{,}060\,9$$

Nun braucht man aber gar nicht die dritte Potenz zu berechnen: man multipliziert die eben erhaltene Zahl 1,060 9 mit sich selbst und erhält dadurch sofort (nach Hilfssatz 7) die vierte Potenz:

$$1{,}03^4 = 1{,}125\,508\,81$$

Diese neunstellige Zahl könnte man nun wieder mit sich selber multiplizieren und würde dabei die achte Potenz erhalten; diese Rechnung würde aber schon etwas weitläufig werden; außerdem würde das Ergebnis eine Zahl mit sechzehn Dezimalstellen, und so würde von einer Einzelrechnung zur andern die Arbeit immer verwickelter, sie würde auch jetzt kaum noch ausführbar sein. Deshalb muß man die Zahl der Dezimalen beschränken, indem man die letzten wegläßt. Begnügt man sich für die ganze nachfolgende Rechnung mit 6 Dezimalstellen, läßt also die letzten beiden weg, ohne die letzte zu erhöhen, so wird der Zahlenwert rechts zu klein, d. h. nach Hilfssatz 5 wird $1{,}03^4 > 1{,}125\,508$*. Erhöht man aber die 6te Dezimale, um die Ungenauigkeit wieder einigermaßen auszugleichen, so wird der Zahlenwert rechts zu groß, d. h. nach Hilfssatz 5 wird $1{,}03^4 < 1{,}125\,509$

Die beiden letzten Gleichungen bilden die „untere Grenze“ und die „obere Grenze“ von der vierten Potenz:

$$1{,}03^4 > 1{,}125\,508 \qquad\qquad 1{,}03^4 < 1{,}125\,509$$

Aus diesen beiden Grenzwerten der vierten Potenz lassen sich nun auch die obere und untere Grenze der 8ten Potenz berechnen. Es war wie eben nachgewiesen:

	$1{,}03^4 > 1{,}125\,508.$	$1{,}03^4 < 1{,}125\,509.$
also auch	$(1{,}03^4)^2 > 1{,}125\,508^2$ n. Hilfssatz 1.	$(1{,}03^4)^2 < 1{,}125\,509^2$ n. Hilfssatz 1.
oder	$1{,}03^8 > 1{,}125\,508^2$ „ „ 7.	$1{,}03^8 < 1{,}125\,509^2$ „ „ 7.

Berechnet man diese beiden 2ten Potenzen in jeder der beiden letzten Ungleichungen, so erhält man

$$\underbrace{1{,}03^8 > 1{,}266\,768}_{\text{untere Grenze.}} \qquad\qquad \underbrace{1{,}03^8 < 1{,}266\,771\,.}_{\text{obere Grenze.}}$$

Fährt man in dieser Weise fort, indem man immer die zuletzt erhaltene Zahl mit sich selbst multipliziert und beachtet dabei, daß jedes Ergebnis für eine obere Grenze in der letzten Dezimale um eine Einheit erhöht werden soll, so erhält man folgende Potenzwerte:

---

* Nach der gebräuchlichen Rechenregel müßte in diesem Falle die 6te Dezimale erhöht werden; dies unterbleibt aber hier absichtlich, weil man sonst die „obere“ und „untere Grenze“ der Potenzen von einander nicht scharf sondern würde.

$1{,}03^{16} > 1{,}604\,701 \qquad 1{,}03^{16} < 1{,}604\,709$

$1{,}03^{32} > 2{,}575\,065 \qquad 1{,}03^{32} < 2{,}575\,091$

$1{,}03^{64} > 6{,}630\,959 \qquad 1{,}03^{64} < 6{,}631\,094$

Aus den beiden letzten Ungleichungen folgt nach Hilfssatz 6:

$$1{,}03^{64} = 6{,}63\ .\ .\ .\ .\ .$$

und dieser Wert ist noch bis auf zwei Dezimalen vollständig genau. Wird derselbe in die erste Gleichung

$$\text{Endkapital} = 10\,000\,.\,1{,}03^{64}\ \text{Mark}$$

eingesetzt, so erhält man:

$$\text{Endkapital} = 10\,000\,.\,6{,}63$$

$$\text{Endkapital} = 66\,300 \quad \text{Mark.}$$

Die Berechnung der Grenzwerte ist also vollkommen geeignet, sehr weitläufige Rechnungen abzukürzen und trotzdem noch eine sehr große Genauigkeit zu erlangen. Für die Berechnung derselben ergiebt sich aus dem Vorausgehenden:

Regel 1. Die Grenzwerte der Hauptpotenzen einer Dezimalzahl werden folgendermaßen gefunden:

1) Man kürzt die Dezimalzahl auf beliebige Stellen ab, ohne zu erhöhen, und multipliziert sie mit sich selbst; das Ergebnis wird in dieser Weise fortgesetzt mit sich selbst multipliziert. — (Auf diesem Wege findet man die „unteren Grenzen“).

2) Man erhöht die letzte Dezimale des abgekürzten Dezimalbruches um eine Einheit und multipliziert fortgesetzt das letzte Ergebnis mit sich selbst, indem man vorher immer die letzte Dezimale um eine Einheit erhöht. — (Auf diesem Wege findet man die „oberen Grenzen“).

II. Die „Zwischenpotenzen“ von 1,03.

Aufgabe 2. Wie viel würde man erhalten, wenn die 10 000 Mark nur 50 Jahre lang auf Zinseszinsen ausgeliehen würden?

Lösung. 1) **Berechnung der unteren Grenze.** Es war

$$1{,}03^{32} > 2{,}575\,065$$
$$1{,}03^{16} > 1{,}604\,701$$

folglich $1{,}03^{32}\,.\,1{,}03^{16} > 2{,}575\,065\,.\,1{,}604\,701$ n. Hilfssatz 2.

oder $1{,}03^{48} > 2{,}575\,065\,.\,1{,}604\,701$ „ „ 8.

Führt man die Multiplikation auf der rechten Seite dieser Ungleichung aus, so erhält man bei einfacher Weglassung der letzten Dezimalen:

$$1{,}03^{48} > 4{,}132\,209$$

Nun war auch $1{,}03 = 1{,}060\,9$ [sic; vgl. $1{,}03^2$]

folglich wie vorhin $1{,}03^{48}\,.\,1{,}03^{2} > 4{,}132\,209\,.\,1{,}060\,9$ n. Hilfssatz 3.

oder $1{,}03^{50} > 4{,}132\,209\,.\,1{,}060\,9$ „ „ 8.

Führt man die Multiplikation aus, so wird endlich

$$1{,}03^{50} > 4{,}383\,860.$$

2) **Berechnung der oberen Grenze.** Auf demselben Wege ergiebt sich die nachfolgende Rechnung. Es war

$$1{,}03^{32} < 2{,}575\,091$$
$$1{,}03^{16} < 1{,}604\,709$$

folglich $1{,}03^{32}\,.\,1{,}03^{16} < 2{,}575\,091\,.\,1{,}604\,709$ n. Hilfssatz 2.

oder $1{,}03^{48} < 2{,}575\,091\,.\,1{,}604\,709$ „ „ 8.

Führt man die Multiplikation aus, kürzt das erhaltene Produkt auf sechs Dezimalen ab, erhöht aber die letzte Dezimale um eine Einheit, — (siehe Regel 1) —, so erhält man die obere Grenze, und es ergiebt sich:

$1{,}03^{48} < 4{,}132\,272$

Nun war auch $1{,}03^{3} = 1{,}060\,9$

folglich $1{,}03^{48} \cdot 1{,}03^{2} < 4{,}132\,272 \cdot 1{,}060\,9$ n. Hilfssatz 3.

oder $1{,}03^{50} < 4{,}132\,272 \cdot 1{,}060\,9$ „ „ 8.

Führt man nun die Multiplikation wieder aus und erhöht abermals die letzte Dezimale, so erhält man

$1{,}03^{50} < 4{,}383\,928.$

3) **Bestimmung des „Näherungswertes“.** Es war

$1{,}03^{50} > 4{,}383\,860$

und $1{,}03^{50} < 4{,}383\,928$

folglich $1{,}03^{50} = 4{,}383\ldots$ n. Hilfssatz 6.

und dieser Wert ist bis auf drei Dezimalen genau nach dem eben erwähnten Hilfssatze. Mit diesem Näherungswerte wäre nun noch das Anfangskapital zu multiplizieren. — Aus der Lösung der letzten Aufgabe ergiebt sich:

Regel 2. Die Grenzwerte der „Zwischenpotenzen“ einer Dezimalzahl werden gefunden, indem man die nächst niedrigere Hauptpotenz mit einer vorausgehenden kleineren Hauptpotenz multipliziert; das Ergebnis wird mit einer noch niedrigeren multipliziert u. s. w.

Übungsbeispiel 1. Wie ist die 459te Potenz von 1,03 zu berechnen?

Lösung. Durch ähnliche Überlegungen wie vorhin ergiebt sich:

man multipliziert die	256te Potenz
mit der	128ten
„ „	64 „
„ „	8 „
„ „	2 „
„ „	1 „
und erhält so die	459te Potenz. — (Summe der darüberstehenden Zahlen).

Übungsbeispiel 2. Die 64te Potenz der Dezimalzahl 1,1 bis auf vier Dezimalen zu berechnen. — (Untere und obere Grenze). — Die 90te Potenz derselben Dezimalzahl ebenso zu berechnen.

Die nachfolgenden Beispiele sind Vorübungen, durch welche die Berechnung der Potenzreihen im Anfange des § 7 zum Verständnis gebracht werden sollen.

Übungsbeispiel 3. Wie findet man die 100te Potenz einer Zahl?

Lösung. Man multipliziert die 64te Potenz mit der 32ten, das erhaltene Produkt mit der 4ten.

Übungsbeispiel 4. Wie findet man aus der 100ten Potenz die 1000te?

„ **5.** „ „ „ „ „ 192 „ „ „ 249te?

„ **6.** „ „ „ „ „ 228 „ „ „ 230 „

„ **7.** „ „ „ „ „ 640 „ „ „ 731 „

§ 5. Die Hauptpotenzen der Dezimalzahl 1,00 001.

Die Grundzahl 1,00 001, deren Hauptpotenzen in diesem § aufgestellt werden sollen, mag kurz mit dem Buchstaben A bezeichnet werden; also

$$A = 1{,}00\,001. \qquad \text{I}$$

Wendet man auf diese Zahl Regel 1 an, so erhält man die nachfolgenden Grenzwerte:*

* **Anmerkung.** Die Berechnung dieser Zahlen ist natürlich sehr zeitraubend; die Schüler sollen sie deshalb auch gar nicht berechnen. Haben sie aber die Vorübungen des vorigen § genügend durchgearbeitet, so ist ihnen vollkommen klar, wie die folgende Potenzreihe entstanden ist, und das genügt vollkommen. Gleiches gilt auch von den Potenzreihen in § 6, 7, 10.

A^{2}	$>$ 1,000 020 000 1		
A^{4}	$>$ 1,000 040 000 6	A^{4}	$<$ 1,000 040 000 7
A^{8}	$>$ 1,000 080 002 8	A^{8}	$<$ 1,000 080 003 1
A^{16}	$>$ 1,000 160 012 0	A^{16}	$<$ 1,000 160 012 7
A^{32}	$>$ 1,000 320 049 6	A^{32}	$<$ 1,000 320 051 1
A^{64}	$>$ 1,000 640 201 6	A^{64}	$<$ 1,000 640 204 7
A^{128}	$>$ 1,001 280 813 0	A^{128}	$<$ 1,001 280 819 3
A^{256}	$>$ 1,002 563 266 4	A^{256}	$<$ 1,002 563 279 1
A^{512}	$>$ 1,005 133 103 1	A^{512}	$<$ 1,005 133 128 6
A^{1024}	$>$ 1,010 292 554 9	A^{1024}	$<$ 1,010 292 606 3
A^{2048}	$>$ 1,020 691 046 4	A^{2048}	$<$ 1,020 691 150 4
A^{4096}	$>$ 1,041 810 212 2	A^{4096}	$<$ 1,041 810 424 6
A^{8192}	$>$ 1,085 368 518 2	A^{8192}	$<$ 1,085 368 960 9
$A^{16\,384}$	$>$ 1,178 024 820 2	$A^{16\,384}$	$<$ 1,178 025 781 3
$A^{32\,768}$	$>$ 1,387 742 477 0	$A^{32\,768}$	$<$ 1,387 744 741 5
$A^{65\,536}$	$>$ **1,925 829 182 4**	$A^{65\,536}$	$<$ **1,925 835 467 6**
$A^{131\,072}$	$>$ **3,708 818 039 7**	$A^{131\,072}$	$<$ **3,708 842 248 3**
$A^{262\,144}$	$>$ **13,755 331 251 6**	$A^{262\,144}$	$<$ **13,755 510 822 8** u. s. w.

§ 6. Die Potenzwerte der einfachen Zahlen 2, 3, 10.

Aufgabe 3. Zwischen welchen Potenzen von 1,00 001 liegt die Zahl 3? — (1,00 001 war kurz mit A bezeichnet, vrgl. Gleichung I) —.

Lösung. Nach § 5 war

$$\left.\begin{array}{ll} & A^{65\,536} > \mathbf{1{,}925\,829\,182\,4} \\ \text{und} & A^{65\,536} < \mathbf{1{,}925\,835\,467\,6} \end{array}\right\} \textbf{folglich } A^{65\,536} = \mathbf{1{,}925\,8\ldots\ldots} \quad \text{n. Hilfssatz 6.}$$

$$\left.\begin{array}{ll} \text{ferner war} & A^{131\,072} > \mathbf{3{,}708\,818\,039\,7} \\ \text{und} & A^{131\,072} < \mathbf{3{,}708\,842\,248\,3} \end{array}\right\} \textbf{folglich } A^{131\,072} = \mathbf{3{,}708\,8\ldots\ldots} \quad \text{n. Hilfssatz 6.}$$

Folglich liegt der Potenzwert der Zahl 3 zunächst zwischen der

65 536ten und 131 072ten

Potenz. Der wirkliche Wert ist also eine Zwischenpotenz zwischen diesen beiden Hauptpotenzen. Um dieselbe zu finden, hat man nach Regel 2 mit den vorausgehenden Hauptpotenzen zu multiplizieren. Würde man diese fortgesetzte Multiplikation ausführen mit der 32 768ten, 8192ten, 2048ten, 1024ten, 256ten, 32ten, 4ten, 1ten und noch einmal mit der 1ten, d. h. mit 1,00 001 selbst, (vrgl. Gl. I), **so würde man sich überzeugen, daß sich die folgenden Zwischenpotenzen ergeben:***

$A^{98\,304}$	$>$ 2,672 554 959 8	$A^{98\,304}$	$<$ 2,672 568 043 2
$A^{106\,496}$	$>$ 2,900 707 016 5	$A^{106\,496}$	$<$ 2,900 722 400 0
$A^{108\,544}$	$>$ 2,960 725 679 9	$A^{108\,544}$	$<$ 2,960 741 683 5
$A^{109\,568}$	$>$ 2,991 199 111 5	$A^{109\,568}$	$<$ 2,991 215 432 1
$A^{109\,824}$	$>$ 2,998 866 351 6	$A^{109\,824}$	$<$ 2,998 882 752 2
$A^{109\,856}$	$>$ 2,999 826 137 5	$A^{109\,856}$	$<$ 2,999 842 548 0
$A^{1\,09\,86}$	$>$ 2,999 946 132 3	$A^{109\,860}$	$<$ 2,999 962 543 9
$A^{109\,861}$	$>$ **2,999 976 131 7**	$A^{109\,861}$	$<$ **2,999 992 543 6**
$A^{109\,862}$	$>$ **3,000 006 131 4**	$A^{109\,862}$	$<$ **3,000 022 543 6**

* Vrgl. die letzte Anmerkung.

Aus der vorletzten Zeile folgt nach Hilfssatz 6: $A^{109\,861} = 2{,}999\,9\ldots$

„ „ folgenden „ „ „ 6: $A^{109\,862} = 3{,}000\,0\ldots$

die gesuchte Zahl 3 liegt also zwischen diesen beiden Potenzen,

$$\left.\begin{array}{ll} \text{d. h.} & A^{109\,861} < 3 \\ \text{aber} & A^{109\,862} > 3 \end{array}\right\} \qquad \begin{array}{r} \text{II} \\ \text{III} \end{array}$$

Aufgabe 4. Zwischen welchen Potenzen von 1,00 001 liegt die Zahl 2?

Lösung. In der Lösung der vorigen Aufgabe war schon nachgewiesen, daß

$$A^{65\,536} = 1{,}925\,8\ldots$$

und

$$A^{131\,072} = 3{,}708\,8\ldots$$

Folglich liegt der Potenzwert der Zahl 2 zunächst wieder zwischen der

65 536ten und 131 072ten

Potenz. Multipliziert man nun die kleinere 65 536te Potenz diesmal mit der

2048ten, 1024ten, 512ten, 128ten, 64ten, 2ten, 1ten, 1ten,

so ergeben sich die folgenden Zwischenpotenzen:

$$\begin{array}{ll|ll} A^{67\,584} > & 1{,}965\,676\,603\,3 & A^{67\,584} < & 1{,}965\,683\,219\,0 \\ A^{68\,608} > & 1{,}985\,908\,437\,6 & A^{68\,608} < & 1{,}985\,915\,222\,5 \\ A^{69\,120} > & 1{,}996\,102\,310\,3 & A^{69\,120} < & 1{,}996\,109\,180\,8 \\ A^{69\,248} > & 1{,}998\,658\,944\,0 & A^{69\,248} < & 1{,}998\,665\,836\,0 \\ A^{69\,312} > & 1{,}999\,938\,488\,6 & A^{69\,312} < & 1{,}999\,945\,391\,3 \\ A^{69\,314} > & \mathbf{1{,}999\,978\,487\,5} & A^{69\,314} < & \mathbf{1{,}999\,985\,390\,5} \\ A^{69\,315} > & \mathbf{1{,}999\,998\,487\,2} & A^{69\,315} < & \mathbf{2{,}000\,005\,390\,4} \\ A^{69\,316} > & \mathbf{2{,}000\,018\,487\,1} & A^{69\,316} < & \mathbf{2{,}000\,025\,390\,5} \end{array} \qquad \begin{array}{r} \\ \\ \\ \\ \\ \text{IV} \\ \text{V} \\ \text{VI} \end{array}$$

Nach Hilfssatz 6 folgt aus Zeile IV unbedingt: $A^{69\,314} = 1{,}999\,9\ldots\ldots$

„ „ 6 „ „ „ VI „ $A^{69\,316} = 2{,}000\,0\ldots\ldots$

hingegen läßt sich auf Zeile V der Hilfssatz 6 nicht anwenden, weil die beiden Grenzwerte, obschon einander sehr nahe kommend, doch in keiner Dezimale übereinstimmen. Die beiden Grenzwerte, deren Bestimmung uns noch gelang, liegen demnach noch etwas weiter von einander, als in der vorigen Aufgabe, und sind nach den beiden letzten Gleichungen:

$$\left\{\begin{array}{l} A^{69\,314} < 2 \\ A^{69\,316} > 2 \end{array}\right\} \qquad \text{VII}$$

Aufgabe 5. Zwischen welchen Potenzen von 1,00 001 liegt die Zahl 10?

Lösung. Diese Aufgabe läßt sich ebenso lösen, wie die vorige, und man findet

$$\left\{\begin{array}{l} A^{230\,258} < 10 \\ A^{230\,260} > 10 \end{array}\right\} \qquad \text{VIII}$$

Der Beweis für die Richtigkeit dieser beiden Ungleichungen mag noch nachträglich geliefert werden. Nach § 5 war

$$\begin{array}{ll|ll} A^{131\,072} > & 3{,}708\,818\,039\,7 & A^{131\,072} < & 3{,}703\,842\,248\,3 \\ A^{262\,144} > & 13{,}755\,331\,251\,6 & A^{262\,144} < & 13{,}755\,510\,822\,8 \end{array}$$

Aus diesen zwei Gleichungspaaren läßt sich wieder wie in der vorvorigen Aufgabe nachweisen, daß der Potenzwert von 10 zunächst zwischen der

131 072ten und 262 144ten

Potenz liegt. Die kleinere 131 072te Potenz multipliziere man diesmal mit der

65 536ten, 32 768ten, 512ten, 256ten, 64ten, 32ten, 16ten, 2ten, 1ten, 1ten.

Man erhält alsdann die folgenden Zwischenpotenzen:

$A^{196\,608} > 7{,}142\,550\,013\,0$	$A^{196\,608} < 7{,}142\,619\,945\,6$
$A^{229\,376} > 9{,}912\,020\,047\,1$	$A^{229\,376} < 9{,}912\,133\,270\,1$
$A^{229\,888} > 9{,}962\,899\,467\,9$	$A^{229\,888} < 9{,}963\,013\,524\,9$
$A^{230\,144} > 9{,}988\,437\,033\,3$	$A^{230\,144} < 9{,}988\,551\,509\,3$
$A^{230\,208} > 9{,}994\,831\,646\,6$	$A^{230\,208} < 9{,}994\,946\,227\,0$
$A^{230\,240} > 9{,}998\,030\,488\,4$	$A^{230\,240} < 9{,}998\,145\,120\,6$
$A^{230\,256} > 9{,}999\,630\,293\,2$	$A^{230\,256} < 9{,}999\,744\,950\,8$
$A^{230\,258} > 9{,}999\,830\,286\,8$	$A^{230\,258} < 9{,}999\,944\,946\,7$
$A^{230\,259} > 9{,}999\,930\,285\,1$	$A^{230\,259} < 10{,}000\,044\,946\,2$
$A^{230\,260} > 10{,}000\,030\,284\,4$	$A^{230\,260} < 10{,}000\,144\,946\,7$

Auch hier tritt wieder derselbe Fall ein, wie am Ende der vorigen Aufgabe: Die beiden Grenzwerte in der vorletzten Zeile stimmen in gar keinen Dezimalen überein, und es ergeben sich für die Grenzwerte die folgenden beiden Ungleichungen:

$$\left\{\begin{array}{l} A^{230\,258} < 10 \\ A^{230\,260} > 10 \end{array}\right\}$$

wie oben schon im voraus angegeben.

Die beiden Grenzwerte kommen also auch diesmal einander nicht möglichst nahe, und somit ergeben sich die Aufgaben des nächsten §.

§ 7. Genauere Bestimmung der Grenzwerte der Zahlen 2, 3, 10.

Bei der Lösung der Aufgaben dieses § werden noch einige andere Potenzwerte unserer Grundzahl 1,00 001 gebraucht, ferner noch einige Potenzwerte der Grundzahlen

1,000 007 304 8

1,000 002 485 47

1,000 005 505 36.

Dieselben mögen, um die nachfolgenden Untersuchungen von Zwischenbetrachtungen zu entlasten, im voraus schon hier erledigt werden.

Potenzen von 1,00 001. Es war

$$1{,}00\,001^{128} > 1{,}001\,280\,813\,0 \quad | \quad \text{und } 1{,}00\,001^{128} < 1{,}001\,280\,819\,3$$

multipliziert man nun nach einander mit der

64ten, 32ten, 16ten, 8ten, 1ten

Potenz, — (siehe Regel 2), — und ersetzt wieder die Grundzahl 1,00 001 durch das kurze Zeichen A, so erhält man die folgenden Potenzwerte:

$A^{192} > 1{,}001\,921\,834\,5$	$A^{192} < 1{,}001\,921\,844\,0$
$A^{224} > 1{,}002\,242\,499\,1$	$A^{224} < 1{,}002\,242\,510\,2$
$A^{240} > 1{,}002\,402\,869\,9$	$A^{240} < 1{,}002\,402\,881\,8$
$A^{248} > 1{,}002\,483\,064\,9$	$A^{248} < 1{,}002\,483\,077\,2$
$A^{249} > 1{,}002\,493\,089\,7$	$A^{249} < 1{,}002\,493\,102\,1$

Nach Hilfssatz 6 folgt

aus der vorletzten Zeile: $A^{248} = 1{,}002\,483\,0 \ldots.$

„ „ folgenden „ $A^{249} = 1{,}002\,493 \ldots..$ } IX

Multipliziert man die soeben berechnete 224te Potenz mit der 4ten, 1ten, 1ten, so erhält man die folgenden Potenzwerte:

$A^{228} > 1{,}002\,282\,589\,4$	$A^{228} < 1{,}002\,282\,600\,7$
$A^{229} > 1{,}002\,292\,612\,2$	$A^{229} < 1{,}002\,292\,623\,6$
$A^{230} > 1{,}002\,302\,635\,1$	$A^{230} < 1{,}002\,302\,646\,6$

Nach Hilfssatz 6 folgt

$$\left.\begin{array}{ll}\text{aus der vorletzten Zeile:} & A^{229} = 1{,}002\,292\,6\ldots.\\ \text{„ „ folgenden „} & A^{230} = 1{,}002\,302\,6\ldots\end{array}\right\} \qquad \text{X}$$

Es war ferner $A^{512} > 1{,}005\,133\,103\,1$ | $A^{512} < 1{,}005133\,128\,6$

multipliziert man nun nach einander mit der

128ten, 64ten, 16ten, 8ten, 2ten, 1ten

Potenz, so erhält man die nachfolgenden Potenzwerte:

$A^{640} > 1{,}006\,420\,490\,6$	$A^{640} < 1{,}006\,420\,522\,6$
$A^{704} > 1{,}007\,064\,802\,6$	$A^{704} < 1{,}007\,064\,837\,8$
$A^{720} > 1{,}007\,225\,945\,0$	$A^{720} < 1{,}007\,225\,981\,0$
$A^{728} > 1{,}007\,306\,525\,8$	$A^{728} < 1{,}007\,306\,562\,3$
$A^{730} > 1{,}007\,326\,672\,0$	$A^{730} < 1{,}007\,326\,708\,6$
$A^{731} > 1{,}007\,336\,745\,2$	$A^{731} < 1{,}007\,336\,781\,9$

Aus den vier letzten Ungleichungen folgt wieder wie unmittelbar vorher:

$$\left.\begin{array}{l}A^{730} = 1{,}007\,326\ldots.\\ A^{731} = 1{,}007\,336\,7\ \ldots.\end{array}\right\} \qquad \text{XI}$$

Multipliziert man endlich noch einmal die beiden Grenzwerte von $1{,}00\,001^{512}$, aber diesmal mit der

32ten, 4ten, 2ten, 1ten

Potenz, so erhält man die nachfolgenden Potenzwerte:

$A^{544} > 1{,}005\,454\,795\,5$	$A^{544} < 1{,}005\,454\,822\,6$
$A^{548} > 1{,}005\,495\,014\,2$	$A^{548} < 1{,}005\,495\,041\,5$
$A^{550} > 1{,}005\,515\,124\,2$	$A^{550} < 1{,}005\,515\,151\,6$
$A^{551} > 1{,}005\,525\,179\,3$	$A^{551} < 1{,}005\,525\,206\,8$

Aus den vier letzten Ungleichungen folgt wieder wie vorhin:

$$\left.\begin{array}{l}A^{550} = 1{,}005\,515\,1\ldots.\\ A^{551} = 1{,}005\,525\ \ldots.\end{array}\right\} \qquad \text{XII}$$

Potenzen von 1,000 007 304 8. Die ebengenannte Grundzahl mag wieder durch ein kurzes Zeichen ausgedrückt werden:

$$B = 1{,}000\,007\,304\,8 \qquad \text{XIII}$$

Teilweise nach Regel 1, teilweise nach Regel 2, (vrgl. § 4, Übungsbeispiel 3 und 4), findet man die folgenden Haupt- und Zwischenpotenzen:

$B^{2} > 1{,}000\,014\,609\,6$	$B^{96} > 1{,}000\,701\,500\,3$
$B^{4} > 1{,}000\,029\,219\,4$	$B^{100} > 1{,}000\,730\,740\,1$
$B^{8} > 1{,}000\,058\,439\,6$	$B^{200} > 1{,}001\,462\,014\,1$
$B^{16} > 1{,}000\,116\,882\,6$	$B^{400} > 1{,}002\,926\,165\,6$
$B^{32} > 1{,}000\,233\,778\,8$	$B^{800} > 1{,}005\,860\,893\,6$
$B^{64} > 1{,}000\,467\,612\,2$	$B^{1000} > 1{,}007\,331\,476\,4$

XIV

Potenzen von 1,000 002 485 47. Setzt man

$$C = 1{,}000\,002\,485\,47$$ XV

so erhält man auf demselben Wege wie unmittelbar vorher:

C^2	$> 1{,}000\,004\,970\,94$	C^{96}	$> 1{,}000\,238\,632\,73$
C^4	$> 1{,}000\,009\,941\,90$	C^{100}	$> 1{,}000\,248\,577\,00$
C^8	$> 1{,}000\,019\,883\,89$	C^{200}	$> 1{,}000\,497\,215\,79$
C^{16}	$> 1{,}000\,039\,768\,17$	C^{400}	$> 1{,}000\,994\,678\,80$
C^{32}	$> 1{,}000\,079\,537\,92$	C^{800}	$> 1{,}001\,990\,346\,98$
C^{64}	$> 1{,}000\,159\,082\,16$	C^{1000}	$> 1{,}002\,488\,552\,40$ XVI

Potenzen von 1,000 005 505 36. Setzt man

$$D = 1{,}000\,005\,505\,36,$$ XVII

so erhält man wieder auf demselben Wege:

D^2	$> 1{,}000\,011\,010\,75$	D^{96}	$> 1{,}000\,528\,652\,59$
D^4	$> 1{,}000\,022\,021\,62$	D^{100}	$> 1{,}000\,550\,685\,85$
D^8	$> 1{,}000\,044\,043\,72$	D^{200}	$> 1{,}001\,101\,674\,95$
D^{16}	$> 1{,}000\,088\,089\,37$	D^{400}	$> 1{,}002\,204\,563\,58$
D^{32}	$> 1{,}000\,176\,186\,49$	D^{800}	$> 1{,}004\,413\,987\,26$
D^{64}	$> 1{,}000\,352\,404\,02$	D^{1000}	$> 1{,}005\,520\,524\,98$ XVIII

Aufgabe 6. Es soll der Potenzwert der Zahl 3 genauer bestimmt werden.

Lösung. Nach den Randnummern II und III war

$$A^{109\,861} < 3$$

und $$A^{109\,862} > 3$$

Aus diesen beiden Ungleichungen folgt, daß der Exponent zwischen

109 861 und 109 862

liegt. Also muß sein

$$\text{Exponent} = 109\,861 + \text{echter Bruch}.$$

Diesen Bruch wird man aber am bequemsten als Dezimalbruch ausdrücken, also etwa $\frac{x}{1000}$ **setzen; dann wird**

$$\text{Exponent} = 109\,861 + \tfrac{x}{1000}$$

demnach ist der genauere Potenzwert der Zahl 3 auszudrücken durch die Gleichung

$$A^{109\,861\;+\;\frac{x}{1000}} = 3$$ XIX

d. h. es soll sein $A^{109\,861} \cdot A^{\frac{x}{1000}} = 3$ n. Hilfssatz 9.

nun war aber $A^{106\,891} < 2{,}999\,992\,543\,6$ n. § 6.

Dividiert man mit dieser Ungleichung die vorausgehende Gleichung, so wird

$$\frac{A^{109\,861} \cdot A^{\frac{x}{1000}}}{A^{109\,861}} > \frac{3}{2{,}999\,992\,543\,6}$$ n. Hilfssatz 4.

Streicht man auf der linken Seite dieser Ungleichung die gleichen Faktoren des Zählers und Nenners, so erhält man

$$A^{\frac{x}{1000}} > \frac{3}{2{,}999\,992\,543\,6}.$$

Führt man diese Division aus, so findet man,

$$\frac{3}{2{,}999\,992\,543\,6} = 1{,}000\,002\,485\,47\,2\ \ldots\ldots$$

also nach Hilfssatz 5

$$\frac{3}{2{,}999\,992\,543\,6} > 1{,}000\,002\,485\,47$$

also muß umsomehr sein $A^{\frac{x}{1000}} > 1{,}000\,002\,485\,47$
weil man für das Kleinere etwas noch Kleineres gesetzt hat. Nach Hilfssatz 10 kann man nun den Exponentialnenner 1000 auf die andere Seite schaffen, alsdann wird

$$A^x > 1{,}000\,002\,485\,47^{1000}$$

oder $$A^x > 1{,}002\,488\,552\,40 \qquad \text{nach XV und XVI.}$$

Aus dieser Ungleichung läßt sich nun leicht der Wert von x **bestimmen; denn es war nach** IX

$$A^{248} = 1{,}002\,483\,0\ldots\ldots$$
$$A^{249} = 1{,}002\,493\ldots\ldots\ldots$$

Vergleicht man diese beiden Gleichungen mit der letzten Ungleichung, so ergiebt sich:
der Wert $x = 248$ **ist noch zu klein,**
der Wert $x = 249$ **ist schon zu groß.**

Wendet man nun die in den beiden letzten Zeilen ausgesprochenen Thatsachen auf die Potenz in XIX **an, so folgt**

$$\left\{\begin{array}{l} A^{109\,861 + \frac{248}{1000}} \text{ ist zu klein,} \\ A^{109\,861 + \frac{249}{1000}} \text{ ist zu groß.} \end{array}\right\}$$

Setzt man nun den zu kleinen Wert in Gleichung XIX **ein, so erhält man die Ungleichung,**

$$A^{109\,861{,}248} < 3$$

Setzt man aber den zu großen Wert ein, so erhält man,

$$A^{109\,861{,}249} > 3.$$

Kehrt man endlich noch die beiden letzten Ungleichungen um, so erhält man endlich,

$$\left\{\begin{array}{l} 3 > A^{109\,861{,}248} \\ 3 < A^{109\,861{,}249} \end{array}\right\} \qquad \text{XX}$$

d. h. der Potenzwert der Zahl 3 liegt zwischen der 109 861,248ten und der 109 861,249ten Potenz.

Aufgabe 7. Es soll der genauere Potenzwert der Zahl 2 gesucht werden. — Die Lösung der Aufgabe läßt sich genau wie die der vorigen durchführen, und man erhält am Schlusse der Rechnung,

$$\left\{\begin{array}{l} 2 > A^{69\,314{,}730} \\ 2 < A^{69\,314{,}731} \end{array}\right\} \qquad \text{XXI}$$

Der Beweis für die Richtigkeit der beiden letzten Ungleichungen soll noch nachträglich in etwas abgekürzter Form geliefert werden.

Es war $A^{69\,314} < 2$ nach VII
und $A^{69\,315} > 2$

daraus folgt wieder $A^{69\,314 + \frac{x}{1000}} = 2$

d. h. es soll sein $A^{69\,314} \cdot A^{\frac{x}{1000}} = 2$ nach Hilfsatz 9.

nun war aber $A^{69\,314} < 1{,}999\,985\,390\,5$ nach Gl. IV

folglich durch Division $\dfrac{A^{69\,314} \cdot A^{\frac{x}{1000}}}{A^{69\,314}} > \dfrac{2}{1{,}999\,985\,390\,5}$ nach Hilfsatz 4.

oder $A^{\frac{x}{1000}} > \dfrac{2}{1{,}999\,985\,390\,5}$

$$\frac{2}{1{,}999\,985\,390\,5} = 1{,}000\,007\,304\,803\ \ldots\ldots$$

also $\dfrac{2}{1{,}999\,985\,390\,3} > 1{,}000\,007\,304\,8$ Hilfsatz 5.

also umsomehr $A^{\frac{x}{1000}} > 1{,}000\,007\,304\,8$

oder $A^{x} > 1{,}000\,007\,304\,8^{1000}$ n. Hilfsatz 10

$A^{x} > 1{,}007\,331\,476\,4$ nach XIII u. XIV.

Nun war aber nach XI $A^{730} = 1{,}007\,326\ \ldots\ldots$

und $A^{731} = 1{,}007\,336\,7\ \ldots\ldots$

Aus den letzten drei Zeilen folgt wieder wie oben:

der Wert $x = 730$ ist zu klein,

" " $x = 731$ " zu groß

und demnach folgt wieder aus der letzten Zeile von S. 16:

$$2 > A^{69\,314,730}$$
$$2 < A^{69\,314,731}$$

wie es schon in XXI ausgesprochen worden war.

Aufgabe 8. Es soll der genauere Potenzwert von 10 gesucht werden.

Die Lösung dieser Aufgabe läßt sich ebenfalls genau wie die von Aufgabe 6 durchführen, und man erhält:

$$\begin{Bmatrix} \mathbf{10} > A^{230\,258,550} \\ \mathbf{10} < A^{230\,258,551} \end{Bmatrix}$$ XXII

Auch hier mag der Beweis noch nachträglich geliefert werden. Nach Randnummer VIII war

$$\begin{cases} A^{230\,258} < 10 \\ A^{230\,260} > 10 \end{cases}$$

und

daraus folgt wieder $A^{230\,258} + \frac{x}{1000} = 10$ XXIII

d. h. es soll sein $A^{230\,258} \cdot A^{\frac{x}{1000}} = 10$

nun war aber $A^{230\,258} < 9{,}999\,944\,946\,7$ (§ 6

folglich durch Division $\dfrac{A^{230\,258} \cdot A^{\frac{x}{1000}}}{A^{230\,258}} > \dfrac{10}{9{,}999\,944\,946\,7}$ n. Hilfsatz 4.

oder es muß sein $A^{\frac{x}{1000}} > \dfrac{10}{9{,}999\,944\,946\,7}$

$$\frac{10}{9{,}999\,944\,9467} = 1{,}000\,005\,505\,360\,3\ \ldots\ldots$$

also nach Hilfsatz 5 $\dfrac{10}{9{,}999\,944\,946\,7} > 1{,}000\,005\,505\,36$

also umsomehr $A^{\frac{x}{1000}} > 1{,}000\,005\,505\,36$

oder $A^{x} > 1{,}000\,005\,505\,36^{1000}$ nach Hilfsatz 10.

also nach XVII und XVIII $A^{x} > 1{,}005\,520\,524\,98$

Nun war aber nach XII $A^{550} = 1{,}005\,515\,1\ \ldots\ldots$

und $A^{551} = 1{,}005\,525\ \ldots\ldots$

Aus den letzten drei Zeilen folgt wieder:

der Wert $x = 550$ ist zu klein,
„ „ $x = 551$ „ zu groß

und demnach ergiebt sich wieder nach XXIII:

$$\left\{\begin{array}{l} 10 > A^{230\,258,550} \\ 10 < A^{230\,258,551} \end{array}\right\}$$

wie es schon in XXII ausgesprochen worden war.

§ 8. Berechnung der gemeinen Logarithmen der Zahlen 2 und 3.

Aufgabe 9. Es soll der gemeine Logarithmus der Zahl 2 berechnet werden.

Lösung. I. Berechnung der oberen Grenze. Nach Hilfssatz 11 gilt für den gemeinen Logarithmus von 2 die Gleichung:

$$\mathbf{10^x = 2} \qquad \text{XXIV.}$$

nun war $\mathbf{10} > A^{230\,258,550}$ nach XXII.

aber $\mathbf{2} < A^{69\,314,731}$ „ XXI.

Setzt man nun in die vorausgehende Hauptgleichung XXIV links den zu kleinen, rechts den zu großen Wert aus den Ungleichungen ein, so wird die linke Seite der Gleichung XXIV zu klein, die rechte Seite zu groß, und die Gleichung geht über in die folgende Ungleichung:

$$(A^{230\,258,550})^x < A^{69\,314,731}$$

oder $A^{230\,258,550x} < A^{69\,314,731}$ n. Hilfssatz 7.

Die Grundzahlen sind auf beiden Seiten dieser Ungleichung dieselben, daher muß auch links mit dem Kleineren, rechts mit dem Größeren multipliziert worden sein, d. h. es muß sein

$$\mathbf{230\,258,550 . x < 69\,314,731}$$

daher muß auch sein $x < \dfrac{\mathbf{69\,314,731}}{\mathbf{230\,258,550}}$

führt man diese Division aus, so erhält man:

$$x < \mathbf{0,301\,029\,998\,668\,88}$$

x ist aber nach Gleichung XXIV der Logarithmus der Zahl 2 — (vrgl. Hilfssatz 11) —, demnach ist auch

$$\mathbf{Log\ 2 < 0,301\,029\,998\,668\,88\ .....} \qquad \text{XXV.}$$

II. Berechnung der unteren Grenze. Der Weg der Rechnung ist ganz ähnlich wie vorhin:

$$\mathbf{10^x = 2}$$

Nun war $\mathbf{10} < A^{230\,258,551}$ nach XXII.

und $\mathbf{2} > A^{69\,314,730}$ nach XXI.

also $(A^{230\,258,551})^x > A^{69\,314,730}$

oder $A^{230\,258,551 . x} > A^{69\,314,730}$ n. Hilfssatz 7.

daher muß auch sein $\mathbf{230\,258,551 . x > 69\,314,730}$

daher $x > \dfrac{\mathbf{69\,314,730}}{\mathbf{230\,258,551.}}$

Führt man diese Division aus, so erhält man:

$$x > 0{,}301\,029\,993\,01\ldots\ldots$$

das heißt $\quad \text{Log}\ 2 > 0{,}301\,029\,993\,01\ldots\ldots \qquad$ XXVI.

III. **Bestimmung des Näherungswertes.**

Es war $\quad \text{Log}\ 2 < 0{,}301\,029\,998\,66\ldots\ldots \qquad$ nach XXV.

und $\quad \text{Log}\ 2 > 0{,}301\,029\,993\,01\ldots\ldots \qquad$ „ XXVI.

In den beiden letzten Zeilen stimmen der zu große und der zu kleine Wert in den ersten acht Dezimalstellen überein; demnach ist nach Hilfssatz 6

$\text{Log}\ 2 = 0{,}301\,029\,99\ldots\ldots$* $\qquad$ XXVII.

Kürzt man diesen Dezimalbruch bis auf sieben Dezimalstellen ab, so muß man die siebente Stelle nach der bekannten Regel um eine 1 erhöhen, und man erhält endlich:

$\text{Log}\ 2 = 0{,}301\,030\,0 \qquad$ XXVIII.

was mit der Angabe der siebenstelligen Logarithmentafeln vollständig übereinstimmt.

Die Verallgemeinerung dieser Rechnung ergiebt:

Regel 3. **Ist** $\quad a < A^g \quad$ **(g = größerer Exponent),**

aber $\quad a > A^k \quad$ **(k = kleinerer „),**

so sind die beiden Grenzen für den Logarithmus von a:

$$\text{Log}\ a < \frac{g}{230\,258{,}550}$$

$$\text{Log}\ a > \frac{k}{230\,258{,}551}$$

Es wird also das erstemal der größere Exponent mit dem kleineren,
„ zweitemal „ kleinere „ „ „ größeren
dividiert und zwar mit den betreffenden Exponenten der Potenzwerte der Grundzahl 10.

Aufgabe 10. **Es soll der gemeine Logarithmus der Zahl 3 berechnet werden.**

Lösung. **Es war nach** XX

$3 < A^{109\,861{,}249} \qquad | \qquad 3 > A^{109\,861{,}248}$

daher wird nach der vorausgehenden Regel:

$\text{Log}\ 3 < \dfrac{109\,861{,}249}{230\,258{,}550} \qquad | \qquad \text{Log}\ 3 > \dfrac{109\,861{,}248}{230\,258{,}551}$

$\text{Log}\ 3 < 0{,}477\,121\,257\,82\ldots\ldots \qquad | \qquad \text{Log}\ 3 > 0{,}477\,121\,251\,45\ldots\ldots \qquad$ XXIX.

demnach ist nach Hilfssatz 6

$\text{Log}\ 3 = 0{,}477\,121\,25\ldots\ldots \qquad$ XXX.

Kürzt man endlich auf sieben Dezimalen ab, so wird

$\text{Log}\ 3 = 0{,}477\,121\,3$

Die Logarithmen aller anderen Zahlen könnten auf demselben Wege berechnet werden, wie die von 2 und 3; man müßte dann aber für jede erst ihren Potenzwert suchen, was jedesmal wieder eine umständliche und zeitraubende Arbeit sein würde. Glücklicherweise giebt es nun aber sehr viele Zahlen, deren Logarithmen aus den schon berechneten mit großer Schnelligkeit und Leichtigkeit abgeleitet werden

* Berechnet man den gemeinen Logarithmus von 2 auf dem aus der niederen Analysis bekannten Wege vermittelst der natürlichen Logarithmen, — (vergl. August Logarithmentafel S. 130), — so erhält man:

$\text{Log}\ 2 = 0{,}301\,029\,995\,661$

Der hier berechnete Logarithmus stimmt mit diesem bis auf 8 Dezimalen überein.

können. Das Verfahren, nach welchem dies geschieht, ist durchaus nicht neu, mag aber der Vollständigkeit wegen im nachfolgenden § Platz finden.

§ 9. Leichte Berechnung der gemeinen Logarithmen verschiedener Zahlen.

Aufgabe 11. Den gemeinen Logarithmus von 4 zu berechnen.

Lösung. Log 4 = Log (2^2)
daher Log 4 = 2 . Log 2 — n. Hilfss. 14.
Log 4 = 2 . 0,301 029 99 ...... — n. XXVII.
Log 4 = 0,602 059 98 ...... — XXXI.

Kürzt man diese Dezimalzahl auf sieben Stellen ab, so erhält man endlich:
Log 4 = 0,602 0600

Übungsbeispiele. Die gemeinen Logarithmen der Zahlen 2^3, 2^4, 2^5, 2^6 ...... auf kurzem Wege aus dem schon bekannten Logarithmus der Zahl 2 zu bestimmen.

Aufgabe 12. Den gemeinen Logarithmus von 9 zu berechnen.

Lösung. Log 9 = Log (3^2)
also Log 9 = 2 . Log 3 — n. Hilfss. 14.
Log 9 = 2 . 0,477 121 25 — nach XXX.
Log 9 = 0,954 242 50

Kürzt man wieder auf sieben Dezimalen ab, so wird endlich
Log 9 = 0,954 2425.

Übungsbeispiele. Die gemeinen Logarithmen der Zahlen 27, 81, 243, 729 ..... auf kurzem Wege aus dem schon berechneten Logarithmus von 3 zu bestimmen.

Aufgabe 13. Den gemeinen Logarithmus von 12 zu berechnen.

Lösung. Log 12 = Log (3 . 4)
Log 12 = Log 3 + Log 4 — n. Hilfssatz 12.
Log 12 = 0,477 121 25 + 0,602 059 98 — n. XXX u. XXXI.
Log 12 = 1,079 181 23.

Kürzt man wieder auf sieben Dezimalen ab, so wird endlich
Log 12 = 1,079 1812.

Übungsbeispiele. Die gemeinen Logarithmen der Produkte

3 . 8,	3 . 16,	3 . 32,	3 . 64 .....
9 . 8,	9 . 16,	9 . 32,	9 . 64 .....
27 . 8,	27 . 16,	27 . 32,	27 . 64 .....

aus den schon berechneten Logarithmen zu bestimmen.

Aus den letzten Aufgaben ergiebt sich: Die Logarithmen aller derjenigen Zahlen können leicht gefunden werden, welche sich durch Multiplikation zweier Zahlen herstellen lassen. — (Natürlich müssen die Logarithmen dieser beiden Zahlen schon berechnet sein). — Demnach können aber auf diesem leichten Wege die Logarithmen derjenigen Zahlen nicht berechnet werden, die sich nicht als Produkte zweier anderer Zahlen darstellen lassen. Diese Zahlen heißen aber bekanntlich „Primzahlen". — Eine Primzahl ist aber wenigstens vorhanden, deren Logarithmus sich noch auf ähnlichem leichten Wege finden läßt:

Aufgabe 14. **Den gemeinen Logarithmus von 5 zu berechnen.**

Lösung. $\text{Log } 5 = \text{Log } \frac{10}{2}$

$\text{Log } 5 = \text{Log } 10 - \text{Log } 2$ n. Hilfsſ. 13.

$\text{Log } 10 = 1$ „ „ 15.

$\text{Log } 2 = 0{,}301\,029\,99\ldots\ldots$ nach XXVII.

alſo $\text{Log } 5 = 1 - 0{,}301\,029\,99\ldots\ldots$

$\text{Log } 5 = 0{,}698\,970\,01$ XXXII.

oder wenn man wieder auf ſieben Stellen abkürzt:

$\text{Log } 5 = 0{,}698\,970\,0$

Übungsbeiſpiele. Die gemeinen Logarithmen der Zahlen 25, 125, 625, 3125, ... 20, 40, 80, 160 . . . . ., 15, 30, 60 . . . . aus ſchon berechneten Logarithmen auf kurzem Wege zu beſtimmen.

§ 10. Berechnung der gemeinen Logarithmen aller Primzahlen.

Sollte man beiſpielsweiſe den Logarithmus der Primzahl 7 berechnen, ſo könnte man genau ſo verfahren, wie bei den Logarithmen von 2 und 3. Man hätte alſo vorerſt den Potenzwert von 7 zu ermitteln. Aus der Zahlenreihe Seite 11 iſt aber ſofort zu erſehen, daß dieſer Potenzwert ein ſehr hoher ſein wird, und die beiden Grenzen der höheren Potenzwerte gingen ziemlich weit auseinander; z. B. ſchon der Potenzwert von 10 lag zwiſchen der 230 258ten und der 230 260ten Potenz, d. h. nicht mehr zwiſchen zwei aufeinander folgenden Zahlen. — Die Anwendung des alten Verfahrens würde alſo auf große Weitläufigkeiten führen. Es läßt ſich aber mit Vorteil der folgende **neue** Weg einſchlagen:

$\text{Log } 7 = \text{Log } (1\tfrac{2}{5} . 5)$

$\text{Log } 7 = \text{Log } (1{,}4 . 5)$

daher $\text{Log } 7 = \text{Log } 1{,}4 + \text{Log } 5$ n. Hilfsſ. 12.

oder nach XXXII $\text{Log } 7 = \text{Log } 1{,}4 + 0{,}698\,970\,01$ XXXIII.

Es bleibt demnach nur noch übrig, zunächſt den Potenzwert von 1,4 zu beſtimmen und dann den Logarithmus derſelben Zahl zu berechnen. Bei der Beſtimmung des Potenzwertes werden noch die beiden folgenden Potenzreihen gebraucht, welche wieder im voraus erledigt werden mögen.

Multipliziert man die 32 768te Potenz mit der 512ten, 256ten, 64ten, 32ten, 8ten, 4ten, 2ten, 1ten, 1ten, ſo erhält man die folgende Potenzreihe:

$A^{33\,280} > 1{,}394\,865\,902\,2$	$A^{33\,280} < 1{,}394\,868\,213\,8$
$A^{33\,536} > 1{,}398\,441\,315\,0$	$A^{33\,536} < 1{,}398\,443\,650\,4$
$A^{33\,600} > 1{,}399\,336\,599\,3$	$A^{33\,600} < 1{,}399\,338\,940\,6$
$A^{33\,632} > 1{,}399\,784\,456\,4$	$A^{33\,632} < 1{,}399\,786\,800\,6$
$A^{33\,640} > 1{,}399\,896\,443\,0$	$A^{33\,640} < 1{,}399\,898\,787\,9$
$A^{33\,644} > 1{,}399\,952\,439\,6$	$A^{33\,644} < 1{,}399\,954\,784\,9$
$A^{33\,646} > 1{,}399\,980\,438\,7$	$A^{33\,646} < 1{,}399\,982\,784\,2$
$A^{33\,647} > 1{,}399\,994\,438\,5$	$A^{33\,647} < 1{,}399\,996\,784\,1$
$A^{33\,648} > 1{,}400\,008\,438\,4$	$A^{33\,648} < 1{,}400\,010\,784\,1$

Potenzen von 1,000 002 297 07. Setzt man

$E = 1{,}000\,002\,297\,07$

so ergiebt sich:

so ergiebt sich:	$E^{2} > 1{,}000\,004\,594\,14$	$E^{96} > 1{,}000\,220\,542\,39$
	$E^{4} > 1{,}000\,009\,188\,30$	$E^{100} > 1{,}000\,229\,732\,71$
	$E^{8} > 1{,}000\,018\,376\,68$	$E^{200} > 1{,}000\,459\,518\,19$
	$E^{16} > 1{,}000\,036\,753\,69$	$E^{400} > 1{,}000\,919\,247\,53$
	$E^{32} > 1{,}000\,073\,508\,73$	$E^{800} > 1{,}001\,839\,340\,07$
	$E^{64} > 1{,}000\,147\,022\,86$	$E^{1000} > 1{,}002\,299\,703\,47$

Aufgabe 15. Den Potenzwert der Dezimalzahl 1,4 zu bestimmen.

Lösung. Es war $A^{33\,647} > \mathbf{1{,}399\,994\,438\,5}$ siehe vorletzte Potenzreihe.

und $A^{33\,647} < \mathbf{1{,}399\,996\,784\,1}$ " " "

folglich $A^{33\,647} = \mathbf{1{,}399\,99}\ldots\ldots$ n. Hilfssatz 6.

ebenso ergiebt sich $A^{33\,648} = \mathbf{1{,}400\,0}\ldots\ldots$

Aus den beiden letzten Gleichungen folgt:

$$\left\{\begin{array}{l} A^{33\,647} < \mathbf{1{,}4} \\ A^{33\,648} > \mathbf{1{,}4} \end{array}\right\} \qquad \text{XXXIV.}$$

d. h. der Potenzwert der Dezimalzahl 1,4 liegt zwischen der 33 647ten und 33 648ten Potenz.

Aufgabe 16. Den Exponenten des Potenzwertes von 1,4 bis auf Tausendstel genau zu bestimmen.

Lösung. Man findet wieder auf demselben Wege wie in Aufgabe 6:

$$\left\{\begin{array}{l} \mathbf{1{,}4} > A^{33\,647,229} \\ \mathbf{1{,}4} < A^{33\,647,230} \end{array}\right\} \qquad \text{XXXV.}$$

Der Beweis für die Richtigkeit dieser beiden Ungleichungen mag noch nachträglich geliefert werden: XXXVI.

Nach XXXIV muß sein $A^{33\,647 + \frac{x}{1000}} = 1{,}4$

d. h. es muß sein $A^{33\,647} . A^{\frac{x}{1000}} = 1{,}4$ nach Hilfssatz 9.

es ist aber $A^{33\,647} < 1{,}399\,996\,784\,1$ siehe oben.

folglich durch Division $\dfrac{A^{33\,647} . A^{\frac{x}{1000}}}{A^{33\,647}} > \dfrac{1{,}4}{1{,}399\,996\,784\,1}$ nach Hilfssatz 4.

oder wenn man die gleichen Faktoren im Zähler und Nenner streicht:

$$A^{\frac{x}{1000}} > \frac{1{,}4}{1{,}399\,996\,784\,1}$$

Führt man diese Division aus, so findet man:

$$\frac{1{,}4}{1{,}399\,996\,784\,1} = 1{,}000\,002\,297\,076\ldots\ldots$$

also nach Hilfssatz 5 $\dfrac{1{,}4}{1{,}399\,996\,784\,1} > 1{,}000\,002\,297\,07$

also muß umsomehr sein $A^{\frac{x}{1000}} > 1{,}000\,002\,297\,07$

also auch $A^{x} > 1{,}000\,002\,297\,07^{1000}$ nach Hilfssatz 10.

oder $A^{x} > 1{,}002\,299\,703\,47$ siehe oben.

Nun war nach X $A^{229} = 1{,}002\,292\,6\ldots$

und $A^{230} = 1{,}002\,302\,6\ldots$

Vergleicht man diese beiden Gleichungen mit der vorausgehenden Ungleichung, so ergiebt sich:

der Wert $x = 229$ ist noch **zu klein**,

der Wert $x = 230$ ist schon **zu groß**.

Wendet man nun die in den beiden letzten Zeilen ausgesprochenen Thatsachen auf die Potenz in XXXVI an, so folgt:

$$\left\{\begin{array}{l} A^{33\,647 + \frac{229}{1000}} \text{ ist zu klein,} \\ A^{33\,647 + \frac{230}{1000}} \text{ ist zu groß.} \end{array}\right\}$$

Setzt man nun den zu kleinen Wert in Gleichung XXXVI ein, so erhält man die Ungleichung:

$$A^{33\,647,229} < 1{,}4.$$

Setzt man aber den zu großen Wert ein, so erhält man:

$$A^{33\,647,230} > 1{,}4.$$

Kehrt man endlich noch die beiden letzten Ungleichungen um, so wird

$$\left\{\begin{array}{l} 1{,}4 > A^{33\,647,229} \\ 1{,}4 < A^{33\,647,230} \end{array}\right\}$$

d. h. der Potenzwert der Zahl 1,4 liegt zwischen der 33 647,229ten und der 33 647,230ten Potenz.

Aufgabe 17. Den gemeinen Logarithmus der Dezimalzahl 1,4 zu berechnen.

Lösung. Es war nach XXXV

$$1{,}4 < A^{33\,647,230} \qquad\qquad 1{,}4 > A^{33\,647,229}$$

daher wird nach Regel 3

$$\text{Log } 1{,}4 < \frac{33\,647{,}230}{230\,258{,}550} \qquad\qquad \text{Log } 1{,}4 > \frac{33\,647{,}229}{230\,258{,}551}$$

$$\text{Log } 1{,}4 < 0{,}146\,128\,037\,3\ldots. \qquad\qquad \text{Log } 1{,}4 > 0{,}146\,128\,032\,3\ldots. \qquad \text{XXXVII.}$$

demnach ist nach Hilfssatz 6

$$\text{Log } 1{,}4 = 0{,}146\,128\,03\ldots\ldots \qquad \text{XXXVIII.}$$

Aufgabe 18. Den gemeinen Logarithmus der Primzahl 7 zu berechnen.

Lösung. Nach XXXIII war schon berechnet, daß

$$\text{Log } 7 = \text{Log } 1{,}4 \quad + 0{,}698\,970\,01.$$

Setzt man in diese Gleichung den zuletzt gefundenen Wert ein, so wird

$$\text{Log } 7 = 0{,}146\,128\,03 + 0{,}698\,970\,01$$

und daraus ergiebt sich:

$$\text{Log } 7 = 0{,}845\,098\,04.$$

Übungsbeispiele. Aus dem eben berechneten Logarithmus von 7 und andern ebenfalls schon bekannten Logarithmen die Logarithmen der folgenden Zahlen auf kurzem Wege zu bestimmen: 49, 343, 2401, 16 807 . . . . . 21, 28, 56, 112 . . . . . . 35, 175, 875, 4375 . . . . . 98, 196, 392 . . . . . . 147, 441 . . . . . . 245, 1225 . . . . . . — Es würde schon genügen anzugeben, in welche Faktoren diese Zahlen zu zerlegen sind.

Auf demselben Wege, wie Log 7, ließen sich auch die Logarithmen aller anderen Primzahlen finden, z. B.

statt	11,	13,	17, ...	113,	117 . . . . .
dürfte man setzen	1,1.10,	1,3.10,	1,7.10	1,13.10,	1,17.10 . . . .
ferner statt	29,	37,	41, ...	53,	59 . . . .
dürfte man setzen	$1\frac{4}{25}$.25,	$1\frac{12}{25}$.25,	$1\frac{16}{25}$.25	$1\frac{3}{50}$.50,	$1\frac{9}{50}$.50 . . . . .
oder	1,16.25,	1,48.25,	1,64.25	1,06.50,	1,18.50 . . . .

Die Potenzwerte aller hierbei vorkommenden Dezimalzahlen liegen immer zwischen zwei anderen, welche schon früher berechnet sind und einander ziemlich nahe kommen, so daß nicht viele Multiplikationen erforderlich sind, um den gesuchten Potenzwert zu erreichen.

Nun ließen sich auch wieder durch Potenzieren und Multiplizieren zahlreiche Logarithmen anderer Zahlen auf einfachem Wege ableiten.

Hiermit ist nun vollkommen klar, auf welche Weise die Logarithmentafeln berechnet werden könnten. Die meisten dieser Rechnungen würden sich auf dem einfachen Wege des § 9 ausführen lassen; aber zu der großen Menge der Einzelrechnungen würde doch ein einzelnes Menschenleben kaum ausreichend sein.

§ 11. Das Verhalten der Potenzwerte zu den natürlichen Logarithmen.*

Aus Regel 3 wird sofort klar, daß zur Berechnung eines natürlichen Logarithmus die Kenntnis vom Potenzwerte der Zahl

$$e = 2{,}718\,281\ldots\ldots$$

erforderlich ist. Geht man von dem Potenzwertpaare

$$A^{65\,536} > 1{,}925\,829\,182\,4$$

und

$$A^{65\,536} < 1{,}925\,835\,467\,6 \qquad \text{(siehe oben).}$$

aus und verfährt so, wie in Aufgabe 3 und 6, so ergiebt sich zuletzt:

$$2{,}718\,281\ldots\ldots = 1{,}00\,001^{100\,000{,}017}$$

oder kurz

$$e = 1{,}00\,001^{100\,000{,}017} \qquad \text{XXXIX.}$$

An diesem Ergebnis ist auffällig, daß der Exponent beinahe die Zahl 100 000 ist, d. h. der Dezimalnenner unserer Grundzahl 1,00 001. — Ebenso würde sich auch bei Ausführung der Rechnung ergeben:

$$1{,}01^{100} = 2{,}704\,8\ldots\ldots$$

Diese Zahl stimmt mit der Zahl e bis auf die erste Dezimale überein. Ferner würde sich ergeben,

$$1{,}001^{1000} = 2{,}717\,0\ldots\ldots$$

Hier stimmen schon die zwei ersten Dezimalen überein. Es läßt sich also erwarten, daß überhaupt der Potenzwert

$$\left(1 + \tfrac{1}{n}\right)^n$$

umsomehr mit der Grundzahl e des natürlichen Logarithmensystems übereinstimmen wird, je größer der Dezimalnenner n ist. Dies ist aber auch aus der Analysis sofort klar, denn nach einem Satze derselben ist für den Wert $n = \infty$ die Funktion $\left(1 + \frac{1}{n}\right)^n = e$. Dieses eigentümliche Verhältnis bietet aber für die Berechnung der natürlichen Logarithmen, wenn dieselbe durch Potenzwerte ausgeführt werden soll, einen großen Vorteil, wie sich im folgenden Beispiele zeigen wird.

Beispiel. Es war nach XXXIX

$$e = 1{,}00\,001^{100\,000{,}017}$$

Dieser letzte Exponent soll auf 100 000 abgerundet werden, so daß also die Gleichung gelten soll:

$$e = 1{,}00\,001^{100\,000} \qquad \text{XL.}$$

Unter der Voraussetzung, dieselbe sei vollkommen richtig, soll der natürliche Logarithmus der Zahl 2 berechnet werden.

Lösung. Es war $2 > 69\,314{,}730$ nach XXI

* Es versteht sich von selbst, daß der Inhalt dieses § nicht für die Schüler der Mittelklassen bestimmt sein kann.

und aus XL folgt nun nach Regel 3:

$$\text{Log } 2 > \frac{69\,314{,}730}{100\,000}$$

$$\text{Log } 2 > 0{,}693\,147\,30$$

Auf ähnlichem Wege würde man auch finden:

$$\text{Log } 2 < 0{,}693\,147\,31$$

also wäre nach Hilfssatz 6 bis auf sieben Dezimalen genau

$$\text{Log nat } 2 = 0{,}693\,147\,3\ldots\ldots$$

Dies oberflächliche Ergebnis stimmt noch bis auf die ersten sechs Dezimalen mit dem wirklichen Werte überein. — Aus diesem Beispiele ersieht man sofort die sehr einfache

Regel 4. Der natürliche Logarithmus einer Zahl wird gefunden, indem man den Exponenten ihres Potenzwertes mit dem Dezimalnenner dividiert. (Regel 3).

Man hat also in unserem Falle weiter nichts zu thun, als von diesem Exponenten fünf Stellen abzuschneiden. Wäre als Grundzahl der Potenzwerte nicht 1,00 001, sondern 1,000 001 angenommen worden, so müßte man sechs Stellen abschneiden u. s. w. — Die Berechnung der natürlichen Logarithmen erscheint also auch auf dem Standpunkte der Potenzwerte in einer Beziehung sehr einfach.

Berichtigungen.

Seite 9, Z. 13 v. u.				
	ist statt	1,03	zu lesen	$1{,}03^2$
Seite 10, Z. 2 v. o.				
	ist statt	$1{,}03^3$	„ „	$1{,}03^2$
Seite 11, Z. 3 v. u.				
	ist statt	$A^{109\,86}$	„ „	$A^{109\,860}$
Seite 15, Z. 6 v. u.				
	ist statt	$A^{106\,801}$	„ „	$A^{109\,861}$
Seite 22, Z. 10 v. o.				
	ist		„ „	$A^{33\,647} = 1{,}399{,}99$
Seite 24, Z. 3 v. u.				
	ist		„ „	$2 > A^{69\,314\,730}$
