Jeder, welcher sich mit dem Studium der alten griechischen Mathematiker beschäftigt, wird dem einhelligen Urtheil der alten und neuen Zeit, das den Syracusaner Archimedes für das grösste mathematische Genie des Alterthums erklärt, die gebührende Beistimmung nicht versagen können. In der That, der Reichthum der in seinen Schriften dargelegten, besonders in Anbetracht der Mittel, über die er zu verfügen hatte, überraschenden Erfindungen, sowie der Scharfsinn und die Genauigkeit in den Deductionen und Argumentationen erregen mit Recht unsere höchste Bewunderung. Zu den bedeutendsten nun der auf uns gekommenen Schriften des grossen Mathematikers gehört unstreitig seine Abhandlung über die Quadratur der Parabel; höchst wichtig ist dieselbe für die Geschichte der Wissenschaft desshalb, weil sich hier das erste Beispiel einer genauen und scharfen Quadratur eines von graden Linien mit einer krummen eingeschlossenen Raumes darbietet. In dieser Schrift gelangt Archimedes auf zwei ganz von einander unabhängigen Wegen zu seinem Ziele, der Bestimmung des Flächeninhalts eines parabolischen Abschnitts. Der eine dieser Wege ist ein sogenanntes mechanisches Verfahren [1]; der andere ist rein geometrisch. Im Folgenden ist nun der Versuch einer möglichst wortgetreuen Uebersetzung desjenigen Theiles jener Schrift gemacht worden, der den rein geometrischen Weg nachweist; eine Behandlung des Ganzen würde die Grenzen, die dieser Abhandlung gesteckt sind, überschritten haben. Der der Uebersetzung zu Grunde gelegte Text folgt durchgehends dem der Torelli'schen Ausgabe. Von den vorhandenen Uebersetzungen ist nur die vorzüglichste, herausgegeben von E. Nizze (Stralsund, 1824) benutzt worden. Da es selbstverständlich nicht der Hauptzweck der nachstehenden Uebersetzung sein konnte, die dort niedergelegten Erfindungen zur allgemeineren Kenntniss zu bringen, da es sich vielmehr darum handelte, den Gang, den Archimedes bei seinen Beweisen beobachtet, bis in's Einzelne zu verfolgen und seine Ausdrucksweise möglichst getreu wiederzugeben, so durfte der Uebersetzer nur selten, und zwar nur da, wo es zur Vermittlung des Zusammenhangs unbedingt nöthig schien, sich eine Abweichung von dem Wortlaute des Originals erlauben und musste auf die übersichtliche und jetzt gebräuchliche Form der Darstellung verzichten. In der erwähnten Absicht möge auch die unvermeidliche Schwerfälligkeit des deutschen Ausdrucks ihre Entschuldigung finden.

---

1) Archimedes untersucht, was folgen würde, wenn man sich vorstellt, dass die Fläche der Parabel und die des ihr eingeschriebenen Dreiecks vermittelst einer mathematischen Waage abgewogen würden, und findet so das Verhältniss der beiden Flächenräume.

I. Satz. [2])

Wenn A B C (Fig. 1) eine Parabel [3]), die Grade BD entweder der Axe parallel oder die Axe selbst ist, und wenn ADC der Berührenden an dem Punkte B der Parabel parallel ist, so wird AD = DC sein, und wenn AD = DC ist, so werden ADC und die Berührende an dem Punkte B der Parabel parallel sein.

II. Satz.

Wenn ABC (Fig. 2) eine Parabel, die Grade B D entweder der Axe parallel oder die Axe selbst ist, und wenn ADC der Berührenden an dem Punkte B der Parabel parallel und CE die Berührende an dem Punkte C der Parabel ist, so werden DB und BE gleich sein.

III. Satz.

Wenn ABC (Fig. 3) eine Parabel, die Grade BD entweder der Axe parallel oder die Axe selbst ist, und wenn die Linien AD, EF der Berührenden an dem Punkte B der Parabel parallel gezogen werden, so verhalten sich die Längen BD und BF, wie die Quadrate der Graden AD und EF.

Es ist dieses in den Anfangsgründen der Kegelschnitte erwiesen worden.

Grundlinie der Abschnitte, die von einer graden und der krummen Linie umschlossen werden [4]), nenne ich die Grade, Höhe aber die grösste Senkrechte, welche von der krummen Linie bis zur Grundlinie des Abschnittes gezogen wird, und Scheitel den Punkt, von welchem die grösste Senkrechte gezogen wird.

---

2) Die drei ersten Sätze der ganzen Schrift sind vorausgeschickt worden, weil die Kenntniss derselben nachher vorausgesetzt wird.

3) Es bedarf wohl kaum der Rechtfertigung, dass man selbst in einer Uebersetzung, welche die Eigenthümlichkeiten des Originals möglichst wiedergeben soll, die Ausdrücke „Parabel" und „parabolischer Abschnitt" gebraucht hat, obschon diese Benennung der Curve, die bekanntlich auf der Beschaffenheit ihrer Scheitelgleichung beruht, erst bei Apollonius vorkommt. Die von Archimedes gebrauchte Benennung, Schnitt des rechtwinkligen Kegels, entbehrt zwar des Vorzugs der Kürze, führt uns aber gleich mit dem Namen die Entstehung und die Gestalt des Kegelschnittes vor Augen. Archimedes legt durch irgend einen Punkt der konischen Fläche, der von dem Scheitel des Kegels verschieden ist, eine Ebene, die auf der durch diesen Punkt und durch den Scheitel gezogenen Graden senkrecht steht. Ist nun der Kegel rechtwinklig, so wird eine Kante der konischen Fläche mit der schneidenden Ebene parallel: der Schnitt ist eine Parabel.

4) Die von der Parabel und einer beliebigen Sehne in derselben begrenzte Ebene heisst also parabolischer Abschnitt.

XVIII. Satz.

Wenn in einem parabolischen Abschnitt[5]) aus der Mitte der Grundlinie eine Grade parallel der Axe gezogen wird, so wird der Scheitel des Abschnitts derjenige Punkt sein, in welchem die mit der Axe parallel gezogene Grade die Parabel trifft.

Es sei nämlich A B C (Fig. 4) der parabolische Abschnitt, und aus der Mitte von A C werde B D der Axe parallel gezogen. Da nun in der Parabel B D der Axe parallel gezogen ist, und da A D und D C gleich sind, so ist offenbar, dass A C und die Berührende an dem Punkte B der Parabel parallel sind[6]). Es ist also ersichtlich, dass unter den von der Parabel nach A C gezogenen Senkrechten die von B aus gezogene die grösste sein wird. Folglich ist der Punkt B der Scheitel des Abschnitts.

XIX. Satz.

Wenn in einem parabolischen Abschnitte zwei Grade der Axe parallel gezogen werden, die eine aus der Mitte der Grundlinie, die andere aus der Mitte der halben Grundlinie, so beträgt die aus der Mitte der Grundlinie gezogene das $\frac{4}{3}$ fache der aus der Mitte der halben Grundlinie gezogenen.

Es sei nämlich A B C (Fig. 5) der parabolische Abschnitt, und es werde parallel der Axe B D aus der Mitte von A C, E F aus der Mitte von A D gezogen; es sei auch F H parallel A C gezogen. Da nun in der Parabel B D parallel der Axe gezogen worden und A D, F H parallel der Berührenden an dem Punkte B, so ist offenbar, dass sich die Längen von B D und B H verhalten, wie die Quadrate der Graden A D und E F[7]). Es ist also B D viermal so lang als B H. Folglich ist einleuchtend, dass die Länge von B D das $\frac{4}{3}$ fache der Länge von E F beträgt.

XX. Satz.

Wenn in einen parabolischen Abschnitt ein Dreieck eingeschrieben wird, welches einerlei Grundlinie und einerlei Höhe mit dem Abschnitte hat, so wird das eingeschriebene Dreieck grösser als die Hälfte des Abschnittes sein.

Es sei A B C (Fig. 6) der gedachte Abschnitt und ihm eingeschrieben das Dreieck A B C, welches dieselbe Grundlinie und gleiche Höhe mit dem Ganzen hat. Da nun das Dreieck mit dem Abschnitt dieselbe Grundlinie und dieselbe Höhe hat, so ist nothwendig

5) Man sehe Anmerkung 3.
6) Ergibt sich aus Satz I.
7) Nach Satz III.

der Punkt B der Scheitel des Abschnitts [8]). Es ist also A C parallel der Berührenden an dem Punkte B der Parabel. Es werde also durch B die Linie D E parallel A C gezogen und aus A, C parallel der Axe A D, C E. Diese werden nun ausserhalb des Abschnitts fallen [9]). Da nun das Dreieck A B C die Hälfte des Parallelogramms A D E C ist, so ist einleuchtend, dass es grösser ist als die Hälfte des Abschnitts. Da dieses nun erwiesen, erhellt, dass es möglich ist, in diesen Abschnitt ein Vieleck einzuschreiben, so dass die Summe der übrig bleibenden Abschnitte kleiner ist, als jede angenommene Fläche. Wenn nämlich jedesmal mehr als die Hälfte weggenommen wird, so werden wir offenbar dadurch die übrig bleibenden Abschnitte fortwährend verkleinern und deren Summe kleiner machen als jede angenommene Fläche.

XXI. Satz.

Wenn in einem parabolischen Abschnitt ein Dreieck eingeschrieben wird, welches dieselbe Grundlinie und dieselbe Höhe mit dem Abschnitte hat, und wenn auch in die übrigbleibenden Abschnitte andere Dreiecke, welche dieselbe Grundlinie und Höhe mit diesen Abschnitten haben, eingeschrieben werden, so wird das in den ganzen Abschnitt eingeschriebene Dreieck achtmal so gross sein, als jedes der beiden in die übrig bleibenden Abschnitte eingeschriebenen Dreiecke.

Es sei A B C (Fig. 7) der gedachte Abschnitt, und es werde A C durch D in Hälften getheilt, D B werde aber der Axe parallel gezogen; dann ist der Punkt B der Scheitel des Abschnitts [10]) und das Dreieck A B C hat dieselbe Grundlinie und dieselbe Höhe mit dem Abschnitte. Ferner werde A D durch E in Hälften getheilt und E F parallel der Axe gezogen; es werde aber A B in H geschnitten. Der Punkt F ist nun der Scheitel des Abschnitts A F B [11]), und das Dreieck A F B hat mit dem Abschnitte A F B dieselbe Grundlinie und Höhe. Es ist zu zeigen, dass das Dreieck A B C achtmal so gross ist, als das Dreieck A F B. Es beträgt nämlich B D das $\frac{4}{3}$ fache von E F [12]), das Doppelte aber von E H [13]). Also beträgt E H das Doppelte von H F [14]). Daher beträgt auch das Dreieck A E B das Doppelte des Dreiecks F B A; denn das Dreieck A E H beträgt das Doppelte von A H F,

8) Nach Satz XVIII.

9) Fielen sie nämlich innerhalb des Abschnitts, so würden sie die Axe schneiden, was unmöglich ist, da sie parallel mit derselben gezogen sind.

10) Nach Satz XVIII.

11) Es ist $AE = ED$ und EH parallel DB; folglich auch $AH = HB$.

12) Erhellt aus Satz XIX.

13) Denn weil $AD : AE = DB : EH$ und $AD = 2\,AE$, so ist auch $DB = 2\,EH$.

14) Da nämlich $EH = \frac{1}{2} BD = \frac{1}{2} \cdot \frac{4}{3} EF = \frac{2}{3} EF = \frac{2}{3} EH + \frac{2}{3} HF$ ist, so ergibt sich $\frac{1}{3} EH = \frac{2}{3} HF$ oder $EH = 2\,HF$.

H B E aber von F H B. Mithin ist das Dreieck A B C das achtfache des Dreiecks A F B. Auf gleiche Weise wird auch gezeigt werden, dass es das achtfache ist des in den Abschnitt B G C eingeschrieben Dreiecks.

XXII. Satz.

Wenn ein parabolischer Abschnitt und eine beliebige Anzahl von Flächenräumen angenommen werden, die der Reihe nach, wie viele ihrer auch sein mögen, in dem Verhältnisse 4:1 stehen, wenn aber der grösste der Flächenräume dem Dreiecke gleich ist, das dieselbe Grundlinie und Höhe mit dem Abschnitte hat, so wird die Summe aller dieser Flächenräume kleiner als der Abschnitt sein.

Es sei nämlich A D B E C (Fig. 8) der parabolische Abschnitt; die Flächenräume, wie viele ihrer auch gegeben sein mögen, seien der Reihe nach F, G, H, I. Es betrage aber der vorhergehende immer das vierfache des folgenden und der grösste sei F. Es sei auch F dem Dreiecke gleich, das mit dem Abschnitte dieselbe Grundlinie und dieselbe Höhe hat. Ich behaupte, dass der Abschnitt grösser ist, als die Flächenräume F, G, H, I. Es sei B der Scheitel des ganzen Abschnitts, der übrig bleibenden Abschnitte aber D, E. Da nun das Dreieck A B C das achtfache jedes der beiden Dreiecke A B D und B E C, so ist es offenbar das vierfache beider zusammen. Und da das Dreieck A B C gleich ist dem Flächenraum F, so ist auch die Summe der Dreiecke A D B und B E C dem Flächenraume G gleich. Auf gleiche Weise wird gezeigt werden, dass auch die in die übrig bleibenden Abschnitte eingeschriebenen Dreiecke, welche dieselbe Grundlinie und dieselbe Höhe mit den Abschnitten haben, zusammen dem Flächenraum H gleich sind, und dass die in die darauf entstehenden Abschnitte eingeschriebenen Dreiecke zusammen gleich sind dem Flächenraum I. Die Summe aller angenommenen Flächenräume wird also einem in den Abschnitt eingeschriebenen Vielecke gleich sein; es ist also offenbar, dass sie kleiner ist als der Abschnitt.

XXIII. Satz.

Wenn eine beliebige Anzahl von Grössen gegeben ist, die nach der Reihe in dem Verhältnisse 4:1 stehen, so wird die Summe aller nebst dem dritten Theile der kleinsten das $\frac{4}{3}$fache der grössten betragen.

Es sei also A, B, C, D, E (Fig. 9) eine beliebige Anzahl von Grössen, deren jede nach der Reihe das vierfache der folgenden beträgt, und die grösste sei A. Es sei F der dritte Theil von B, G von C, H von D, I von E. Da nun F der dritte Theil von B, B aber der vierte Theil von A ist, so sind B und F zusammen genommen der dritte Theil von A. Aus demselben Grunde betragen nun auch C und G den dritten Theil von B, H und D von C und E und I von D. Mithin beträgt die Summe von B, C, D, E, F, G, H, I den dritten Theil der Summe von A, B, C, D. Es sind aber auch F, G, H der dritte Theil von B, C, D; folglich betragen auch die übrigen, B, C, D, E, I, den dritten Theil des übrigbleibenden A.

Es ist also offenbar, dass die Summe von A, B, C, D, E und I, welches der dritte Theil von E ist, das $\frac{4}{3}$-fache von A beträgt.

XXIV. Satz.

Jeder parabolische Abschnitt beträgt das $\frac{4}{3}$fache eines Dreiecks, welches mit ihm gleiche Grundlinie und Höhe hat.

Es sei nämlich A D B E C (Fig. 10) der parabolische Abschnitt, und A B C sei das Dreieck, welches mit ihm dieselbe Grundlinie und Höhe hat. Der Flächenraum K betrage aber das $\frac{4}{3}$ fache des Dreiecks A B C. Es ist zu beweisen, dass er gleich ist dem Abschnitte A D B E C. Wenn er nämlich nicht gleich ist A D B E C, so ist er entweder grösser oder kleiner. Es sei zuerst, wenn es möglich, der Abschnitt A D B E C grösser als der Flächenraum K. Ich habe nun die Dreiecke A D B, B E C auf die erwähnte [15]) Weise eingeschrieben. In die übrig bleibenden Abschnitte habe ich andere Dreiecke, welche dieselbe Grundlinie und Höhe mit den Abschnitten haben, eingeschrieben; ferner schreibe ich fortwährend in die später entstehenden Abschnitte zwei Dreiecke, die mit den Abschnitten gleiche Grundlinie und Höhe haben. Die übrig bleibenden Abschnitte werden nun kleiner sein als der Ueberschuss des Abschnitts A D B E C über den Flächenraum K. Daher wird das eingeschriebene Vieleck grösser sein als der Flächenraum K, was unmöglich ist. Die angenommenen Flächenräume verhalten sich nämlich der Reihe nach, wie 4 : 1; und zwar ist zuerst das Dreieck A B C das Vierfache der Dreiecke A D B, B E C; dann betragen diese das Vierfache der in die folgenden Abschnitte eingeschriebenen und so fort; es ist also offenbar, dass die Summe aller Flächenräume weniger beträgt, als das $\frac{4}{3}$ fache des grössten. Es ist aber K dem $\frac{4}{3}$ fachen des grössten Flächenraums gleich. Folglich ist der Abschnitt A D B E C nicht grösser als der Flächenraum K. Er sei aber, wenn dies möglich, kleiner. Man setze Dreieck $ABC = F$, $H = \frac{1}{4} F$ und ebenso $G = \frac{1}{4} H$, und immer so der Reihe nach, bis der letzte Flächenraum kleiner ist als der Ueberschuss des Flächenraums K über den Abschnitt und es sei der kleinere Flächenraum I. Es betragen nun die Flächenräume F, G, H, I nebst dem dritten Theile von I das $\frac{4}{3}$ fache von F. Es ist aber auch K dem $\frac{4}{3}$ fachen von F gleich. Mithin ist K gleich F, G, H, I nebst dem dritten Theile von I. Da nun der Flächenraum K die Flächenräume F, G, H, I um weniger als I übertrifft, den Abschnitt aber um mehr als I, so sind die Flächenräume F, G, H, I offenbar grösser als der Abschnitt, was unmöglich ist. Es wurde nämlich bewiesen, dass, wenn eine beliebige Anzahl von Flächenräumen der Reihe nach in dem Verhältnisse 4 : 1 stehen und der grösste dem in den Abschnitt eingeschriebenen Dreiecke gleich ist, die Summe aller dieser Flächenräume kleiner sein wird als der Abschnitt. Folglich ist der Abschnitt A D B E C nicht kleiner als der Flächenraum K. Es wurde aber bewiesen, dass er auch nicht grösser ist; mithin ist er gleich K. Der Flächenraum K beträgt nun das $\frac{4}{3}$ fache des Dreiecks A B C. Also ist der Abschnitt A D B E C dem $\frac{4}{3}$ fachen des Dreiecks A B C gleich.

15) Man vergleiche Satz XXI.

Fig. 1.

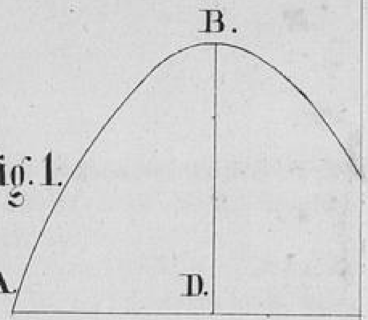


Fig. 2.

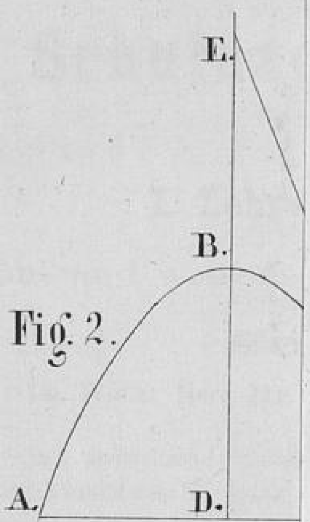
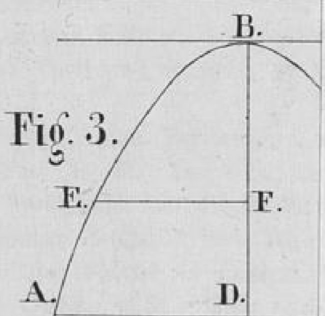


Fig. 3.



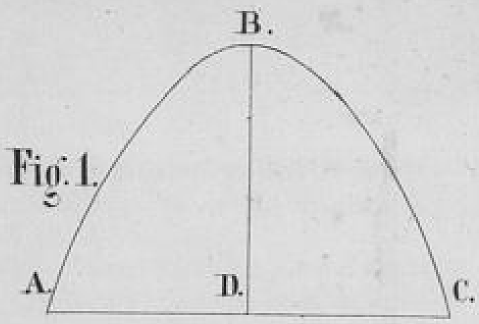


Fig. 1.

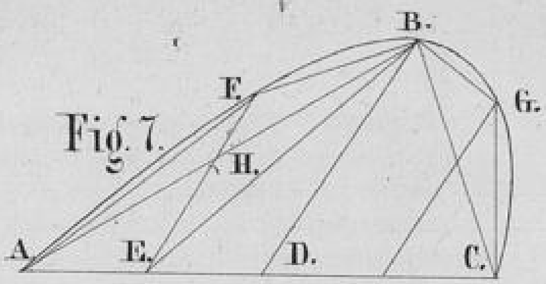


Fig. 7.

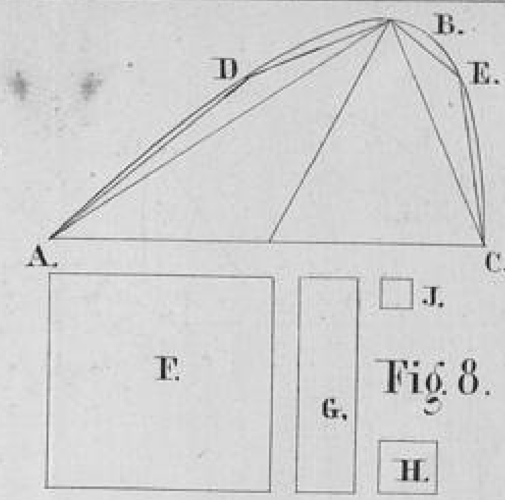


Fig. 8.

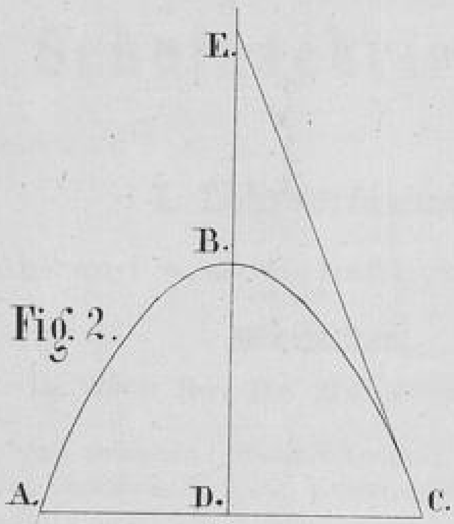


Fig. 2.

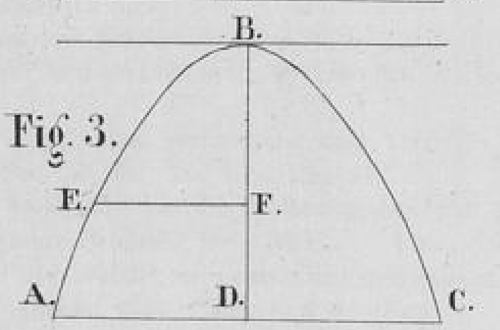


Fig. 3.

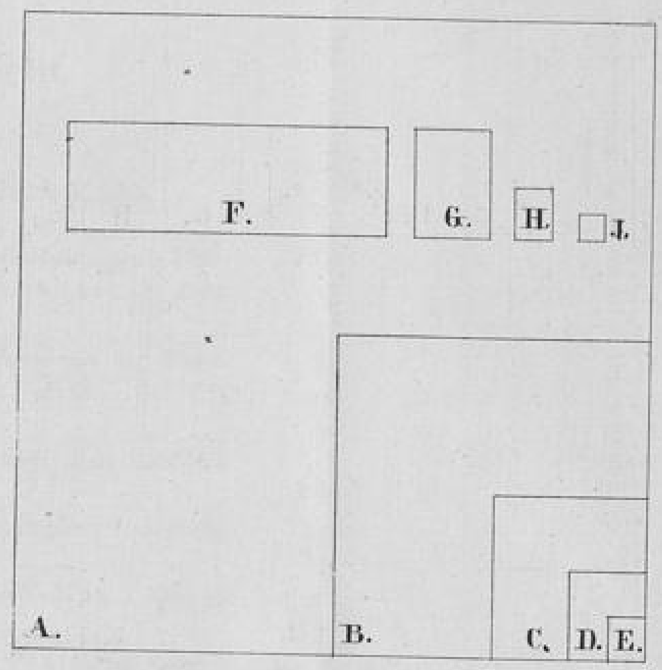


Fig. 9.

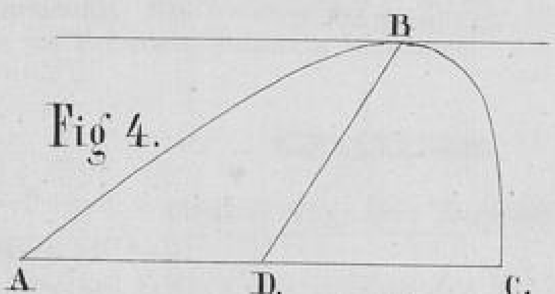


Fig. 4.

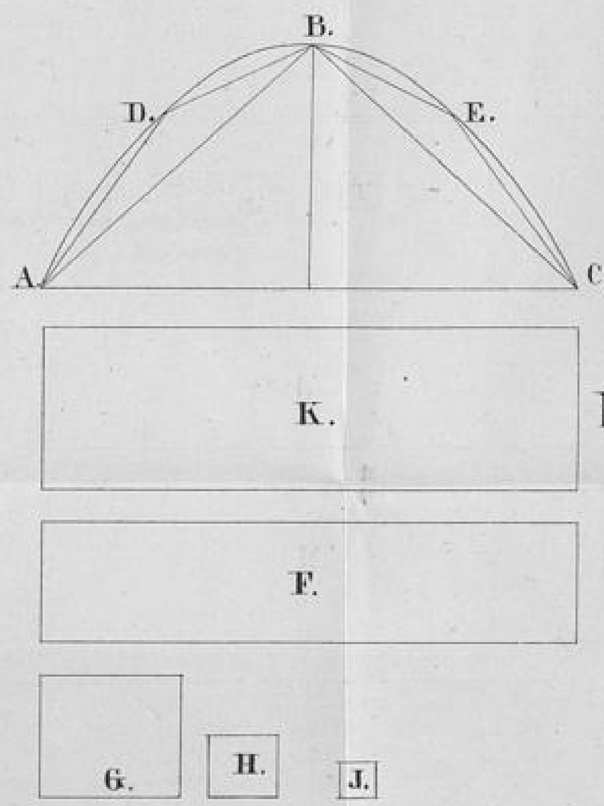


Fig. 10.

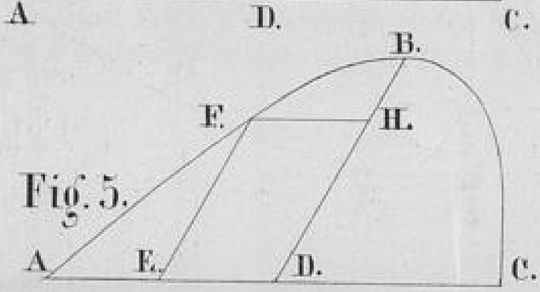


Fig. 5.

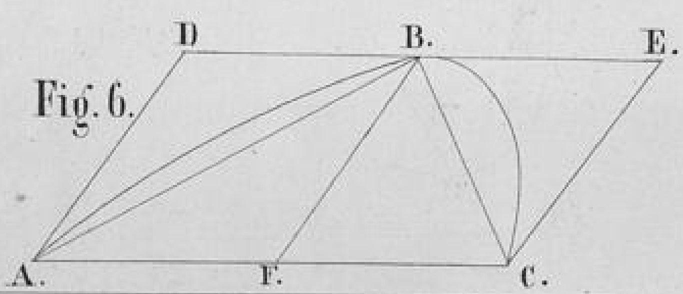


Fig. 6.