Einleitung.

§. 1.

Lehrsatz. **B**ezeichnet a irgend eine ganze Zahl, und b_0, b_1, b_2, ... b_{a-1} die kleinsten Reste, welche die Zahlen $0b$, $1b$, $2b$, ... $(a-1)b$ durch a getheilt lassen, so werden diese alle von einander verschieden sein, wenn b keinen gemeinschaftlichen Theiler mit a hat; denn wären irgend zwei Zahlen, deren Indices ν und μ sein mögen, gleich, also $b_\nu = b_\mu$, so müsste $\nu b - \mu b = (\nu - \mu) b$ durch a aufgehen, welches offenbar nicht möglich ist, da b zu a relative Primzahl, und $\nu - \mu$ kleiner als a ist. Da also sämmtliche Reste b_0, b_1, b_2, ... b_{a-1} von einander verschieden sind, und es nur die a verschiedenen Reste 0, 1, 2, ... $a-1$ giebt, so folgt, dass jene Zahlen mit diesen, wenn auch in anderer Ordnung, übereinstimmen werden. Hätte nun aber b mit a den grössten gemeinschaftlichen Theiler δ, so werden die Reste der Zahlen $0\frac{b}{\delta}$, $1 \cdot \frac{b}{\delta}$, $2 \cdot \frac{b}{\delta}$, ... $a - 1 \cdot \frac{b}{\delta}$ wieder mit den Resten 0, 1, 2, ... $a-1$ übereinstimmen. Denkt man sich diese Zahlen aber als Reste nach dem Divisor $\frac{a}{\delta}$, so ist klar, dass die Reste der Zahlen $0\frac{b}{\delta}$, $1 \cdot \frac{b}{\delta}$, $2 \cdot \frac{b}{\delta}$, ... $\left(\frac{a}{\delta} - 1\right)\frac{b}{\delta}$ mit den Zahlen 0, 1, 2, ... $\frac{a}{\delta} - 1$ übereinstimmen, und dass diese Zahlen in den Resten der Zahlen $0\frac{b}{\delta}$, $1 \cdot \frac{b}{\delta}$, $2\frac{b}{\delta}$, ... $a-1\frac{b}{\delta}$, δmal enthalten sein werden.

§. 2.

Betrachtet man jetzt die Gleichung $x^a - 1 = 0$, und bezeichnet eine primitive Wurzel derselben durch α, so kann man bekanntlich die sämmtlichen Wurzeln jener Gleichung durch α^0, α^1, α^2, ... α^{a-1} darstellen. Die $b$ten Potenzen dieser Wurzeln werden folglich durch α^{0b}, $\alpha^{1 \cdot b}$, ... $\alpha^{a-1 \cdot b}$ dargestellt. Hat nun b mit a den grössten gemeinschaftlichen Theiler δ, so kann man jene Ausdrücke auch so schreiben:

$$\left(\alpha^{\delta}\right)^{0 \cdot \frac{b}{\delta}}, \left(\alpha^{\delta}\right)^{1 \cdot \frac{b}{\delta}}, \left(\alpha^{\delta}\right)^{2 \cdot \frac{b}{\delta}}, \ldots \left(\alpha^{\delta}\right)^{a-1 \cdot \frac{b}{\delta}}.$$

Nun wird aber α^δ selbst eine primitive Wurzel der Gleichung $x^{\frac{a}{\delta}} - 1 = 0$ sein, und die Zahlen $0 \,.\, \frac{b}{\delta}$, $1 \,.\, \frac{b}{\delta}$, $2 \,.\, \frac{b}{\delta}$, ... $a - 1 \,.\, \frac{b}{\delta}$ werden, durch $\frac{a}{\delta}$ getheilt, δ mal die Reste $0, 1, 2, \ldots \frac{a}{\delta} - 1$ erzeugen. Mithin werden die Ausdrücke $\left(\overset{\delta}{a}\right)^{0 \frac{b}{\delta}}$, $\left(\overset{\delta}{a}\right)^{1 \,.\, \frac{b}{\delta}}$, $\left(\overset{\delta}{a}\right)^{2 \,.\, \frac{b}{\delta}}$ ...... $\left(\overset{\delta}{a}\right)^{a - 1 \,.\, \frac{b}{\delta}}$ δ mal die sämmtlichen Wurzeln der Gleichung $x^{\frac{a}{\delta}} - 1 = 0$ enthalten. Die Gleichung für b^{ten} Potenzen der Wurzeln der Gleichung $x^a - 1 = 0$, wird also unter der Form $\left(x^{\frac{a}{\delta}} - 1\right)^{\delta} = 0$ auftreten. Die Coefficienten dieser Gleichung werden folglich ganze positive Zahlen oder 0 sein. — Man hann nun behaupten, dass jede symmetrische Function der Ausdrücke $a^0, a^1, a^2, \ldots \ldots a^{a-1}$ sich als ganze in ganzen Zahlen ausgedrückte Function solcher Coefficienten, folglich auch als ganze positive oder negative Zahl oder auch als 0 werde darstellen lassen.

Um dies zu beweisen führe man folgende Bezeichnung ein: eine symmetrische Function von m Elementen, die aus lauter einzelnen Producten zusammengesetzt ist, in denen n verschiedene Elemente vorkommen, von denen das 1^{te} in die $c_1{}^{te}$, das zweite in die $c_2{}^{te} \ldots$, das n^{te} in die $c_n{}^{te}$ Potenz erhoben ist (und jede symmetrische ganze Function ist bekanntlich ein Aggregat solcher Functionen) bezeichne man durch $[c_1\; c_2\; c_3 \ldots c_n]$; so dass also z. B. für die Elemente α, β, γ, δ die symmetrische Function $\alpha\beta\gamma^2 + \alpha\beta\delta^2 + \alpha\gamma\delta^2 + \alpha\delta\beta^2 + \alpha\delta\gamma^2 + \beta\gamma\alpha^2 + \beta\gamma\delta^2 + \beta\gamma\alpha^2 + \beta\delta\gamma^2 + \gamma\delta\alpha^2 + \gamma\delta\beta^2$ durch $[1, 1, 2]$ dargestellt wird. Fallen nun diese m Elemente mit den Wurzeln der Gleichung $x^a - 1 = 0$ zusammen, so wird sich der Coefficient von x^{a-n} in der Entwickelung von $\left(x^{\frac{a}{\delta}} - 1\right)^{\delta}$ durch $(-1)^n\; [b_1\; b_2 \ldots b_n]$ darstellen lassen, wo $b = b_1 = b_2 = \ldots = b_n$ ist. Dies folgt unmittelbar aus der Identität der beiden Ausdrücke $\left(x^{\frac{a}{\delta}} - 1\right)^{\delta}$ und $(x - a^{0 \cdot b})\,(x - a^{1 \cdot b})\,(x - a^{2 \cdot b}) \ldots (x - a^{(a-1)b})$.

Es lässt sich nun leicht nachweisen, dass sich jede symmetrische Function $[c_1\; c_2 \ldots c_n]$ als ganze in ganzen Zahlen ausgedrückte Function anderer symmetrischen Functionen, die durch lauter gleiche, in Klammern eingeschlossene Zahlen angedeutet werden, ausdrücken lasse. Sind nämlich von den Zahlen $c_1, c_2, \ldots c_n$ eine Anzahl μ gleich α_1, eine zweite Anzahl ν gleich β_1, eine dritte Anzahl ρ gleich γ_1 etc., und setzt man $\alpha_1 = \alpha_2 = \ldots = \alpha_\mu$, $\beta_1 = \beta_2 \ldots = \beta_\nu$, $\gamma_1 = \gamma_2 \ldots = \gamma_\rho$ etc., so wird offenbar das Product $[\alpha_1\; \alpha_2 \ldots \alpha_\mu]\; [\beta_1\; \beta_2 \ldots \beta_\nu]\; [\gamma_1\; \gamma_2 \ldots \gamma_\rho]$ etc. aus $[c_1\; c_2 \ldots c_n]$ und anderen symmetrischen Functionen bestehen, deren einzelne Summanden jedoch nur eine geringere Anzahl von Elementen enthalten kann, als n andeutet. Man erhält demnach $[\alpha_1\; \alpha_2 \ldots \alpha_\mu]\; [\beta_1\; \beta_2 \ldots \beta_\nu]\; [\gamma_1\; \gamma_2 \ldots \gamma_\rho]$ etc. $= [c_1\; c_2 \ldots c_n] + \Sigma$, wo Σ ein Aggregat einfacher symmetrischer Functionen bezeichnet, in deren einzelnen Summanden weniger als n verschiedene Elemente auftreten.

Demnach ist $[c_1\, c_2 \ldots c_n] = [\alpha_1\, \alpha_2 \ldots \alpha_\mu][\beta_1\, \beta_2 \ldots \beta_\nu][\gamma_1\, \gamma_2 \ldots \gamma_\rho]$ etc. $- \Sigma$; und da man jede einzelne Function, die in Σ enthalten ist, wieder ähnlich transformiren kann, so ist klar, dass $[c_1\, c_2 \ldots c_n]$ zuletzt als ein Aggregat von Producten hervorgehen muss, deren jedes aus symmetrischen Functionen besteht, die durch gleiche eingeklammerte Zahlen angedeutet werden.

Beispiele.

1) $[8, 5, 3] = [8][5][3] - [13, 3] - [11, 5] - [8, 8]$
Es ist aber $[13, 3] = [13][3] - [16]$, und
$[11, 5] = [11][5] - [16]$ folglich
$[8, 5, 3] = [8][5][3] - [8, 8] - [13][3] - [11][5] + 2[16]$.

2) $[8, 8, 3] = [8, 8][3] - [11, 8]$; $[11, 8] = [11][8] - [19]$, also
$[8, 8, 3] = [8, 8][3] - [11][8] + [19]$.

3) $[8, 8, 3, 3] = [8, 8][3, 3] - [11, 8, 3] - [11, 11]$; $[11, 8, 3] = [11][8][3] - [19, 3] - [14, 8] - [11, 11]$; $[19, 3] = [19][3] - [22]$; $[14, 8] = [14][8] - [22]$ folglich $[8, 8, 3, 3] = [8, 8][3, 3] - [11][8][3] + [19][3] + [14][8] - 2[22]$.

Setzt man nun die Wurzeln der Gleichung $x^n - 1 = 0$ als Elemente der symmetrischen Functionen, so werden die durch lauter gleiche in Klammern eingeschlossene Zahlen angedeuteten Functionen mit den positiven oder negativen Coefficienten der Gleichungen für die ganzen Potenzen der Wurzeln der Gleichung $x^n - 1 = 0$ übereinstimmen, folglich nach dem Vorhergehenden ganze Zahlen sein; und da sich ferner jede ganze symmetrische Function jener Wurzeln als ganze Function dieser Zahlen entwickeln lässt, so folgt, dass diese Function selbst durch ganze Zahlen oder 0 werde darzustellen sein.

§. 3.

Aufgabe. Wenn eine Gleichung vom n^{ten} Grade $x^n + a_1 x^{n-1} + a_2 x^{n-2} + \ldots . a_n = 0$ vorliegt, eine andere Gleichung aufzustellen, welche die p^{ten} Potenzen der Wurzeln der vorliegenden Gleichung als Wurzeln enthält; vorausgesetzt p bedeute irgend eine ganze positive Zahl.

Auflösung. Gesetzt $b_1, b_2, b_3, \ldots b_n$ wären die Wurzeln der vorliegenden Gleichung, und man hätte mithin $x^n + a_1 x^{n-} + a_2 x^{n-2} + \ldots + a_n = (x - b_1)(x - b_2) \ldots . (x - b_n)$, so erhielte man die verlangte Gleichung, indem man das Product $(x^p - b_1^p)(x^p - b_2^p) \ldots . . (x^p - b_n^p)$ entwickelte, dies gleich 0 setzte, und für x^p irgend eine andere Unbekannte z einführte. Bezeichnet nun α eine primitive Wurzel der Gleichung $x^p - 1 = 0$, so ist bekanntlich $x^p - b^p = (x - b)(x - b\alpha) \ldots \ldots (x - b\alpha^{p-1})$. Werden auf diese Weise sämmtliche Factoren zerlegt, so geht das Product $(x^p - b_1^p)(x - b_2^p) \ldots (x^p - b_n^p)$ in folgendes über:

$$
\begin{array}{l}
(x - b_1)(x - b_2)(x - b_5) \ldots \ldots \ldots \ldots \ldots (x - b_n) . \\
(x - b_1\alpha)(v - b_2\alpha)(x - b_3\alpha) \ldots \ldots \ldots \ldots (x - b_n\alpha) . \\
(x - b_1\alpha^1)(x - b_2\alpha^2)(x - b_3\alpha^3) \ldots \ldots \ldots (x - b_n\alpha^2) . \\
\ldots \ldots \ldots \ldots \ldots \ldots \ldots \ldots \ldots \ldots \ldots \\
(x - b_1\alpha^{p-1})(x - b_2\alpha^{p-1})(x - b_3\alpha^{p-1}) \ldots . (x - b_n\alpha^{p-1}) .
\end{array}
$$

Jedes der Producte, die in einer Horizontal-Reihe enthalten sind, kann man leicht durch die ursprüngliche Gleichung und durch α darstellen. Man erhält dann das obige Product durch

$$\begin{array}{l}
(x^n + a_1 x^{n-1} + a_2 x^{n-2} + \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots + a_n)\,.\\
(x^n + a_1 \alpha x^{n-1} + a_2 \alpha^2 x^{n-2} + \ldots\ldots\ldots\ldots + a_n \alpha^n)\,.\\
(x^n + a_1 \alpha^2 x^{n-1} + a_2 \alpha^4 x^{n-2} + \ldots\ldots\ldots\ldots + a_n \alpha^{2n})\,.\\
\cdot\quad\cdot\quad\cdot\quad\cdot\quad\cdot\quad\cdot\quad\cdot\quad\cdot\quad\cdot\quad\cdot\quad\cdot\quad\cdot\quad\cdot\quad\cdot\\
(x^n + a_1 \alpha^{p-1} x^{n-1} + a_2 \alpha^{2(p-1)} x^{n-1} + \ldots\ldots + a_n \alpha^{(p-1)n})
\end{array}$$

ausgedrückt.

Betrachtet man nun den Coefficienten irgend einer q^{ten} Potenz von x, so besteht dieser offenbar aus einer Summe von Gliedern, deren jedes einzelne ein Product aus den verschiedenen Coefficienten der ersten Gleichung ist, die der Bedingung unterworfen sind, dass die Summe ihrer Indices gleich $pn - q$ ist, und aus einer symmetrischen Function der Ausdrücke α^0, α^1, α^2, $\ldots\, \alpha^{p-1}$, welche nach §. 2. sich muss durch eine ganze Zahl darstellen lassen. Bezeichnet man nun die Coefficienten der Gleichung für die p^{ten} Potenzen der Wurzeln der ursprünglichen Gleichung durch a_{1_p}, a_{2_p}, a_{3_p} $\ldots\ldots$ a_{n_p}, so folgt, dass dieselben ganze in ganzen Zahlen ausgedrückte Functionen der Coefficienten der ursprünglichen Gleichung seyn werden. Aus §. 2. folgt ferner, dass sich jede symmetrische Function der Wurzeln der ursprünglichen Gleichung als ganze Function der Grössen a_{1_p}, a_{2_p}, $\ldots\ldots$ a_{n_p} (wo p verschiedene ganze Zahlen bedeuten kann) ausdrücken lasse; daher folgt in Verbindung mit dem Vorhergehenden:

> dass sich jede symmetrische ganze Function der Wurzeln einer Gleichung als ganze in ganzen Zahlen ausgedrückte Function der Coefficienten dieser Gleichung ausdrücken lasse,

und ferner:

> dass sich jede symmetrische ganze Function der Wurzeln einer Gleichung, deren Coefficienten ganze Zahlen sind, selbst werde durch eine ganze Zahl ausdrücken lassen.

(Weitere Entwickelungen über diesen Gegenstand findet man in der erwähnten Abhandlung über symmetrische Functionen.)

§. 4.

Lehrsatz. Die symmetrischen Functionen sämmtlicher Wurzeln einer Gleichung ausser einer, lassen sich als ganze in ganzen Zahlen ausgedrückte Functionen jener einen und der Coefficienten der Gleichung darstellen.

Beweis. Es sei $x^n + a_1 x^{n-1} + \ldots + a^n = 0$ die Gleichung, und α_1, $\alpha_2, \ldots\, \alpha_n$ die Wurzeln derselben, so ist nach der obigen Bezeichnung, wenn man diese Wurzeln selbst als Elemente von symmetrischen Functionen ansieht $[1] = -a_1$, $[11] = a_2$, $[111] = -a_3$ etc. Setzt man nun $\alpha_2, \alpha_3, \ldots\, \alpha_n$ als Elemente von symmetrischen Functionen, so mögen diese zum Unterschiede von jenen durch einen hinzugefügten Index bezeichnet werden, so dass also $[1]_1 = \alpha_2 + \alpha_3 + \ldots + \alpha_n$ $[11]_1 = \alpha_2\alpha_3 + \alpha_2\alpha_4 + \ldots + \alpha_{n-1}\alpha_n$ etc. ist. Offenbar ist nun $[1] = \alpha_1 + [1]_1$, $[11] = \alpha_1 [1]_1 + [11]_1$, $[111] = \alpha_1 [11]_1 + [111]_1$ $[1111] = \alpha_1 [111]_1 + [1111]_1$ etc. Hieraus folgt nun $-a_1 = \alpha_1 + [1]_1$, $+a_2 = \alpha_1 [1]_1 + [11]_1$, $-a_3 = \alpha_1 [11]_1 + [111]_1$, $a_4 = \alpha_1 [111]_1 + [1111]_1$ etc.

und hieraus $[1]_1 = -(a_1 + \alpha_1)$ $[11]_1 = a_2 + a_1\alpha_1 + \alpha_1^2$, $[111] = -(a_3 + a_2\alpha_1 + a_1\alpha_1^2 + \alpha_1^3)$ $[1111] = a_4 + a_3\alpha_1 + a_2\alpha_1^2 + a_1\alpha_1^3 + \alpha_1^4$ und im Allgemeinen die Summe der Combinationen zu m Elementen von $\alpha_2, \alpha_3, \ldots \alpha_n$ gleich $(-1)^m(a_m + a_{m-1}\alpha_1 + a_{m-2}\alpha_1^2 + \ldots a_1\alpha_1^{m-1} + \alpha_1^m)$. Da nun alle symmetrischen ganzen Functionen von $\alpha_2\,\alpha_3 \ldots\ldots \alpha_n$ sich nach §. 2. als ganze in ganzen Zahlen ausgedrückte Functionen von $[1]_1$, $[11]_1$, $[111]_1$, etc. darstellen lassen, und diese ähnliche Functionen von α_1 und den Coefficienten der Gleichung sind, so folgt, dass die symmetrischen Functionen von $\alpha_2, \alpha_3, \ldots \alpha_n$ sich ebenfalls als ganze in ganzen Zahlen ausgedrückte Functionen von α_1 und den Coefficienten der Gleichung darstellen lassen.

Es ist übrigens leicht zu sehen, dass man obige Entwickelungen auch aus der Division von $x^n + a_1 x^{n-1} + \ldots + a_n$ durch $x - \alpha_1$ hätte ableiten können.

Anmerkung. Die Gleichung für $\alpha_2, \alpha_3, \ldots \alpha_n$ wird offenbar nun folgende sein: $x^{n-1} + (a_1 + \alpha_1)x^{n-2} + (a_2 + a_1\alpha_1 + \alpha_1^2)x^{n-3} + \ldots\ldots$

$$+ (a_{n-1} + a_{n-2}\alpha_1 + a_{n-3}\alpha_1^2 + a_{n-4}\alpha_1^3 + \ldots\ldots a_1\alpha_1^{n-2} + \alpha_1^{n-1}) = 0.$$

Setzt man voraus, dass diese Gleichung für $x = \alpha_1$ realisirt wird, so findet man, wenn man statt x, α_1 setzt, und dieselbe nach α_1 ordnet

$$n\alpha_1^{n-1} + (n-1)a_1\alpha_1^{n-2} + (n-2)a_2\alpha_1^{n-3} + \ldots\ldots a_{n-1} = 0.$$

Hieraus folgert man leicht, dass, wenn die Gleichung $x^n + a_1 x^{n-1} + \ldots + a_n = 0$ zwei gleiche Wurzeln α_1 haben soll, sie eben diese Wurzel mit der Gleichung $nx^{n-1} + (n-1)a_1 x^{n-2} + (n-2)a_2 x^{n-3} + \ldots + a_{n-1} = 0$ gemeinschaftlich haben müsste. — Dieser Satz wird fast in allen Lehrbüchern aus der Differential-Rechnung abgeleitet, welches offenbar nicht naturgemäss ist.

§. 5.

Erklärung und Lehrsatz. Eine ganze rationale Function von x, deren Coefficienten rationale Zahlen sind, soll *irreductibel* heissen, wenn sie sich nicht in zwei Factoren zerfällen lässt, von denen jeder wieder eine ähnliche Function von x von einem niedrigeren Grade als die ursprüngliche ist.

Setzt man eine irreductible Function von x gleich 0, so soll diese Gleichung ebenfalls irreductibel heissen.

Eine irreductibele Gleichung kann mit einer andern, deren Coefficienten ebenfalls rationale Zahlen sind, keine Wurzel gemeinschaftlich haben, ohne alle Wurzeln mit ihr gemeinschaftlich zu haben.

Beweis. Gesetzt $fx = 0$ sei eine irreductibele Gleichung, so ist zunächst zu zeigen, dass, wenn $\phi x = 0$ eine Gleichung von einem niedrigeren Grade als $fx = 0$ bedeutet, deren Coefficienten ebenfalls rationale Zahlen sind, dass alsdann fx und ϕx keine Wurzel gemeinschaftlich haben können. Unter dieser Voraussetzung müsste sich nämlich ein gemeinschaftlicher algebraischer Theiler, dessen Coefficienten rationale Zahlen sind, nach der Methode den grössten algebraischen Theiler zweier Functionen zu finden, zwischen ϕx und fx aufstellen lassen. Da aber fx überhaupt keinen solchen Theiler zulassen kann, so ist die erste Voraussetzung nicht statthaft. Gesetzt nun ϕx sei von gleichem oder höherem Grade mit fx so bringe man ϕx durch algebraische Division mit fx auf die Form $fx \,.\, Qx + Rx$, wo Qx den algebraischen Quotienten und Rx den Rest angiebt, welchen ϕx bei der Division durch fx erzeugt. Hätte nun ϕx oder $fx \, . \, Qx + Rx$ eine gemeinschaftliche Wurzel mit fx, so müsste auch Rx dieselbe haben. Da aber Rx von einem niedrigeren Grade als fx ist, so geht dies nicht an, nach dem eben Bewiesenen. Es kann mithin unter der gemachten Voraussetzung gar kein Rx existiren, oder es muss sich ϕx ohne Rest durch fx theilen lassen. Es enthält mithin die Gleichung $\phi x = 0$ sämmtliche Wurzeln der Gleichung $fx = 0$.

Zusatz. Aus der Anmerkung des §. 4. ergiebt sich nun leicht, dass die Gleichung $fx = 0$ nicht zwei gleiche Wurzeln haben könne.

Anmerkung. Die in diesem §. entwickelten Sätze gebühren dem berühmten Mathematiker *Abel.* Vergl. *Crelle's* Journal Tom. IV. Pg. 131.

§. 6.

Lehrsatz. Ist die Gleichung $fx = 0$ irreductibel, und sind α_1, α_2, ... α_n die Wurzeln dieser Gleichung, so sind die Werthe irgend einer rationalen Function von x, deren Coefficienten rationale Zahlen sind, wenn man in dieselbe nach der Reihe α_1, α_2, ... α_n statt x setzt, die Wurzeln einer irreductibeln Gleichung.

Beweis. Bezeichnet man die rationale Function von x durch ϕx, so werden $\phi\alpha_1$, $\phi\alpha_2$, ... $\phi\alpha_n$ von der Gleichung $(z - \phi\alpha_1)(z - \phi\alpha_2) \ldots . (z - \phi\alpha_n) = 0$ abhängen. Offenbar werden die Coefficienten dieser Gleichung symmetrische Functionen von α_1, α_2, ... α_n sein, und sich mithin durch Coefficienten von fx rational darstellen lassen. Da diese Coefficienten selbst aber rationale Zahlen sind, so werden die Coefficienten von $(z - \phi\alpha_1)(z - \phi\alpha_2) \ldots . (z - \phi\alpha_n)$ ebenfalls rationale Zahlen seyn. Setzt man nun $(z - \phi\alpha_1)(z - \phi\alpha_2) \ldots (z - \phi\alpha_n) = Fz$, so ist zu zeigen, dass Fz die Potenz eines irreductibeln Ausdruckes sei. Gesetzt nun Fz sei dem Product zweier in rationalen Zahlen ausgedrückten Functionen von niedrigerem Grade als dem $n$ten gleich, so kann man die eine derselben, welche mit dz bezeichnet werden soll, als die Potenz einer irreductibelen Function von z ansehen, die mit dem anderen Factor d_1z keinen algebraischen Divisor mehr gemeinschaftlich hat. Da nun $Dz = dz \, d_1z$ ist, so müssen die Wurzeln der Gleichung $dz = 0$ und $d_1z = 0$ in $\phi\alpha_1$, $\phi\alpha_2$, ... $\phi\alpha_n$ enthalten sein. Setzt man nun in die beiden Gleichungen $dz = 0$ und $d_1z = 0$ statt z seinen Ausdruck in x, nämlich ϕx, so müssen die Gleichungen $d\phi x = 0$ und $d_1\phi x = 0$ mit der Gleichung $fx = 0$ gewisse Wurzeln gemeinschaftlich haben. Deshalb muss aber fx sowohl ein Factor von $d\phi x$ wie von $d_1\phi x$ sein (§. 5.). Offenbar hätten also die Gleichungen $dz = 0$ und $d_1z = 0$ die Wurzeln $\phi\alpha_1$, $\phi\alpha_2$, ... $\phi\alpha_n$ gemeinschaftlich. Nennt man nun δz den irreductibeln Ausdruck von z, von dem dz Potenz ist, so müssen auch die Gleichungen $dz = 0$ und $\delta z = 0$ die Wurzeln $\phi\alpha_1$, $\phi\alpha_2$, ... $\phi\alpha_n$ gemeinschaftlich haben. Mithin müssten auch δz und d_1z diese Wurzeln gemeinschaftlich haben. Dann würde aber folgen, dass δz ebenfalls ein Factor von d_1z sein müsse. Dies ist aber gegen die Voraussetzung. Es muss mithin Fz allein durch dz, welches eine Potenz des irreductibeln Factors δz ist, dargestellt werden, und mithin hängen die Werthe $\phi\alpha_1$, $\phi\alpha_2$, ... $\phi\alpha_n$ allein von der irreductibeln Gleichung $\delta z = 0$ ab.

§. 7.

§. 7.

Erklärung und Lehrsatz. Ist $fx = 0$ eine Gleichung vom n^{ten} Grade, deren Wurzeln $\alpha_1, \alpha_2, \ldots \alpha_n$ sind, und $\phi x = 0$ eine Gleichung vom m^{ten} Grade, deren Wurzeln $\beta_1, \beta_2, \ldots \beta_m$ sind, so soll das Product $f\beta_1 \, f\beta_2 \ldots f\beta_m$ die Norm von f in Bezug auf ϕ heissen, und durch Nf_ϕ oder $N(f_\phi)$ bezeichnet werden. Da Nf_ϕ eine symmetrische Function der Wurzeln von $\phi x = 0$ ist, so lässt es sich durch die Coefficienten dieser Gleichung und durch ganze Zahlen ausdrücken (§. 3.).

Sind die Coefficienten der höchsten Potenzen von fx und ϕx gleich 1, so ist die Norm von f in Bezug auf ϕ ist gleich der Norm von ϕ in Bezug auf f, positiv oder negativ genommen, jenachdem $n.m$ gerade oder ungerade ist, oder in allgemeinen Zeichen $Nf_\phi = N\phi_f (-1)^{mn}$.

Beweis. Da $\alpha_1, \alpha_2, \ldots \alpha_n$ die Wurzeln von $fx = 0$ sind, und $\beta_1, \beta_2, \ldots \beta_m$ die Wurzeln von $\phi x = 0$, so kann man $fx = (x - \alpha_1)(x - \alpha_2) \ldots (x - \alpha_n)$ und $\phi x = (x - \beta_1)(x - \beta_2) \ldots (x - \beta_m)$ setzen. Offenbar ist nun

$$\begin{aligned} Nf_\phi = f\beta_1 \, f\beta_2 \ldots f\beta_m = \; & (\beta_1 - \alpha_1)(\beta_1 - \alpha_2) \ldots (\beta_1 - \alpha_n) \, . \\ & (\beta_2 - \alpha_1)(\beta_2 - \alpha_2) \ldots (\beta_2 - \alpha_n) \, . \\ & \ldots \ldots \ldots \ldots \\ & (\beta_m - \alpha_1)(\beta_m - \alpha_2) \ldots (\beta_m - \alpha_n) \end{aligned}$$

und

$$\begin{aligned} N\phi_f = \phi\alpha_1 \, \phi\alpha_2 \ldots \phi\alpha_n = \; & (\alpha_1 - \beta_1)(\alpha_1 - \beta_2) \ldots (\alpha_1 - \beta_m) \, . \\ & (\alpha_2 - \beta_1)(\alpha_2 - \beta_2) \ldots (\alpha_2 - \beta_m) \, . \\ & \ldots \ldots \ldots \ldots \\ & (\alpha_n - \beta_m)(\alpha_n - \beta_m) \ldots (\alpha_n - \beta_m) \, . \end{aligned}$$

Vergleicht man nun die in einer Horizontal-Reihe stehenden Factoren des einen Products mit den in einer Vertikal-Reihe stehenden des andern, so findet man, dass die einen die negativen Werthe der andern bilden, und hieraus folgt der Satz unmittelbar.

§. 8.

Lehrsatz. Ist $fx = 0$ eine irreductibele Gleichung und $\phi x = 0$ eine Gleichung, deren Coefficienten rationale Zahlen sind, so ist fx ein algebraischer Divisor von ϕx, wenn $Nf_\phi = 0$ ist.

Beweis. Offenbar kann Nf_ϕ nur dann gleich 0 werden, wenn die Gleichungen $fx = 0$ und $\phi x = 0$ eine gleiche Wurzel haben, alsdann ist aber $f\phi$ ein algebraischer Divisor von ϕx (§. 5.).

§. 9.

Erklärung und Lehrsatz. Zwei ganze Zahlen, welche durch eine Primzahl p getheilt gleiche Reste geben, heissen nach dieser Primzahl congruent, die Primzahl selbst wird alsdann der Modul genannt. Das Zeichen für die Congruenz ist $\equiv$, und $a \equiv b \; (mod.\, p)$ heisst, dass a und b durch p getheilt gleiche Reste geben.