Vorwort.

Die Veranlassung zur folgenden Untersuchung fand ich schon vor längerer Zeit in dem Auffinden des Satzes: dass die Gleichung für die p^{ten} Potenzen der Wurzeln einer Gleichung, deren Coefficienten ganze Zahlen sind, mit der ursprünglichen Gleichung in ihren entsprechenden Coefficienten nach dem Modul p congruent sei, wenn p eine Primzahl ist. Obschon dieser Satz nach einer Seite hin eine bedeutende Verallgemeinerung des bekannten *Fermat*'schen Satzes ist, so erkannte ich dennoch bald, dass er in dieser Gestalt unvollendet sei. Er lässt sich nämlich nur als eine Verallgemeinerung des Satzes ansehen, dass $a^p \equiv a \, (mod. p)$ sei, wenn a irgend eine Zahl und p eine Primzahl bedeutet, nicht aber als eine Verallgemeinerung des Satzes, dass $a^{p-1} \equiv 1 \, (mod. p)$ sei, wenn a eine Zahl bedeutet, die nicht $\equiv 0 \, (mod. p)$ ist. Da der *Fermat*'sche Satz nun aber vorzüglich nur in der letzten Form fruchtbar wird, so bemühte ich mich jenen allgemeinen Satz auf eine ähnliche Form zurückzuführen. Dies erreichte ich zwar bald, aber blos von einigen Einzelnheiten geleitet. Der Beweis für die Allgemeinheit des Satzes schien mir bei dem Wenigen, welches wir über die Form der Wurzeln einer Gleichung kennen, mit sehr grossen Schwierigkeiten verbunden. Hierzu kam, dass Proberechnungen wegen zu grosser Weitläuftigkeit fast unmöglich wurden. Ich versuchte daher neuerdings, sobald es meine Zeit gestattete, auf rein speculativem Wege, wenn es möglich wäre, den Beweis zu finden. Dies ist mir nun auf eine für mich überraschend einfache Weise gelungen. Es haben sich aber hierbei so äusserst wichtige Sätze und Aufschlüsse über die Lehre der Congruenzen ergeben, dass ich in denselben die Grundzüge einer allgemeinen Theorie der Congruenzen höherer Grade, deren Modul eine reelle Primzahl ist, erblicke. Der Hauptsatz steht mit dem *Fermat*'schen Satz auf der einen Seite und mit der *Gaussi*'schen Methode der Kreistheilung auf der andern Seite in dem engsten Zusammenhange. Aus demselben geht zugleich hervor, dass sich alle Congruenzen gewissermassen auf reine reduciren lassen.

Der berühmte Verfasser der *Disquisitiones Arithmeticae* hatte für den achten Abschnitt seines Werkes eine allgemeine Theorie der höhern Congruenzen bestimmt. Da indessen dieser achte Abschnitt nicht erschien, und auch, so viel mir bewusst ist, über diesen Gegenstand sonst nichts von dem Verfasser bekannt gemacht oder nur bestimmt angedeutet worden ist, (denn die Untersuchungen über imaginäre Moduln gehören in ein anderes Gebiet) so wage ich nicht zu entscheiden, ob und wie weit die vorliegrnde Arbeit mit den Untersuchungen dieses berühmten Mannes in Berührung stehe. Sollte ich vielleicht zum Theil denselben Sätzen meine Forschung gewidmet haben, wie der tiefsinnige Begründer der Lehre von den Congruenzen, so würde mich über die Einbusse der ersten Entdeckung das Bewustsein schadlos halten, auf selbstständigem Wege mit dem Streben eines solchen Geistes zusammengetroffen zu sein.

Bei der Ausarbeitung habe ich nur das Gewöhnlichste aus der Algebra und Arithmetik vorausgesetzt. Die Sätze, von welchen ich später Gebrauch machen musste, habe ich daher fast alle in den Vortrag verflochten. Wenn dies nun auch grösstentheils unter eigenthümlichem Gesichts-Punkte geschehen ist, so werden Kundige in manchen Sätzen und noch mehreren Beweisen etwas ganz Bekanntes erblicken. Doch schien die für dieselbeu hieraus entspringende Unbequemlichkeit viel geringer als diejenige, welche minder Bewanderten aus einer entgegengesetzten Art der Auseinander-Setzung entstanden wäre. Die höhere Arithmetik, welche mit ihren Hilfsmitteln in das innerste Wesen der Mathematik eingreift, und vielen Principien ein Feld vollständiger Gestaltung gewährt, die ohne sie noch lange unfruchtbar darnieder lägen, ist bis jetzt das Eigenthum so Weniger, dass eine grössere Verbreitung derselben gewiss nur im Interesse der Wissenschaft liegen kann. Sollte es mir gelungen sein, bei Einigen der Leser das Interesse von rein algebraischen Untersuchungen auf zahlentheoretische zu ziehen, so werde ich mich für die Mühe der Ausarbeitung belohnt halten.

Benutzt sind für die folgende Abhandlung vorzüglich der dritte Abschnitt der *Disquisitiones Arithmeticae* von *Gauss* und eine Abhandlung über symmetrische Functionen etc., welche ich im 19. Bande des *Crelle*'schen Journals bekannt gemacht habe.

Brandenburg,
den 29. Januar 1844.

Schönemann.