Erster Abschnitt.

Von dem ebenen Verschiebungsrahmen.

§ 1.

Stellt *abcd* (Fig. 1) ein Vierseit vor, dessen gegenüberliegende Seiten gleich sind, so ist dasselbe, wenn diese Seiten sich in *einer* Ebene befinden, bekanntlich ein Parallelogramm, unter welchem Winkel sich auch zwei anstossende Seiten schneiden mögen. Ist die Linie *mn* parallel mit einer der Seiten des Parallelogramms (in Fig. 1 mit *ad*) und denkt man sich diese Linie von unveränderlicher Länge und mit ihren unveränderlichen Endpunkten in den Punkten *n* und *m* der Linien *ab* und *cd* befestigt, so wird dieselbe noch immer die Verschiebungen des Parallelogramms *abcd* in *einer* Ebene gestatten und stets der Seite *ad* parallel bleiben. Denkt man sich die beiden Linien *ab* und *cd* unbegrenzt und eine unendliche Schaar von unbegrenzten Linien, die wie *mn* mit *ab* und *cd* parallel sind, und die ganze Ebene, in der das Parallelogramm *abcd* liegt, einnehmen, so werden auch diese noch immer die Verschiebungen des Parallelogramms *abcd* in *einer* Ebene gestatten und diesen zugleich mitunterworfen sein. Befindet sich in der Ebene des Parallelogramms irgend eine Figur, so nehme man an, die Punkte des Umfangs derselben lägen auf jener Schaar von Linien; und es entsteht die Frage, welchen Veränderungen wird die Figur bei den Verschiebungen des Parallelogramms unterworfen sein? — Die Elemente zur Beantwortung dieser Frage sollen in dem Folgenden entwickelt werden.

Geht ein Punkt durch Verschiebung in eine andere Lage über, so soll dieser neue Punkt der *verschobene* von jenem heissen; ebenso soll jede Figur, die durch Verschiebung einer gegebenen entsteht, die *verschobene* heissen. Auch soll die unendliche Schaar der parallelen Linien, die wie *mn* bestimmt sind, und welche die ganze Ebene des Parallelogramms einnehmen, kurzweg die *Parallel-Schaar* heissen.

§ 2.

Beschreibung des Verschiebungsrahmens.

Um eine sinnliche Anschauung von der gestellten Aufgabe zu gewinnen, kann man sich eines Instrumentes bedienen, welches ich den *Verschiebungsrahmen* nenne, und dessen Beschreibung und Gebrauch hier mitgetheilt werden soll.

Der Verschiebungsrahmen $abcd$ (Fig. 2) besteht zunächst aus zwei hölzernen Leisten ad und bc, in welche bei a, b, c und d vier hölzerne cylindrische Axen fest eingelassen sind — die Entfernung ad muss gleich bc sein, — ferner aus den beiden Leisten ab und cd, die bei a. b. c und d durchbohrt sind, um jene Axen aufnehmen zu können; auch muss ab gleich dc sein. Genau in der geraden Linien ab und cd sind die gleichnamigen Leisten mit einer Anzahl von Löchern versehen, von denen immer je zwei gegenüberstehende gleichweit von den Drehungspunkten entfernt sind; durch diese Löcher wird eine lange Schnur gezogen, wie die Figur 2 zeigt, so dass jede übergespannte Strecke derselben mit der Linie ad oder bc parallel wird. Beim Aufziehen der Schnur zieht man aber auf jede Strecke derselben, die frei über den Rahmen gespannt ist, etwa fünf Perlen, die sich mit Reibung auf der Schnur verschieben lassen. Dann befestigt man die Enden der Schnur fest an den Rahmenstükken, und der Apparat ist nun zum Gebrauch geeignet. Es wird zweckmässig sein, alle Leisten des Rahmens gleich lang zu machen, so dass $abcd$ in jeder Lage ein verschobenes Quadrat ist.

Um den Verschiebungsrahmen in Gebrauch zu setzen, zeichne man irgend eine Figur, die den Umfang des Verschiebungsrahmens nicht überschreitet, auf Papier, lege den Verschiebungsrahmen darüber und rücke die Perlen, so dass sie sich über den Umrissen der Zeichnung befinden. Beim Verschieben des Rahmens ergeben sich nun die fraglichen Veränderungen der Figur.

Beim Experimentiren mögen die Schüler zunächst die Veränderungen untersuchen, denen die nach verschiedenen Richtungen aufgestellten graden Linien unterworfen sind, dann einige einfache gradlinige Figuren und dann verschiedene Kreise derselben experimentellen Untersuchung unterwerfen und die Bemerkungen daran knüpfen, die jeder Mensch von gesundem Sinne selbst machen wird.

Anmerkung. Man kann den Verschiebungsrahmen auch so einrichten, dass man unmittelbar auf denselben mit Kreide zeichnen kann, wenn man die Schaar der parallelen Linien durch Drähte darstellt, deren jeder sich um einen Stift als Axe drehen kann, der senkrecht auf den Leisten und in der Richtung zweier Drehungsaxen des Verschiebungsrahmens befestigt ist. Die Drähte kann man mit einem passenden Firniss überziehen und dann unmittelbar darauf zeichnen. So zugerichtet eignet sich der Verschiebungsrahmen besonders für verschiedene perspectivische Untersuchungen.

§ 3. Lehrsatz.

Jede grade Linie geht durch Verschiebung wieder in eine grade Linie über. Zwei Strecken auf derselben werden in demselben Verhältniss stehen, wie die verschobenen Strecken.

Anleitung zum Beweise. I. $abcd$ (Fig. 3) stelle den Verschiebungsrahmen vor. Die Linie gehe durch die beiden Punkte k und k_1, so denke man zu diesen die beiden Linien mn und m_1n_1 aus der Parallel-Schaar und bedenke, dass der Schnittpunkt von kk_1 mit der Basis des Rahmens, oder dass x unabhängig von der Lage des Rahmens sein müsse. kk_1 muss also nach der Verschiebung noch durch x gehen u. s. w.

II. Denkt man sich noch eine zweite Strecke, wie kk_1 auf dieser Linie, bezeichnet sie durch KK_1 und das von mm_1 analoge Stück mit MM_1, so wird $kk_1 : KK_1 = mm_1 : MM_1$ sein u. s. w.

Fragen: Wie kann man m_1x berechnen, wenn blos mk_1 m_1 k_1 und mm_1 gegeben sind? — Weshalb ist x der äussere Aehnlichkeitspunkt der Linien mk und m_1k_1? — Wie müssen die Punkte k und k_1 liegen, damit der innere Aehnlichkeitspunkt in Kraft trete?

Zusatz. Parallele Linien bleiben nach der Verschiebung auch parallel, und irgend zwei Strecken auf beiden behalten nach der Verschiebung noch dasselbe Verhältniss, wie vorher. — Beweis zu finden.

§ 4.

Geht eine geschlossene Figur durch Verschiebung in eine andere über, so verhalten sich die Inhalte beider Figuren, wie die Höhen des Rahmens vor und nach der Verschiebung.

Anleitung zum Beweise. Man beweist den Satz erst für ein Dreieck, dessen Grundlinie der Basis des Rahmens parallel ist, dann für jedes Dreieck, welches man als die Summe zweier solcher Dreiecke ansehen kann oder als deren Differenz, und dann allgemein.

§ 5.

Nimmt man auf den beiden Linien SA und SB (Fig. 4) zwei Punktenpaare a und a_1, b und b_1 an, denkt SB fest, SA aber sich um den Punkt S drehend, und für jede Lage, die SA einnimmt, die Transversalen ba und b_1a_1 gezogen, so werden die Verhältnisse $ma : mb$ und $ma_1 : mb_1$ unabhängig von der Lage SA sein, wo m den veränderlichen Durchschnittspunkt der beiden Transversalen ba und b_1a_1 bezeichnet, und m wird bei der Drehung einen Kreis beschreiben, dessen Mittelpunkt (c) der Schnittpunkt von SB mit einer Parallelen von SA ist, die durch m geht.

Anleitung zum Beweise. Man sehe SB und SA als zwei Seiten des Verschiebungsrahmens an, so ist mc eine Linie der Parallelschaar (beim Verschiebungsrahmen giebt mc die Lage einer Schnur an), und der Satz wird aus dem Vorhergehenden klar sein.

Zieht man nun noch eine dritte Transversale a_2b_2 durch die beiden Linien SA und SB, so gilt natürlich von den beiden Schnittpunkten n und q mit den ersteren Transversalen dasselbe wie von m; man kann aber auch sagen, dass das Verhältniss der auf jeder Transversale abgeschnittenen Strecken, wie etwa $bq : qm$ unabhängig von der Lage von SA sein wird, woraus dann folgt, dass, wenn sich drei oder mehr Transversalen in einem Punkte schneiden, sie sich bei jeder Drehung von SA in einem Punkte schneiden müssen.

Hieran schliessen sich noch folgende Betrachtungen:

1) Denkt man sich in der Ebene ASB irgend eine gradlinige Figur gegeben, so kann man jede Seite derselben als Transversale von SA und SB auffassen. Hält man nun die Schnittpunkte jeder Transversale mit SA und SB fest, und dreht SA

um den Punkt S, so wird hierdurch die urpsrüngliche Figur in eine neue übergehen, in welcher jede Seite durch die übrigen in Strecken getheilt wird, deren gegenseitiges Verhältniss constant ist.

2) Denkt man sich jeden Punkt der Ebene ASB als die Spitze eines Strahlenbüschels, dessen Strahlen die Linien SA und SB in den Punkten $a_{\prime\prime}$ und $b_{\prime\prime}$ schneiden, dreht SB um S um einen beliebigen Winkel, verbindet dann wieder jeden Punkt $a_{\prime\prime}$ mit dem zugehörigen $b_{\prime\prime}$, so gehen die ursprünglichen Punkte in neue Punkte auf dieselbe Weise über, als wenn sie auf dem Verschiebungsrahmen ASB lägen.

3) Nimmt man an, die beiden Schenkel SA und SB seien mit elastischen Schnüren überspannt, welche einer proportionalen Ausdehnung und Zusammenziehung fähig sind, so werden sich an den Kreuzungspunkten der Schnüre bei der Drehung von SB stets dieselben materiellen Punkte befinden.

Als specieller Fall der vorigen Betrachtung verdient noch der folgende hervorgehoben zu werden.

Ist (Fig. 5) $ca = cb$, $cd = ce$ und o der Schnittpunkt der beiden Diagonalen ae und db, ferner ef parallel ab parallel de, und man dreht den Schenkel cb, so wird o einen Kreis um m beschreiben, (om parallel ac); ferner wird $oa : od$ stets gleich sein $ac : dc$, und der Winkel foc wird stets ein Rechter sein; mithin entsteht der bekannte Satz: Stehen zwei Schenkel eines Winkels in constantem Verhältniss, so ist der Ort der Spitze ein Kreis u. s. w.

Anmerkung. Nimmt man in dem Dreieck ABC (Fig. 6) die Seite AC fest, die Seite AB aber um A drehbar an und setzt voraus, die beiden Punkte β und γ seien auf den beiden Seiten AC und AB fest, und nennt man den Schnittpunkt der Transversalen $B\beta$ und $C\gamma$, o, so sind die Ausdrücke $\frac{o\gamma}{oC}$ und $\frac{o\beta}{oB}$ natürlich constant. Zieht man durch o zwei Parallelen mit AC und AB, so findet man durch die entstehenden ähnlichen Dreiecke

$$\frac{o\gamma}{oC} = \frac{B\gamma}{AB} \cdot \frac{A\beta}{\beta C} \text{ und } \frac{o\beta}{oB} = \frac{C\beta}{AC} \cdot \frac{A\gamma}{B\gamma}.$$

Es ist zu empfehlen, den Schüler diesen Satz ableiten und durch Anwendung desselben sowohl den ptolomäischen Lehrsatz über die Transversalen des Dreiecks, als auch über die harmonischen Verhältnisse der Diagonalen des Vierseits ($A\beta o\gamma$) beweisen zu lassen.

§ 6.

Stellt $abcd$ (Fig. 7) ein Parallelogramm vor, und denkt man sich alle Punkte der Ebene auf eine Schaar bezogen, die mit ad parallel ist, so kann man jeden auf das Parallelogramm $abcd$ bezogenen Punkt p auf folgende Weise auf das Parallelogramm a_1b_1cd beziehen. Man ziehe durch den Punkt p eine Parallele mit ad, welche die Linie dc in s schneide, ziehe durch s eine Linie parallel mit da, mache $sp : sp_1 = da : da_1$, so ist p_1 der dem Punkt p entsprechende Punkt in der Ebene a_1b_1cd.

Es wird behauptet, dass die Punkte p durch Verschiebung in die Lage der Punkte p_1 übergehen können. Errichtet man nämlich in den Halbirungspunkten von aa_1 und bb_1 die Lothe $\alpha\gamma$ und $\beta\delta$ und nennt γ und δ die Schnittpunkte mit dc, so sind beide Figuren $\gamma ab\delta$, wie $\gamma a_1b_1\delta$ Parallelogramme, die ineinander durch Verschiebung übergehen können, so dass also $\gamma ab\delta$ den Verschiebungsrahmen darstellt, welcher durch Verschiebung in die Lage $\gamma a_1 b_1 \delta$ übergeht. Bezieht man die Punkte p auf $\gamma a b \delta$, so gehen sie, wenn dies durch Verschiebung in $\gamma a_1 b_1 \delta$ übergeht, in die Punkte p_1 über. Stehen die Linien aa_1 und bb_1 senkrecht auf dc, so befinden sich die Drehungspunkte in der Unendlichkeit. Bezieht man also die Punkte einer Ebene vermöge einer Schaar Paralleler auf eine zu diesen senkrechte grade Linie in der Ebene, indem man jeden Punkt mit der graden Linie durch eine jener Parallelen verbunden denkt, verändert hernach diese parallelen Strecken nach einem bestimmten Verhältniss, indem man die Schnittpunkte mit den Graden unverändert lässt; so wird die sich ergebende neue Figur als eine solche zu betrachten sein, die aus der ersten durch Verschiebung hervorgeht, und mithin auch den allgemeinen Gesetzen der Verschiebung genügen.

§ 7.

Nachdem die Veränderung der Punkte auf dem Verschiebungsrahmen unter den Hauptgesichtspunkten aufgefasst ist, und erkannt ist, dass die Veränderung, welche grade Linien erleiden, durch ihre Richtung bedingt sei, wird es zweckmässig sein, zu untersuchen, wie diese Veränderung von der Lage abhängig ist.

Wir stellen mithin zunächst folgende Aufgabe:

In der Ebene des Verschiebungsrahmens befindet sich ein Kreis; die Radien zu finden, die durch Verschiebung die grösste Verlängerung und die grösste Verkürzung erleiden.

Zunächst nehme man an, bei der ersten Stellung des Verschiebungsrahmens seien die Winkel desselben Rechte. Man ziehe nun durch den Kreis (Fig. 8) einen Durchmesser ln parallel der Basis dc und denke in jedem Punkte dieses Durchmessers ein Perpendikel bis zur Peripherie (wie ef) gezogen. Setzt man nun $me = x$ und $ef = y$, so hat man

$$x^2 + y^2 = r^2,$$

wo r den Radius des Kreises bezeichnet. Geht nun der Rahmen durch Verschiebung in die andere Lage (Fig. 9) über, so werden sämmtliche Linien ef unter sich parallel bleiben; bezeichnet man nun das verschobene mf durch ρ, so ist:

$$\rho^2 = x^2 + y^2 + 2xp,$$

wenn p die Projection von ef auf mn bedeutet und der Winkel mef (Fig. 9) ein stumpfer ist. Da nun $x^2 + y^2 = r^2$ und $2xp = 2xy\left(\frac{p}{y}\right)$ ist, und ferner $\frac{p}{y}$ eine constante Zahl ist, wie man sich leicht überzeugt, so ist $\rho^2 = r^2 + 2xy\left(\frac{p}{y}\right)$ und wird mithin ein Maximum, wenn xy ein Maximum wird. Es handelt sich also um die Frage: Wann wird xy ein Maximum, wenn $x^2 + y^2 = r^2$. Zu dem Ende denke man sich über r eine Halbkreis errichtet, so werden die Katheten jedes Peripheriewinkels, der auf dem Halbkreis steht, zwei Grössen wie x und y vorstellen; xy wird aber den doppelten Inhalt des Dreiecks darstellen, welches von den beiden Katheten und der Hypothenuse r gebildet wird. Damit dieser aber ein Maximum werde, muss die Höhe auf r ein Maximum, d. h. $= \frac{r}{2}$ werden; dann ist x auch $= y$. Ist (in Fig. 8) $me = ef$, so ist mf parallel db, wenn der Verschiebungsrahmen ein Quadrat ist, woraus dann folgt, dass die Linie der grössten Verlängerung stets mit der Diagonole des rhombischen Rahmens parallel ist, die dem stumpfen Winkel gegenüber liegt. Durch eine ähnliche Betrachtung findet man, dass die Linie der grössten Verkürzung stets mit der Diagonale parallel ist, die dem spitzen Winkel des rhombischen Rahmens gegenüberliegt, und da die Diagonalen eines Rhombus sich stets unter rechten Winkeln schneiden, so folgt, dass die Linien der grössten Verlängerung und der grössten Verkürzung **senkrecht** auf einander stehen.

Hat der Rahmen bereits eine schiefe Lage, so ziehe man wieder den Durchmesser parallel mit der Basis des Rahmens, ziehe aber die Linie y parallel mit der Seite des Rahmens, so ist

$$r^2 = x^2 + y^2 + 2xy\left(\frac{p}{y}\right).$$

Durch Verschiebung erhält man:

$$\rho^2 = x^2 + y^2 + 2xy\left(\frac{p_1}{y}\right), \text{ mithin ist}$$

$$\rho^2 = r^2 + 2xy\left[\left(\frac{p_1}{y}\right) - \left(\frac{p}{y}\right)\right]$$

Da der Werth in der Klammer constant ist, so muss auch hier, soll ρ^2 ein Maximum werden, $x = y$ sein, wodurch man durch vollständige Betrachtung den Satz erhält: Unter allen graden Linien, die sich in irgend einer Lage auf dem Verschiebungsrahmen befinden, stehen die Linien, welche durch Verschiebung die grösste Verlängerung und Verkürzung erleiden, stets senkrecht auf einander und sind immer mit den Diagonalen des rhombischen Rahmens parallel.

§ 8.

Mann nennt die krumme Linie, in welche der Kreis durch Verschiebung übergeht, eine *Ellipse:* derjenige Durchmesser des Kreises, der die grösste Verlängerung bei der Verschiebung erleidet, heisst deshalb *grosse Axe* der Ellipse, und derjenige, der die grösste Verkürzung erleidet, die *kleine Axe* derselben.

Zwei Ellipsen, die gleiche grosse und kleine Axen haben, sind congruent.

Zieht man nämlich durch den Mittelpunkt o (Fig. 10) eines Kreises im Verschiebungsrahmen zwei senkrechte Durchmesser parallel den Diagonalen und errichtet in irgend einem Punkte m des einen ein Perpendikel mn bis zur Peripherie des Kreises, so ist

$$\frac{om^2}{oa^2} + \frac{mn^2}{ob^2} = 1.$$

Bei der Verschiebung bleibt der Winkel omn ein Rechter und es verändern sich auch die Quotienten $\frac{om}{oa}$ und $\frac{mn}{ob}$ nicht; nimmt man an, dass bei der Verschiebung oa in A, ob in B übergeht, ferner om in x, mn in y, so erhält man für die Ellipse mit der halben grossen Axe A und der halben kleinen Axe B die Gleichung

$$\frac{x^2}{A^2} + \frac{y^2}{B_2} = 1,$$

woraus der obige Satz folgt.

§ 9.

Denkt man sich in einem Kreise eine Schaar paralleler Sehnen gezogen und verbindet ihre sämmtlichen Halbirungspunkte, so erhält man einen Durchmesser, der auf jenen senkrecht steht. Der zur Schaar gehörige Durchmesser bildet daher auch mit dem erhaltenen Durchmesser einen rechten Winkel, und die Tangenten, welche man in den Endpunkten des erhaltenen Durchmessers errichtet, sind der Schaar ebenfalls parallel. — Daraus folgt für die Ellipse ebenfalls der Satz:

Die Mittelpunkte einer Schaar paralleler Sehnen liegen auf einem Durchmesser.

Zieht man durch den Endpunkt des Durchmessers eine Linie parallel mit der Schaar, so ist dieselbe eine Tangente.

Zwei rechtwinklige Durchmesser des Kreises gehen bei der Verschiebung in zwei Durchmesser der Ellipse über, welche **conjugirte** heissen.

Hat man zwei conjugirte Durchmesser der Ellipse und zieht mit dem einen eine Schaar paralleler Linien, so werden diese durch den anderen halbirt.

In jeder Ellipse giebt es zwei gleiche conjugirte Durchmesser; denkt man sich die Ellipse durch den Verschiebungsrahmen entstanden, so sind dieselben mit Basis und Seite desselben parallel.

§ 10.

Aufgabe. Es ist die grosse und kleine Axe einer Ellipse gegeben; man soll die Richtung der Basis und Seite des ursprünglich rechtwinkligen Verschiebungsrahmens finden, auf welchem man sie durch Verschiebung eines Kreises entstanden denken kann.

Auflösung. Der Rhombus, von dem die grosse und kleine Axe Diagonalen sind, ist der Verschiebungsrahmen.

Die Durchmesser, welche mit den Seiten des Rhombus parallel sind, sind die beiden conjugirten, welche einander gleich sind.

§ 11.

Es ist ein Durchmesser der Ellipse gegeben; man soll den conjugirten finden.

Anleitung zur Auflösung. Verbindet man die Endpunkte zweier senkrechter Durchmesser eines Kreises (Fig. 11a), so entsteht ein Quadrat. Zieht man durch den Mittelpunkt o noch zwei senkrechte Linien mn und pq, so kann man leicht beweisen, dass die alternirenden Stücke der Seiten gleich sind ($ma = dq = cq = bn$; $dm = cq = bp = an$). Verbindet man also die Endpunkte der grossen und kleinen Axe (Fig. 11b) und bestimmt auf jeder Seite des entstehenden Rhombus einen Punkt, so dass die alternirenden Stücke gleich sind, so liegen je zwei gegenüberliegende Punkte der Seiten auf einem Durchmesser und alle vier auf zwei conjugirten Durchmessern. — Hiernach kann auch die Aufgabe gelöst werden: An einen gegebenen Punkt der Ellipse eine Tangente zu ziehen.

Anmerkung. Sind statt der beiden Hauptaxen zwei conjugirte Durchmesser gegeben, so ist das Viereck, welches dieselben zu Diagonalen hat, kein Rhombus, sondern ein Parallelogramm. Wie kann man mit Hülfe eines solchen Parallelogramms zu einem Durchmesser den conjugirten finden? Und wie heisst der Satz von den alternirenden Abschnitten?

§ 12.

Jedes Parallelogramm, dessen Diagonalen zwei conjugirte Durchmesser sind, hat einen Inhalt gleich $2AB$, wenn A die halbe grosse und B die halbe kleine Axe bezeichnet.

Beweis. Im Kreise haben alle Parallelogramme, deren Diagonalen zwei rechtwinklige Durchmesser sind, einen Inhalt gleich $2r^2$, wenn r den Radius des Kreises bedeutet, und da diese alle durch Verschiebung wieder in unter einander gleiche Parallelogramme übergehen müssen (siehe § 4), und das Parallelogramm, dessen Diagonalen die beiden Hauptaxen sind, gleich $2AB$ ist, so ist der Satz bewiesen.

§ 13.

Der Inhalt der Ellipse ist gleich $A\ B\ \pi$, wenn A die halbe grosse und B die halbe kleine Axe bezeichnet.

Beweis. Indem bei der Betrachtung des vorigen Paragraphen $2r^2$ in $2AB$ übergeht, geht der Kreis in die entsprechende Ellipse über; man hat daher, wenn man den Inhalt der Ellipse mit E bezeichnet:

$$2r^2 : 2AB = r^2\pi : E \ (\S\ 4),$$

woraus der Satz folgt.

§ 14.

Die Summe der Quadrate zweier conjugirter Halbmesser der Ellipse ist constant und gleich $A^2 + B^2$, wenn A und B die halbe grosse und halbe kleine Axe bezeichnen.

Beweis. Sind oa und ob zwei rechtwinklige Halbmesser im Kreise o (Fig. 12) und man zieht auf irgend einen Durchmesser mn die senkrechten Linien ad und bc, so sind die Dreiecke aod und boc congruent. Ist mn der Basis des Rahmens parallel, so erleidet bei der Verschiebung doc keine Veränderung. Setzt man nun $oc = x$, $cb = y$ und nimmt an, dass bei der Verschiebung b in β, a in α übergeht, so wird

$$o\beta^2 = x^2 + y^2 + 2xy\left(\frac{p}{y}\right) \text{ und}$$

$$o\alpha^2 = x^2 + y^2 - 2xy\left(\frac{p_1}{x}\right)$$

sein, wenn p und p_1 die Projektionen von α und β auf mn bezeichnen. Da nun

$$\frac{p_1}{x} = \frac{p}{y} \text{ ist, so folgt durch Addition}$$

$$o\beta^2 + o\alpha^2 = 2x^2 + 2y^2 = 2r^2.$$

Mithin ist die Summe der Quadrate zweier conjugirter Halbmesser constant etc.

§ 15.

Sind oa und ob die conjugirten gleichen Halbaxen (Fig. 13), und zieht man eine Sehne dc parallel oa, so stellen die Radien oc und od der Grösse, aber nicht der Lage nach zwei conjugirte Halbmesser vor. Es ist nämlich $oc^2 + od^2 = 2cm^2 + 2mo^2$. Da aber om und mc bei der Verschiebung ihre Grösse nicht ändern, so ist $om^2 + mc^2 = r^2$, mithin $oc^2 + ad^2 = 2r^2$, wo r den Radius des Kreises bedeutet, aus dessen Verschiebung die Ellipse hervorgegangen ist, wenn die ursprüngliche Lage desselben rechtwinklig war. Schlägt man mithin mit oc und od zwei Kreise um o, so werden diese die Ellipse in acht Punkten schneiden, welche auf vier Durchmessern liegen, von denen je zwei conjugirt sind.

§ 16.

Aufgaben und Sätze über das Vorhergehende.

1) Von einer Ellipse sind die grosse und die kleine Axe der Lage und der Richtung nach gegeben, die Schnittpunkte einer Geraden mit der Ellipse zu finden.

2) Der Schwerpunkt einer verschobenen Figur ist der verschobene Schwerpunkt der ursprünglichen Figur. Denn der Schwerpunkt des Dreiecks ist der Schnittpunkt der Mittellinien; die Mittellinien bleiben aber bei der Verschiebung Mittellinien, mithin ist auch bei der Verschiebung ihr Durchschnittpunkt der Schwerpunkt des verschobenen Dreiecks.

Jedes Viereck kann man sich in zwei Dreiecke zerlegen. Theilt man die Verbindungslinie der Schwerpunkte der beiden Dreiecke umgekehrt nach dem Verhältniss der Inhalte der Dreiecke, das bei der Verschiebung stets dasselbe bleibt, so erhält man den Schwerpunkt des Vierecks, der daher bei der Verschiebung in den Schwerpunkt der verschobenen Figur übergeht.

Jedes Fünfeck kann man sich in ein Viereck und ein Dreieck zerlegen etc.

3) Vier verschobene harmonische Punkte bleiben nach der Verschiebung harmonisch.

4) Ein harmonisches Büschel bleibt durch die Verschiebung harmonisch.

5) Die Sätze von Pol und Polaire gelten auch für die Ellipse.

6) Ist die Ellipse tbc (Fig. 14) gegeben und ein Punkt a ausserhalb derselben, und man zieht von a eine Tangente at und eine Sekante abc, so ist, wenn man die mit diesen beiden Linien parallelen Radien der Ellipse mit ρ und r bezeichnet: $\frac{ab \,.\, ac}{r^2} = \frac{at^2}{\rho^2}$, da beim Kreise $\frac{ab \,.\, ac}{R^2} = \frac{at^2}{R^2}$ ist, wenn r den Radius des Kreises bezeichnet.

4) Hat man die beiden sich schneidenden Ellipsen tbc und bt_1c (Figur 14) und zieht man die gemeinschaftliche Sekante abc, so ist in der einen Ellipse

$$\frac{ab \,.\, ac}{r^2} = \frac{at^2}{\rho^2}, \text{ in der anderen } \frac{ab \,.\, ac}{r_1^{\,2}} = \frac{at_1^{\,2}}{\rho_1^{\,2}},$$

wenn r_1 und ρ_1 die der Sekante und der Tangente parallelen Radien der Ellipse bt_1c bezeichnen; mithin ist $\frac{at^2}{at_1^{\,2}} \cdot \frac{\rho_1^{\,2}}{\rho^2} = \frac{r_1^{\,2}}{r^2}$ oder $\frac{at}{at_1} = \frac{r_1}{r} \cdot \frac{\rho}{\rho_1}$.

8) Zwei concentrische Ellipsen haben stets zwei und nur zwei gemeinschaftliche conjugirte Axen.

Denn denkt man sich die beiden Ellipsen auf einem Verschiebungsrahmen, dessen Seiten den conjugirten gleichen Halbaxen der einen parallel sind, und verschiebt den Rahmen bis diese Ellipse in einen Kreis übergeht, so hat der Kreis mit der andern verschobenen Ellipse nur die beiden Hauptaxen der Ellipse als conjugirte Axen gemein. Verschiebt man nun den Rahmen, so bleiben diese für beide Ellipsen gemeinschaftliche conjugirte Axen etc.

Zweiter Abschnitt.

Praktische Anwendung des Vorhergehenden.

§ 17.

Der Storchschnabel.

Die Construction des Storchschnabels oder Pantographen beruht auf dem Satze, dass drei Punkte des Verschiebungsrahmens, die in einer geraden Linie liegen, nach den Verschiebungen stets in eine gerade Linie fallen und dasselbe Verhältniss ihrer Entfernungen bewahren, wenn sich auch die Entfernungen selbst ändern. Die Begründung des Gebrauchs des Storchschnabels liegt in der Lehre vom Ähnlichkeitspunkte.

Stellt $mnpq$ (Fig. 15) ein aus Leisten gebildetes verschiebbares Parallelogramm vor, und sind sämmtliche Leisten über die Drehungspunkte hinaus verlängert, befinden sich ferner auf diesen Leisten die vier Punkte a, b, c und d in gerader Linie und in den Richtungen der Verbindungslinien der Axen m, n, p, q, so werden bei den Verschiebungen des Rahmens $mnpq$ die vier Punkte a, b, c, d stets in eine gerade Linie fallen, und die Verhältnisse $ab : ac : ad$ oder $ba : bc : bd$ *etc.* werden ebenfalls constant sein. Hält man mithin einen dieser vier Punkte, etwa a, fest und führt einen andern, etwa d, an den Umrissen einer Zeichnung, so werden die beiden übrigen Punkte, b und c, ähnliche Zeichnungen beschreiben. Befestigt man also bei a, c und d drei Röhren, deren Axen senkrecht auf den Leisten stehen, und von denen die bei a die Drehungsaxe des festen Punktes aufnimmt, die bei d einen spitzen, nicht zeichnenden, die bei c einen zeichnenden Stift, so hat man bereits einen Apparat, um ähnliche Figuren zeichnen zu können. Da indessen das Gewicht des Apparates eine nicht unbeträchtliche Reibung auf dem Tisch verursachen würde, so befestige man k an einer Schnur, die senkrecht über a angeknüpft ist. Diese Schnur wird alsdann bei der Bewegung des Instrumentes einen geraden Kegelmantel beschreiben, mithin niemals einer Ausdehnung oder Zusammenziehung ausgesetzt sein. Um diesen Befestigungspunkt zu erhalten, muss man zu dem Instrumente noch eine Säule fügen, die an den Tisch, auf dem man zeichnet, angeschraubt wird, und die die Drehungsaxe für die Röhre bei a trägt. Oben an der Säule befindet sich gerade senkrecht über a der Befestigungspunkt m der Schnur, die nach k geht. Aber auch so würde das Instrument bei nicht ausgezeichneter Arbeit noch mit Fehlern behaftet sein, die es zu genauer Ausführung unbrauchbar machen. Diese Fehler entstehen dadurch, dass die Drehungsaxen bei m, n, p, q in den zugehörigen Buchsen schlottern und sich nicht in denselben abwälzen, und zeigen sich dadurch, dass, wenn man mit dem Stift bei d von einem Punkt ausgehend auf denselben zurückgeht, der zeichnende Stift bei c nicht auf den Ausgangspunkt zurückgeht. Man überwindet auch diesen Übelstand dadurch, dass man von x nach y eine Schnur zieht, die durch elastische Stäbchen in Spannung erhalten wird. Diese Schnur repräsentirt eine Linie aus der Parallelschaar und bewirkt, dass die Axen sich regelmässig auf ihre Buchsen abwälzen. Über die andern Einzelnheiten der von mir in Anwendung gebrachten Construction verweise ich auf die Beschreibung in der »Illustrirten Zeitung vom 18. Decbr. 1852 No. 494.«

§ 18.

Vogelperspective, Isometrische Perspective.

Verbindet man einen Punkt (den Gesichtspunkt) mit den sämmtlichen Kanten eines Körpers durch Strahlen, so bilden die Durchschnitte dieser Strahlen mit einer Ebene bekanntlich die geometrische Zeichnung des Körpers. Ist der Gesichtspunkt in unendlicher Entfernung, so heisst die Lehre, dergleichen Entwürfe zu machen: Vogelperspective. Und treffen jene Strahlen die Ebene, welche die Malertafel heisst und vertikal angenommen wird, unter einem Winkel von 45 Grad, so heisst die Lehre, dergleichen Zeichnungen zu entwerfen, isometrische Perspective. Da die Zeichnungen senkrechter Linien bei der Vogelperspective unverändert auf die ebenfalls senkrechte Malertafel übergehen, so ist es eine Hauptaufgabe, die Bilder von Umrissen zu entwerfen, die sich in einer Horizontalebene befinden. Aus dem Vorhergehenden folgt nun, dass in der isometrischen Perspective das Bild eines Punktes in einer Horizontalebene erhalten wird, wenn man von demselben in der Ebene des Umrisses, in der er sich befindet, ein Perpendikel auf den Schnitt dieser Ebene mit der Malertafel fällt, und dies Perpendikel auf die Malertafel von jenem Punkte an unter einem constanten Winkel gegen den Horizont aufträgt. Die Grösse des Winkels hängt von der Richtung des Gesichtsstrahls ab und pflegt so angenommen zu werden, dass man in der Zeichnung die Seite des Körpers zu sehen bekommt, auf die es ankommt. In Verbindung mit dem Vorhergehenden folgt hieraus, dass man die Zeichnung des Umrisses erhält, wenn man sich denselben auf einen rechtwinkligen Verschiebungsrahmen gezeichnet denkt, dessen Basis mit der Kante übereinstimmt, und diesen Verschiebungsrahmen so weit dreht, bis der Winkel zwischen Basis und Seite so gross ist, wie das Bild des Winkels jenes Perpendikels mit der Kante.

Wenn man auf diese Weise sogleich eine Totalanschauung von den Veränderungen erhält, die eine Figur erleidet, indem sie in ihr Bild übergeht, so sind in dem Vorigen auch die Hauptzüge enthalten, welche dazu dienen, die Bilder von Figuren aus der Grundfläche zu entwerfen.

Um dies übersehen zu können, löse man folgende Aufgaben:

1) Das Bild einer Linie zu finden, die mit einer anderen *a)* einen rechten, *b)* einen gegebenen Winkel bildet.

2) An das Bild einer Linie in einem gegebenen Punkte das Bild einer anderen Linie von gegebener Länge anzutragen.

Um diese Aufgaben, die sich während der Zeichnung oft zu wiederholen pflegen, lösen zu können, zeichne man auf das Zeichenbrett einen Rhombus *abcd* (Fig. 16), dessen Basis dem Horizont, und dessen Seite dem Bilde der Linie parallel ist, die senkrecht auf dem Horizont in der Grundebene steht. Ist nun *mn* das gegebene Bild, so ziehe man durch den Mittelpunkt *o* des Rhombus $m_1 n_1$ parallel mit *mn*, mache ap_1 gleich bn_1, ziehe op_1, mit ihm parallel *mp*, so ist *a)* der ersten Aufgabe gelöst.

Um die folgenden Aufgaben lösen zu können, zeichne man noch auf das Zeichenbrett ein Quadrat *ABCD* (Fig. 17), dessen Grundlinie gleich und parallel *ab* ist, mache $DM = dm$, ziehe durch den Mittelpunkt *O* des Quadrats die Linie *MON*, trage an *MO* den gegebenen Winkel *MOQ* an, mache $mq = MQ$, so ist *moq* das Bild des Winkels *MOQ*. Liegt auf der Linie *OQ* der Punkt *P* und man soll das Bild des Punktes *P* suchen, oder das Bild von *OP* auf *oq* abschneiden, so ziehe man zunächst *OZ* parallel der Basis *AB*, *PZ* senkrecht auf *OZ*, ziehe dann *oz* parallel und gleich *OZ*, *zp* parallel *bc*, mache *zp* gleich *ZP*, so ist *p* der gesuchte Punkt.

Für die Vogelperspective bemerke man, dass auch hier die Linien, die der Malertafel parallel sind, unverändert auf dieselbe übertragen werden, dass aber die Linien, welche senkrecht auf der Malertafel stehen, nicht nur eine Verschiebung, sondern auch eine verhältnissmässige Vergrösserung oder Verkleinerung erleiden.

Hieraus folgt, dass man vermöge des Verschiebungsrahmens die Bilder der Vogelperspective erhält, wenn man auf dem schiefgestellten Rahmen das Bild des Grundrisses aufzeichnet und dann um einen gewissen Winkel verschiebt.

Gesetzt nun, das Bild eines Qudrats *ABCD* (Fig. 18), dessen Grundlinie *AB* mit der Malertafel parallel ist, gehe über in das Parallelogramm *abcd*, so ist hier zunächst die Linie der grössten Verlängerung und Verkürzung zu suchen. Man errichte *ar* senkrecht auf *ab*, mache es gleich *AB* und ziehe *rd*, halbire dies in *m*, errichte in *m* auf *rd* das Loth *mk*, das die Linie *ab* in *k* schneidet, ziehe *rk* und *dk*, so giebt der Winkel *rkb* den Winkel des Verschiebungsrahmens an, auf dem der Grundriss zu zeichnen ist, und *rkd* den Winkel, um welchen man denselben zu verschieben hat, um den Grundriss in sein Bild übergehen zu lassen. Nun schneide man auf *kb*, $ku = kd$ ab, zeichne die Diagonalen des Rhombus *kdcu*, so geben diese die Richtung der Linien der grössten Verlängerung und Verkürzung an.

Die vorher für die isometrische Perspective gelösten Aufgaben lassen sich auf ähnliche Weise für die Vogelperspective lösen.

Dritter Abschnitt.

Vom körperlichen Verschiebungsrahmen.

§ 19.

Stellt man sich vor, die Kanten eines Würfels seien von unveränderlicher Grösse, aber um ihre Endpunkte drehbar, und denkt man sich dieselben so gedreht, dass die ursprünglich parallelen Kanten parallel bleiben, so werden sie stets die Kanten eines verschobenen Würfels bilden. Denkt man nun die untere und obere Grundfläche des Würfels durch Parallel-Schaaren zu Verschiebungsrahmen vervollständigt, und durch jeden Punkt des Raumes eine Linie parallel mit den Seitenkanten des verschobenen Würfels gelegt, so wird die Strecke dieser Linie, welche zwischen die obere und untere Grundfläche bei jeder Lage fällt, gleich der Länge einer Kante des Würfels sein. Diese sämmtlichen, mit der Seitenkante parallelen Linien, kann man mithin als unveränderliche auffassen, die mit zwei festen Punkten an der unteren und oberen Basis des verschiebbaren Würfels befestigt sind. Die Befestigungspunkte erleiden bei der Verschiebung die Veränderungen der Punkte, die auf einen ebenen Verschiebungsrahmen bezogen sind. Die Schaar der parallelen Linien nun, welche die Grundflächen des Würfels anfüllen, soll die erste Parallel-Schaar, und die Schaar der Linien, welche mit den Seitenkanten parallel sind, die zweite Parallel-Schaar heissen. Der verschiebbare Würfel mit seinen Parallel-Schaaren soll ein körperlicher Verschiebungsrahmen genannt werden.

Jeden Punkt irgend eines räumlichen Gebildes kann man als einen festen Punkt einer Linie der zweiten Parallel-Schaar eines körperlichen Verschiebungsrahmens auffassen, und es sind nun die Gesetze aufzustellen, nach welchen die Transformationen der einfachen räumlichen Gebilde durch die Verschiebungen des körperlichen Verschiebungsrahmens vor sich gehen.

Die folgenden Sätze lassen sich nun sehr leicht ableiten:

1) Jede Ebene, die mit den Linien der zweiten Parallel-Schaar parallel ist, geht durch Verschiebung wieder in eine Ebene über, die mit der zweiten Parallelschaar parallel ist.

2) Jede gerade Linie geht durch Verschiebung wieder in eine gerade Linie über.

Parallele Linien bleiben nach der Verschiebung parallel.

Zwei Strecken paralleler Linien, die von bestimmten Punkten begrenzt werden, bewahren nach der Verschiebung dasselbe Verhältniss.

3) Jede Ebene geht durch Verschiebung wieder in eine Ebene über.

Congruente und parallel liegende ebene Figuren gehen durch Verschiebung in congruente und parallel liegende ebene Figuren über.

Ähnliche und parallel liegende ebene Figuren gehen durch Verschiebung in ähnliche und parallel liegende ebene Figuren über.

Folgerungen aus dem Vorhergehenden. Hat man drei gerade Linien im Raume OA, OB und OC, die sich in einem Punkte O schneiden, und denkt sich irgend einen Punkt p als die Spitze eines Ebenen-Büschels und bezeichnet die Schnittpunkte einer der Ebenen, die durch p gehen, mit OA, OB und OC durch a_m, b_m und c_m und dreht hernach OA, OB und OC auf beliebige Weise um O, verbindet darauf wieder a_m, b_m und c_m durch eine Ebene, so werden alle die Ebenen, die man erhält, indem man dem m die verschiedenen in Betracht tretenden Werthe beilegt, sich in einem Punkte schneiden. Hält man OA und OB fest und dreht OC beliebig um O, so wird der Ort des veränderlichen Punktes p eine Kugelfläche sein, deren Mittelpunkt in der Ebene AOB liegt, und zwar im Durchschnittspunkte mit einem Strahl, den man durch p parallel mit CA zieht. Denkt man sämmtliche Punkte des Raumes als Spitzen von Ebenen-Büscheln, so werden diese Punkte durch Drehung von OA, OB und OC um O eine gleiche Transformation erleiden, als wenn sie auf einen körperlichen Verschiebungsrahmen bezogen wären, von dem OA, OB und OC Kanten sind.

Ferner: Denkt man sich die Ebene BOA mit der ersten Parallel-Schaar erfüllt, und die Ebenen COA und COB mit der zweiten, und fasst den Punkt p als die Spitze eines Strahlenbüschels im Raume auf und bezeichnet den Schnittpunkt eines allgemeinen Strahls, der durch p geht, mit der Ebene AOB durch γ_m, mit der Ebene AOC mit β_m und mit der Ebene BOC durch α_m, so werden durch die Drehung von OA, OB und OC um O die Punkte α_m, β_m und γ_m in α_m^1, β_m^1 und γ_m^1 übergehen. Es liegen nun α_m^1, β_m^1 und γ_m^1 wieder in gerader Linie, und alle geraden Linien $\alpha_m^1\ \beta_m^1\ \gamma_m^1$, die man erhält, indem man dem m alle möglichen Werthe beilegt, schneiden sich in demselben Punkte, wie die vorher betrachteten Ebenen. Hält man die Strahlen OA und OB fest und dreht OC so, dass es mit OA stets denselben Winkel bildet, so sind die Punkte γ_m und β_m in ihren Ebenen unveränderlich, und man erhält für die Spitze eines Strahlbüschels im Raume, das auf zwei Ebenen bezogen wird, einen analogen Satz mit § 5.

4) Der Inhalt eines körperlichen Gebildes verhält sich zu dem Inhalt des verschobenen Gebildes, wie der Inhalt des körperlichen Verschiebungsrahmens zu dem Inhalte des verschobenen Rahmens.

5) Der verschobene Schwerpunkt eines körperlichen Gebildes ist der Schwerpunkt des verschobenen körperlichen Gebildes.

§ 20.

Es ist nun die durch den körperlichen Verschiebungsrahmen transformirte Gestalt einer Kugel zu untersuchen. Bezeichnet man dieselbe mit dem Namen Ellipsoid, so sind zunächst die Sätze aufzustellen, die hier unmittelbar für dasselbe durch die Kugel abgeleitet werden können.

1) Da die Kugel einen Mittelpunkt hat, so hat auch das Ellipsoid einen Mittelpunkt.

2) Da die parallelen ebenen Schnitte der Kugel Kreise, also ähnliche Figuren, sind, so sind auch die parallelen ebenen Schnitte des Ellipsoids ähnliche Figuren, und es lässt sich leicht zeigen, dass dieselben Ellipsen sind.

3) Tangenten und Tangenten-Ebenen einer Kugel gehen bei der Verschiebung in Tangenten und Tangenten-Ebenen beim Ellipsoid über.

Da die Berührungs-Curve eines Tangenten-Kegels einer Kugel eben ist, so ist auch die Berührungs-Curve eines Tangenten-Kegels am Ellipsoid eben.

4) Drei rechtwinklige Durchmesser einer Kugel stehen in der Beziehung zu einander, dass eine Ebene, die durch zwei derselben gelegt wird, eine Schaar von Sehnen, die mit der dritten parallel ist, halbirt. Deshalb liegen die Halbirungspunkte einer Schaar paralleler Sehnen des Ellipsoids in einer Ebene, die durch den Mittelpunkt geht. Diese Ebene schneidet das Ellipsoid in einer Ellipse, und irgend zwei conjugirte Durchmesser dieser Ellipse stehen mit dem Durchmesser, welcher zur Schaar der parallelen Sehnen gehört, in der Beziehung, dass jede Schaar von Sehnen des Ellipsoids, die einer dieser Linien parallel ist, durch die Ebene der beiden anderen halbirt wird.

Drei Durchmesser des Ellipsoids, die in der genannten Beziehung zu einander stehen, heissen conjugirte, und es gelten für sie ähnliche Sätze, wie für die conjugirten Durchmesser der Ellipse.

5) Sieht man drei rechtwinklige Durchmesser einer Kugel als die drei Coordinaten-Axen an, und fällt von einem Punkte der Kugeloberfläche auf die drei Coordinaten-Ebenen drei Perpendikel x, y und z, die mit den drei Axen parallel sind, und bezeichnet man den Radius der Kugel durch r, so erhält man bekanntlich

$$\frac{x^2}{r^2} + \frac{y^2}{r^2} + \frac{z^2}{r^2} = 1.$$

Bedeuten mithin a, b und c die Werthe dreier conjugirter Halbaxen des Ellipsoids, und man sieht dieselben als drei schiefe Coordinaten-Axen an, und bezeichnet die Coordinaten eines Punktes der Oberfläche des Ellipsoids mit x_1, y_1 und z_1, so dass x_1 parallel a, y_1 parallel b und z_1 parallel c ist, so erhält man

$$\frac{x_1^2}{a_2} + \frac{y_1^2}{b^2} + \frac{z_1^2}{c^2} = 1,$$

denn man kann $\frac{x}{r} = \frac{x^1}{a}$, $\frac{y}{r} = \frac{y^1}{b}$ etc. setzen.

§ 21.

Man betrachte jetzt folgenden speciellen Fall:

Die drei Kanten OA, OB und OC (Fig. 19) eines körperlichen Verschiebungsrahmens seien der Bedingung unterworfen, dass $\angle AOC$ und $\angle AOB$ unveränderlich und gleich einem Rechten sei, der Winkel COB sei aber veränderlich. Nimmt man nun an, der Mittelpunkt einer Kugel liege in der Ebene COB und der Winkel COB sei ein beliebiger, so wird dieselbe durch Verschiebung in ein Ellipsoid übergehen, von dem sich leicht drei rechtwinklige conjugirte Axen angeben lassen. Ist nämlich $CO = OB$ und $CODB$ ein verschobenes Quadrat, so folgt, dass bei der Verschiebung die Kugel in ein Ellipsoid übergeht, von dem drei rechtwinklige conjugirte Axen parallel sind mit den Diagonalen des verschobenen Quadrats $COBD$ und mit der Kante OA.

Es folgt ferner, dass bei jeder Verschiebung die zuletzt genannte Axe gleich dem Durchmesser $2r$ der ursprünglich gegebenen Kugel bleibe, und dass von den beiden anderen Axen die eine grösser und die andere kleiner als $2r$ sein müsse.

Stellt der Kreis um m den Durchschnitt der Kugel mit der Ebene $COBD$ vor, und man zieht tmq parallel OB, ms parallel CB, mp parallel OD, pq und st parallel OC, so ist $mq = qp$ und $mt = ts$. Bezeichnet man mq durch u, mt durch v und den $\angle mqp$ durch ϕ, so erhält man $r = 2u \sin. \frac{1}{2}\phi = 2v \cos. \frac{1}{2}\phi$. Geht nun durch Verschiebung ϕ in $\phi + \Delta$ über, so geht der Kreis um m in eine Ellipse über, deren grosse und kleine Axe mit den Diagonalen OD und CB parallel bleiben, und daher durch $u \sin. \frac{1}{2}(\phi + \Delta)$ und $v \cos. \frac{1}{2}(\phi + \Delta)$ ausgedrückt sind. Die Kugel um m geht nun in ein Ellipsoid über, von dem die drei rechtwinkligen conjugirten Halbaxen sind: $2u \sin. \frac{1}{2}(\phi + \Delta)$, $2v \cos. \frac{1}{2}(\phi + \Delta)$ und r. Bezeichnet man dieselben durch A, B und r, so erhält man nun aus diesen Grössen u, v, ϕ und Δ zu ermitteln

die Gleichungen $\frac{r^2}{4u^2} + \frac{r^2}{4v^2} = 1$, $\frac{A^2}{4u^2} + \frac{B^2}{4v^2} = 1$, aus welchen

$$u = \frac{r}{2}\sqrt{\frac{A^2 - B^2}{r^2 - B^2}},\ v = \frac{r}{2}\sqrt{\frac{A^2 - B^2}{A^2 - r^2}}$$

$$\frac{v}{u} = \text{tg.}\, \tfrac{1}{2}\phi = \sqrt{\frac{r^2 - B^2}{A^2 - r^2}} \text{ und tg. } \tfrac{1}{2}(\phi + \Delta) = \frac{A}{B} \cdot \sqrt{\frac{r^2 - B^2}{A^2 - r^2}} \text{ folgt.}$$

Schneidet man das Ellipsoid in zwei Ebenen, die mit AOB und AOC parallel sind, so müssen diese Schnitte noch dieselben sein, wie vor der Verschiebung, also Kreise. Man erhält mithin den Satz: Zu jedem Ellipsoid giebt es zwei Schaaren paralleler Ebenen, die dasselbe in Kreisen schneiden. Beide Schaaren sind parallel der mittleren Hauptaxe und bilden sowohl mit der grossen, als auch mit der kleinen Hauptaxe gleiche Winkel.

§ 22.

Es bleibt nun noch zu ermitteln, wie die drei Hauptaxen eines Ellipsoids liegen, in welches eine Kugel durch irgend eine Verschiebung übergeht. Die Lösung dieser Frage kann erhalten werden, wenn man diejenige Diametral-Ebene bestimmt, welche mit einem zu ihr senkrechten Radius noch nach der Verschiebung einen rechten Winkel bildet. Legt man schiefwinklige Coordinaten zu Grunde, welche den Kanten des körperlichen Verschiebungsrahmens parallel sind, so hängt die Richtung dieses Radius von einer Gleichung des dritten Grades ab, wodurch man schliesst, dass dieselbe drei reelle Wurzeln habe, welche sich auf die drei gesuchten Hauptaxen des Ellipsoids beziehen. Diejenigen Radien, welche bei der Verschiebung keine Änderung in ihrer Länge erfahren, liegen im Allgemeinen auf dem Mantel eines Kegels des zweiten Grades, der in besonderen Fällen (vergl. § 21) in zwei Ebenen übergehen kann.

Da die Durchführung dieser Betrachtungen aber Mittel erfordert, welche hier nicht vorausgesetzt werden dürfen, so sei nur noch einer Aufgabe erwähnt, welche in dies Gebiet schlägt und sich leicht beantworten lässt. Es soll næmlich bestimmt werden, wie viele Systeme dreier conjugirter Axen zwei concentrische Ellipsoide gemeinschaftlich haben.

Zu dem Ende denke man beide Ellipsoide im körperlichen Verschiebungsrahmen, bei einer Stellung, wie sie in § 21 betrachtet wurde, so dass die drei Hauptaxen des einen mit den Diagonalen des Rhombus $OBCD$ (Fig. 19) und mit der Kante OA parallel werden. Dann verschiebe man den Rahmen so, dass dies Ellipsoid in eine Kugel übergeht, so wird das andere Ellipsoid wieder in ein Ellipsoid übergehen. Dies Ellipsoid und die Kugel haben offenbar nur ein gemeinschaftliches System dreier conjugirter Axen, næmlich die drei Hauptaxen des Ellipsoids, mithin haben auch die beiden zuerst betrachteten Ellipsoide nur ein gemeinschaftliches System conjugirter Axen.

Druckfehler.

Im Laufe der ersten zehn Seiten lies immer *gerade* statt grade,
Seite 10, Zeile 1 von oben lies *Diagonalen* statt Diagonolen,
10, 23 - *man* statt mann.